Duality 再考

京大理・杉本茂樹

1997.8.29

目 次

1 はじめに

1994 年に Seiberg が $\mathcal{N}=1$ SQCD における duality を発見 [1] して以来、これまでに数多くの duality が発見されてきました。しかし、そのような duality が何故成立するのか？どんな時に、どんな duality が成立するのか？という基本的な問にはまだ満足のいく解答がありません。そこで、今回は duality の背景を理解するうえで手がかりになると思われるいくつかのアイディアをレビューしつつ、もう一度 duality を考え直してみたいと思います。今回の話は、本当に informal な seminar のために急きょ集めた話題であり、まとまった話ではないことをはじめにお詫びしておきます。後半の議論は京大理の前川さんと平山くんとの共同研究 [2] に基づいています。

2 self dual theory

理論の matter content を変えずに、 coupling constant を変換させて完全に等価な理論になるとき、その理論は self dual であるということにします。この節では、しばらく self dual な理論を考察することにします。

2.1 holomorphy と β 関数

超対称性をもったゲージ理論を考えます。 gauge coupling constant は虚部が正であるような複素数（上半平面の元）$\tau = \frac{8\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{\pi}$ で表わされます。

$$\mathcal{L} \sim \mathrm{Im}\int d^2\theta\, \tau\, W^\alpha W_\alpha + \cdots \tag{2.1}$$

$$\tau \in H \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} \tag{2.2}$$

この理論が gauge coupling constant τ を別の値 $\tilde{\tau}$ に変えたとしても理論として等価になるとしましょう*。この $\tilde{\tau}$ もやはり上半平面の元であるべきなので、τ から$\tilde{\tau}$ への写像を φ とすると、

$$\varphi : H \rightarrow H \tag{2.3}$$

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \varphi(\tau) \tag{2.4}$$

今、超対称性を持った理論を考えているので、φ は正則写像でなければなりません。また、duality というからには、逆写像も存在すると仮定するのが自然でしょう。これだけの仮定をおくと、複素解析の簡単な考察から、φ はもう実係数の一次分数変換、つまり

$$\tilde{\tau} = \varphi(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \tag{2.5}$$

の形しかないことが分かります。この様に等価な理論を与える一次分数変換の全体を duality group と呼び、Γ と書くことにします。もちろん、Γ は $SL(2, \mathbb{R})$ の部分群です†。何か具体的に理論が与えられたときに、この Γ がどんな群になるかという問も興味のある話題ですが、もう少し一般論を続けましょう。

次に示したいことは、 self dual な理論は β 関数が zero になるという事実です。今、考えている duality が全ての energy scale で成立する完全なものであるとします。 dual 変換をとったあとでも理論の matter content は変わらないので、β 関数の関数形は変わらないはずです。したがって、

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tau = \beta(\tau) \tag{2.6}$$

で β 関数を定義するとき、

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\tau} = \beta(\tilde{\tau}) \qquad \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{for} \quad \forall \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} \in \Gamma \tag{2.7}$$

が成立します。 (2.6) と (2.7) より、

$$\beta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{-2}\beta(\tau) \quad \text{for} \quad \forall \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} \in \Gamma \tag{2.8}$$

を満たすことが分かります。このような性質を持つ関数は、物理的にもっともらしいいくつかの仮定のもとに、Γ に対する重さ -2 の保型形式と呼ばれています。ところが、重さが負の保型形式は（ zero 以外には）存在しないことが知られているのです。したがって結局 $\beta = 0$ が示されました。

$$\boxed{\text{self dual theory} \Longrightarrow \beta = 0}$$

先ほど「物理的にもっともらしいいくつかの仮定」といったことについて軽くコメントしておきましょう。仮定したのは

*他の coupling constants (bare mass, yukawa coupling 等) もあっても良いのですが、ここでは簡単のためにそれらは適当な値（例えば zero ）に固定して gauge coupling のみに注目することにします。

†今後しばしば、$SL(2, R)$ と $SL(2, R)/\{\pm\}$ とをいちいち区別しないで書きますが、適当に解釈してください。

1. Γ が $SL(2,\mathbb{R})$ の離散的部分群であること

2. $\Gamma\backslash H$ が測度有限であること

3. β が H 上で正則であること

4. β が Γ の任意の尖点で有限であること

の４つです。詳しく説明しだすと「保型形式入門」になってしまうので、ここでは、物理的にどんな可能性を排除したことになっているのかを述べるにとどめます。まず、1. を満たさない例として、例えば、理論に anomalous な $U(1)$ symmetry がある場合が挙げられます。このときには、その $U(1)$ 回転は θ parameter を shift する作用とみなすことができるので、θ parameter を任意に shift （$\tau \to \tau + a,\ a \in \mathbb{R}$) しても理論は変わりません。この場合には、 β 関数が τ の実部に依存しなくなるために、$\beta = \text{constant}$ になり、もし $\beta \neq 0$ ならば (2.8) によって Γ は θ を shift する作用しか許されなくなります。これでは duality と呼ぶにふさわしくありませんね。2. の反例として、最もありふれた例は Γ が τ の整数 shift のみからなる場合です。これも duality と呼ぶにふさわしくありません。 3. は、もちろん超対称性から β 関数が $\bar{\tau}$ に依存しないことは良いのですが、ここではより強く、β は H 上で特異点を持たないことも要求しています。4. は大雑把に言って weak coupling な記述に移れるときに、その weak coupling limit で β 関数が発散しないことを要求しています。

補足： β 関数を 2-loop まで見たことのある方や、Novikov-Shifman-Vainshtein -Zakharov の exact β 関数をご存知の方は、普段良く見かける β 関数が τ の正則関数ではないことに「おや？」と思われたかも知れません。実は、ここで用いているのは holomorphic coupling であり、普段使われているより物理的な coupling constant とは多少異なります。両者の間の関係を非常に明快に示した論文 [3] が最近になって現れました。東大の野村氏が informal seminar で紹介してくれたので、気になる方は、そちらを参照してください。

2.2 examples

いくつか例を与えましょう。

- (super) Maxwell theory
  言うまでもなく Maxwell 方程式の electric-magnetic duality です。

- $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors
  この理論の低エネルギー有効理論は、$\tau \to -1/\tau$ と$\tau \to \tau+2$ によって生成される群 ($\simeq \widetilde{\Gamma}_0(2)$) を duality group として持つことが知られています [4]。後半では、この duality が Seiberg の $\mathcal{N}=1$ SQCD の duality につながることを見る予定です。

- $\mathcal{N}=4$ $SU(N_c)$ SYM
  これも割と古くから調べられている self dual theory で、duality group は $SL(2,\mathbb{Z})$ です [5]。

この春に Witten が M theory のテクノロジーを使ってこれらをさらに一般化することに成功しました [6]。

- $\mathcal{N}=2$ $\prod_1^n SU(k_\alpha)$ SQCD with matters in $\bigoplus_1^{n-1}(k_\alpha, \overline{k_{\alpha+1}})$ and $\bigoplus_1^n k_\alpha^{\oplus d_\alpha}$
  ただし、β 関数が zero になるように $0 = 2k_\alpha - (k_{\alpha-1} + k_{\alpha+1} + d_\alpha)$ とします。特に、$n=1$ の時は、 上にあげた $\mathcal{N}=2$ $SU(k_1)$ SQCD with $2k_1$ flavors になることを注意しておきます。この理論の duality group は次に紹介する方法によって$\pi_1(\mathcal{M}_{0,n+3;2})$ になることが分かります。この記号もすぐあとで説明 する予定です。

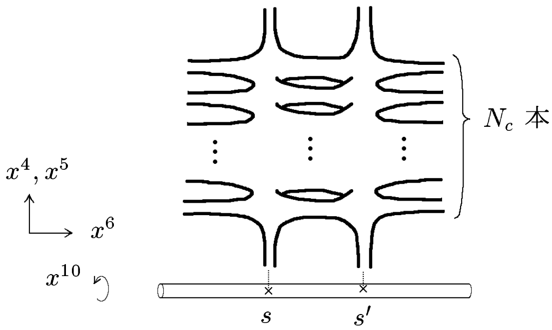
- $\mathcal{N}=2\ \prod_1^n SU(k_\alpha)$ SQCD with matters in $\bigoplus_1^{n-1}(k_\alpha,\overline{k_{\alpha+1}})\oplus(k_n,\overline{k_1})$
  ただし、$k_1=k_2=\cdots=k_n\equiv k$ とします。特に、$n=1$ の時は、$\mathcal{N}=4\ SU(k)$ SYM に帰着します。duality group は $\pi_1(\mathcal{M}_{1,n})$ です。

これらの例は期待通りいずれも β 関数が zero になっています。これらを眺めていると、$\mathcal{N}=2$ 超対称性を持った scale invariant な理論は、（少なくとも厳密解*が知られているものに関しては） 大概 self dual theory であるようです†。注意しなければならないのは、これらの理論は self dual であることを仮定して解かれたのではなく、解いてみたら self dual であったということです。もちろん、本当に duality を確認するためには、spectrum が一致するかどうかとか、partition function が一致するかどうか、などをチェックしなければならないので duality を証明したことにはなっていません。しかし、とにかく duality が論理的に導かれたという意味で、非常に示唆に富んでいます。duality をより深く理解する上で、一つの鍵になるように思います。それでは、もう少しこれらの理論の様子を調べて見ましょう。

2.3 duality と理論の moduli space

先ほどいくつかの例を与え、「解いてみたら self dual であった」と述べましたが、もちろん、これは偶然の出来事ではありません。実は、解ききる前に duality があることは分かるのです。以下、Witten [6] にしたがって、このことを説明してみたいと思います。[6] については、タイミング良く国友さんが明快な講義をして下さったので、詳しくはそちらを参照していただくことにして、ここでは duality に関するアイディアのエッセンスだけを抜き出したいと思います。

ここでは最も簡単な場合、即ち $\mathcal{N}=2\ SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors を例にとって話を進めましょう。この理論は、M theory の中の 5-brane が次のような configuration をとったときに、5-brane の world volume 上の理論として実現されます。



この図は 5-brane $\simeq\mathbb{R}^{1,3}\times\Sigma$ としたときの Riemann 面 Σ を x^4,x^5,x^6,x^{10} で張られる４次元空間（$\mathbb{R}^3\times S^1$）の中に描いたものです。 5-brane は、$x^0\sim x^3$ で張られる $\mathbb{R}^{1,3}$ には一様に伸び、この上の effective theory が $\mathcal{N}=2\ SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors になるというわけです。

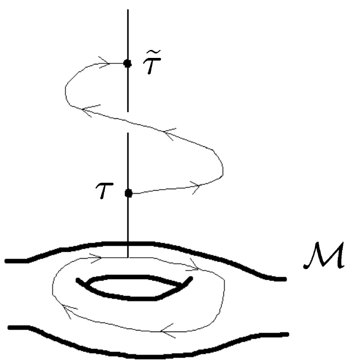
大雑把に言って、この Riemann 面を（境界条件や BPS condition を保ちながら）ぐにゅぐにゅと変形させることが、理論の真空を変えることに対応し、Riemann 面の無限遠方での位置関係をずりずりとずらすことが理論を定める coupling constant を変えることに対応します。例えば、この理論の bare coupling τ は、複素座標 $v=x^4+ix^5, s=x^6+ix^{10}$ を導入すると、縦に伸びた２枚の 5-brane の s 座標の $v\to\infty$

*Seiberg-Witten の意味での厳密解、つまり、理論の Coulomb branch における低エネルギー有効作用の厳密な形。
†例外もあります。例えば $\mathcal{N}=4\ USp(2N)$ SYM は $SO(2N+1)$ SYM と dual であり、 self dual ではありません。

における値（ s, s' とする）の差で与えられることが分かります[‡]。

$$i\tau \sim s' - s \tag{2.9}$$

特に、θ parameter (τ の実部) が 2π の周期を持っていたことと、x^{10} 方向が S^1 にコンパクト化されていたこととがちょうど対応しています。 s の周期性による無駄を省くために、新たな変数 $t = \exp(-s)$ を使うことにしましょう。上で述べたことは、「複素平面の中から 0 ではない互いに異なる 2 つの複素数 t, t' を持ってくれば、それに対応する理論が一つ定まる（bare coupling が定まる）」ということです。少しカッコイイ言葉に書き直しますと、「 genus $\underline{0}$ の Riemann 面（$\mathbb{P}^1$）とその中の互いに異なる $\underline{4}$ 点（$0, \infty, t, t'$）の組で、そのうちの $\underline{2}$ 点（$0, \infty$）の順序を入れ替えないようにした正則同型で同一視[*]したときの同値類」を $\mathcal{M}_{0,4;2}$ と書くとき、「 $\mathcal{M}_{0,4;2}$ の中の 1 点を与えると理論が一つ定まる」ということができます。縦に伸びる 5-brane の数が $n+1$ 枚である場合への一般化も簡単で、単に $\mathcal{M}_{0,n+3;2}$ を用いれば良いということが分かります。今の場合は特に簡単で、$\mathcal{M}_{0,4;2}$ は実は $(\mathbb{C} - \{\pm 1\})/\mathbb{Z}_2$ になります[†]。ここで注目したいのは、 $\mathcal{M}_{0,4;2}$ は単連結ではないということです。従って、先ほど $\mathcal{M}_{0,4;2}$ の上の 1 点を与えれば、理論の bare coupling $\tau \in H$ が定まるといいましたが、この対応は（局所的には 1 対 1 に対応しているはずですが）一般に多価関数になります。つまり、$\mathcal{M}_{0,4;2}$ のある点に対応する coupling τ が与えられたとしても $\mathcal{M}_{0,4;2}$ の中をぐるっと大きく一周まわって戻って来たときにまた同じ値に戻る必然性はなく、別の値 $\tilde{\tau}$ になっている場合があるのです。理論は $\mathcal{M}_{0,4;2}$ の 1 点が与えられれば一つに定まっているはずなので、coupling が τ の理論も $\tilde{\tau}$ の理論も同じ理論を表わしていることになります。この写像 $\tau \to \tilde{\tau}$ が、まさに duality の変換です。



こうして、この理論には duality が存在し、duality group は（ covering space の一般論によって）$\pi_1(\mathcal{M}_{0,4;2})$ になることがわかりました[‡]。

ここで見たことを要約すると、「duality を見つけるには、理論を parameterize する空間（理論の moduli space) を求め、その基本群を調べれば良い」 ということです。

$$\boxed{\text{duality group} = \pi_1(\text{ 理論の moduli space })}$$

[‡]この関係式は実は strong coupling region では少し修正が必要です。ここでは τ が s, s' を動かすことで変化するということを認めていただければ十分です。

[*]このような同一視をするのは上で理論が t, t' の比にしかよっていなかったことに対応しています。

[†]P^1 の、0 と ∞ とを保つ正則同型は、もう定数倍しかありません。全体を t^{-1} 倍すれば、あとは 0, 1 とは異なる複素数 $z = t/t'$ によって parameterize されることになりますが、t と t' とを入れ替える Z_2 の作用 $z \to z^{-1}$ によっても同一視するので、結局 $\mathcal{M}_{0,4;2} \simeq (C - \{0,1\})/Z_2$ になります。あとは、P^1 のちょっとした座標変換をすれば $\mathcal{M}_{0,4;2} \simeq (C - \{\pm 1\})/Z_2$ とも書けることが分かります。ただし、ここでの Z_2 の作用は $z \to -z$ になります。

[‡]実は、 $\pi_1(\mathcal{M}_{0,4;2}) \simeq \Gamma_0(2)$ となるそうです。

このこと自体は考えてみれば、当然といえば当然です。理論が $\tau \in H$ でうまく parameterize されていれば何事も起こらなかったところですが、「H による parameterization に無駄があり、H に同じ理論を表わすいくつかの異なる点があるという場合に duality がある」というあたりまえのことを言っているにすぎません。それよりも、理論をうまく parameterize する変数を見つけ出すことが本質的な作業でしょう。それには、 string 理論などのより大きな理論に埋め込んで調べるのがコツのようです。

2.4 duality と global symmetry

前小節では、調べたいゲージ理論 ($\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors) を M theory に埋め込んで調べましたが、「そんな大層なことをしなくても別の良く知っているゲージ理論に埋め込んでみたら良いではないか」と思いますよね。最近 Argyres がこれをやってみて、理論の duality が埋め込み先の理論の global symmetry の現れであることを見出し、duality を「証明」したと主張しています [7]。これを簡単に紹介しましょう。

ここでもやはり $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors を考えます。この理論の Coulomb Branch における低エネルギー有効理論を与える hyperelliptic curve は

$$y^2 = \prod_{a=1}^{N_c}(x-\phi_a)^2 - (1-h^2)x^{2N_c} \tag{2.10}$$

であることが知られています [4]。ここで、h は $h(\tau) = (\theta_2^4+\theta_1^4)/(\theta_2^4-\theta_1^4)$ で定義される bare coupling τ の関数で、$h(\tau+2) = h(\tau)$, $h(-1/\tau) = -h(\tau)$ を満たします。

この理論をゲージ群の rank を一つ上げた理論、つまり $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c+1)$ SQCD with $2N_c$ flavors の中に埋め込むことを考えます。この理論の hyperelliptic curve は

$$y^2 = \prod_{a=1}^{N_c+1}(x-\phi_a)^2 - (N_c+1)\Lambda^2 \prod_{i=1}^{2N_c}(x+m_i) \tag{2.11}$$

で与えられます。ここで、quark の bare mass m_i も後の議論のために入れておきました。この理論の $U(1)_R$ symmetry は anomaly により $\mathbb{Z}_2$ に破れ*、ϕ や m に対して $\phi \to -\phi$, $m \to -m$ のように作用します。

先の理論をこの理論の中で実現するのは簡単です。ϕ に適当な VEV を与えて、$SU(N_c+1)$ を $SU(N_c)$ に破れば良いだけです。ただし、ここで注意しなければならないのは、 ϕ に VEV を与えると、 quark たちも massive になってしまう†ので、生じた mass をちょうど打ち消すように bare mass m_i を調節して入れなければならないことです。つまり、

$$\begin{aligned} \phi &= (M,\cdots,M,-N_cM)+\delta\phi \qquad (2.12) \\ & \quad \left(\delta\phi = (\widetilde{\phi}_1,\cdots,\widetilde{\phi}_{N_c},0), \quad \sum\widetilde{\phi}_a = 0\right) \\ m_i &= (-M,\cdots,-M) \qquad (2.13) \end{aligned}$$

を (2.11) に代入して $x \to x+M$ で書き直すと、

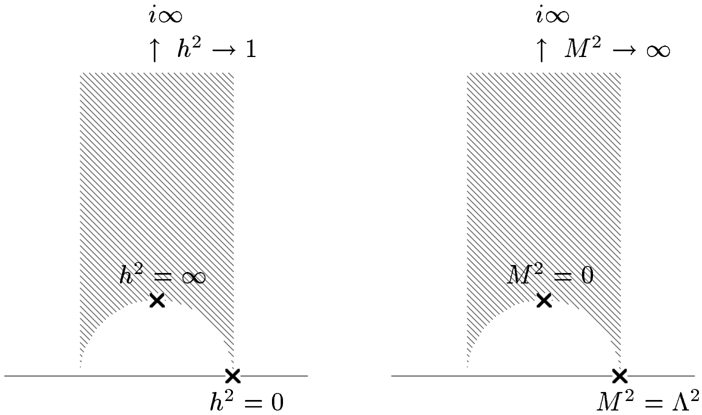
$$\begin{aligned} y^2 &= \prod_{a=1}^{N_c}(x-\widetilde{\phi}_a)^2(x+(N_c+1)M)^2 - (N_c+1)^2\Lambda^2x^{2N_c} \qquad (2.14) \\ &\sim (N_c+1)^2M^2\left(\prod_{a=1}^{N_c}(x-\widetilde{\phi}_a)^2 - \frac{\Lambda^2}{M^2}x^{2N_c}\right) \qquad (2.15) \end{aligned}$$

*fermion まで考えたら本当は Z_4 なのですが、今は ϕ や m に対する作用しか考えません。
†superpotential (3.1) を見てください。

この式は期待通り (2.10) と同じ形をしています。 τ と M との関係は、

$$1 - h(\tau)^2 = \frac{\Lambda^2}{M^2} \tag{2.16}$$

で与えられることが分かります。絵で書けば、



となります。斜線部は $\widetilde{\Gamma}_0(2)$ の基本領域です。τ が singular なのは、 $h = 0$ と $h = \pm 1$ であるので、この理論は $1/h \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ で parameterize されます。また (2.10) が $h \to -h$ なる $\mathbb{Z}_2$ の作用によって不変であることから、理論の moduli space は前小節で見たとおり $(\mathbb{C} - \{\pm 1\})/\mathbb{Z}_2$ になります。ここで、$-h(\tau) = h(-1/\tau)$ であったことを思い出すと、この Z_2 の作用はちょうど、 $\tau \to -1/\tau$ なる strong-weak duality に対応していることが分かります。一方、(2.15) の立場でいうなら、理論は $M \in (\mathbb{C} - \{\pm\Lambda\})/\mathbb{Z}_2$ によってうまく parameterize されています。今度の $\mathbb{Z}_2$ ($M \to -M$) は、先に述べた global symmetry の $\mathbb{Z}_2$ ($\phi \to -\phi$, $m \to -m$) に他なりません。これによって、Argyres はこの理論の duality が global symmetry として理解できたとしています。*

こんな簡単な議論ですが、もし本当に duality が global symmetry であると言えたとすると、これはすごいことを言っているのです。global symmetry が理論に備わっていることは明らかであり、 partition function であろうが spectrum であろうが、何でもこの symmetry を持っているはずです。これまで duality と言えば、いろいろな状況下でいちいち双方の理論を調べることで状況証拠を集めていたわけですが、これを一気に‘ 証明 ’してしまったことになるのです。

ただし、これにはいくつか疑問があります。これまでの議論は Coulomb Branch におけるもので、quark たちを考慮に入れていませんでした。実は duality による quark の対応は、次節で見るように単なる global symmetry とは思えないのです。duality は一般に、elementary field と soliton とを入れかえる様な変換を引き起こします。 Argyres の立場ではこのことがどのように理解できるのかが良く分かりません。どうも、‘ 証明 ’というのは少し言い過ぎのような気がします。

それでも、理論の moduli space が $(\mathbb{C} - \{\pm 1\})/\mathbb{Z}_2$ であることを埋め込み先の理論の global symmetry を用いて導けたことは非常に興味深いことだと思います。少なくとも Coulomb Branch を記述する有効理論の範囲内では、dual 変換 $\tau \to -1/\tau$ を global symmetry として理解することができました。

2.5 duality 再考

これまで β 関数が zero であるような理論における、self duality に的を絞って議論してきました。なんとなく、 duality というのはどこにでも転がっているものだという気がしてきたでしょうか。では、β 関数が zero である理論には常に duality が存在するといえるでしょうか？これに対する答えは知りませ

*ちなみに前小節の M theory の立場では、Z_2 の作用は縦に伸びた２枚の 5-brane を入れかえる作用でした。duality は brane の入れかえとしても理解することができます。

ん。ただ、おそらく $\mathcal{N}=2$ SUSY があれば、きっと言えるだろうと思っています。この場合には、理論に Coulomb Branch があるので、 gauge coupling が全く run しないまま $U(1)^r$ Super Maxwell 理論におとすことができます。$U(1)^r$ Super Maxwell 理論には electric-magnetic duality があることを知っているので、全ての $U(1)$ に対して dual をとれば、それはもとの理論の bare coupling を反転したような理論の Coulomb Branch に対応すると読み取れるでしょう。

そういった観点で考え直してみると Seiberg-Witten curve によって duality を見つけるという作業は、結局のところ、このような作業をしているのでした。Seiberg-Witten 理論は Coulomb Branch の物理を記述するものでしたが、そこでの electric-magnetic duality が明白に取り入れられているために non-Abelian duality にも自然につながっていたのです。次節でこの duality が Seiberg の duality につながることを議論しますが、このように考えると、 Seiberg の duality も Super Maxwell 理論の electric-magnetic duality のなれの果てだと思うことができます。

では、Witten の M theory による解釈はどうでしょうか？M theory の 5-brane の上に４次元のゲージ理論を埋め込んだとき、登場するゲージ場はもとを正せば 5-brane の上に住んでいた self dual 2-form 場から来ています。この self duality が Coulomb Branch における electric-magnetic duality のもとになっています。これをそのまま non-Abelian duality に拡張する方法を私は知りませんが、duality が明白である formalism への手がかりを与えているのは確かだと思います。

これは、落ち着いてもう一度ゆっくり考え直してみる価値がありそうですね。今回はこのへんで次の話題に移ることにしましょう。

3 $\mathcal{N}=2$ duality から $\mathcal{N}=1$ duality へ

前節で議論してきた duality は β 関数が zero である場合の self duality という、非常に特殊なものに限られているように思われたかも知れません。そうではないのです。いったん self dual theory を見つけたら、その理論を少しずつ変形していくことで別のより non-trivial な duality が見つかる可能性があるのです。この節では、前節で繰り返し扱ってきた $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors を変形していくと、この理論の self duality が Seiberg の発見した $\mathcal{N}=1$ SQCD における duality につながることを示します。Seiberg の duality の導出にはいくつかのアプローチがありますが*、以下に述べる方法はその中でおそらく最も安直なものだと思います。

3.1 dual theory を見つける

再び $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD with $2N_c$ flavors を考えます。$\mathcal{N}=1$ superfield の言葉で書くと、superpotential は次の形をしています。

$$W_{\rm ele}=Q^i\Phi\widetilde{Q}_i \tag{3.1}$$

Φ は $SU(N_c)$ の adjoint 表現に属する chiral superfield で、これと field strength superfield W_α とで $\mathcal{N}=2$ の vector multiplet をなします。Q と $\widetilde{Q}$ はそれぞれ N_c 表現と $\overline{N}_c$ 表現に属する chiral superfield で、こちらは $\mathcal{N}=2$ の hyper multiplet をなすものです。添え字の i は flavor を表わしていて、1 から $2N_c$ まで走ります。

この理論は前節で調べたように self dual theory であり、coupling constant τ を $\tilde{\tau}=-1/\tau$ に置き換えた理論（はじめの理論を electric theory、こちらを magnetic theory と呼ぶことにしましょう。）も同じ物理を記述しています。magnetic theory の superpotential は (3.1) と同じように

$$W_{\rm mag}=q_i\varphi\widetilde{q}^i \tag{3.2}$$

*例えば、[8] など。

で与えられます。ここで $\varphi, q, \tilde{q}$ は electric theory の$\Phi, Q, \widetilde{Q}$ に相当するものですが、 flavor の添え字の上下がさりげなく入れかわっていることに注意してください。その理由はあとで分かります。

さて、これから調べたいのは $\mathcal{N}=1$ $SU(N_c)$ SQCD with N_f flavors なので、余計な場を massive にすることを考えます。

$$W_{\rm ele} = Q^i\Phi\widetilde{Q}_i + m_iQ^i\widetilde{Q}_i + \frac{\mu}{2}\,{\rm tr}\,\Phi^2. \tag{3.3}$$

第 2 項は $\mathcal{N}=2$ SUSY を破らない quark mass term です。$(m_i) = (0,\cdots,0,m_{N_f+1},\cdots,m_{2N_c})$ とおくことで N_f flavors だけを massless に残します。第 3 項は adjoint matter の mass term で、これによって SUSY を $\mathcal{N}=1$ に破ります。

electric theory をこのように変形したとき、duality を保つには magnetic theory をどのように変形すれば良いでしょうか？おそらく結果とその consistency check を与えるよりも、見つけ方を与えた方が役に立つと思われるので、詳しい解析は抜きにして、どうやって見つけたかを説明してみたいと思います。

方針は、vacuum moduli space が electric theory と等しくなるように magnetic theory を変形することです。それでは、 electric theory の moduli space を調べることから始めましょう。 (3.3) は Φ を積分すると、

$$W_{\rm ele} = -\frac{1}{2\mu}\left((Q^i\widetilde{Q}_j)(Q^j\widetilde{Q}_i) - \frac{1}{N_c}(Q^i\widetilde{Q}_i)^2\right) + m_iQ^i\widetilde{Q}_i \tag{3.4}$$

となります。これを Q や $\widetilde{Q}$ で変分して、運動方程式 (F-term equation) を書き下すと、

$$\widetilde{Q}^a_i(\widetilde{M})^i_j = (\widetilde{M})^i_jQ^j_a = 0 \tag{3.5}$$

となります。ここで、$\widetilde{M} \equiv M' - \mu m$, $M' \equiv M - \frac{1}{N_c}\,{\rm Tr}\,M$, $M \equiv Q\widetilde{Q}$ とおきました。これをゲージ不変量の言葉で書くことにします。この理論の vacuum moduli space を parameterize するゲージ不変量は次のメソン (M) とバリオン $(B,\widetilde{B})$

$$\begin{aligned} M^i_j &\equiv Q^i_a\widetilde{Q}^a_j, && (3.6)\\ B^{i_1\cdots i_{N_c}} &\equiv Q^{i_1}_{a_1}\cdots Q^{i_{N_c}}_{a_{N_c}}\epsilon^{a_1\cdots a_{N_c}}, && (3.7)\\ \widetilde{B}_{i_1\cdots i_{N_c}} &\equiv \widetilde{Q}^{a_1}_{i_1}\cdots\widetilde{Q}^{a_{N_c}}_{i_{N_c}}\epsilon_{a_1\cdots a_{N_c}} && (3.8)\end{aligned}$$

です。ただし、これらは独立ではなく、いくつかの constraint に従っています。まず、上の定義よりただちに

$$\begin{aligned} (*B)\widetilde{B} &= *(M^{N_c}), && (3.9)\\ M\cdot *B &= M\cdot *\widetilde{B} = 0, && (3.10)\\ B\cdot *B &= \widetilde{B}\cdot *\widetilde{B} = 0. && (3.11)\end{aligned}$$

が成立します。ここで、「$*$」 は flavor の添え字を$\epsilon_{a_1\cdots a_{N_c}}$ や $\epsilon^{a_1\cdots a_{N_c}}$ を使って上げ下げすることを意味し、「$\cdot$」 は flavor の添え字の一組を縮約することを意味しています。例えば、(3.9) は

$$\epsilon_{i_1\cdots i_{N_c}k_1\cdots k_{N_c}}B^{k_1\cdots k_{N_c}}\widetilde{B}_{j_1\cdots j_{N_c}} = \epsilon_{i_1\cdots i_{N_c}k_1\cdots k_{N_c}}M^{k_1}_{j_1}\cdots M^{k_{N_c}}_{j_{N_c}}$$

を略記したものです。さらに、先の F-term equation (3.5) を使うと、

$$\begin{aligned} M\cdot\widetilde{M} &= \widetilde{M}\cdot M = 0, && (3.12)\\ \widetilde{M}\cdot B &= \widetilde{B}\cdot\widetilde{M} = 0 && (3.13)\end{aligned}$$

が成立することが分かります*。

*実は、これらの他にはもう独立な constraint がないことも分かります。

(3.10)~(3.13) に注目してください。これらの式は、$M \leftrightarrow \widetilde{M}$, $B \to *B$, $\widetilde{B} \to *\widetilde{B}$ なる変換のもとで不変です。このことから、$\widetilde{M}$ をメソンとし、$*B$ と $*\widetilde{B}$ をバリオンとするような記述が存在することが示唆されます。つまり、magnetic theory のメソンとバリオンを

$$
\begin{aligned}
N_i^j &\equiv q_{ai}\widetilde{q}^{aj}, && (3.14)\\
b_{i_1\cdots i_{N_c}} &\equiv q_{a_1 i_1}\cdots q_{a_{N_c} i_{N_c}}\epsilon^{a_1\cdots a_{N_c}}, && (3.15)\\
\widetilde{b}^{i_1\cdots i_{N_c}} &\equiv \widetilde{q}^{a_1 i_1}\cdots \widetilde{q}^{a_{N_c} i_{N_c}}\epsilon_{a_1\cdots a_{N_c}} && (3.16)
\end{aligned}
$$

によって定義するとき、 electric theory のメソン、バリオンと（スカラー倍をのぞいて）

$$
\begin{aligned}
\text{electric} &\leftrightarrow \text{magnetic} \\
\widetilde{M} &\leftrightarrow N && (3.17)\\
*B &\leftrightarrow b && (3.18)\\
*\widetilde{B} &\leftrightarrow \widetilde{b}. && (3.19)
\end{aligned}
$$

のような対応をつければ、理論として等価になると予想されます。逆変換は

$$
\begin{aligned}
\text{electric} &\leftrightarrow \text{magnetic} \\
M &\leftrightarrow \widetilde{N} && (3.20)\\
B &\leftrightarrow *b && (3.21)\\
\widetilde{B} &\leftrightarrow *\widetilde{b}. && (3.22)
\end{aligned}
$$

のようになります。ここで、$\widetilde{N} \equiv N' + \mu m'$, $N' \equiv N - \frac{1}{N_c}\,\mathrm{Tr}\,N$, $m' \equiv m - \frac{1}{N_c}\,\mathrm{Tr}\,m$ とおきました。 $\widetilde{M}$ の定義と $\widetilde{N}$ の定義を見比べると、その違いは m が m' になり、 μ が $-\mu$ になっている所であることに気づきます。したがって、 magnetic theory の superpotential は (3.3) で m を m' にし、μ を $-\mu$ にしたもの

$$
W_{\mathrm{mag}} = q_i\varphi\widetilde{q}^i + m'_i q_i\widetilde{q}^i - \frac{\mu}{2}\,\mathrm{tr}\,\varphi^2. \tag{3.23}
$$

にすれば良さそうですね。これで、 magnetic theory が一応見つかりました。

次にこれが本当に正しそうであることを少しだけ議論することにしますが、もし広い心をもって認めてくださるようでしたら、次小節は飛ばしてしまいましょう。

3.2 いくつかの consistency check

- vacuum moduli space の対応

  前小節では、vacuum moduli space が electric theory と等しくなるように magnetic theory を探しましたが、まだ本当に等しくなったかどうかは確かめていませんでした。 magnetic theory の vacuum moduli space は (3.9)~(3.13) と同じように、

$$
\begin{aligned}
(*b)\widetilde{b} &= *(N^{N_c}) && (3.24)\\
N\cdot *b &= N\cdot *\widetilde{b} = 0 && (3.25)\\
b\cdot *b &= \widetilde{b}\cdot *\widetilde{b} = 0 && (3.26)\\
\widetilde{N}\cdot N &= N\cdot \widetilde{N} = 0 && (3.27)\\
\widetilde{N}\cdot b &= \widetilde{N}\cdot \widetilde{b} = 0 && (3.28)
\end{aligned}
$$

によって表わされます。先ほどの対応により (3.10)~(3.13) は (3.28)~(3.25) とがちょうど対応していることはすぐに分かります。問題は (3.9) と (3.24) が対応しているかどうかなのですが、これはそう単純ではありません。実は、これを示すには非摂動的な量子効果を考慮に入れる必要があるのです。非摂動効果を取り入れて初めて vacuum moduli space の一致が示せるということは、非常に non-trivial な consistency check になっていると思うのですが、残念ながらこれを説明しだすと長くなるので、詳しい説明は [2] に任せることにします。

- $\mathcal{N}=2$ duality との整合性

  $\mu \to 0$ の limit をとって $\mathcal{N}=2$ theory に戻ったとします。前小節で magnetic theory の quark mass は m' になると述べましたが、これは $\mathcal{N}=2$ の duality として見えるはずです。electric theory の hyperelliptic curve は

$$y^2=\prod_{a=1}^{N_c}(x-\phi_a)^2-(1-h^2)\prod_{j=1}^{2N_c}(x+m_j-(1-h)m_s) \tag{3.29}$$

  となることが知られています（ (2.10) に quark mass を入れたもの)。ただし、$m_s \equiv \frac{1}{2N_c}\sum m_j$ です。$\tau \to -1/\tau$ のもとで、$h \to -h$ となることを思い出すと、この hyperelliptic curve は期待したとおり、$\tau \to -1/\tau$ に伴って $m \to m'$ なる変換を施せば不変に保たれることが分かります [4]。つまり、 electric theory と magnetic theory とは Coulomb branch における低エネルギー有効作用が等しいことになります。また Higgs branch が等しいことも上と同じようなことをすると示すことができます [8, 2]。

3.3 $SU(N_c) \leftrightarrow SU(N_f-N_c)$

それでは、この duality が Seiberg の duality につながるものであることを示すことにしましょう。Seiberg の duality において、 electric theory が $\mathcal{N}=1$ $SU(N_c)$ SQCD with N_f flavors であるときに magnetic theory は $\mathcal{N}=1$ $SU(N_f-N_c)$ SQCD with N_f flavors に gauge singlet なメソン場 $\mathcal{M}^i_j$ と superpotential $W_{mag}=\mathcal{M}^i_j q_i \tilde{q}^j$ を加えた理論であったことを思い出して下さい。まず、ゲージ群の対応を調べてみましょう。

(3.3) の electric theory は $Q=\tilde{Q}=0$ なる VEV を与えたときに $\mathcal{N}=1$ $SU(N_c)$ SQCD with N_f flavors になります。では、magnetic theory はどうなるでしょうか？ 先ほど主張した対応 $N \leftrightarrow \widetilde{M}=M'-\mu m$ に従えば、$Q=\tilde{Q}=0$ に対応する点は magnetic theory では $q\tilde{q}=-\mu m$ となることが分かります。つまり、q と $\tilde{q}$ は non zero な VEV を持つのでゲージ群は一部破れていることになります。では、どれだけ破れずに残っているでしょうか？$q\tilde{q}=-\mu m$ を満たす解*を書き下すと

$$q=\tilde{q}=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & \kappa_{N_f+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \kappa_{2N_c}\end{array}\right) & \begin{array}{l}\uparrow\\ N_f-N_c\\ \downarrow\\ \uparrow\\ 2N_c-N_f\\ \downarrow\end{array}\end{array} \qquad \kappa_i=\sqrt{-\mu m_i} \tag{3.30}$$

のようになります。これを見ると、期待どおり $SU(N_f-N_c)$ が破れずに残っていることが分かります。

* さらに D-term equation も満たすものを探します。

3.4 meson と superpotential

次に Seiberg の duality における magnetic theory に現れたメソン場と superpotential の起源を探ります。(3.23) から、φ を積分すると、

$$W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu}\left((q_i\widetilde{q}^j)(q_j\widetilde{q}^i) - \frac{1}{N_c}(q_i\widetilde{q}^i)^2\right) + m_i' q_i\widetilde{q}^i \tag{3.31}$$

が得られます。ここで、補助場 $\mathcal{M}_j^i$ を導入してこれを次のように書き直してみます。

$$W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{\mu}\mathcal{M}_j^i q_i\widetilde{q}^j - \frac{1}{2\mu}\left(\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}^2 - \frac{1}{N_c}(\mathrm{Tr}\,\mathcal{M})^2\right) + m_i\mathcal{M}_i^i \tag{3.32}$$

$\mathcal{M}_j^i$ は運動方程式を解くと

$$\mathcal{M}_j^i = N_j^{\prime i} + \mu m_j^{\prime i} \leftrightarrow M_j^i \tag{3.33}$$

のように、 electric theory のメソン $M = Q\widetilde{Q}$ に対応するように選びました。

(3.32) の第 1 項を見ると、Seiberg の duality から要求されるメソン場と superpotential が現れていることが分かります。第 2 項と第 3 項は一見余分なように見えますが、これらはそれぞれ electric theory の superpotential (3.4) の第 1 項と第 2 項に対応するものです。

(3.32) の第 1 項の前についている係数として、 $1/\mu$ が出てきました。これは良い傾向です。 Seiberg の duality において、 magnetic theory のメソン場 $(\mathcal{M})$ の normalization を electric theory のメソン $(M = Q\widetilde{Q})$ に対応するように定めたとき、magnetic theory の superpotential の前の係数を $1/\mu_s$ と書くことにする（ $W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{\mu_s}\mathcal{M}q\widetilde{q}$ ）と、この μ_s は

$$\Lambda_{\mathrm{ele}}^{3N_c-N_f}\Lambda_{\mathrm{mag}}^{3(N_f-N_c)-N_f} = (-1)^{N_f-N_c}\mu_s^{N_f} \tag{3.34}$$

を満たすことが示せます [9]。今の理論の場合、(3.30) に注意しながら 1-loop で scale matching を行うと

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathrm{ele}}^{3N_c-N_f} &= m^{2N_c-N_f}\mu^{N_c}e^{i\pi\tau} &(3.35)\\ \Lambda_{\mathrm{mag}}^{3(N_f-N_c)-N_f} &= m^{N_f-2N_c}(-\mu)^{N_f-N_c}e^{i\pi\widetilde{\tau}} &(3.36)\end{aligned}$$

となり、これらにより

$$\Lambda_{\mathrm{ele}}^{3N_c-N_f}\Lambda_{\mathrm{mag}}^{3(N_f-N_c)-N_f} = (-1)^{N_f-N_c}\mu^{N_f}e^{i\pi(\tau+\widetilde{\tau})} \tag{3.37}$$

が得られます。 (3.34) と (3.37) とを比較すると、τ 依存性がやや気になりますが、だいたい μ と μ_s は同一視されることが分かります。特に (3.37) に出てくる $(-1)^{N_f-N_c}$ が再現できたことは、(3.23) で adjoint matter の mass を $-\mu$ で入れる変形が正しかったことを再び裏付けています。

3.5 今後の課題

さて、非常に大雑把な説明でしたが、前節で扱った $\mathcal{N}=2$ theory の self duality が Seiberg の duality の起源であることは納得していただけたでしょうか？ 納得していただいたことにして、それでは、このことから何が分かるでしょうか？

出発点においた $\mathcal{N}=2$ theory は scale invariant な理論であり、前節でも議論したように、この理論の self duality は厳密に成立すると期待されています。本当に等価な理論ならば理論の変形の自由度も同じはずでしょう。今回与えた理論の変形の仕方が本当に exact な duality を保つ変形であるかどうかについてはあまり自信がありませんが、少なくともそれに近いものであるはずでしょう。Seiberg の duality はしばしば、低エネルギー極限で effective に成立する duality であると言われますが、これをもっと高エネルギーまで引っ張ることができるはずだと思われます。特に、$\mathcal{N}=2$ theory の厳密解をもっと積極的に用いれ

ば、$\mathcal{N}=1$ theory の Kähler potential の構造まで解析できる可能性があります。これまで $\mathcal{N}=1$ duality は vacuum moduli space の対応など、主に potential の底の情報しか議論されていませんが、 potential の形や、 massive な spectrum にまで踏み込んだ解析が $\mathcal{N}=2$ theory からの approach で可能になるのではないかと期待しています。

それから $\mathcal{N}=2$ theory が優れている点として、spectrum に関する解析がなされていることが挙げられるでしょう。$\mathcal{N}=2$ theory に存在していた BPS states は $\mathcal{N}=1$ theory への変形でどのような運命をたどるのでしょうか？ また、$\mathcal{N}=2$ duality における magnetic theory は本当に magnetic monopole からなる理論であると理解できるので、$\mathcal{N}=1$ duality の magnetic theory もやはり soliton の理論であると解釈できるはずです。 Seiberg の duality をもっと直接 soliton の理論として理解することができるようになったら、さぞかし楽しいことでしょう。

もう一つ、今回は $\mathcal{N}=2$ duality から $\mathcal{N}=1$ duality に至ったわけですが、このように SUSY を破るような変形に対しても duality は保たれることを思えば、当然次は $\mathcal{N}=0$ duality にまで行けるだろうと期待したくなりますよね。もうだいぶ道具もそろってきているので、頑張ればある程度のことは言えるのではないでしょうか？

皆さん、もう一度 duality をやってみたくなりませんか？

4 おわりに

波場さんに「あした informal seminar やってよ」と言われ、なんのことでしょう、と思っている間に予定表に名前が書き込まれてしまったのが始まりでした。当日は準備不足のせいもあって夜遅くまでかかってしまい、seminar の参加者の皆さんには大変申し訳ないことをしました。それでも、このような機会を与えていただいたおかげで、多くの方々と議論することができたのが何よりの収穫です。

まさかこんな原稿を書くことになろうとは思わなかったので、内容は informal なままです。何か大きな勘違いが含まれているかも知れないので、万が一これを読んでしまった方は注意してください。

参考文献

[1] N.Seiberg, "Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories," Nucl. Phys. **B435** (1995) 129.

[2] T.Hirayama, N.Maekawa and S.Sugimoto,"Deformations of $\mathcal{N}=2$ Dualities to $\mathcal{N}=1$ Dualities in SU, SO and USp Gauge Theories," hep-th/9705069.

[3] N.Arkani-Hamed and H.Murayama,"Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact Beta Functions in Supersymmetric Gauge Theories," hep-th/9707133.

[4] P.C.Argyres, M.R.Plesser and A.D.Shapere, "The Coulomb Phase of $\mathcal{N}=2$ Supersymmetric QCD," Phys. Rev. Lett **75** (1995) 1699.
P.C.Argyres and A.D.Shapere, "The Vacuum Structure of $\mathcal{N}=2$ SuperQCD with Classical Gauge Groups,," Nucl. Phys. **B461** (1996) 437.

[5] R.Donagi and E.Witten, "Supersymmetric Yang-Mills Theory and Integrable Systems," Nucl. Phys **B460** (1996) 299.

[6] E.Witten, "Solutions of Four-Dimensional Field Theories via M Theory," hep-th/9703166.

[7] P.C.Argyres, "S-Duality and Global Symmetries in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Field Theory," hep-th/9706095.

[8] P.C.Argyres, M.R.Plesser and N.Seiberg, "The Moduli Space of Vacua of $\mathcal{N} = 2$ SUSY QCD and Duality in $\mathcal{N} = 1$ SUSY QCD," Nucl. Phys. **B471** (1996) 159.

[9] K.Intriligator and N.Seiberg, "Lectures on Supersymmetric Gauge Theories and Electric-Magnetic Duality," hep-th/9509066.