

# 弦の場の理論における解析解とその周辺

横山修一

東京大学理学系研究科物理学専攻修士2年

素粒子論研究室

yokoyama@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

## 概要

本論文は Witten の開弦の場の理論における解析解の最近の進展について基礎的な部分からまとめたものである。主要な目的は、解の変形 (marginal deformation) という技術を使って一般的な解の構成法を議論した後、Schnabl 解やこれまで知られていた近似解がそれらの枠組みで理解できることを示すことである。

2008 年 1 月

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Witten による開弦の場の理論</b>	<b>5</b>
2.1	代数的構造	6
2.2	具体的実現	8
2.3	対称性と拘束条件	13
2.3.1	ゲージ対称性	13
2.3.2	twist 対称性	15
2.3.3	SU(1,1) 対称性	17
2.4	タキオン解	19
<b>3</b>	<b>CSFT における * 積</b>	<b>22</b>
3.1	* 積の計算法	23
3.1.1	振動子代数による方法	24
3.1.2	保存則による方法	25
3.1.3	sliver 座標による方法	33
3.2	* 積の部分代数空間	36
3.2.1	普遍部分空間	36
3.2.2	表面状態空間	38
3.2.3	くさび状態空間	39
<b>4</b>	<b>解析解</b>	<b>42</b>
4.1	解析解の構成法 ～解の変形～	43
4.1.1	初期条件が BRST-exact な場合	44
4.1.2	初期条件が BRST-exact でない場合	46
4.2	Schnabl 解	49
4.2.1	ポテンシャルエネルギー ～Sen 予想 1 の証明～	52
4.2.2	開弦自由度の消滅 ～Sen 予想 3 の証明～	55
4.3	他の解析解	59
4.3.1	OPE が非特異な場合	60
4.3.2	OPE が特異的な場合	64
<b>5</b>	<b>結論</b>	<b>66</b>
<b>A</b>	<b>世界面での開弦理論の簡単な解説と記号</b>	<b>68</b>
<b>B</b>	<b>共形変換群の表現</b>	<b>72</b>
<b>C</b>	<b>sliver 座標における Virasoro 代数と相関関数</b>	<b>74</b>
<b>D</b>	<b>D<sub>p</sub> ブレーンの張力</b>	<b>81</b>

# 1 序論

1915年、Einsteinが提出した一般相対性理論は、重力や光の古典的記述や天体のマクロな記述に関してNewton理論を凌駕する成果を上げ、自然法則を幾何学の言葉で記述するというパラダイムを打ち立てた。他方、1900年のPlanckの光量子仮説に始まる量子論の集大成として1960年代にできあがった標準模型は重力以外のミクロな相互作用の精緻な記述に成功し、ミクロな自然法則はゲージ原理の上に繰り込み可能な場の理論で記述されるというパラダイムの原型になった。しかし、驚くべきことに、輝かしい成果を上げたそれら二つの理論・原理は水と油のように相容れない。重力理論を量子場の理論として実現しようとするに繰り込み不可能な発散を伴うのである。

それら二つの理論を融合させる、言わば水と油を混ぜるエタノールの役割を果たすような理論の候補として今日まで生き残っているのが弦理論である<sup>1</sup>。1974年、弦にはゲージ粒子と重力子に相当するものが含まれていることが発見され[1]、さらにその10年後超弦理論には重力を含んだ量子論的に矛盾のない理論が存在することが示され[2]、最終的に5つの理論(Type I、Type IIA、Type IIB、 $SO(32)$  Heterotic、 $E_8 \times E_8$  Heterotic)に絞られた。

しかし、これらの見事な結果から先へと進んで現実や実験と結びつけるには弦理論の非摂動的な理解が不可欠である。すなわち、例えばこれら5つの理論から実際に現実を表す理論を選び出したり超対称性を破って理論のモジュライに真空期待値を与え結合定数を決めたりすることは、摂動的な議論だけでは不可能である。

そのような困難に直面したこともあり、1990年代は弦理論の非摂動的な側面に対する研究が進んだ。弦理論のソリトン解であるDブレーンの発見[3]や、M理論に象徴される双対性の発見[4]などである。実際、前述した5つの理論はM理論と呼ばれる11次元の理論の異なる真空に対応すると現在では考えられている。また弦理論を媒介にしたゲージ/重力対応の提唱[5]は、弦理論が量子重力理論として正しい道を歩んでいることを確認させると同時に、弦理論が現実を理解する上で役に立つ理論であることを示唆する数少ない応用の一つでもあった。

1990年代の弦理論の非摂動的な研究における疾風怒濤のごとき進展とは裏腹に、1974年の光円錐弦の場の理論[6]に始まり1985年の共変的弦の場の理論[7, 8]を通じて非摂動効果を取り入れられた理論として期待されたはずの弦の場の理論は、その進展に対してほとんど何も貢献することはできなかった。そのような当時の状況は、弦の場の理論の専門家をして「不遇な時代」と言わしめた程である[9]。

しかしながら、そのような弦の場の理論の暗黒時代に終止符を打ったのが、1999年のSenによる開弦の場の理論におけるタキオン凝縮に関するある予想であった[10]。その予想とは次のようなものである。

## 予想 (Sen,1999)

1. タキオンポテンシャルは、ある局所的に安定な真空をもつ。その真空のエネルギー密

---

<sup>1</sup>もちろん弦理論は重力の量子化に役立てばよいのであって、最終的に残っている必要はない。水と油を混ぜた後にエタノールは蒸発させられるように。

度  $V$  の大きさは不安定な真空から計ると D25 ブレーンの張力の値に一致する:

$$V = -T_{25}. \quad (1)$$

2. D25 ブレーン背景におけるソリトン解は、それより低い次元の D ブレーンを表す。
3. その真空では D25 ブレーンは消滅しており、したがって開弦は物理的に観測されない。その局所的に安定な真空は純閉弦理論を表す。

この予想における不安定な真空を 摂動的真空(perturbative vacuum) と呼び、準安定な真空を タキオン真空(tachyon vacuum) と呼ぶ。Sen 予想を図にしたものを図 1 に示す。

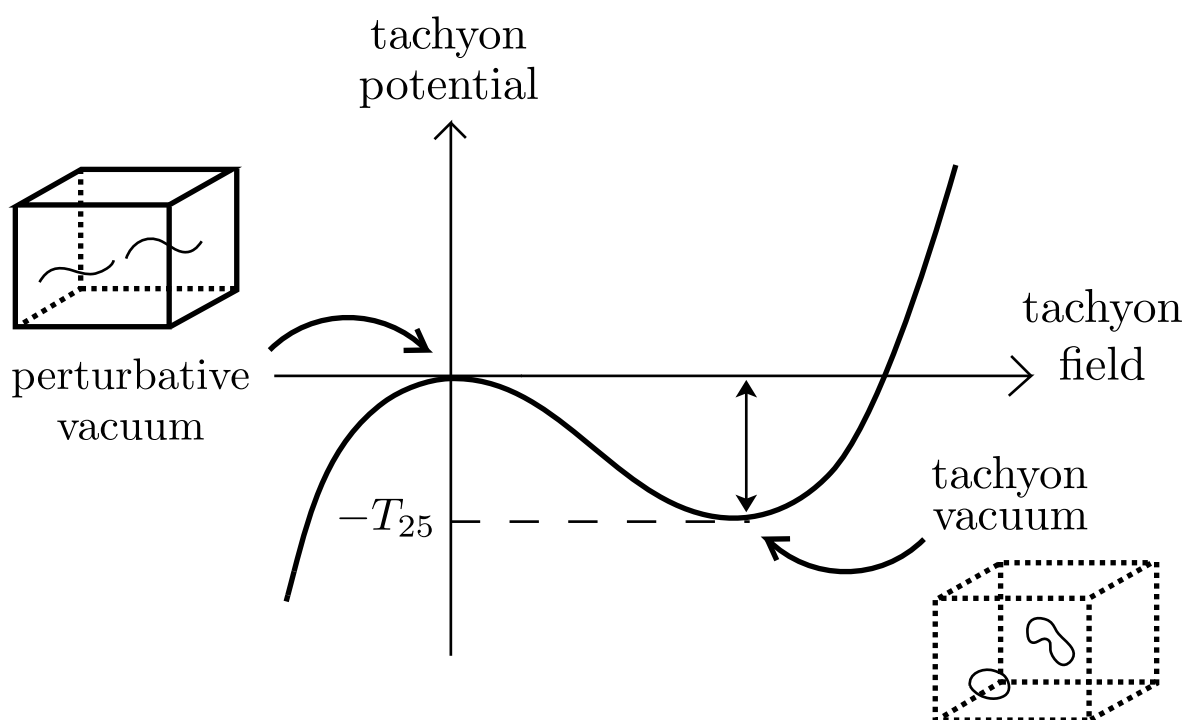


図 1: Sen 予想を表す図。摂動的な真空では D25 ブレーンが空間全体を埋め尽くしており開弦のみが存在する。タキオン真空では D25 ブレーンは消滅しておりもはや開弦は存在せず閉弦のみが存在する。

そもそも摂動的な弦理論においてタキオンが存在して真空が不安定であることは知られていたが、Sen はそれが D ブレーンの不安定性を示すものであるという画期的な idea を提示し、タキオン凝縮によって D ブレーンの消滅が記述できることを予想した<sup>2</sup>。

Sen の予想が出た後、この予想の 1 と 3 の前半部についてはその後のレベル切断近似による解析でかなりの精度で肯定的な結果を得た [11, 12]。しかし、残りの予想については近似的な解析だけでは手が届かず厳密な解析により突破口が開かれることが待ち望まれていた。そ

<sup>2</sup>そもそも D ブレーンは Polchinski の発見なくしてはあり得なかったのだから、当時の弦の場の理論の憂き目は仕方のないことだったのかもしれない。

のような中、2005年 Witten の開弦の場の理論においてある解析解が提示されその解で Sen 予想の 1 と 3 の前半部が解析的に証明された [13, 14]。その後、そこで明らかになった技術を用いて相関関数の計算や様々な弦の場の理論の解析解が行われて現在に至る。

本論文は Witten の開弦の場の理論における解析解を基礎から理解することに焦点を絞ってまとめたものである。以下に本論文の構成を示す。第 1 章の序論に続き、第 2 章では Witten の共変的弦の場の理論の構成を行う。第 3 章ではその \* 積の計算法とその部分空間を調べる。第 4 章ではその解析解の構成を行って種々の具体例に適用する。第 5 章では本論文で得た結論を述べる。

注意すべき記号の慣例は補遺に与えておいた。注意深い読者は本文を読む前に確認をしておいて欲しい。

## 2 Wittenによる開弦の場の理論

1986年、Wittenは開弦の場の理論に関する記念碑的な論文を発表した [8]。今日、その場の理論は cubic string field theory (CSFT) と呼ばれる。一般に、弦の場の理論は弦の励起状態から生成される無限個の粒子すべてを含んだ場の理論であり、相互作用を含む場合にはそれは非局所 (nonlocal) になる。特にこの CSFT は、相互作用を有限個 (3次まで (cubic)) 取り入れた共変的な (ゲージ対称性が顕わに見える) 場の理論である、という特徴を持つ。

この理論の本質を見極めるため、CSFT の代数的構造を抜き出す (節 2.1)。しかし、もちろんこのままでは「もぬけの殻」 (abstract nonsense) であって、実体はない。実りある理論にするためには、彫り出された「仏 (木偶)」に魂を入れる必要がある。

CSFT においてその役割を果たすのが、弦の第一量子化と境界上の共形場理論 (boundary conformal field theory (BCFT)) である。すなわち、背景時空を一つ固定し、その中を運動する開弦とその境界条件 (D ブレーン) を考えるのである。そうして初めて弦の場の理論としての CSFT の実体が顕わになる (節 2.2)。弦理論として顕わになった CSFT の Feynman 図を図 2 に前もって示す。それは点粒子の場の理論である Chern-Simons ゲージ理論の Feynman 図を 1次元ふくらませたようなものと考えられる。CSFT は Planck スケール程度の高エネルギー (短距離) でその効果が見える。

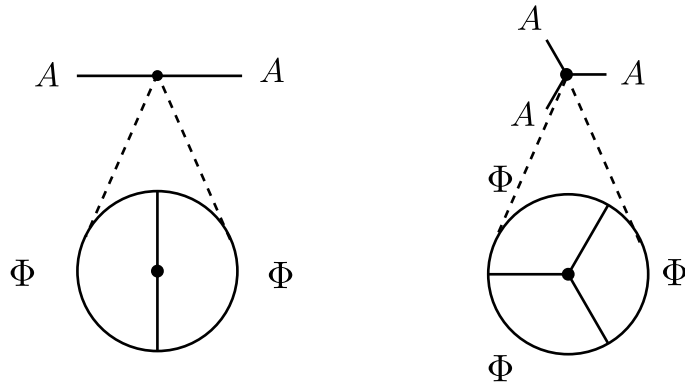


図 2: CSFT の Feynman 図。Chern-Simons 型ゲージ理論の短距離効果を見ていると考えられる。

弦理論として顕わになった CSFT には、弦理論に由来する様々な対称性があることが分かる (節 2.3)。対称性は拘束条件としてその理論で起こる物理に厳密な制限を与えることができる。

CSFT が解析に成功した物理はタキオン凝縮 (tachyon condensation) である。そのタキオン解の普遍的な性質が CSFT を通して浮き彫りにされる (節 2.4)。その普遍性はタキオン解がブレーンという物理的な物体を表すことを強く示唆するものでもある。

## 2.1 代数的構造

Witten が導入した CSFT の作用は次のようなものである:

$$S = -\frac{1}{2} \int \left( \Psi * Q\Psi + \frac{g}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right). \quad (2)$$

もしくは、変数変換  $\Phi = g\Psi$  をして次のような形である:

$$S = -\frac{1}{g^2} \int \left[ \frac{1}{2} \Phi * Q\Phi + \frac{1}{3} \Phi * \Phi * \Phi \right]. \quad (3)$$

この形は、さながら Chern-Simons ゲージ理論を思わせる。以下、CSFT の作用として主に (3) の方を用いる。

この作用を基軸に概念の解説をしていく。以下の式において、 $A, B, C$  などは  $\mathcal{A}$  の任意の元を表すものとする ( $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ )。

**公理 2.1**  $\Phi$  は、次数付き結合的代数 (*graded associative algebra*)  $(\mathcal{A}, *, G)$  の次数 1 の元である:

$$\begin{aligned} * : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A * B) * C &= A * (B * C) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} G : \mathcal{A} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ G_{A*B} &= G_A + G_B, \end{aligned} \quad (5)$$

**公理 2.2**  $g$  は何かこの理論を特徴づける *parameter* である。

**公理 2.3**  $Q$  は  $\mathcal{A}$  の、べき零な、次数 1 の微分演算子 (*derivation*) である:

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ Q^2 A &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q(A * B) = (QA) * B + (-1)^{G_A} A * (QB), \quad (7)$$

**公理 2.4**  $\int$  は  $\mathcal{A}$  の双対空間の元 ( $\int \in \mathcal{A}^* \equiv \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$ ) であって次の性質を満たす<sup>3</sup>:

$$(\text{Stokes}) \quad \int QA = 0, \quad (8)$$

$$(\text{cyclicity}) \quad \int A * B = (-1)^{G_A G_B} \int A * B, \quad (9)$$

$$(\text{anomaly}) \quad G_A \neq 3 \Rightarrow \int A = 0. \quad (10)$$

**公理 2.5** ( $\mathcal{A}$  が Hilbert 空間になること)

$$\langle A, B \rangle := \int A * B \quad (11)$$

と定めると、 $\langle \rangle$  は内積の性質を満たす。<sup>4</sup>

<sup>3</sup>性質 (anomaly) から、作用 (3) は  $\Phi$  の次数が 1 の場合以外は消えてしまうことに注意する。この条件は、disk amplitude を消さないために、 $c$ -ゴーストを 3 つ挿入することに対応している。

<sup>4</sup>数学的に正確な表現を用いるならば少なくとも  $\mathcal{A}$  は  $C^*$  代数になる必要があるが、本論文では数学的に厳密な表現に拘泥しない。

この公理系が主張するところは、作用が (3) の形をした理論がこの公理系を満たす場合、この理論はゲージ不変な理論である、というものである。

作用 (3) は次数 0 のパラメータ  $\Lambda \in \mathcal{A}$  を用いた次の変換の下に不変である：

$$\delta_\Lambda \Phi = Q\Lambda + \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi. \quad (12)$$

証明は以下の通りである。作用の微小変換を、後に導く (34) を用いることにすれば、(34) に (12) を代入して

$$\begin{aligned} -g^2 \delta_\Lambda S &= \langle Q\Lambda + \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi, Q\Phi + \Phi * \Phi \rangle \\ &= \langle Q\Lambda, Q\Phi \rangle \\ &\quad + \langle Q\Lambda, \Phi * \Phi \rangle + \langle \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi, Q\Phi \rangle \\ &\quad + \langle \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi, \Phi * \Phi \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。(13) のうち、第 1, 2, 3 段とも公理 2.3、2.4 を用いることにより消すことができる。したがって、題意が示された。



## 2.2 具体的実現

CSFT を具体的に弦理論として実現することを始める [8]。

背景時空は、26次元 (臨界次元) の平坦 (flat) な Minkowski 時空  $\mathcal{M}$  とし、BCFT の物質場、ゴースト場になるものは時空座標  $X^\mu$ 、ゴースト、反ゴースト (ghost, antighost) 座標  $c, b$  である。ゴースト、反ゴースト座標を入れておくのは共変的な弦の場の理論を作りたいからであった。

- $\mathcal{A}$  はこの空間を運動する開弦の場全体を含む空間とする。

特に、このうちの次数が  $n$  の空間を  $\mathcal{A}^{(n)}$  とかくことにする。

- 次数  $G$  はゴースト数とする。規格化は  $c$  が 1、 $b$  が  $-1$ 、 $\text{SL}(2, \mathbf{R})$  真空  $|0\rangle$  は 0 とする。

この定義により、ゴースト数の偶奇と Grassmann 数の偶奇が同じになることが分かる。

- $\Phi$  は、開弦の場  $\Phi$  とし、これは物質場  $X^\mu, c, b$  の微分 “多項式” とする<sup>5</sup>。

すると  $\Phi$  はゴースト数が 1 であるため、成分場にゴースト数をもたせない場合、次のように展開できる:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi[X, c, b] \\ &= t(X)c + A_\mu(X) (i\sqrt{2}\partial X^\mu)c + u(X)\partial c + \\ &\quad + [B_{\mu\nu}(X)(i\sqrt{2}\partial X^\mu)(i\sqrt{2}\partial X^\nu) + B_\mu(X)(i\sqrt{2}\partial^2 X^\mu)]c \\ &\quad + C_\mu(X)(i\sqrt{2}\partial^2 X^\mu)\partial c + v_1(X)\frac{1}{2}\partial^2 c + v_2(X)bc\partial c + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$\partial X^\mu, \partial c$  などがあるが、もちろんこの時点で  $\partial$  に意味はなく、 $\partial X^\mu, \partial c$  などをも一つの場として理解しなくてはいけない。ここではレベル 2 まで書き下しており、レベル 0 の場  $t(X)$  がタキオン場であり、レベル 1 の場  $A_\mu(X), u(X)$  はそれぞれゲージ場と Nakanishi-Lautrup 場に相当するものであり、レベル 2 以降の場はすべて質量をもった場である。

- $Q$  は BRST 作用素とする:  $Q = Q_{\text{BRST}}$ .

特に、今は臨界次元での弦理論を考えているので、BRST 作用素はべき零になる。

- $\int$  は、次のように期待値を取る操作とする:

<sup>5</sup>解析力学で現れる点粒子の Lagrangean 密度も、座標に関する 1 階の (時間) 微分多項式である。Newton 理論では、初期条件として粒子の初期位置と初速度を決めれば後の時間発展は完全に決まると考えるため 1 階という条件をつけるが、弦の場の理論ではそのような条件はつけない。また、“多項式”と書いているが、これは数学的には「べき級数」の意味で用いている。

$$\int \Phi = \langle f^{360^\circ} \circ \Phi[X(0), c(0), b(0)] \rangle^6 \quad (15)$$

ここに、 $f^{360^\circ}$  は Caylay 変換<sup>7</sup> $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$  を用いて次のように定義される:

$$f^{360^\circ}(z) = h^{-1}(h(z)^2) = \frac{2z}{1-z^2} \quad (16)$$

- $g$  は、開弦の結合定数とする。
- star 積  $*$  は、 $\mathcal{A}$  における完全系  $\sum_r |\phi_r^c\rangle\langle\phi_r| = \text{id}^8$  を用いて次のように定義する:

$$\Phi * \Psi = \sum_r \langle \Phi, \Psi, \phi_r \rangle \phi_r^c \quad (17)$$

ただし、 $\langle \Phi, \Psi, \Xi \rangle$  は、共形変換  $f_1, f_2, f_3$  を

$$\begin{aligned} f_1^{(3)}(z) &= h^{-1}(e^{-\frac{2\pi i}{3}} h(z)^{2/3}) = \tan\left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\arctan(z)\right) \\ f_2^{(3)}(z) &= h^{-1}(h(z)^{2/3}) = \tan\left(\frac{2}{3}\arctan(z)\right) \\ f_3^{(3)}(z) &= h^{-1}(e^{\frac{2\pi i}{3}} h(z)^{2/3}) = \tan\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\arctan(z)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて次のように定義するものとする:

$$\langle \Phi, \Psi, \Xi \rangle = \langle f_1^{(3)} \circ \Phi(0) f_2^{(3)} \circ \Psi(0) f_3^{(3)} \circ \Xi(0) \rangle. \quad (19)$$

$\mathcal{A}^{(1)}$  は Hilbert 空間になるが、この空間を bracket 表示を用いて書いておくと便利である。その ket 表示は

$$|\Phi\rangle \equiv \Phi[X(0), c(0), b(0)]|0\rangle \quad (20)$$

で与えられる。状態  $|\Phi\rangle$  は、物理的には弦  $\Phi$  が時刻  $-\infty$  において  $\text{SL}(2, \mathbf{R})$  真空  $|0\rangle$  に挿入された漸近状態 (asymptotic state) を表す。これを図に表したものを図3に示す。

またこのことにより Hilbert 空間  $\mathcal{A}^{(1)}$  の ket 表示  $|\mathcal{A}^{(1)}\rangle$  は

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^{(1)}\rangle &= \bigoplus C(\mathcal{M})_{\mu_1 \dots \mu_i} \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-n_i}^{\mu_i} b_{-p_1} \dots b_{-p_l} c_{-m_1} \dots c_{-m_j} |0\rangle \\ &=: \mathcal{H}_{C(\mathcal{M})}^{(1)} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ただし、 $C(\mathcal{M})_{\mu_1 \dots \mu_i}$  は、今考えている時空  $\mathcal{M}$  における考えられる実数値に値を取る成分場全体を表すものとし、直和  $\bigoplus$  は次を走るものとする:

$$n_i \geq 1, \quad m_i \geq -1, \quad p_i \geq 2, \quad j - l = 1. \quad (22)$$

<sup>6</sup>ここには明示的に書いていないが、弦の場を世界面に挿入する際には補遺 A で用いたような正則化を常に行うものとする。これは弦の運動を単純に表すと場の値が発散してしまうからである。

<sup>7</sup>Caylay 変換は複素平面を単位開円板に移す複素 1 次分数変換である。

<sup>8</sup> $\mathcal{A}$  は Hilbert 空間になること (正確には、その可分性) を既に用いている。

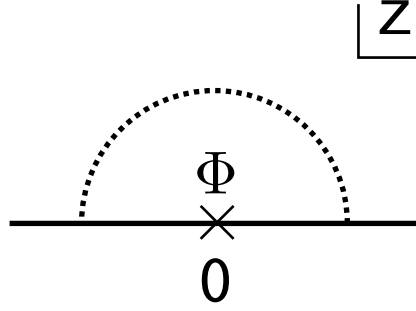


図 3: 状態  $|\Phi\rangle$  を表す図。弦  $\Phi$  が時刻  $-\infty$  に相当する  $z = 0$  に挿入されている。点線はその後の時間発展した弦の様子を表す。

(14) を Fourier 変換をすると  $|\Phi\rangle$  は以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle = \int d^{26}p \{ & t(p) + A_\mu(p) \alpha_{-1}^\mu + u(p) b_{-1} \\
& + B_{\mu\nu}(p) \alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu + B_\mu(p) \alpha_{-1}^\mu + \\
& + C_\mu(p) \alpha_{-1}^\mu c_0 b_{-1} + v_1(p) c_{-1} b_{-1} + v_2(p) b_{-2} c_0 \cdots \} c_1 |p\rangle.
\end{aligned} \tag{23}$$

したがって、Hilbert 空間  $|\mathcal{A}^{(1)}\rangle$  の運動量表示では以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}^{(1)}\rangle &= \bigoplus C(\mathcal{M}^*)_{\mu_1 \cdots \mu_i} \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \cdots \alpha_{-n_i}^{\mu_i} b_{-p_1} \cdots b_{-p_l} c_{-m_1} \cdots c_{-m_j} |p\rangle \\
&=: \mathcal{H}_{C(\mathcal{M}^*)}^{(1)}
\end{aligned} \tag{24}$$

となる。ただし、 $C(\mathcal{M}^*)_{\mu_1 \cdots \mu_i}$  は、今考えている時空における考えられる成分場の運動量表示全体を表すものとし、直和  $\bigoplus$  は次を走るものとする:

$$p \in \mathcal{M}^*, \quad n_i \geq 1, \quad m_i \geq -1, \quad p_i \geq 2, \quad j - l = 1. \tag{25}$$

以上の定義の下に、この理論が節 2.1 で掲げた CSFT の公理系を満たす理論であることが示される [8, 19]。したがって、この理論はゲージ不変な理論であることが分かる。Witten は 26 次元 (臨界次元) の平坦な時空で示したが、Schwarz と Sen [19] は、物質場の中心電荷 (central charge) が 26、ゴースト場の中心電荷が  $-26$  であるような一般の CFT で節 2.1 の公理系が成立することを示した。ここでの定義は Schwarz-Sen のものを用いている。また、振動子代数を用いた定義による証明は [20] にある。

この主張の証明の鍵となる定理が一般化貼り付け定理 (generalized gluinig-resmoothing theorem (GGRT)) であることだけを述べるだけにとどめ、その証明は原論文に譲ることにする<sup>9</sup>。

これらの定義から相関関数の計算に有用な次の公式が導かれる。

<sup>9</sup>GGRT の原論文は [26]。[19] にも tree level での証明がある。また [21] では 1 loop での証明も行われており、all-loop でも成立することを予想している。

まず2点関数は次のように計算すればよいことが分かる:

$$\int \Phi * \Psi = \langle \Phi, \Psi \rangle = \langle I \circ \Phi(0) \Psi(0) \rangle. \quad (26)$$

ただし、 $I(z)$  は反転 (inversion):  $I(z) = -\frac{1}{z}$  とする。

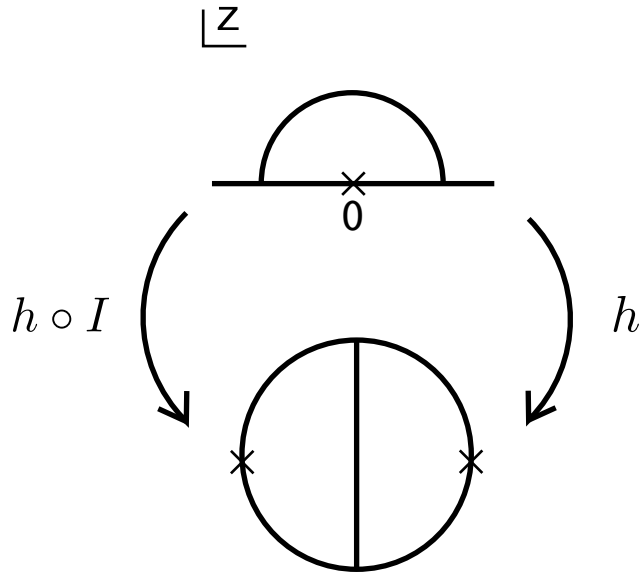


図 4: 2点関数の図示。単位円板上で表すために Caylay 変換  $h$  を付け加えている。

3点関数は次のように計算すればよい:

$$\int \Phi * \Psi * \Xi = \langle \Phi, \Psi * \Xi \rangle = \langle \Phi, \Psi, \Xi \rangle. \quad (27)$$

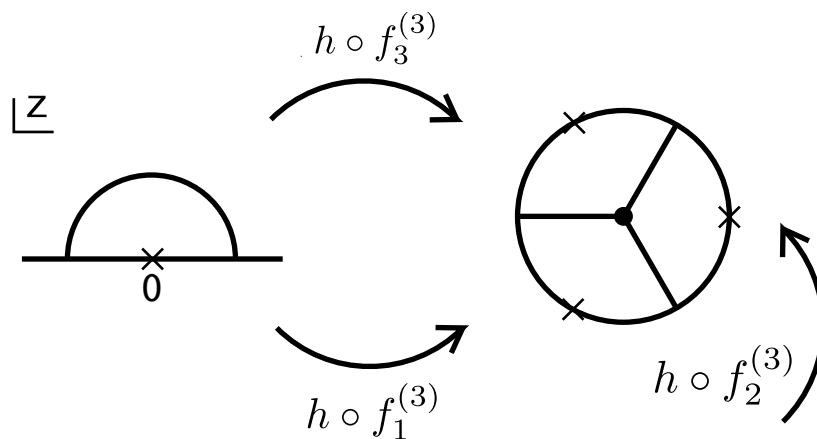


図 5: 3点関数の図示。単位円板上で表すために Caylay 変換  $h$  を付け加えている。

一方、CFT の性質から 3 点関数における循環性 (cyclicity) が導かれる:

$$\langle \Phi, \Psi, \Xi \rangle = \langle \Psi, \Xi, \Phi \rangle \quad (28)$$

証明は次の通りである。\$S(z)\$ を

$$S(z) = h^{-1}(e^{\frac{2\pi i}{3}} h(z)) = \frac{z + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 1} \quad (29)$$

と定めると、共形変換 \$f\_i\$ たちはその形から次を満たす:

$$f_3^{(3)}(z) = S \circ f_2^{(3)}(z) = S^2 \circ f_1^{(3)}(z) \quad (30)$$

(29) の形から \$S(z)\$ は \$SL(2, \mathbf{R})\$ 変換であることがわかるので、(30) は共形変換 \$f\_i\$ たちが \$SL(2, \mathbf{R})\$ 変換で移り合うことを表す。他方、上半平面上の相関関数は \$SL(2, \mathbf{R})\$ 変換で不変であり、相関関数の中の場合はすべてゴースト数が 1 なので循環させても符号は変わらない。よって (28) が示された。

最小作用の原理を用いて、運動方程式を導いておく。作用は、

$$S(\Phi) = -\frac{1}{g^2} \left[ \frac{1}{2} \langle \Phi, Q\Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right]. \quad (31)$$

である。見やすくするため、作用を運動項 \$S\_1 = -\frac{1}{2g^2} \langle \Phi, Q\Phi \rangle\$ と相互作用項 \$S\_2 = -\frac{1}{3g^2} \langle \Phi, \Phi \* \Phi \rangle\$ の二つに分けると、それぞれの部分で微小変換は以下ようになる:

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= -\frac{1}{2g^2} \left[ \langle \delta\Phi, Q\Phi \rangle + \langle \Phi, Q\delta\Phi \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{g^2} \langle \delta\Phi, Q\Phi \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= -\frac{1}{3g^2} \left[ \langle \delta\Phi, \Phi, \Phi \rangle + \langle \Phi, \delta\Phi, \Phi \rangle + \langle \Phi, \Phi, \delta\Phi \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{g^2} \langle \delta\Phi, \Phi, \Phi \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

二つを加えることによって、

$$\delta S = -\frac{1}{g^2} \left[ \langle \delta\Phi, Q\Phi + \Phi * \Phi \rangle \right]. \quad (34)$$

を得る。従って、運動方程式は以下のようになることが分かる:

$$F(\Phi) \equiv Q\Phi + \Phi * \Phi = 0. \quad (35)$$

特に相互作用のない場合 (\$\Phi/g:\text{fix}, g \rightarrow 0\$) で考えると、運動方程式は \$Q\Phi = 0\$ であり、ゲージ自由度は \$\delta\_\Lambda \Phi = Q\Lambda\$ となる。したがって、自由な弦の場の古典論は、弦の世界面の理論を再現している。

<sup>10</sup>\$\Phi\$ をゲージ場と思うと、これは field strength \$F(\Phi)\$ がゼロになることを意味する。他方、この方程式はさながら Maurer-Cartan 方程式を思わせる。従って、\$Q\$ を複素微分と思ひ、\$\Phi\$ を複素構造の変形のパラメータと思うと、この理論は古典的には複素構造の変形理論を考えていることに相当する。すなわち、弦の相互作用の導入は、数学的に言えば、複素構造の変形に対応しているのである。

## 2.3 対称性と拘束条件

前節では CSFT を具体的な弦の場の理論として実現した。この節では、具体化された CSFT の背後にある対称性を調べる。

### 2.3.1 ゲージ対称性

CSFT がゲージ対称性をもつことについては、既に節 2.1 で触れた。便宜のためゲージ対称性の主張をもう一度掲げる:

作用 (3)、従って運動方程式 (35) は次数 0 のパラメータ  $\Lambda \in \mathcal{A}; G_\Lambda = 0$  を用いた次の変換 (微小ゲージ変換) の下に不変である:

$$\delta_\Lambda \Phi = Q\Lambda + \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi. \quad (36)$$

点粒子の場の理論同様に、ゲージ対称性をもつ場の理論に関して重要な点は、その理論で摂動計算する際にはゲージを固定する必要がある、という点である。世界面の開弦理論では、物理的状態 (physical state) のゲージ固定条件として Feynman-Siegel ゲージ

$$b_0|\text{phys}\rangle = 0 \quad (37)$$

が取れることが知られている。実際、このゲージを取ることで BRST 量子化 [22] と共変的量子化 (old covariant quantization(OCQ)) の等価性が示される。このことは、2つある Vock 真空  $|c_1\rangle, c_0|c_1\rangle$  のうち、BRST-exact の方ではない  $|c_1\rangle$  の方によって作られる Vock 空間を物理的な状態として選ぶことを意味する。以下、このゲージを FS ゲージ と呼ぶ。実は、off-shell の理論である CSFT においても、自由な理論の近傍では on-shell の部分を除いてこのゲージが取れることが分かる。すなわち、

on-shell の部分を除いた弦の場は、その値が 0 の近傍において、1 次のオーダーで Feynman-Siegel ゲージにとれる。

証明は以下の通りである。まず、 $|\Phi\rangle$  が FS ゲージ条件を満たしていなかったとしよう。 $|\Phi\rangle$  は、on-shell のところを除いて考えているので、ゴースト数 0 の次のゲージパラメータ  $|\Lambda\rangle = -\frac{b_0}{L_0}|\Phi\rangle$  がうまく定義される (well-defined)。このゲージパラメータで  $|\Phi\rangle$  を動かしてできた状態  $|\tilde{\Phi}\rangle = |\Phi\rangle + |\delta_\Lambda \Phi\rangle$  が FS ゲージ条件を満たすことを示せば十分である:

$$b_0|\tilde{\Phi}\rangle = b_0|\Phi\rangle + b_0|\delta_\Lambda \Phi\rangle \stackrel{??}{=} 0. \quad (38)$$

第 2 項を書き下すと、

$$b_0|\delta_\Lambda \Phi\rangle = b_0Q\left(-\frac{b_0}{L_0}|\Phi\rangle\right) + b_0\left[|\Phi\rangle * \left(-\frac{b_0}{L_0}|\Phi\rangle\right) - \left(-\frac{b_0}{L_0}|\Phi\rangle\right) * |\Phi\rangle\right] \quad (39)$$

となる。このうち第 1 項は  $\{Q, b_0\} = L_0, [Q, L_0] = [L_0, b_0] = 0$  を用いることで  $-b_0|\Phi\rangle$  になり、第 2 項は、 $|\Phi\rangle$  が微小量だと思えば 2 次の微小量なので無視すると、

$$b_0|\tilde{\Phi}\rangle = b_0|\Phi\rangle - b_0|\Phi\rangle + O(|\Phi|^2) = 0 + O(|\Phi|^2) \quad (40)$$

となり、題意が示された。

これによりすべてのゲージ自由度が固定されたか気になるが、このことを調べるには FS ゲージ条件を満たすゲージパラメータ  $|\Lambda'\rangle$  が次の条件を満たす場合、どれだけその自由度が残っているか調べればよい:

$$b_0|\Phi\rangle = 0 \quad , \quad b_0|\delta_{\Lambda'}\Phi\rangle. \quad (41)$$

第 2 式の左辺は

$$b_0|\delta_{\Lambda'}\Phi\rangle = L_0|\Lambda'\rangle + O(|\Phi\rangle) \quad (42)$$

となるので、上の条件は

$$L_0|\Lambda'\rangle = 0 \quad (43)$$

となる。したがって、これは  $\Lambda'$  の on-shell 以外の部分は 0 になって消えてしまう。したがって、FS ゲージに関しては on-shell 以外は FS ゲージで固定されている。

物理的状態を FS ゲージに限った場合、BRST 作用素の FS ゲージにおける運動項における計算は次のようにしてよい:

$${}_{\text{FS}}\langle\Phi'|Q|\Phi\rangle_{\text{FS}} = {}_{\text{FS}}\langle\Phi'|L_0c_0|\Phi\rangle_{\text{FS}} \quad (44)$$

このことを示すには、任意の  $\Phi$  に対して  $c_0$  の作用で消える  $\phi, \psi$  が存在して、

$$|\Phi\rangle = b_0|\phi\rangle + |\psi\rangle \quad (45)$$

とかけることに注意する。というのも  $|\Phi\rangle = \{b_0, c_0\}|\Phi\rangle = b_0c_0|\Phi\rangle + c_0b_0|\Phi\rangle$  において、 $|\phi\rangle = c_0|\Phi\rangle, |\psi\rangle = b_0|\Phi\rangle$  と置くことができるからである。

この記号を用いると、

$$|\Phi\rangle_{\text{FS}} = b_0|\phi\rangle. \quad (46)$$

である。さて、(45) を示す。

$$\begin{aligned} {}_{\text{FS}}\langle\Phi'|Q|\Phi\rangle_{\text{FS}} &= \langle\phi'|b_0Qb_0|\phi\rangle \\ &= \langle\phi'|b_0\{Q, b_0\}|\phi\rangle \\ &= \langle\phi'|b_0L_0|\phi\rangle \\ &= \langle\Phi'|L_0\{c_0, b_0\}|\phi\rangle \\ &= \langle\Phi'|L_0c_0b_0|\phi\rangle \\ &= {}_{\text{FS}}\langle\Phi'|L_0c_0|\Phi\rangle_{\text{FS}} \end{aligned} \quad (47)$$

これにより、(45) が示された。

### 2.3.2 twist 対称性

弦は、その幾何学的形状からも推察されるように、向き付けをすることが一般に可能である。世界面の parity 変換は次のように定義される:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \tau & \rightarrow \tau \\ \sigma & \rightarrow \bar{\sigma} - \sigma \end{cases} \quad (48)$$

ここで、今は開弦を考えているので、 $0 \leq \sigma \leq \bar{\sigma} = \pi$  である。(334)により、この変換に対し共形次元  $h$  の primary 場は次のように振る舞う:

$$\mathcal{P} \circ \phi(z) = \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \right)^h \phi(\mathcal{P}z). \quad (49)$$

今は開弦を考えているので、 $\phi = X^\mu, c, b$  である。これを振動子表示で書くと次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ \alpha_n^\mu &= (-)^n \alpha_n^\mu \\ \mathcal{P} \circ c_n &= (-)^n c_n \\ \mathcal{P} \circ b_n &= (-)^n b_n \end{aligned} \quad (50)$$

SL(2,  $\mathbf{R}$ ) 真空  $|0\rangle$  に対する符号だが、twist-odd とする:

$$U_{\mathcal{P}}|0\rangle = -|0\rangle^{11}. \quad (51)$$

これは Vock vacuum  $|c_1\rangle$  が twist even になることを意味する。これを用いると以下のことが示せる:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ L_n &= (-)^n L_n \\ \mathcal{P} \circ Q &= Q \\ \langle \mathcal{P} \circ A, \mathcal{P} \circ B \rangle &= \langle A, B \rangle \\ \mathcal{P} \circ (A * B) &= (-)^{AB} (\mathcal{P} \circ B) * (\mathcal{P} \circ A). \end{aligned} \quad (52)$$

第1式、第2式は、 $\Omega$ の性質(50)同様、レベルの分だけ符号を稼ぐ、という性質である。第3式は、内積が twist 対称性をもつことを意味する。第4式は、\*積に対する性質である。twist 作用は弦の向き付けを逆にするので\*積の順番を入れ替える。

(52)を弦の場に適用して以下の結果を得る:

$$\mathcal{P} \circ (\Phi * \Phi) = (\mathcal{P} \circ \Phi) * (\mathcal{P} \circ \Phi) \quad (53)$$

これを弦の場の理論の作用に適用すると作用の twist 対称性を得る:

$$S(\mathcal{P} \circ \Phi) = S(\Phi). \quad (54)$$

この対称性により、次のように CSFT における物理を制限することができる:

<sup>11</sup>[52]の記号では  $U_{\mathcal{P}} = \Omega$  である。



1. CSFT に現れるスペクトラムを twist-even なものに制限しても consistent な理論になる。
2. CSFT における運動方程式の解として、twist-even なものが存在する。

この twist 対称性は、相互作用項を計算するに当たっても有用である。まず、弦の場  $\Phi$  を twist-even 項  $\Phi^{\text{even}}$  と twist-odd 項  $\Phi^{\text{odd}}$  に分解し、相互作用項に代入すると、相関関数の循環性を用いて、

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \Phi, \Phi \rangle &= \langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}} \rangle + 3\langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle + \\ &+ 3\langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle + \langle \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle \end{aligned} \quad (55)$$

となる。(52) を用いると、

$$\langle A, B, C \rangle = (-1)^{AB+BC+CA} \langle \mathcal{P} \circ C, \mathcal{P} \circ B, \mathcal{P} \circ A \rangle. \quad (56)$$

が求まる。この  $A, B, C$  に  $\Phi^{\text{even}}$  もしくは、 $\Phi^{\text{odd}}$  を代入することで、

$$\langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}} \rangle = \langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle = 0 \quad (57)$$

が示されるので、(55) は

$$\langle \Phi, \Phi, \Phi \rangle = 3\langle \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{even}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle + \langle \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}}, \Phi^{\text{odd}} \rangle \quad (58)$$

となる。具体的には、 $\Phi^{\text{odd}} \sim tc_1 + \dots$ 、 $\Phi^{\text{even}} \sim A \cdot \alpha_{-1}c_1 + \dots$  であるから、 $ttA$  や  $AAA$  といった項は作用に現れないことが分かる。

### 2.3.3 SU(1,1) 対称性

FS ゲージを取ることににより生じる対称性が存在する [23, 24]。FS ゲージにおいて 3 点関数は、(45) の記号を用いると、

$$\langle V_3 | \Phi, \Phi, \Phi \rangle_{\text{FS}} = {}_{\text{FS}} \langle V_3 | \phi, \phi, \phi \rangle. \quad (59)$$

となる。ここに  ${}_{\text{FS}} \langle V_3 |$  は小節 3.1.1 で定義される 3 弦頂点  $\langle V_3 |$  を用いて定義されるものでありゴースト部分だけ抜き出すと

$$\begin{aligned} {}_{\text{FS}} \langle V_3 | &= \langle V_3 | b_0^{(1)} b_0^{(2)} b_0^{(3)} \\ &= \mathcal{N} \langle c |^{(3)} \langle c |^{(2)} \langle c |^{(1)} (\exp \left( \sum_{r,s=1}^3 \sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} b_m^{(r)} X_{mn}^{rs} c_n^{(s)} \right)). \end{aligned} \quad (60)$$

となる。この 3 弦頂点  $\langle v_3 |$  のゴースト部分の Neumann 係数に対し  $X_{nm}^{rs} = \frac{n}{m} X_{mn}^{sr}$ ,  $n, m \geq 1$  が成立することが分かる [24]。したがって、 ${}_{\text{FS}} \langle V_3 |$  における  $\exp$  の肩の部分は

$$\sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} b_m^{(r)} X_{mn}^{rs} c_n^{(s)} = \frac{1}{2m} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} X_{mn}^{sr} \left( m b_m^{(r)} c_n^{(s)} + n b_n^{(s)} c_m^{(r)} \right). \quad (61)$$

のようになるが、これは次の連続変換の下に不変であることが直接計算することにより示される。

$$\begin{pmatrix} n b_n^{(r)}(\theta) \\ c_n^{(r)}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n b_n^{(r)} \\ c_n^{(r)} \end{pmatrix} \quad (62)$$

したがって、 $c_n^{(r)}, b_n^{(r)}$  を  $c_n^{(r)}(\theta), b_n^{(r)}(\theta)$  で置き換えた 3 弦頂点を  ${}_{\text{FS}} \langle V_3(\theta) |$  と書くことにすれば、この不変性は次の U(1) 不変性

$${}_{\text{FS}} \langle V_3(\theta) | = {}_{\text{FS}} \langle V_3 | \quad (63)$$

を意味する。一方で、この連続変換 (62) を無限小変換の生成子  $\mathcal{S}_1$  を用いて書くと

$$\begin{pmatrix} n b_n^{(r)}(\theta) \\ c_n^{(r)}(\theta) \end{pmatrix} = e^{\theta \mathcal{S}_1} \begin{pmatrix} n b_n^{(r)} \\ c_n^{(r)} \end{pmatrix} e^{-\theta \mathcal{S}_1} \quad (64)$$

となる。ただし、 $\mathcal{S}_1$  は

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( -n b_n^{(r)} b_{-n}^{(r)} + \frac{1}{n} c_n^{(r)} c_{-n}^{(r)} \right). \quad (65)$$

で与えられる。証明は両辺を  $\theta$  で微分すればよい。この  $\mathcal{S}_1$  は  $\text{SL}(2, \mathbf{R})$  真空  $|0\rangle$  を消すことが分かるので、

$${}_{\text{FS}} \langle V_3(\theta) | = {}_{\text{FS}} \langle V_3 | e^{-\theta \mathcal{S}_1} \quad (66)$$

が言える。(63) と合わせれば

$${}_{\text{FS}} \langle V_3 | \mathcal{S}_1 = 0 \quad (67)$$

となる。

他方、 ${}_{\text{FS}}\langle V_3|$ はその形からゴースト数を保存する。そのゴースト数を定める  $U(1)$  変換の生成子  $\mathcal{G}$  は

$$\mathcal{G} = \sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n^{(r)} c_{-n}^{(r)} - c_n^{(r)} b_{-n}^{(r)} \right). \quad (68)$$

と書けるから、(67) のときと同様

$${}_{\text{FS}}\langle V_3| \mathcal{G} = 0 \quad (69)$$

が言える。

(67)、(69) により  ${}_{\text{FS}}\langle V_3|$  は  $\mathcal{S}_1$ 、 $\mathcal{G}$  で生成される Lie 代数の変換によって不変に保たれることが分かる。この Lie 代数を調べる。まず、 $\mathcal{S}_1$  と  $\mathcal{G}$  の交換関係は

$$[\mathcal{S}_1, \mathcal{G}] = 2\mathcal{S}_2 \quad (70)$$

となる。ただし、 $\mathcal{S}_2$  は

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( n b_n^{(r)} b_{-n}^{(r)} + \frac{1}{n} c_n^{(r)} c_{-n}^{(r)} \right) \quad (71)$$

である。さらに交換関係を調べていくと

$$[\mathcal{S}_2, \mathcal{G}] = 2\mathcal{S}_1, \quad [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2] = -2\mathcal{G} \quad (72)$$

となることが分かる。したがって、 $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{G}\}$  で生成される Lie 代数は  $su(1, 1)$  であることが分かった<sup>12</sup>。以上により FS ゲージをとった 3 弦頂点は  $SU(1, 1)$  不変である。この対称性により、CSFT に現れるスペクトラムを  $SU(1, 1)$  不変なものに制限しても consistent な理論になる。

---

<sup>12</sup> $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{G}\}$  を線形変換して  $X = (\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1)/2$ 、 $Y = (\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_1)/2$ 、 $H = \mathcal{G}$  と書くことにすると、それらの交換関係は Lie 代数  $sl(2, R)$  のそれと一致する:  $[X, Y] = H$ ,  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = -2Y$ .

## 2.4 タキオン解

具体的に CSFT におけるタキオンポテンシャルを tree level で計算することを考える。これを行うには、点粒子のスカラー場の理論で有効ポテンシャルを求めるときのように次の性質を利用する:

場を時空に依存しないものとする、作用が体積因子 (volume factor) とポテンシャル (に  $-$  をかけた) 項に因子化される。

このことは、仮定により作用の被積分関数が定数になることから分かる。

このとき求めたポテンシャルの停留点は、作用の停留点、すなわち運動方程式の解になり、停留点での値をその場の真空期待値 (vacuum expectation value) と考える<sup>13</sup>。このとき、ポテンシャルの停留点は一般に複数個あることが考えられるので、考察したい真空に応じてどの停留点を選ぶか決める必要がある。例えば Lorentz 不変な真空を得たければ、時空の足をもった場 (ゲージ場など) は真空期待値をもつべきではないので、それらの値が 0 になるような停留点を探すべきである。

もちろん、ポテンシャルの概形から決めるのではなく、時空に依存しない運動方程式の解を先に求めて、それを作用に代入し、上の性質を利用して、ポテンシャルの値を読み取る、という方法も考えられる。どちらの方法も、順序は違えど本質的に等価なので、状況に応じて使い分ければよい<sup>14</sup>。

いずれにおいても、弦の場の理論において困難な点は、構成している場が無限個あるため計算が無限に続くところである。この困難を解消、軽減するにはどうしたらよいか。

まず、我々が得たい真空は Lorentz 不変な真空なので、スカラー場以外 (ゲージ場など) の場はすべて真空期待値をもたない、と仮定する。以下、そういう性質を満たす”非自明な”<sup>15</sup>運動方程式の解を総称して タキオン解 と呼ぶことにする。タキオン解を探す際、真空期待値をもたないようなスカラー場が最初から分かると、それらを 0 においてタキオン解を探すことができるのでいくらか簡単になる。そのようなスカラー場を探すにはどうしたらよいか。それには、次の補題を利用するとよい。この補題により、作用の中の 2 次以上になっているスカラー場は最初から 0 においてタキオン解を探すことができる。

作用の中で 2 次以上になっているスカラー場はその運動方程式において自明な解をもつ。

証明は以下の通りである。作用の中で 2 次以上になっているスカラー場を  $s_2$  と書くことにする。 $s_2$  を変分して運動方程式を導くと、すべての項には少なくとも一つ  $s_2$  が含まれていて  $s_2$  に関する定数項がない。したがって、 $s_2 = 0$  がこの運動方程式の解になる。これで主張が示された。

より具体的にタキオン解に現れるスカラー場を調べる。そのようなスカラー場を総称して タキオン成分場 と呼ぶことにする。タキオン成分場を係数にもつ Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_1$  とし、そ

<sup>13</sup>量子補正を取り入れたポテンシャルを得たければ、停留点からの揺らぎを考えて経路積分を実行すればよい。

<sup>14</sup>本論文で紹介する Schnabl の方法は、運動方程式の解を 1-parameter で先に求めてからそれを用いてタキオンポテンシャルを計算している。

<sup>15</sup>正確には、自明な解とゲージ同値でない、という条件を満たすこととする。

うでない、非タキオン成分場を係数にもつ Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_2$  としたとき、これらの Hilbert 空間を具体的に Vock 空間として表示することを考える。

出発点となる Hilbert 空間は、弦の場の漸近状態全体のなす Hilbert 空間 (24) である。

$$\mathcal{H}^{(1)} = \bigoplus \mathbf{R} \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \cdots \alpha_{-n_i}^{\mu_i} b_{-p_1} \cdots b_{-p_l} c_{-m_1} \cdots c_{-m_j} |p\rangle. \quad (73)$$

$$(p \in \mathcal{M}', \quad n_i \geq 1, \quad m_i \geq -1, \quad p_i \geq 2, \quad j-l=1.) \quad (74)$$

すでに係数の運動量依存性は落とした。まず物質場のなす Hilbert 空間を考える。このうち、スカラー場を考えるのであれば、 $\alpha_{-n_1}^{\mu_1} \cdots \alpha_{-n_i}^{\mu_i}$  の部分は時空の足がつぶれている必要がある。したがって、この部分は  $\alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{-m, \mu}$  で生成されてればよいが、実はこの部分は物質場からつくられる Virsoro 生成子  $L_{-n}^X$  で生成される<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{scalar}}^{X(1)} &= \bigoplus_{n_i \geq 1, k \in \mathcal{M}'} \mathbf{R} \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \alpha_{-m_1, \mu_1} \cdots \alpha_{-n_i}^{\mu_i} \alpha_{-m_i, \mu_i} |k\rangle \\ &= \bigoplus_{n_i \geq 2, k \in \mathcal{M}'} \mathbf{R} L_{-n_1}^X \cdots L_{-n_i}^X |k\rangle. \end{aligned} \quad (75)$$

すなわち、スカラー場を表す Hilbert 空間の物質場の部分は、最高重み状態を  $|k\rangle$  にする物質場による CFT の Verma module になる、ということが出来る。

以上の設定の下、 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  の物質場の部分は次のように書ける [27]:

$$\mathcal{H}_1^X = \bigoplus_{n_i \geq 2} \mathbf{R} L_{-n_1}^X \cdots L_{-n_i}^X |k=0\rangle, \quad (76)$$

$$\mathcal{H}_2^X = \bigoplus_{n_i \geq 2, k^\mu \neq 0} \mathbf{R} L_{-n_1}^X \cdots L_{-n_i}^X |k\rangle. \quad (77)$$

すなわち、 $\mathcal{H}_1$  は運動量をもたない状態のなす空間であり、 $\mathcal{H}_2$  は運動量をもつ状態のなす空間である。この主張が成立することは 2 点関数、3 点関数の運動量保存則から分かる。すなわち、運動量をもつ状態の粒子が入射してきたとき、出て行く粒子のうち少なくとも一つは運動量をもっている必要があるからである。

これで  $\mathcal{H}_1$  の物質場の部分を具体的に振動子で表示することができた。 $\mathcal{H}_{1,2}$  のゴースト部分  $\mathcal{H}_{1,2}^{bc}$  は時空の足に依らないから  $\mathcal{H}^{(1)}$  のゴースト部分と同じにしてよい:

$$\mathcal{H}_{1,2}^{bc} = \mathcal{H}^{(1), bc} = \bigoplus_{m_i \geq -1, p_i \geq 2, j-l=1} \mathbf{R} b_{-p_1} \cdots b_{-p_l} c_{-m_1} \cdots c_{-m_j} |0\rangle \quad (78)$$

この Hilbert 空間は、最高重み状態を  $|c\rangle$  として  $b_{-p_j} c_{-m_j}$  で生成されているといえるが、実はこの部分はゴースト場、反ゴースト場からつくられる Virsoro 生成子  $L_{-n}^{bc}$  で生成される<sup>17</sup>:

$$(78) = \bigoplus_{n_i \geq 1} \mathbf{R} L_{-n_1}^{bc} \cdots L_{-n_i}^{bc} |c\rangle. \quad (79)$$

<sup>16</sup> 数学的に証明する場合には、自明な包含関係  $\text{Span}[\alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{-m, \mu}]_{n, m=1, 2, \dots} |k\rangle \supset \text{Span}[L_{-n}^X]_{n=2, 3, \dots} |k\rangle$  があることを利用し、各レベルごとに次元が等しいことを言えばよい。

<sup>17</sup> 数学的に証明する場合には、自明な包含関係  $\text{Span}[b_{-n} c_{-m}]_{n=1, 2, \dots, m=0, 1, \dots} |c\rangle \supset \text{Span}[L_{-n}^{bc}]_{n=1, 2, \dots} |c\rangle$  があることを利用し、各レベルごとに次元が等しいことを言えばよい。

すなわち、タキオン成分場を係数にもつ Hilbert 空間のゴースト場の部分は、最高重み状態を  $|c\rangle$  にするゴースト場による CFT の Verma module になる、ということが出来る。

以上により、タキオン成分場を係数にもつ Hilbert 空間  $\mathcal{H}_1$  が分かった。これを  $\mathcal{H}_{\text{univ}}^{(1)}$  と書くことにしよう。

$$\mathcal{H}_{\text{univ}}^{(1)} = \bigoplus_{m_i \geq \dots m_1 \geq 2, n_j \geq \dots n_1 \geq 1} \mathbf{R} L_{-m_i}^X \dots L_{-m_1}^X L_{-n_j}^{bc} \dots L_{-n_1}^{bc} |c\rangle. \quad (80)$$

すなわち、タキオン成分場を係数にもつ Hilbert 空間は、最高重み状態を  $|c\rangle$  にする全ての場を含めた CFT の Verma module になる、ということが出来る。この形を導くに当たって、BCFT の構成物  $X^\mu, b, c$  を具体的に用いたが、最終的な結果は最高重み状態以外 BCFT の構成物に依っていない。すなわち、この結果はどのような BCFT においても成立する普遍的な形である。タキオン成分場、それゆえタキオンポテンシャルは、BCFT を構成している物質場、ゴースト場によらないのである。

---

<sup>18</sup>  $L_{-n}^{X,bc}$  をこの順序に並び替えることを数学的に証明したければ、Poincaré-Birkhoff-Witt の定理をもちいれ  
ばよい。

### 3 CSFT における \* 積

Witten の開弦の場の理論における \* 積の特徴は、幾何学的には「相互作用点」を開弦の midpoint にとることにある。すなわち、開弦の midpoint によって左部分 (left part) と右部分 (right part) に分けたとき、二つの弦の相互作用は一方の弦の左部分ともう一方の弦の右部分をくっつける (glue) ことによって表される。一般に作用素  $O$  のモード  $O_n$  の右部分と左部分は次のように定義される:

$$O_n^R = \int_{C_R} dz z^{n-h-1} O(z) \quad , \quad O_n^L = \int_{C_L} dz z^{n-h-1} O(z). \quad (81)$$

ここに  $h$  は演算子  $O$  の共形次元であり、 $C_R$  は複素平面では原点から見て単位円周の右側にある  $-i$  から  $i$  までの部分であり、 $C_L$  はその左側である。

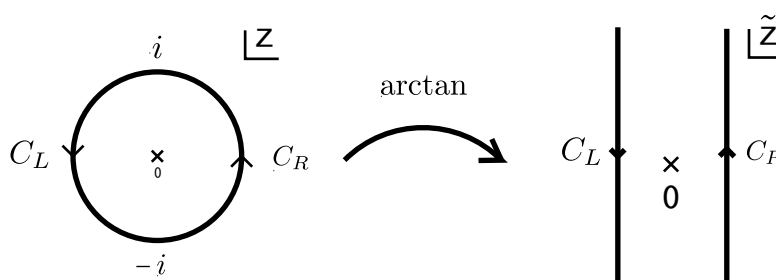


図 6: 弦の左部分と右部分。二重化のトリックを使っているため下半平面が存在する。

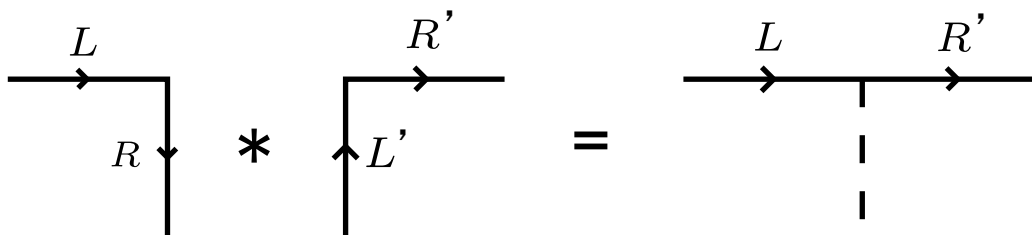


図 7: \* 積の幾何学的意味。\* 積の左側にある弦の右部分と \* 積の右側にある弦の左部分をくっつけて新しい弦ができる。

この図からも見て取れるように \* 積は非可換である。

### 3.1 \*積の計算法

3点関数、\*積の計算は、節 2.2 において CFT を用いて定義したが、実際にはこれと等価な方法がいくつかある。そのうちの 하나가、振動子代数 (oscillator algebra) を用いた方法である (小節 3.1.1)。これは、世界面の理論において相関関数を計算する際、CFT を用いても振動子代数を用いても等価だったことからうかがえる。その二つの方法において本質的に異なる点は、CFT による方法が、一つの Hilbert 空間をいくつかの共形変換で写像することによって弦たちをくっつけていたのに対し、振動子代数による方法は、いくつかの Hilbert 空間のコピーを「頂点」なるものでくっつけて弦たちの相互作用を記述している点にある。

いずれにせよ、primary でない Virasoro descendant の相関関数を直接計算することは、それらのレベルが高くなっていくにしたがって難儀になっていく。しかし、保存則をうまく用いることで比較的容易にそれらを primary 場の相関関数に帰着させられることが分かる (小節 3.1.2)。これにより、3点関数の計算が簡略化される。

一方、\*積の計算は、相関関数を上半平面から共形変換  $\tilde{z} = \arctan(z)$  で移した先 (sliver frame) で評価する非常に簡略化される (小節 3.1.3)。このことは、3点関数を定義したときの共形変換  $f_i(z) (i = 1, 2, 3)$  が、sliver 座標では affine 変換になることからうかがえる。この sliver 座標系の特徴として他に挙げられるのは、上半平面上では弦の相互作用点である中点が  $i$  に位置していたのに対し、sliver 上ではその点が  $i\infty$  点になっていることも挙げられる。

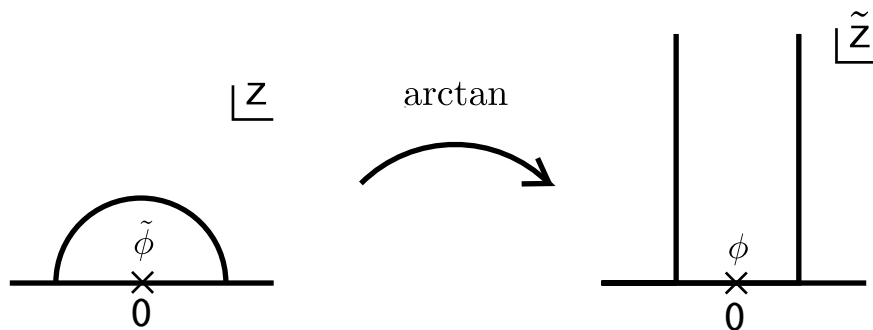


図 8: 状態  $|\tilde{\phi}\rangle$  を  $\arctan$  で sliver 座標に移したもの。sliver 上では弦の中点が  $i\infty$  点にある。



### 3.1.1 振動子代数による方法

異なる Hilbert 空間たちを貼り合わせる「頂点」なるものを定義する。CSFT における相互作用と関連するのは、3つの Hilbert 空間たちを貼り合わせる3弦頂点 (3-string vertex) である。3弦頂点の定義は次で与えられる:

$$\langle V_3 | A \rangle^{(1)} | B \rangle^{(2)} | C \rangle^{(3)} := \langle A, B, C \rangle.$$

この方程式を、 $\langle V_3 |$  を3つの Hilbert 空間の振動子で Vock 表示して解くことを考える。その際、次のような解の仮定 (ansatz) を置く<sup>19</sup>。

$$\begin{aligned} \langle V_3 | &= \mathcal{N} (\langle c | c_0 \rangle^{(3)} (\langle c | c_0 \rangle^{(2)} (\langle c | c_0 \rangle^{(1)} \int d^{26} p^{(1)} d^{26} p^{(2)} d^{26} p^{(3)} (2\pi)^{26} \delta^{26}(p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}) \\ &\quad \exp\left(\sum_{r,s=1}^3 \sum_{n,m \geq 0} \alpha_m^{(r)} \cdot N_{mn}^{rs} \alpha_n^{(s)}\right) \exp\left(\sum_{r,s=1}^3 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 1}} b_m^{(r)} X_{mn}^{rs} c_n^{(s)}\right)). \end{aligned}$$

ここに出てくる未定係数  $\mathcal{N}, N_{mn}^{rs}, X_{mn}^{rs}$  を (82) における  $A, B, C$  に適当な上昇演算子を代入することによって決める。特に、係数  $N_{mn}^{rs}, X_{mn}^{rs}$  は Neumann 係数 と呼ばれる。結果は次のようになる [26]:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \langle c_1, c_1, c_1 \rangle = \langle V_3 | c_1 \rangle_{(1)} | c_1 \rangle_{(2)} | c_1 \rangle_{(3)} = \frac{3^{9/2}}{2^6} \\ N_{00}^{rs} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \log |\partial f_r^{(3)}(0)| & r = s \\ \frac{1}{2} \log |f_r^{(3)}(0) - f_r^{(3)}(0)| & r \neq s \end{cases} \\ N_{0m}^{rs} &= \frac{i}{4\sqrt{2}m} \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{\partial f_s^{(3)}(w)}{w^m} \frac{1}{(f_r^{(3)}(0) - f_s^{(3)}(w))}. \\ N_{nm}^{rs} &= \frac{1}{2nm} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\partial f_r^{(3)}(z)}{z^n} \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{\partial f_s^{(3)}(w)}{w^m} \frac{1}{(f_r^{(3)}(z) - f_s^{(3)}(w))^2}. \\ X_{mn}^{rs} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{(\partial f_s^{(3)}(z))^2}{z^{n-1}} \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{(\partial f_r^{(3)}(w))^{-1}}{w^{m+2}} \frac{1}{f_s^{(3)}(z) - f_r^{(3)}(w)} \frac{\prod_{I=1}^3 (f_r^{(3)}(w) - f_I^{(3)}(0))}{\prod_{J=1}^3 (f_s^{(3)}(z) - f_J^{(3)}(0))}. \end{aligned}$$

同様にして2つの Hilbert 空間を貼り合わせる2弦頂点 (2-string vertex) についても求まる。結果だけ書いておくと次のようになる:

$$\begin{aligned} \langle V_2 | A \rangle^{(1)} | B \rangle^{(2)} &:= \langle A, B \rangle. \\ \langle V_2 | &= \int d^{26} p^{(1)} d^{26} p^{(2)} (\langle c; p |^{(1)} \langle c; p |^{(2)}) (c_0^{(1)} + c_0^{(2)}) \delta^{26}(p^{(1)} + p^{(2)}) \\ &\quad \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} \alpha_n^{(1)} \cdot \alpha_n^{(2)} + c_n^{(1)} b_n^{(2)} + c_n^{(2)} b_n^{(1)}\right]\right). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>この" Gaussian ansatz" は、 $\langle V_3 |$  が満たすべき保存則 (100) などから考えると自然である。

### 3.1.2 保存則による方法

この小節では Ward-Takahashi 恒等式 (W-T identity) が保存則を導き、それにより \* 積や 3 点関数の計算に役立つことを示す [28]。基本となる W-T 恒等式を確認する:

$$\langle \oint_C j(z) dz \cdots \rangle = 0. \quad (82)$$

ただし、 $\cdots$  には作用素が挿入されていることを表す。また、 $j(z)dz$  は、作用素が挿入されている点を除いて正則な大域 1 形式 (global 1-form) もしくは大域カレント (global current) とし、積分路  $C$  は挿入されている場所をすべて囲む閉路とする。

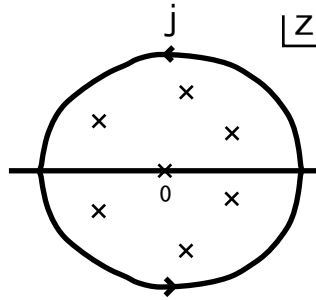


図 9: Ward-Takahashi 恒等式における積分路は挿入されている点をすべて囲む閉路とする。二重化のトリックを使っているため下半平面が存在する。

この主張は、もともとあった  $C$  の位置から無限遠点まで  $j(z)$  は正則であるので、積分路を無限遠点に縮小 (deform) していくと最終的につぶれて 0 になることからしたがう。

具体的にこの定理を SFT の 3 点関数に対して適用して

$$\langle \oint_C j(z) dz f_1 \circ \Phi_1(0) f_2 \circ \Phi_2(0) f_3 \circ \Phi_3(0) \rangle = 0 \quad (83)$$

を得る。今、簡単のため  $f_i = f_i^{(3)}$  と書いた。  $j(z)dz$  は挿入点  $f_1(0) = -\sqrt{3}$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_3(0) = \sqrt{3}$  を除き正則な大域カレントとする。3 点関数は小節 3.1.1 において 3 弦頂点を用いても書けたから、この W-T 恒等式は以下のようにも書ける:

$$\langle V_3 | \oint_C j(z) dz = 0. \quad (84)$$

SFT において現れる場は BCFT における場、すなわち、stress tensor  $T(z)$ 、ゴースト場  $c(z)$ 、反ゴースト場  $b(z)$  である。これらを用いて大域カレントを作るには、stress tensor  $T(z)$  と反ゴースト場  $b(z)$  に対してはこれらの共形次元が 2 であることから、挿入点を除いて正則な大域ベクトル場  $v(z)$  を用意して

$$j(z) = T(z)v(z) \quad \text{or} \quad b(z)v(z) \quad (85)$$

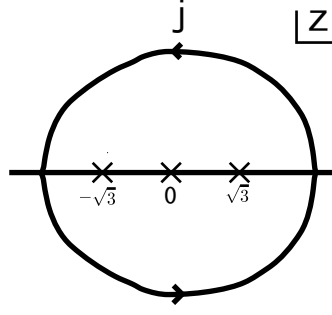


図 10: Ward-Takahashi 恒等式を SFT の 3 点関数に適用した図。積分路は挿入されている点  $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$  をすべて囲む。

とし、ゴースト場  $c(z)$  に対しては共形次元が  $-1$  であることから、挿入点を除いて正則な大域 2 次微分 (global quadratic differential)  $q(z)$  を用意して

$$j(z) = c(z)q(z) \quad (86)$$

とすればよい。

以下、具体的に中心電荷がある場合の stress tensor に適用する。

$$\left\langle \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z)f_1 \circ \Phi_1(0)f_2 \circ \Phi_2(0)f_3 \circ \Phi_3(0) \right\rangle = 0. \quad (87)$$

ただし、 $v(z)$  は挿入点  $f_1(0), f_2(0), f_3(0)$  を除き正則な大域ベクトル場とする。

左辺の積分を評価するため、積分路  $\mathcal{C}$  を挿入点  $f_1(0), f_2(0), f_3(0)$  近くの閉路  $\mathcal{C}_i, (i = 1, 2, 3)$  に分解する:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 \quad (88)$$

このとき、(87) の左辺は

$$\begin{aligned} & \left\langle \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z)f_1 \circ \Phi_1(0)f_2 \circ \Phi_2(0)f_3 \circ \Phi_3(0) \right\rangle \\ & + \left\langle f_1 \circ \Phi_1(0) \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z)f_2 \circ \Phi_2(0)f_3 \circ \Phi_3(0) \right\rangle \\ & + \left\langle f_1 \circ \Phi_1(0)f_2 \circ \Phi_2(0) \oint_{\mathcal{C}_3} \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z)f_3 \circ \Phi_3(0) \right\rangle \end{aligned} \quad (89)$$

となる。この各項の積分を評価していく:

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \frac{dz}{2\pi i} T(z)v(z)f_i \circ \Phi_i(0) = f_i \circ \left( \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{dz}{2\pi i} f_i^{-1} \circ T(z)v(z) \frac{dz}{2\pi i} \Phi_i(0) \right) \quad (90)$$

(322) により、

$$f_i^{-1} \circ T(z)v(z) = \left( \frac{df_i^{-1}(z)}{dz} \right) v^{(i)}(f_i^{-1}(z)) [T(f_i^{-1}(z)) - \frac{c}{12} S(z, f_i^{-1}(z))] \quad (91)$$

であるから、局所座標  $z_i = f_i^{-1}(z)$  を導入すると

$$(91) = \left( \frac{dz_i}{dz} \right) v^{(i)}(z_i) [T^{(i)}(z_i) - \frac{c}{12} S(f_i(z_i), z_i)]. \quad (92)$$

となる。  $S$  は Schwarz 微分であって、今の場合、

$$S(f_i, z_i) = -\frac{10}{9} \frac{1}{(1+z_i^2)^2} = -\frac{10}{9} + \frac{20}{9} z_i^2 - \frac{10}{3} z_i^4 + \frac{40}{9} z_i^6 + \dots, \quad i = 1, 2, 3. \quad (93)$$

となる。 Schwarz 微分  $S$  が  $i$  に依存しないのは、(28) により  $f_i(z_i)$  たちが  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$  変換で移り合うことと整合的である。この座標変換により、積分路  $\mathcal{C}_i$  は変更を受けるが、変換  $f_i^{-1}$  は挿入点近傍の局所双正則同相 (local biholomorphism) なので、積分路  $\mathcal{C}_i$  を  $f_i(0)$  まわりで十分小さくしておけば、変換後の積分路は  $z_i = 0$  まわりの小さな閉路になる。したがって、

$$K^{(i)} := \oint_0 \frac{dz_i}{2\pi i} v^{(i)}(z_i) [T^{(i)}(z_i) - \frac{c}{12} S(f_i(z_i), z_i)]. \quad (94)$$

と置くと、(89) は

$$(89) = \langle f_1 \circ K^{(1)} \Phi_1(0) f_2 \circ \Phi_2(0) f_3 \circ \Phi_3(0) \rangle + \langle f_1 \circ \Phi_1(0) f_2 \circ K^{(2)} \Phi_2(0) f_3 \circ \Phi_3(0) \rangle \\ + \langle f_1 \circ \Phi_1(0) f_2 \circ \Phi_2(0) f_3 \circ K^{(3)} \Phi_3(0) \rangle \quad (95)$$

$$= \langle K^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, K^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, \Phi_2, K^{(3)} \Phi_3 \rangle \quad (96)$$

$$= \langle \Phi_1, K^* \Phi_2 * \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, K \Phi_2 * \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, \Phi_2 * K \Phi_3 \rangle \quad (97)$$

$$= \langle V_3 | (K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}) | \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle \quad (98)$$

となる。(87) によりこれは 0 になるので、次の Virasoro 保存則が導かれる:

$$\langle K^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, K^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle + \langle \Phi_1, \Phi_2, K^{(3)} \Phi_3 \rangle = 0. \quad (99)$$

これは任意の  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  で成り立つ。したがって、次のようにも書ける:

$$K^*(\Phi_2 * \Phi_3) + K \Phi_2 * \Phi_3 + \Phi_2 * K \Phi_3 = 0. \quad (100)$$

$$\langle V_3 | (K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}) = 0. \quad (101)$$

Virasoro 保存則が 3 点関数の計算に役立つことを示す。条件を満たす大域ベクトル場  $v(z)$  が局所座標で表したとき次のように取れたとしよう:

$$v^{(1)}(z_1) = \sum_{n \geq 0} v_n^{(2)} z_1^{n+1}. \\ v^{(2)}(z_2) = z_2^{-k+1} + \sum_{n \geq 0} v_n^{(2)} z_2^{n+1}. \quad k \in \mathbf{N} \\ v^{(3)}(z_3) = \sum_{n \geq 0} v_n^{(3)} z_3^{n+1}. \quad (102)$$

このときの  $K^{(i)}$  をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned}
K^{(1)} &= \sum_{n \geq 0} v_n^{(1)} L_n^{(1)} - \frac{c}{12} \text{Res} \left( v^{(1)}(z_1) S(f_1(z_1), z_1) \right). \\
K^{(2)} &= L_{-k}^{(2)} + \sum_{n \geq 0} v_n^{(2)} L_n^{(2)} - \frac{c}{12} \text{Res} \left( v^{(2)}(z_2) S(f_2(z_2), z_2) \right). \\
K^{(3)} &= \sum_{n \geq 0} v_n^{(3)} L_n^{(3)} - \frac{c}{12} \text{Res} \left( v^{(3)}(z_3) S(f_3(z_3), z_3) \right). \tag{103}
\end{aligned}$$

となる。この結果を (99) に代入すると以下の結果を得る:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_1, L_{-k}^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle &= - \sum_{n \geq 0} \langle v_n^{(1)} L_n^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle - \sum_{n \geq 0} \langle \Phi_1, v_n^{(2)} L_n^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle \\
&\quad - \sum_{n \geq 0} \langle \Phi_1, \Phi_2, v_n^{(3)} L_n^{(3)} \Phi_3 \rangle + (c \text{ に比例する項}). \tag{104}
\end{aligned}$$

今、3点関数の循環性により相関関数の第1番目や第3番目に書かれている弦の場を第2番目にもってこれる。したがってこの操作を繰り返すことにより Virasoro descendant の3点関数を primary 場の3点関数に帰着させることができる。

具体的にベクトル場を

$$v_1(z) = -\frac{2}{9}(z^2 - 3) \tag{105}$$

$$v_2(z) = -\frac{4}{27} \frac{z^2 - 3}{z} \tag{106}$$

のように取ったとすると、極は挿入点のみであり、他では正則である。 $\infty$ 点での正則性を確かめるには、 $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z)/z^2 < \infty$  を満たすかどうか調べればよいが、明らかにこの条件を満たす。よって、この  $v(z)$  は条件を満たすベクトル場である。これを局所座標で表せば<sup>20</sup>、 $v_1(z)$  の方は

$$\begin{aligned}
v_1^{(1)}(z_1) &= -\frac{4}{3\sqrt{3}} z_1 + \frac{8}{27} z_1^2 - \frac{40}{81\sqrt{3}} z_1^3 + \frac{40}{729} z_1^4 + \frac{104}{729\sqrt{3}} z_1^5 + O(z_1^6) \\
v_1^{(2)}(z_2) &= 1 + \frac{11}{27} z_2^2 - \frac{80}{729} z_2^4 + \frac{1136}{19683} z_2^6 + O(z_2^8) \\
v_1^{(3)}(z_3) &= \frac{4}{3\sqrt{3}} z_3 + \frac{8}{27} z_3^2 + \frac{40}{81\sqrt{3}} z_3^3 + \frac{40}{729} z_3^4 - \frac{104}{729\sqrt{3}} z_3^5 + O(z_3^6) \tag{107}
\end{aligned}$$

となつて、 $v_2(z)$  の方は

$$\begin{aligned}
v_2^{(1)}(z_1) &= -\frac{8}{27} z_1 - \frac{80}{81\sqrt{3}} z_1^2 - \frac{112}{243} z_1^3 - \frac{304}{729\sqrt{3}} z_1^4 - \frac{400}{19683} z_1^5 + O(z_1^6) \\
v_2^{(2)}(z_2) &= z_2^{-1} + \frac{16}{27} z_2 - \frac{19}{243} z_2^3 + \frac{800}{19683} z_2^5 + O(z_2^6) \\
v_2^{(3)}(z_3) &= -\frac{8}{27} z_3 + \frac{80}{81\sqrt{3}} z_3^2 - \frac{112}{243} z_3^3 + \frac{304}{729\sqrt{3}} z_3^4 - \frac{400}{19683} z_3^5 + O(z_3^6) \tag{108}
\end{aligned}$$

<sup>20</sup>以下の計算の一部は Mathematica を用いている。

と書ける。これを、系 104 に適用して次を得る:

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi_1, L_{-1}^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle = \\
& \langle \left( \frac{4}{3\sqrt{3}} L_0 - \frac{8}{27} L_1 + \frac{40}{81\sqrt{3}} L_2 - \frac{40}{729} L_3 - \frac{104}{729\sqrt{3}} L_4 + \dots \right)^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle \\
& + \langle \Phi_1, \left( -\frac{11}{27} L_1 + \frac{80}{729} L_3 - \frac{1136}{19683} L_5 + \dots \right)^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle \\
& + \langle \Phi_1, \Phi_2, \left( -\frac{4}{3\sqrt{3}} L_0 - \frac{8}{27} L_1 - \frac{40}{81\sqrt{3}} L_2 - \frac{40}{729} L_3 + \frac{104}{729\sqrt{3}} L_4 + \dots \right)^{(3)} \Phi_3 \rangle \quad (109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi_1, L_{-2}^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle = \\
& \langle \left( \frac{8}{27} L_0 - \frac{80}{81\sqrt{3}} L_1 + \frac{112}{243} L_2 - \frac{304}{729\sqrt{3}} L_3 + \frac{400}{19683} L_4 + \dots \right)^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle \\
& + \langle \Phi_1, \left( -\frac{5}{54} L_0 - \frac{16}{27} L_1 + \frac{19}{243} L_2 - \frac{800}{19683} L_4 + \dots \right)^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle \\
& + \langle \Phi_1, \Phi_2, \left( \frac{8}{27} L_0 + \frac{80}{81\sqrt{3}} L_1 + \frac{112}{243} L_2 + \frac{304}{729\sqrt{3}} L_3 + \frac{400}{19683} L_4 + \dots \right)^{(3)} \Phi_3 \rangle \quad (110)
\end{aligned}$$

これを用いると、 $\langle L_{-2}^X c_{-1}, c_1, c_1 \rangle$  のようなタキオン解に現れる 3 点関数はすぐに計算できる。まず、相関関数を物質場のものとゴースト場のものに分離する:

$$\langle c_1, L_{-2}^X c_{-1}, c_1 \rangle = \langle \mathbf{1}, L_{-2}^X \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle^X \langle c_1, c_{-1}, c_1 \rangle^{bc} \quad (111)$$

物質場の相関関数は、(110) により、

$$\langle \mathbf{1}, L_{-2}^X \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = -\frac{5}{54} c^X \quad (112)$$

となる。 $c^X$  は物質場における CFT の中心電荷で値は 26 である。一方、ゴースト場の相関関数は、まず上昇演算子である  $c_{-1}$  を Virasoro descendant の形で表す:

$$c_{-1}|0\rangle = \frac{1}{2} L_{-1}^2 c_1 |0\rangle \quad (113)$$

これにより、(109) を用いて、

$$\begin{aligned}
\langle c_1, c_{-1}, c_1 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle c_1, -\frac{11}{27} L_1 L_{-1} c_1, c_1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \frac{4}{3\sqrt{3}} L_0 c_1, L_{-1} c_1, c_1 \rangle + \langle c_1, L_{-1} c_1, -\frac{4}{3\sqrt{3}} L_0 c_1 \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{11}{27} \right) \langle c_1, 2L_0 c_1, c_1 \rangle \\
&= \frac{11}{27} \langle c_1, c_1, c_1 \rangle \quad (114)
\end{aligned}$$

となる。二つをかければ (111) が求まって、次のようになる:

$$\langle c_1, L_{-2}^X c_{-1}, c_1 \rangle = -\frac{55}{1458} c^X \langle c_1, c_1, c_1 \rangle \quad (115)$$

一方、ベクトル場  $v_n^{(i)}(z_i)$  を次のように選んだとする:

$$v_n^{(i)}(z_i) = z_i^{n+1} + (-z_i)^{-n+1}. \quad (116)$$

すると、このベクトル場は、各 local patch で貼り合っ大域ベクトル場になる。というのも、各 local patch は  $z_i z_j = -1, i \neq j$  で張り合っているので<sup>21</sup>、 $v_n^{(i)}(z_i) = v_n^{(j)}(z_j) \frac{dz_i}{dz_j}$  を満たすことをいえばよいが、これは簡単な計算で分かる。またこのベクトル場を大域座標で表したとき、 $\infty$ 点での正則性は  $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z)/z^2 < \infty$  と等価であるが、これはどこかの局所座標で書き直すことにより分かる。したがって、このベクトル場は条件を満たす。このとき、 $K^{(i)}$  は (117) より

$$K^{(i)} = L_n^{(i)} - (-)^n L_{-n}^{(i)} = :K_n^{(i)} \quad (117)$$

となる。 $K_n^{(i)*} = -K_n^{(i)}$  であることに注意すると、(100) により次の結果を得る:

$$K_n(\Phi * \Psi) = K_n \Phi * \Psi + \Phi * K_n \Psi. \quad (118)$$

これは  $K_n$  が  $*$  積の微分演算子であることを意味している。

以上の結果は、途中の結果 (115) を除き、中心電荷を 0 にして、反ゴースト場  $b(z)$  に対しても全く同様の計算で成立する。一部結果を書いておく。

まず Virsoro 保存則に対応して反ゴースト保存則が導かれる:

$$B^{(i)} = \oint_0 \frac{dz_i}{2\pi i} v^{(i)}(z_i) b^{(i)}(z_i). \quad (119)$$

に対し、次の式が成立する。ただし、 $(-)^{\Phi_1} = (-1)^{G_{\Phi_1}}$  とする。

$$\langle B^{(1)} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle + (-)^{\Phi_1} \langle \Phi_1, B^{(2)} \Phi_2, \Phi_3 \rangle + (-)^{\Phi_1 + \Phi_2} \langle \Phi_1, \Phi_2, B^{(3)} \Phi_3 \rangle = 0. \quad (120)$$

$B_n$  を

$$B_n := b_n - (-)^n b_{-n}. \quad (121)$$

で定義すると  $*$  積の微分演算子になる:

$$B_n(\Phi * \Psi) = B_n \Phi * \Psi + (-)^{\Phi} \Phi * B_n \Psi. \quad (122)$$

ゴースト場  $c(z)$  については、stress tensor  $T(z)$  であったところを  $c(z)$  に、大域ベクトル場  $v(z)$  であったところを正則 2 次微分  $q(z)$  に置き換えるだけで同じ議論ができる。結果を一部書いておくとまず Virsoro 保存則に対応してゴースト保存則が導かれる:

$$C^{(i)} = \oint_0 \frac{dz_i}{2\pi i} q^{(i)}(z_i) c^{(i)}(z_i). \quad (123)$$

---

<sup>21</sup>このことは GGRT から分かる。

に対し、次の式が成立する。

$$\begin{aligned} \langle C^{(1)}\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle + (-)^{\Phi_1} \langle \Phi_1, C^{(2)}\Phi_2, \Phi_3 \rangle + (-)^{\Phi_1+\Phi_2} \langle \Phi_1, \Phi_2, C^{(3)}\Phi_3 \rangle &= 0. \\ C^{(1)*}(\Phi_2 * \Phi_3) + (C^{(2)}\Phi_2) * \Phi_3 + (-)^{\Phi_2}\Phi_2 * C^{(3)}\Phi_3 &= 0. \end{aligned}$$

具体的に正則2次微分を

$$q_1(z) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} z^{-1}(z + \sqrt{3})^{-3} \quad (124)$$

$$q_2(z) = -9\sqrt{3} (z - \sqrt{3})^{-1}(z + \sqrt{3})^{-3} \quad (125)$$

のように取ったとすると、極は挿入点のみであり、他では正則である。 $\infty$ 点での正則性を確かめるには、 $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z)/z^4 < \infty$ を満たすかどうか調べればよいが、明らかにこの条件を満たす。よって、この $q(z)$ は条件を満たす正則2次微分である。これを局所座標で表せば、 $q_1(z)$ の方は、

$$\begin{aligned} q_1^{(1)}(z_1) &= -\frac{27}{16z^3} - \frac{3\sqrt{3}}{8z^2} + \frac{11}{16z} + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{5z}{9} - \frac{44z^2}{81\sqrt{3}} + \frac{355z^3}{729} + \dots \\ q_1^{(2)}(z_2) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{z}{27} + \frac{100z^2}{81\sqrt{3}} + \frac{13z^3}{729} + \dots \\ q_1^{(3)}(z_3) &= \frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{16z}{27} - \frac{56z^2}{81\sqrt{3}} - \frac{368z^3}{729} + \dots \end{aligned} \quad (126)$$

となつて、 $q_2(z)$ の方は、

$$\begin{aligned} q_2^{(1)}(z_1) &= -\frac{27}{16z^3} + \frac{3\sqrt{3}}{8z^2} + \frac{11}{16z} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{5z}{9} + \frac{44z^2}{81\sqrt{3}} + \frac{355z^3}{729} + \dots \\ q_2^{(2)}(z_2) &= -\frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{16z}{27} + \frac{56z^2}{81\sqrt{3}} - \frac{368z^3}{729} + \dots \\ q_2^{(3)}(z_3) &= \frac{1}{z} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{z}{27} - \frac{100z^2}{81\sqrt{3}} + \frac{13z^3}{729} + \dots \end{aligned} \quad (127)$$

と書ける。これをゴースト保存則に適用して次を得る：

$$\begin{aligned} & -\left(-\frac{27}{16}c_{-1} - \frac{3\sqrt{3}}{8}c_0 + \frac{11}{16}c_1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}c_2 - \frac{5}{9}c_3 + \dots\right)^* (\Phi_2 * \Phi_3) \\ &= \left(c_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}c_2 - \frac{1}{27}c_3 + \dots \Phi_2\right) * \Phi_3 + (-)^{\Phi_2}\Phi_2 * \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}c_2 + \frac{16}{27}c_3 + \dots\right)\Phi_3. \\ & -\left(-\frac{27}{16}c_{-1} + \frac{3\sqrt{3}}{8}c_0 + \frac{11}{16}c_1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}c_2 - \frac{5}{9}c_3 + \dots\right)^* (\Phi_2 * \Phi_3) \\ &= \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}c_2 + \frac{16}{27}c_3 + \dots \Phi_2\right) * \Phi_3 + (-)^{\Phi_2}\Phi_2 * \left(c_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}c_2 - \frac{1}{27}c_3 + \dots\right)\Phi_3. \end{aligned}$$

これを用いると、 $|0\rangle * c_1|0\rangle$  や  $c_1|0\rangle * c_1|0\rangle$  のような状態を  $|0\rangle * |0\rangle$  に振動子が作用しているような状態に書き直せる。具体的には、(128)の $\Phi_2, \Phi_3$ に $|0\rangle$ を代入すれば、

$$|0\rangle * c_1|0\rangle = \left(\frac{27}{16}c_1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}c_0 - \frac{11}{16}c_{-1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}c_{-2} + \frac{5}{9}c_{-3} + \frac{44}{81\sqrt{3}}c_{-4} + \dots\right) (|0\rangle * c_1|0\rangle) \quad (128)$$



が導かれる。また (128) の  $\Phi_2, \Phi_3$  に  $|0\rangle, |c\rangle$  を代入すれば、

$$c_1|0\rangle * c_1|0\rangle = \left( \frac{27}{16} c_1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} c_0 - \frac{11}{16} c_{-1} - \frac{2}{3\sqrt{3}} c_{-2} + \frac{5}{9} c_{-3} + \frac{44}{81\sqrt{3}} c_{-4} + \dots \right) (|0\rangle * c_1|0\rangle)$$

となり、さらに (128) を用いれば

$$\begin{aligned} c_1|0\rangle * c_1|0\rangle &= \frac{81\sqrt{3}}{64} \left( c_0 - \frac{16}{27} c_{-2} + \frac{352}{729} c_{-4} + \dots \right) \\ &\quad \left( c_1 - \frac{11}{27} c_{-1} + \frac{80}{243} c_{-3} + \dots \right) (|0\rangle * |0\rangle). \end{aligned} \quad (129)$$

を得る。

正則 2 次微分  $q_n^{(i)}(z_i)$  を次のように選んだとする:

$$q_n^{(i)}(z_i) = z_i^{n-2} + (-)^n z_i^{-n-2}. \quad (130)$$

すると、この正則 2 次微分は、各 local patch で張り合っ大域正則 2 次微分になる。各 local patch は  $z_i z_j = -1, i \neq j$  で貼り合っているから、 $q_n^{(i)}(z_i) = q_n^{(j)}(z_j) \left( \frac{dz_j}{dz_i} \right)^2$  を満たすことをいえばよいが、これは簡単な計算で分かる。またこの正則 2 次微分を大域座標で表したとき、 $\infty$  点での正則性は  $\lim_{z \rightarrow \infty} q(z) z^4 < \infty$  と等価であるが、これはどこかの局所座標で書き直してしまえばすぐに分かる。したがって、この正則 2 次微分は条件を満たして、反ゴースト場  $b(z)$  の時と同様、

$$C_n^{(i)} := c_n^{(i)} + (-)^n c_{-n}^{(i)} \quad (131)$$

は \* 積に対する微分となる:

$$C_n(\Phi * \Psi) = C_n \Phi * \Psi + (-)^{\Phi} \Phi * C_n \Psi. \quad (132)$$

特に  $n = 0$  の場合、 $C_0 = 2c_0$  となるので、 $c_0$  は微分演算子になる。

### 3.1.3 sliver 座標による方法

\* 積の計算は、後に sliver 座標と呼ぶ座標に移って評価すると簡単になる [13]。3 点関数  $\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle$  は (19) より

$$\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle = \langle f_1^{(3)} \circ \phi_1(0) f_2^{(3)} \circ \phi_2(0) f_3^{(3)} \circ \phi_3(0) \rangle_{UHP} \quad (133)$$

であった。ここに、 $f_i^{(3)}$  は

$$\begin{aligned} f_1^{(3)}(z) &= \tan \left( -\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} \arctan(z) \right) \\ f_2^{(3)}(z) &= \tan \left( \frac{2}{3} \arctan(z) \right) = : f^{(3)}(z) \\ f_3^{(3)}(z) &= \tan \left( \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} \arctan(z) \right) \end{aligned} \quad (134)$$

であり、相関関数の右下についている添え字はどこの空間で相関関数を評価しているかを明示するために書いている。相関関数を上半平面上から  $f^{(\infty)}(z) := \arctan(z)$  で移した、円周  $\pi$ 、高さ無限大の円筒  $C_\pi$  上で評価すると、

$$(133) = \langle \tilde{f}_1 \circ f^{(\infty)} \circ \phi_1(0) \tilde{f}_2 \circ f^{(\infty)} \circ \phi_2(0) \tilde{f}_3 \circ f^{(\infty)} \circ \phi_3(0) \rangle_{C_\pi} \quad (135)$$

となる。ただし、 $\tilde{f}_i$  は sliver 座標  $\tilde{z} = f^{(\infty)}(z)$  で  $f_i$  を評価したもので、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^{(3)}(\tilde{z}) &= -\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\tilde{z} \\ \tilde{f}_2^{(3)}(\tilde{z}) &= \frac{2}{3}\tilde{z} = : \tilde{f}^{(3)}(\tilde{z}) \\ \tilde{f}_3^{(3)}(\tilde{z}) &= \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\tilde{z} \end{aligned} \quad (136)$$

となる。これは sliver 上の affine 変換である。これにより、

$$\tilde{\phi}_i := \tan \circ \phi_i \quad (137)$$

とおくと、

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3 \rangle = \langle \tilde{f}_1^{(3)} \circ \phi_1(0) \tilde{f}_2^{(3)} \circ \phi_2(0) \tilde{f}_3^{(3)} \circ \phi_3(0) \rangle_{C_\pi} \quad (138)$$

である。計算を進めて、

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3 \rangle = \langle \phi_1 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \phi_2(0) \phi_3 \left( \frac{\pi}{2} \right) \rangle_{C_{\frac{3\pi}{2}}} \quad (139)$$

を得る。

以上の計算はすべて CFT によって行ったが、 $SL(2, \mathbf{R})$  真空  $|0\rangle$  を用いて表示すると計算途中に  $\langle 0|U_{f^{(3)}}\rangle$  のような状態が現れる。このような状態を、この場合はとくに  $\langle 3|$  とかき、くさび状態(wedge state) と呼ぶことにする。一般には次のように定義する:

$$\langle r| := \langle 0|U_{f^{(r)}} \quad , \quad f^{(r)}(z) = \tan \left( \frac{2}{r} \arctan(z) \right) \quad (140)$$

くさび状態の詳しい性質とその重要性はおいおい判明する。

(139)において、作用素を sliver 上で  $-\frac{\pi}{4}$  だけ平行移動して<sup>22</sup>全体を  $\frac{2}{3}$  倍縮小すると、

$$(139) = \langle \tilde{f}^{(3)} \circ \phi_1 \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \tilde{f}^{(3)} \circ \phi_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) \tilde{f}^{(3)} \circ \phi_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) \rangle_{C_\pi} \quad (141)$$

反転は sliver 座標で  $\tilde{I}(\tilde{z}) = \tilde{z} - \frac{\pi}{2}$  と書けることに注意して、上半平面上の相関関数に戻すと、

$$\begin{aligned} (141) &= \langle I \circ f^{(3)} \circ \tilde{\phi}_1(0) f^{(3)} \circ \phi_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) f^{(3)} \circ \tilde{\phi}_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) \rangle_{UHP} \\ &= \langle f^{(3)} \circ \tilde{\phi}_1, f^{(3)} \circ \phi_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) f^{(3)} \circ \tilde{\phi}_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) \rangle \\ &= \langle \tilde{\phi}_1, U_3^* U_3 \phi_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) \tilde{\phi}_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) \rangle \end{aligned} \quad (142)$$

と2点関数の表示になる。ただし、 $U_3|0\rangle = |0\rangle$ ,  $\langle 0|U_3^* = \langle 0|$  を用いた。したがって、(138)は(27)より\*積を用いて

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3 \rangle = \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 * \tilde{\phi}_3 \rangle \quad (143)$$

とかけるので、(142)の結果と合わせて次が示された:

$$\tilde{\phi}_2 * \tilde{\phi}_3(0) = U_3^* U_3 \tilde{\phi}_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) \tilde{\phi}_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) \quad (144)$$

$$|\tilde{\phi}_2\rangle * |\tilde{\phi}_3\rangle = U_3^* U_3 \tilde{\phi}_2 \left( -\frac{\pi}{4} \right) \tilde{\phi}_3 \left( \frac{\pi}{4} \right) |0\rangle \quad (145)$$

上は頂点作用素表示、下は状態表示である<sup>23</sup>。

弦の左部分と右部分の計算に関する規則は次のようにまとめられる:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{-1}^L(\Phi_1 * \Phi_2) &= \left( \tilde{L}_{-1}^L \Phi_1 \right) * \Phi_2 \\ \tilde{L}_{-1}^R(\Phi_1 * \Phi_2) &= \Phi_1 * \left( \tilde{L}_{-1}^R \Phi_2 \right) \\ \left( \tilde{L}_{-1}^R \Phi_1 \right) * \Phi_2 &= -\Phi_1 * \left( \tilde{L}_{-1}^L \Phi_2 \right) \end{aligned} \quad (146)$$

これらの式が成立することは、図3より見て取れる。

ここで後の解析解の構成で必要となる次の補題を証明しておく:

**補題 3.1**  $\tilde{L}_0 \Phi = \tilde{L}_0 \Psi = 0$  となる  $\Phi, \Psi$  に対し次が成立する:

$$\tilde{L}_0(\Phi * \Psi) = \left( \frac{\pi}{2} \right) \Phi * \tilde{L}_{-1}^L \Psi. \quad (147)$$

証明は以下の通りである。まず作用素  $D := \tilde{L}_0 - \tilde{L}_0^*$  は\*積に対する微分演算子となる。というのも(345)を用いることにより  $D$  を  $L_n$  で表すと、

$$D = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} (L_{2k} - L_{-2k}). \quad (148)$$

<sup>22</sup>sliver 上での平行移動は上半平面上では  $SL(2, \mathbf{R})$  変換なので、この変換の下に相関関数は不変である。

<sup>23</sup>より複雑な\*積の公式を知りたければ[13]が参考になる。

となる。さらに (117) を用いて

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} K_{2k} \quad (149)$$

となるが、各  $K_{2k}$  は  $*$  積にたいする微分演算子であるからである。

一方、(362) を利用することで  $\tilde{L}_0$  は  $D, \tilde{L}_{-1}^R, \tilde{L}_{-1}^L$  を用いて書くことができる:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= -\tilde{L}_0^* + \frac{\pi}{2}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L) \\ &= -\tilde{L}_0 + D + \frac{\pi}{2}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L) \\ &= \frac{1}{2}D + \frac{\pi}{4}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L). \end{aligned} \quad (150)$$

これを (3.1) の右辺に代入すると、

$$\tilde{L}_0(\Phi * \Psi) = \left( \frac{1}{2}D + \frac{\pi}{4}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L) \right) (\Phi * \Psi) \quad (151)$$

となる。第一項に出てくる  $D(\Phi * \Psi)$  を計算すると、 $D$  は微分演算子であるから

$$D(\Phi * \Psi) = (D\Phi) * \Psi + \Phi * (D\Psi) \quad (152)$$

である。仮定  $\tilde{L}_0\Phi = \tilde{L}_0\Psi = 0$  より、

$$\begin{aligned} &= \left( (-\tilde{L}_0 - \tilde{L}_0^*)\Phi \right) * \Psi + \Phi * \left( (-\tilde{L}_0 - \tilde{L}_0^*)\Psi \right) \\ &= -\left( \frac{\pi}{2}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L)\Phi \right) * \Psi - \Phi * \left( \frac{\pi}{2}(\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L)\Psi \right) \end{aligned} \quad (153)$$

となる。これを (151) に代入し、(146) を用いれば

$$(151) = \left( \frac{\pi}{2} \right) \Phi * \tilde{L}_{-1}^L \Psi \quad (154)$$

を得る。これにより補題 (3.1) が示された。

以上の結果は、同様の計算で  $L$  を  $b$  に取り替えても成立する。ただし、反ゴースト場と弦の場を入れ替えるときに符号がでることに注意する。

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{-1}^L(\Phi_1 * \Phi_2) &= \left( \tilde{b}_{-1}^L \Phi_1 \right) * \Phi_2, \\ \tilde{b}_{-1}^R(\Phi_1 * \Phi_2) &= (-)^{\Phi_1} \Phi_1 * \left( \tilde{b}_{-1}^R \Phi_2 \right), \\ \left( \tilde{b}_{-1}^R \Phi_1 \right) * \Phi_2 &= -(-)^{\Phi_1} \Phi_1 * \left( \tilde{b}_{-1}^L \Phi_2 \right) \end{aligned} \quad (155)$$

**補題 3.2**  $\tilde{b}_0\Phi = \tilde{b}_0\Psi = 0$  となる  $\Phi, \Psi$  に対し次が成立する:

$$\tilde{b}_0(\Phi * \Psi) = (-)^{\Phi_1} \left( \frac{\pi}{2} \right) \Phi * \tilde{b}_{-1}^L \Psi. \quad (156)$$

## 3.2 \*積の部分代数空間

本節ではいくつか知られている\*積における部分代数空間(普遍部分空間(小節 3.2.1)、表面状態空間(小節 3.2.2)、くさび状態空間(小節 3.2.3))を調べる。

特に、くさび状態空間については後の解析解の構成で重要となる部分空間である。

### 3.2.1 普遍部分空間

節 2.4 に現れた空間  $\mathcal{H}_{\text{univ}}^{(1)}$  にゴースト数 1 の条件を除いた空間

$$\mathcal{H}_{\text{univ}} \equiv \bigoplus_{j_i \geq 2, k_i \geq 2, l_i \geq -1} \mathbf{R} L_{-j_1}^X \dots L_{-j_p}^X b_{-k_1} \dots b_{-k_q} c_{-l_1} \dots c_{-l_r} |0\rangle \quad (157)$$

は\*積の部分代数空間になる:

$$\mathcal{H}_{\text{univ}} * \mathcal{H}_{\text{univ}} \subseteq \mathcal{H}_{\text{univ}}. \quad (158)$$

証明には小節 3.1.2 で得られた種々の保存則を利用する。まず  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  に属する二つの元

$$\begin{aligned} & \sum L_{-j_1}^X \dots L_{-j_p}^X b_{-k_1} \dots b_{-k_q} c_{-l_1} \dots c_{-l_r} |0\rangle \\ & \sum L_{-j'_1}^X \dots L_{-j'_{p'}}^X b_{-k'_1} \dots b_{-k'_{q'}} c_{-l'_1} \dots c_{-l'_{r'}} |0\rangle \end{aligned}$$

をとってきてその\*積を考える:

$$\sum L_{-j_1}^X \dots L_{-j_p}^X b_{-k_1} \dots b_{-k_q} c_{-l_1} \dots c_{-l_r} |0\rangle * \sum L_{-j'_{p''}}^X \dots L_{-j'_1}^X b_{-k'_{q''}} \dots b_{-k'_{1''}} c_{-l'_{1''}} \dots c_{-l'_{r''}} |0\rangle$$

Virasoro 保存則と反ゴースト保存則を用いることにより、ここに現れている  $L_{-j_p}^X$  や  $b_{-k_q}$  といった振動子を\*積をとった後に作用する  $L_{-j''_{p''}}^X$  や  $b_{-k''_{q''}}$  として実現できる:

$$= \sum L_{-j''_1}^X \dots L_{-j''_{p''}}^X b_{-k''_1} \dots b_{-k''_{q''}} \left( \sum c_{-l_1} \dots c_{-l_r} |0\rangle * \sum c_{-l'_1} \dots c_{-l'_{r'}} |0\rangle \right).$$

さらにゴースト保存則を用いることによりここに現れている  $c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots$  といった振動子を\*積をとった後に作用する  $c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots$  として実現できる:

$$= \sum L_{-j''_1}^X \dots L_{-j''_{p''}}^X b_{-k''_1} \dots b_{-k''_{q''}} c_{-l''_1} \dots c_{-l''_{r''}} |X\rangle. \quad (159)$$

ここに、 $|X\rangle$  は  $|0\rangle$  に  $c_1$  が作用していたかしていなかったかで次の 4 通りある:

$$|X\rangle = |0\rangle * |0\rangle, c_1 |0\rangle * |0\rangle, |0\rangle * c_1 |0\rangle \text{ or } c_1 |0\rangle * c_1 |0\rangle. \quad (160)$$

これらは (128)、(129) により  $|0\rangle * |0\rangle$  に  $c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots$  が作用しているものとして実現できる:

$$|X\rangle = \sum c_{-m_1} \dots c_{-m_s} (|0\rangle * |0\rangle). \quad (161)$$

最後に残った  $|0\rangle * |0\rangle$  については、後の小節 3.2.3 で導く結果である (171) を用いれば  $|0\rangle$  に  $L_{-j_p}^X$  や  $L_{-k_q}^{bc}$  が作用しているものとして実現できる:

$$|0\rangle * |0\rangle = \sum L_{-i_1}^X \dots L_{-i_p}^X L_{-k_1}^{bc} \dots L_{-k_q}^{bc} |0\rangle \quad (162)$$

したがって、

$$(159) = \sum L_{-J_1}^X \dots L_{-J_P}^X b_{-K_1} \dots b_{-K_Q} c_{-L_1} \dots c_{-L_R} |0\rangle. \quad (163)$$

となるので、これは  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  に属する<sup>24</sup>。したがって、主張が示された。

今、 $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  を次数ごとに分解する:

$$\mathcal{H}_{\text{univ}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\text{univ}}^{(n)}. \quad (164)$$

このとき、次数0の部分  $\mathcal{H}_{\text{univ}}^{(0)}$  は (158) より  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  の部分代数空間になる<sup>25</sup>。

よりいっそう小さい普遍部分空間として、CFT 全体の場合で作られる Virsoro 生成子  $L_{-j}$  で生成される次数0の空間

$$\mathcal{H}^{(0)}(L) \equiv \bigoplus_{j_i \geq 2} \mathbf{R} L_{-j_1} \dots L_{-j_p} |0\rangle \quad (165)$$

は  $\mathcal{H}_{\text{univ}}^{(0)}$  の部分代数空間になる。証明は Virsoro 保存則を用いて  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  で証明したときと同じようにやればよい。

---

<sup>24</sup>無限和も  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  に含まれているとしている。

<sup>25</sup>より強く  $\mathcal{H}_{\text{univ}}$  のイデアルであると言える。

### 3.2.2 表面状態空間

共形変換  $f$  を何か取ってきたとき補遺 B でやったような  $U_f$  が存在する場合がある。このとき次のような状態

$$|f\rangle := U_f^*|0\rangle \quad (166)$$

を共形変換  $f$  の 表面状態(surface state) と呼ぶ。

表面状態を二つ  $|f\rangle, |g\rangle$  と取ってきたとき、それらの  $*$  積がまた共形変換  $f, g$  によって定まる表面状態  $|f * g\rangle$  になることが GGRT によって保証される。したがって、表面状態空間

$$\mathcal{H}_{\text{surf}} = [|f\rangle | f \text{ は共形変換}] \quad (167)$$

は  $*$  積の部分代数空間になる。

小節 3.2.1 で現れた部分代数空間との関係で言えば表面状態空間は一番小さい空間で  $\mathcal{H}^{(0)}(L)$  に含まれる。

### 3.2.3 くさび状態空間

小節 3.1.3 で出てきたくさび状態をもう一度書くと、

$$|r\rangle = U_r^*|0\rangle \quad (168)$$

であった。 $U_r|0\rangle = |0\rangle$  を用いると、

$$(168) = U_r^*U_r|0\rangle \quad (169)$$

となるが、ここで (357) と  $\tilde{L}_{-1}|0\rangle = (\tilde{L}_{-1}^R + \tilde{L}_{-1}^L)|0\rangle = 0$  を用いると、

$$|r\rangle = e^{(r-2)(\frac{\pi}{2})\tilde{L}_{-1}}|0\rangle \quad (170)$$

が示される。

これを通常の Virasoro 生成子  $L_n$  で展開すれば

$$|r\rangle = \exp\left(-\frac{r^2-4}{3r^2}L_{-2} + \frac{r^4-16}{30r^4}L_{-4} - \frac{(r^2-4)(176+128r^2+11r^4)}{1890r^6}L_{-6} + \dots\right)|0\rangle \quad (171)$$

のようになる。計算には Mathematica を用いた。

この式の形から明らかに、

$$|r\rangle * |s\rangle = |r+s-1\rangle \quad (172)$$

となる。これを図示すると図 11 のようになる。

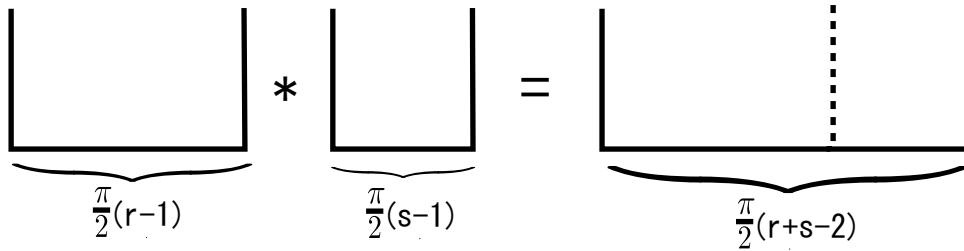


図 11:  $|r\rangle * |s\rangle = |r+s-1\rangle$  を図示したもの。

したがってくさび状態空間  $\mathcal{H}_{\text{wedge}} = [|r\rangle | r \geq 1]$  は可換部分代数をなす<sup>26</sup>。

以前の節で現れた部分代数空間との関係で言えばくさび状態空間は一番小さい空間で表面状態空間  $\mathcal{H}_{\text{surf}}$  に含まれる。特に、 $|1\rangle$  はこの空間の単位元となる。これを 恒等状態(identity state) と呼ぶ。

この恒等状態  $|1\rangle$  はすべての弦の状態 ( $\in \mathcal{H}$ ) に対して  $*$  積の単位元として振る舞うだろうか。この答えは否定的であることが知られている。このことを Rastelli-Zwiebach[28] にしたがって保存則を用いて議論する。

<sup>26</sup> $r$  が 1 より小さいところでもくさび状態は形式的に定義できるかもしれないが、そのようなくさび状態が Virasoro 生成子で表示できて状態として意味を持つかどうかは分からない。



まず W-T 恒等式と同様の議論で

$$\langle 0 | \oint_C dz j(z) = 0 \quad (173)$$

が、挿入点を除いて大域的に正則なカレント  $j(z)$  に対して言える。この方程式を、恒等状態をつくる共形変換 (16) で写像することによって恒等状態に対する W-T 恒等式

$$\langle 1 | \oint_C dz' j'(z') = 0 \quad (174)$$

を得る。ただし、 $j'(z')$  は大域カレント  $j(z)$  を局所座標  $z' = (f^{360^\circ})^{-1}(z)$  で表した局所カレントとし、カレントには量子異常がないとしている。

このカレントとしてまず (86) を選んだとすると、

$$\langle 1 | \oint_C q'(z') c'(z') = 0 \quad (175)$$

が言える。ただし、 $q'(z')$  は正則 2 次微分  $q(z)$  を局所座標  $z'$  で表した局所正則 2 次微分とし、 $q(z)$  は挿入点を除いて大域的に正則であるとする。

今、この大域正則 2 次微分として

$$q(z) = z^{-n} \quad (176)$$

を選んできたとしよう<sup>27</sup>。大域的に正則であるためには  $n \geq 4$  であれば十分である。 $n = 4$  のときのこのカレントの局所表示は

$$q'(z') = \frac{(1 + z'^2)^2}{2z'^4} \quad (177)$$

となる。これを (175) に代入すれば

$$\langle 1 | c_0 + \frac{1}{2}(c_2 + c_{-2}) = 0 \quad (178)$$

が成立し、さらにこの両辺 BPZ 共役をとれば

$$c_0 + \frac{1}{2}(c_2 + c_{-2})|1\rangle = 0 \quad (179)$$

を得る。

さて、任意の状態として  $|A\rangle$  を取ってきたとき、恒等状態  $|1\rangle$  がこの状態に対し左から恒等的に作用するとすると、

$$|1\rangle * |A\rangle = |A\rangle \quad (180)$$

である。両辺に  $c_0$  を作用させれば、これが (132) より微分作用素であることから

$$(c_0|1\rangle) * |A\rangle + |1\rangle * (c_0|A\rangle) = c_0|A\rangle \quad (181)$$

となる。いま、恒等状態が状態  $(c_0|A\rangle)$  に対しても左から恒等的に作用するとすると、

$$(c_0|1\rangle) * |A\rangle = 0 \quad (182)$$

---

<sup>27</sup>以前用いた局所カレント  $q'(z') = z'^{n-2} + (-)^n z'^{-n-2}$  は  $z = i$  で正則性の条件を満たさない。

となる。ここで、状態  $|A\rangle$  として特に恒等状態をもってきたとする。恒等状態が状態  $(c_0|1\rangle)$  に対して右から恒等的に作用するとすると、

$$c_0|1\rangle = 0 \quad (183)$$

となり、これは明らかに (179) に矛盾している。

したがって、恒等状態はすべての状態に対し恒等的に作用するとは限らない。

他方、このカレントとして (85) を選んだとすると、

$$\langle 1| \oint_C v'(z')T'(z') = 0 \quad (184)$$

が導かれる。ただし、 $v'(z')$  は正則ベクトル場  $v(z)$  を局所座標  $z'$  で表した局所正則ベクトル場とし、 $v(z)$  は挿入点を除いて大域的に正則であるとする。

以前 stress tensor  $T(z)$  保存則を導く際に用いた (116) を参考にすると、

$$v'(z') = z'^{n+1} + (-z')^{-n+1} \quad (185)$$

は以前と同じ計算で Riemann 球の各局所座標で貼り合せて大域ベクトル場になる。正則性については、 $\infty$  点については  $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z)/z^2 < \infty$  と等価であり局所座標で書き直すことで分かる。したがって、このベクトル場は (184) に適用できる。したがって、

$$K_n = L_n - (-)^n L_{-n} \quad , \quad B_n = b_n - (-)^n b_{-n} \quad (186)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \langle 1|K_n = 0 \quad , \quad \langle 1|B_n = 0 \\ \langle 1|L_n = \langle 1|L_n^* \quad , \quad \langle 1|b_n = \langle 1|b_n^* \end{aligned} \quad (187)$$

を得る。この式を用いれば

$$\langle 1|\tilde{L}_n = \langle 1|\tilde{L}_n^* \quad , \quad \langle 1|\tilde{b}_n = \langle 1|\tilde{b}_n^* \quad (188)$$

を得る。

## 4 解析解

本章ではこれまでの章の結果を踏まえて、解の変形 (marginal deformation) と呼ばれる手法を用いて CSFT の解析解を構成する (節 4.1)。この手法で構成される解析解の特徴は、\* 積の部分代数空間として最も小さかったくさび状態空間の上に作用素を挿入して構成されているという点である。

この解析解を構成する技術は、2005 年、Schnabl が CSFT のある解析解を提示したことにはじまる [13] (節 4.2)。Schnabl が提示した解がそれ以前に知られていた CSFT おける解析解 [31, 32] と比べて改善されているところは、そのポテンシャルエネルギーが厳密に計算できる、という点である。したがって、以前の解析解では成し遂げることができなかった Sen 予想の正否の判定が可能になり、実際 Schnabl が提示した解で Sen 予想の第 1 と第 3 の前半部が正しいことが示された<sup>28</sup>。

Schnabl の論文以降、その技術を応用して様々な CSFT における解析解が構成される [37, 38]。過去にレベル切断近似によって調べられていた近似解の性質が解析解を用いて考察することが可能になった (節 4.3)。転がるタキオン (rolling tachyon) 解の様子が厳密解を通じて解析される。

---

<sup>28</sup>ここでは論文 [13] に従って「証明された」と言い切ったが、この解の表示が本当に tachyon 解を表しているかどうかについてはまだ疑問の余地がある。

## 4.1 解析解の構成法 ～解の変形～

運動方程式 (35) を解くことを考える。明らかに  $\Phi = 0$  は解であるから、その自明な解から少しずつずらしていった解を構成する。すなわち、弦の場合  $\Phi$  を

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \phi_n \quad (189)$$

と展開する。ただし、 $\lambda$  は実数を動くパラメータとする。明らかに、 $\lambda = 0$  は自明な解である。これを運動方程式 (35) に代入して各  $\lambda$  の次数ごとに係数を比べる。すると、運動方程式 (35) を解くことが次の連立微分方程式系を解くことに帰着する:

$$Q_B \phi_1 = 0, \quad (190)$$

$$Q_B \phi_{n+1} = - \sum_{m=1}^n \phi_m * \phi_{n+1-m}, \quad n \geq 1. \quad (191)$$

この連立微分方程式系の特徴は、(190) をみたす  $\phi_1$  を与えれば、残りの  $\phi_n (n \geq 2)$  は  $\phi_1$  によって書けてしまっている点である。すなわち、この方程式の解の自由度は BRST-cohomology 分だけある<sup>29</sup>。以下、この初期条件が BRST-cohomology として自明な場合と非自明な場合に分けて調べる。

---

<sup>29</sup>CSFT の運動方程式は、複素構造の変形をあらわす Maurer-Cartan 方程式とも考えられたから、その意味では複素構造の変形の自由度が BRST-cohomology 分だけある、ともいえる。

#### 4.1.1 初期条件が BRST-exact な場合

BRST-cohomology としてまず一見すると自明である場合を考える:

$$\phi_1 = Q_B \varphi. \quad (192)$$

ただし、 $\varphi$  はゴースト数が 0 であるとする。これは明らかに (190) をみたく。これを用いて残りの (191) をみたく  $\phi_n (n \geq 2)$  を構成する。

まず、 $n = 2$  の場合である

$$Q_B \phi_2 = -\phi_1 * \phi_1 \quad (193)$$

を解く。右辺は (192) を代入すると、

$$-Q_B \varphi * Q_B \varphi = Q_B (Q_B \varphi) * \varphi \quad (194)$$

となるので、(193) はゴースト数が 1 の BRST 不変な任意の状態  $\rho_1$  を用いて

$$\phi_2 = (Q_B \varphi) * \varphi + \rho_1 \quad (195)$$

と解ける。

次に、 $n = 3$  の場合である

$$Q_B \phi_3 = -\phi_2 * \phi_1 - \phi_1 * \phi_2 \quad (196)$$

を解く。右辺は (192)、(195) を代入すると、

$$\begin{aligned} & -((Q_B \varphi) * \varphi + \rho_1) * Q_B \varphi - Q_B \varphi * ((Q_B \varphi) * \varphi + \rho_1) \\ &= Q_B ((Q_B \varphi) * \varphi * \varphi + \rho_1 * \phi_1 - \phi_1 * \rho_1) \end{aligned} \quad (197)$$

となるので、(196) はゴースト数が 1 の BRST 不変な任意の状態  $\rho_2$  を用いて

$$\phi_3 = (Q_B \varphi) * \varphi * \varphi + \rho_2 \quad (198)$$

と解ける。

以下同様にして  $\phi_n$  が  $\varphi$  とゴースト数が 1 の BRST 不変な任意の状態  $\rho_{n-1}$  を用いて書ける。今簡単のため  $\rho_1 = \dots = \rho_{n-1} = 0$  である場合を考える。すると、 $\phi_n$  は  $\varphi$  だけで表せて

$$\phi_n = (Q_B \varphi) * \underbrace{\varphi * \varphi * \dots * \varphi}_{n-1} = (Q_B \varphi) * \varphi^{n-1} = \phi_1 * \varphi^{n-1} \quad (199)$$

となるので、これを (189) に代入すると、

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (Q_B \varphi) * \varphi^{n-1} \\ &= \lambda (Q_B \varphi) * \frac{1}{1 - \lambda \varphi} \end{aligned} \quad (200)$$

となる。ここでさらに

$$e^X = \frac{1}{1 - \lambda\varphi} \quad , \quad e^{-X} = 1 - \lambda\varphi \quad (201)$$

とおくと、

$$(Q_B e^{-X}) = -\lambda Q_B \varphi \quad (202)$$

となるから、(230) に代入すれば

$$\begin{aligned} \Phi &= -(Q_B e^{-X}) * e^X \\ &= e^{-X} * (Q_B e^X) = : \Phi_\lambda \end{aligned} \quad (203)$$

となる。ここで、

$$X = -\ln(1 - \lambda\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \varphi^n \quad (204)$$

をゲージパラメータと考えれば、このように構成された解は形式的に純粋ゲージ (pure gauge) の形をしている。すなわち、このように構成された解はゲージパラメータが意味を持つ範囲で自明な解とゲージ同値である。

#### 4.1.2 初期条件が BRST-exact でない場合

初期条件が BRST-cohomology として非自明である場合を考える。具体的に、 $\phi_n (n \geq 2)$  を  $\phi_1$  で表していく際、次のように sliver 座標における FS ゲージ条件を課す [13]:

$$\tilde{b}_0 \phi_1 = 0 \quad \text{or} \quad \phi_1 = \phi_{1\text{FS}}. \quad (205)$$

このゲージを以下  $\tilde{b}_0$  ゲージ と呼ぶ。すると、方程式 (190)、(191) は両辺に  $\tilde{b}_0$  をかけることで、

$$\tilde{L}_0 \phi_1 = 0, \quad (206)$$

$$\tilde{L}_0 \phi_n = - \sum_{m=1}^{n-1} \tilde{b}_0 (\phi_m * \phi_{n-m}), \quad n \geq 2. \quad (207)$$

まで簡略化される。

まず、 $n = 2$  の場合である

$$\tilde{L}_0 \phi_2 = -\tilde{b}_0 (\phi_1 * \phi_1). \quad (208)$$

を解く。両辺に  $\tilde{L}_0$  の逆作用素  $\frac{1}{\tilde{L}_0}$  をかければ、

$$\phi_2 = -\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} (\phi_1 * \phi_1). \quad (209)$$

となり、形式解が得られる。ここに、 $\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0}$  は伝搬関数もどき (semi-propagater) であって<sup>30</sup>次のように Schwinger パラメータを用いて計算する。

$$\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} = \tilde{b}_0 \int_0^\Lambda d\tau e^{-\tau \tilde{L}_0} \quad (210)$$

ここに  $\Lambda$  は正則化パラメータである。これを形式解に代入すれば

$$\phi_2 = -\tilde{b}_0 \int_0^\Lambda d\tau e^{-\tau \tilde{L}_0} (\phi_1 * \phi_1). \quad (211)$$

であるが、補題 3.1 と補題 3.2 を用いればこの右辺が変形できて、

$$= \phi_1 * \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{b}_{-1}^L \int_0^\Lambda d\tau e^{-\tau \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{L}_{-1}^L} \phi_1 \quad (212)$$

となる。(170) を用いて、

$$\int_0^\Lambda d\tau e^{-\tau \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{L}_{-1}^L} = \int_0^\Lambda d\tau e^{-\tau \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{L}_{-1}^L |1\rangle} = \int_{-\Lambda+1}^1 d\tau |\tau\rangle \quad (213)$$

となることより、

$$A(x, y) := \int_y^x d\tau \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{b}_{-1}^L |\tau\rangle \quad (214)$$

$$\frac{\pi}{2} \int_x^y dr \quad b$$

図 12: 作用素  $A(x, y)$  を表す図。

とおくと、

$$(212) = \phi_1 * A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1 \quad (215)$$

となる。この作用を  $A(x, y)$  を図にしたものを図 12 に示す。

これが実際に解になっていることをいうには、正則化がしっかり行われていることを確認する必要がある。(215) の両辺に  $Q$  を作用すると、右辺は (190) により

$$-\phi_1 * Q_B A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1 \quad (216)$$

となるが、

$$Q_B A(x, y) = |x\rangle - |y\rangle \quad (217)$$

を示すことができるので、

$$\phi_1 * |-\Lambda + 1\rangle * \phi_1 = 0 \quad (218)$$

を仮定すれば (215) は確かに (191) を満たして解になっている<sup>31</sup>。

$\phi_n, n \geq 3$  については、帰納的に

$$\phi_{n+1} = \phi_n * A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1 \quad (219)$$

とすればよい。

$${}^A\phi_n := A(1, -\Lambda + 1) * \phi_n \quad (220)$$

とおくと、この方程式に左から  $A(1, -\Lambda + 1)$  をかけたものは

$${}^A\phi_{n+1} = {}^A\phi_n * {}^A\phi_1 \quad (221)$$

となる。

<sup>30</sup> 本当の伝搬関数は  $\frac{\tilde{b}_0}{L_0} Q \frac{\tilde{b}_0}{L_0^*}$  である [13, 36]。

<sup>31</sup>  $\phi_1$  は sliver における FS ゲージを取っていたので  $\tilde{c}_0$  を含まない。したがって小節 3.2.3 において見つかった  $c$  ゴーストの 0 モードによる恒等状態の異常はここでは現れない。



これを (189) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \phi_n \\
&= \lambda \phi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} \phi_n * A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1 \\
&= \lambda \phi_1 + \Phi * A(1, -\Lambda + 1) * \lambda \phi_1
\end{aligned} \tag{222}$$

となる。これを  $\Phi$  について解いて

$$\Phi = \lambda \phi_1 * \frac{1}{1 - A(1, -\Lambda + 1) * \lambda \phi_1} \tag{223}$$

を得る<sup>32</sup>。

この解は  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たすはずであるが、それを確認するには (3.2) を用いて帰納的に証明すればよい。まず  $\phi_1$  は  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たす。 $\phi_n$  が  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たすとする。(219) の両辺に  $\tilde{b}_0$  を作用すると

$$\tilde{b}_0 \phi_{n+1} = \tilde{b}_0 (\phi_n * A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1) \tag{226}$$

となる。(155) を用いると

$$= -\frac{\pi}{2} \phi_n * \tilde{b}_{-1}^L A(1, -\Lambda + 1) * \phi_1 \tag{227}$$

となるが、 $\tilde{b}_{-1}^L A(1, -\Lambda + 1) = 0$  により  $\tilde{b}_0 \phi_{n+1} = 0$  となり  $\phi_{n+1}$  も  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たす。したがって、数学的帰納法により  $\phi_n$  は  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たすことが示された。それゆえ、この解は  $\tilde{b}_0$  ゲージ条件を満たす。

---

<sup>32</sup>(220) に BRST 作用素をかけると

$$Q_B^A \phi_1 = \phi_1 - | -\Lambda + 1) * \phi_1 \tag{224}$$

を得るので代入すれば、

$$\Phi = \lambda (Q_B^A \phi_1 + | -\Lambda + 1) * \phi_1) * \frac{1}{1 - \lambda^A \phi_1} \tag{225}$$

となるのだが、剰余項がうまく正則化されない限り純粹ゲージの形に書き直すことができない。

## 4.2 Schnabl 解

Schnabl が導いた解は、初期条件が BRST-cohomology として自明な場合 (小節 4.1.1) で

$$\varphi = \tilde{b}_{-1}^L |c\rangle \quad (228)$$

としたものである [13, 33]。この  $\varphi$  を sliver 座標で図示すると図 13 のようになる。

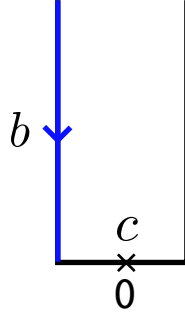


図 13:  $\varphi = \tilde{b}_{-1}^L |c\rangle$  を  $\arctan$  で sliver 座標に移したもの。

以下、論文 [13, 33] と記号をそろえるため

$$\Phi_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \phi_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \phi_n \quad (229)$$

と  $\phi_n$  の添え字を  $-1$  だけずらした指数付けをする。このとき解  $\Phi_\lambda$  は展開パラメータ  $\lambda$ 、もしくはゲージパラメータ  $X$  が意味を持つ範囲で純粹ゲージの形をもつ:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &= \lambda (Q_B \varphi) * \frac{1}{1 - \lambda \varphi} \\ &= e^{-X} * (Q_B e^X). \end{aligned} \quad (230)$$

ゲージパラメータ  $X$  が意味を持つ範囲を調べると

$$\langle 0 | \tilde{c}_{-1} \tilde{c}_0 \tilde{c}_1 X | 0 \rangle = \frac{\pi}{2(1 - \lambda)} \quad (231)$$

となることが分かるので、このゲージパラメータは  $\lambda = 1$  で特異な振る舞いをする。すなわち、この解  $\Phi_\lambda$  は  $\lambda = 1$  で純粹ゲージではない非自明な解になり、この解の表示は意味を持たない。

そこで、 $\lambda = 1$  での正則化を定める。まず  $\phi_n$  は (199) より

$$\psi_n := \psi_0 * \varphi^n = \frac{2}{\pi} |c\rangle * (\tilde{b}_{-1}^L |n\rangle * |c\rangle \quad , \quad \psi_0 = \frac{2}{\pi} |c\rangle \quad (232)$$

なる  $\psi_n$  を用いて

$$\phi_n = \partial_n \psi_n \quad (233)$$

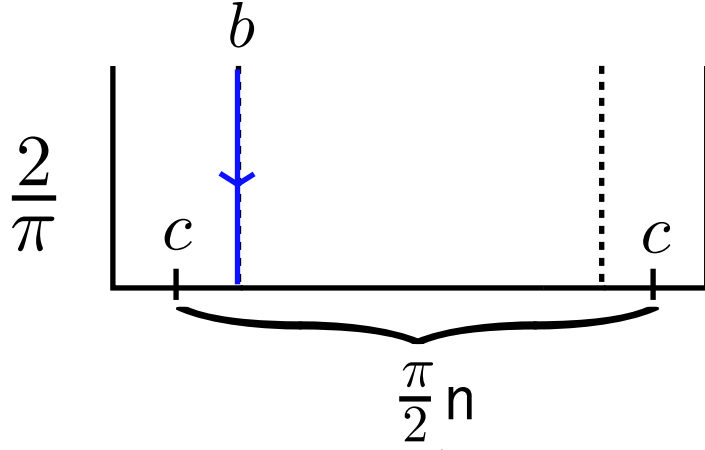


図 14:  $\psi_n$  を arctan で sliver 座標に移したもの。

と書ける。 $\psi_n$  を図示すると図 14 のようになる。

この  $\psi_n$  を用いて、解  $\Phi_\lambda$  の  $\lambda = 1$  での正則化を次で定める:

$$\Phi_{\lambda=1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N \partial_n \psi_n - \psi_N \right). \quad (234)$$

これが Schnabl が提示した解析解である。これを以下 Schnabl 解 と呼ぶ。

Schnabl 解が運動方程式を満たすことについてだが、それについては

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = 0 \quad (235)$$

を言えば十分である。(373) と  $\tilde{b}_0|0\rangle = 0$  を用いることにより

$$\begin{aligned} \psi_N &= -\frac{1}{\pi^2} |c\rangle * (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*) |N\rangle * |c\rangle \\ &= -\frac{1}{\pi^2} |c\rangle * \frac{2}{N} U_N^* \tilde{b}_0^* |0\rangle * |c\rangle \\ &\rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が言える。よって、Schnabl 解は CSFT の解である。

一方で、Schnabl 解は Bernoulli 数を用いることで別の表示をもつ。 $\psi_n$  は

$$\psi_n = e^{n\partial_r} \psi_r |_{r=0} \quad (236)$$

と書き直すことができるので、解  $\Phi_\lambda$  に代入すると

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_n \psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{n\partial_r} \partial_r \psi_r |_{r=0} \\ &= \frac{\lambda \partial_r}{1 - \lambda e^{\partial_r}} \psi_r |_{r=0} \end{aligned} \quad (237)$$

となる。ここに Bernoulli 数に関する公式

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (238)$$

を用いると、

$$\Phi_{\lambda=1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N -\frac{B_n}{n!} \partial_r^n \psi_r |_{r=0} - \psi_N \right) \quad (239)$$

となる。

#### 4.2.1 ポテンシャルエネルギー ～Sen 予想 1 の証明～

Schnble 解が表す真空のポテンシャルエネルギーを計算する<sup>33</sup>。

$$-S(\Phi) = \frac{1}{g^2} \left[ \frac{1}{2} \langle \Phi, Q_B \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right] \quad (240)$$

運動方程式 (35) を用いると、

$$(240) = \frac{1}{6g^2} \langle \Phi, Q_B \Phi \rangle \quad (241)$$

Schnabl 解を代入すると、 $\langle \Phi, Q_B \Phi \rangle$  の部分は、

$$\langle \Phi, Q_B \Phi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \langle \psi_N, Q_B \psi_N \rangle - 2 \sum_{m=0}^N \langle \psi_N, Q_B \partial_m \psi_m \rangle + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \langle \partial_n \psi_n, Q_B \partial_m \psi_m \rangle \right]. \quad (242)$$

となる。このことより、2点関数  $\langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle$  を計算することができれば、後はその式を微分することにより (242) のすべての項を求めることができる。BRST 作用素  $Q_B$  の計算は \* 積に対して微分作用素として振る舞うことを利用ればよい。 $\frac{\pi}{2} Q_B \psi_m$  を図示すると図 15 のようになる。

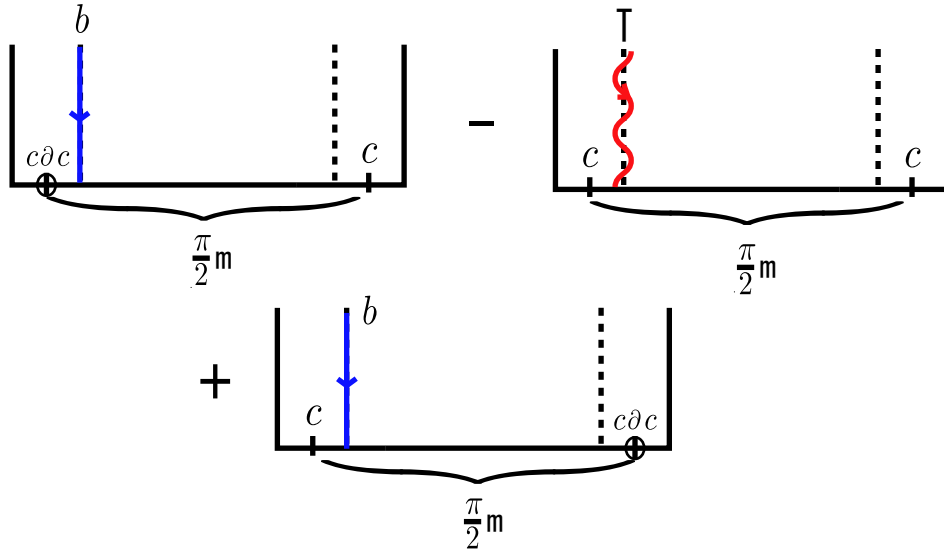


図 15:  $\frac{\pi}{2} Q_B \psi_m$  を arctan で sliver 座標に移したもの。

実際に  $\langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle$  を求めると次のようになる:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle = & \frac{1}{\pi^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi r}{p} \right) \right) \left( -1 + \frac{p}{\pi} \sin \left( \frac{2\pi}{p} \right) \right) + \\ & + 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{p} \right) \left[ -\frac{p-1}{\pi^2} + \frac{(p-2)^2 - r^2}{4\pi^2} \cos \left( \frac{\pi r}{p} \right) + \frac{pr}{2\pi^3} \sin \left( \frac{\pi r}{p} \right) \right]. \end{aligned} \quad (243)$$

<sup>33</sup>以下の計算の一部は Mathematica を用いている。

ただし、 $p = m + n + 2, r = m - n$  とした。

これにより (242) の第一項は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \psi_N, Q_B \psi_N \rangle = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}. \quad (244)$$

と求まる。

一方、第2項は (243) の両辺を  $m$  で微分したものを必要とする。すなわち、

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, Q_B \partial_m \psi_m \rangle &= (\partial_r + \partial_p)(243) \\ &= \frac{1}{2p^2\pi^3} \left[ -2p^2\pi + 2(-2+p)p\pi \cos \left[ \frac{2\pi}{p} \right] + 2(p^2 + 2(-1+p)\pi^2) \sin \left[ \frac{2\pi}{p} \right] \right. \\ &\quad + \cos \left[ \frac{\pi r}{p} \right] \left\{ p\pi((-2+p)p - r^2) + p\pi(-4 - (-2+p)p + r^2) \cos \left[ \frac{2\pi}{p} \right] \right. \\ &\quad \left. \left. + (4p\pi^2 - p^2(-2 + \pi^2) + \pi^2(-4 + r^2)) \sin \left[ \frac{2\pi}{p} \right] \right\} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -p^3(-2 + \pi^2) + p\pi^2(-4 + r)r - \pi^2 r^3 + p^2(2r + \pi^2(4 + r)) \right. \\ &\quad \left. + (p^3(-2 + \pi^2) + p\pi^2(4 - (-4 + r)r) + \pi^2 r(-4 + r^2) - p^2(2r + \pi^2(4 + r))) \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \left[ \frac{2\pi}{p} \right] - 4p^2\pi \sin \left[ \frac{2\pi}{p} \right] \right\} \sin \left[ \frac{\pi r}{p} \right] \right]. \quad (245) \end{aligned}$$

この  $m$  に関する無限和を評価するため、 $x = m/N, p = N(1+x) + 2, r = (x-1)N$  とおいて、 $x$  を固定したまま  $N$  を無限大にしていくと、漸近形は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N (245) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{N} \left[ \frac{4\pi x}{(1+x)^4} \sin \left( \pi \frac{1-x}{1+x} \right) \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (246)$$

となる。したがって、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{N} F\left(\frac{m}{N}\right) = \int_0^1 dx F(x)$  を用いて評価することができて、  
結局

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=0}^N \langle \psi_N, Q_B \partial_m \psi_m \rangle \right] = \int_0^1 dx \frac{4\pi x}{(1+x)^4} \sin \left( \pi \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \quad (247)$$

となる。

同様に第3項もやる。第3項は、(243) の両辺を  $m$  と  $n$  で微分したものを必要とする。すなわち、

$$\langle \partial_n \psi_n, Q_B \partial_m \psi_m \rangle = -\frac{4(p-1)}{p^4} \cos \left( \frac{2\pi}{p} \right) + \frac{1}{8p^4} [f_p(r+2) - f_p(r) + f_p(-r+2) - f_p(-r)] \quad (248)$$

ここで、 $f_p(r)$  は次で定義される:

$$f_p(r) = -((p-2)^2 - (r-2)^2)(p^2 - r^2) \cos \left( \frac{\pi r}{p} \right). \quad (249)$$

(248) の  $m$  と  $n$  に関する無限和を評価する。  $\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N$  は次のような

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N = \sum_{p=2}^{N+2} \sum_{\substack{r=-p+2 \\ \text{step 2}}}^{p-2} + \sum_{p=N+3}^{2N+2} \sum_{\substack{r=-2N+p-2 \\ \text{step 2}}}^{2N-p+2} .$$

二つの和に分解される。このとき、式の形から

$$\sum_{\substack{r=-p+2 \\ \text{step 2}}}^{p-2} (248) = 0. \quad (250)$$

が分かる。残りの和を評価すると、

$$\begin{aligned} \sum_{p=N+3}^{2N+2} \sum_{\substack{r=-2N+p-2 \\ \text{step 2}}}^{2N-p+2} (248) &= \sum_{j=1}^N \frac{4}{(2+j+N)^4} \left[ (j^2 - (N+1)^2) \cos\left(\frac{2\pi}{2+j+N}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (j^2 - 1)(N+1)^2 \cos\left(\frac{\pi(j-N)}{2+j+N}\right) + j^2 N(N+2) \cos\left(\frac{2j\pi}{2+j+N}\right) \right] \end{aligned} \quad (251)$$

この  $j$  に関する無限和を評価するため、  $x = j/N$  とおいて、  $x$  を固定したまま  $N$  を無限大にしていくと、漸近形は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (251) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{N} \left[ \frac{4\pi x}{(1+x)^4} \sin\left(\pi \frac{1-x}{1+x}\right) \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (252)$$

したがって、  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{N} F\left(\frac{m}{N}\right) = \int_0^1 dx F(x)$  を用いて評価することができて、結局

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \langle \partial_n \psi_n, Q_B \partial_m \psi_m \rangle \right] = \int_0^1 dx \frac{8\pi x^2}{(1+x)^5} \sin\left(\pi \frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2}. \quad (253)$$

となる。

以上を合わせることにより、この解があらわす真空のエネルギーは

$$\begin{aligned} -S(\Phi_{\lambda=1}) &= \frac{1}{6g_o^2} \langle \Phi, Q_B \Phi \rangle \\ &= \frac{1}{6g_o^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right] \times (\text{vol}) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 g^2} \times (\text{vol}) = -T_{25} \times (\text{vol}) \end{aligned} \quad (254)$$

となる。ただし、  $(\text{vol}) = (2\pi)^{26} \delta^{26}(0)$  とおいた。したがって、この解が表す真空のポテンシャルエネルギー密度  $V(\Phi) = -S(\Phi_{\lambda=1})/(\text{vol})$  は D25 ブレーンの張力に  $-$  をつけたものと一致する。これで Sen 予想 1 が tree level で証明された。

#### 4.2.2 開弦自由度の消滅 ～Sen 予想 3 の証明～

前小節では、Schnabl 解の表す真空のポテンシャルエネルギーが自明な解の表す真空に比べて D25 ブレーンの張力の大きさだけ小さいことが示された。今、自明な解が表す真空には D25 ブレーンが存在し、かつその D25 ブレーン上のタキオン場は不安定であることが分かっているから、Schnabl 解が表す真空では D25 ブレーンが消滅していることが予想される。実際に Schnabl 解が表す真空では開弦自由度の物理的な自由度が消滅していることを示す [14]。

ある真空における開弦の物理的状态は、その真空のまわりで定義される BRST 作用素の cohomology で表される。真空  $\Phi_1$  のまわりで定義される BRST 作用素  $Q_{\Phi_1}$  とは次のように定義される。まず、力学変数である弦場  $\Phi$  を真空  $\Phi_1$  とそのまわりの揺らぎを表す場  $\Psi$  で

$$\Phi = \Phi_1 + \Psi \quad (255)$$

と書き直す。これを CSFT の作用

$$S = -\frac{1}{g^2} \int \left[ \frac{1}{2} \Phi * Q_B \Phi + \frac{1}{3} \Phi * \Phi * \Phi \right] = S[\Phi, Q_B] \quad (256)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} S[\Phi, Q_B] &= S[\Psi + \Phi_1, Q_B] \\ &= -\frac{1}{g^2} \int \left[ \frac{1}{2} (\Psi + \Phi_1) * Q_B (\Psi + \Phi_1) + \frac{1}{3} (\Psi + \Phi_1) * (\Psi + \Phi_1) * (\Psi + \Phi_1) \right] \end{aligned}$$

となるが、これを運動方程式  $Q_B \Phi_1 + \Phi_1 * \Phi_1 = 0$  を用いて書き直すと

$$= -\frac{1}{g^2} \int \left[ \frac{1}{2} \Psi * (Q_B \Psi + \Psi * \Phi_1 + \Psi * \Phi_1) + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right] + S[\Phi_1] \quad (257)$$

となる。したがって、真空  $\Phi_1$  まわりの BRST 作用素を

$$Q_{\Phi_1} A := Q_B A + \Phi_1 * A - (-)^A A * \Phi_1 \quad (258)$$

で定義すると、最終的な作用の形は

$$\begin{aligned} S[\Phi, Q_B] &= -\frac{1}{g^2} \int \left[ \frac{1}{2} \Psi * Q_{\Phi_1} \Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right] + S[\Phi_1] \\ &= S[\Psi, Q_{\Phi_1}] + S[\Phi_1, Q_B] \end{aligned} \quad (259)$$

となる。最初の作用 (3) と比べると、定数項と BRST 作用素以外完全に同じ形をしている。

このようにして構成された作用素  $Q_{\Phi_1}$  は、節 2.1 において出てきた  $Q$  についての公理を満たす。証明だが、 $Q_{\Phi_1}$  のべき零性については、運動方程式  $Q_B \Phi_1 + \Phi_1 * \Phi_1 = 0$  を使うことで  $Q_{\Phi_1}^2 A = 0$  が分かる。 $Q_{\Phi_1}$  が Leibniz 則を満たすことと公理 2.4 における Stokes の性質をみたすことについては式を書き下すと見て取れる。このことから、節 2.1 の結果より作用  $S[\Psi, Q_{\Phi_1}] + S[\Phi_1, Q_B]$  によって表される弦の場の理論はゲージ不変な理論であることが分かる。



Schnabl 解  $\Phi_{\lambda=1}$  において開弦の自由度がなくなっていることをいうには、Schnabl 解  $\Phi_{\lambda=1}$  のまわりで定義される BRST 作用素  $Q_{\Phi_1}$  の cohomology が消えることをいえばよい。このことに関して次の補題が便利である。

**補題 4.1** BRST 作用素  $Q_{\Phi}$  の cohomology が消えることと、 $Q_{\Phi}A = |1\rangle$  となる弦の場  $A$  が存在することは等価である。

証明は次の通りである。まず、 $Q_{\Phi}$  を恒等状態  $|1\rangle$  に作用させることにより、

$$Q_{\Phi}|1\rangle = Q_B|1\rangle + \Phi * |1\rangle - |1\rangle * \Phi = Q_B|1\rangle = 0 \quad (260)$$

を得るが、 $|1\rangle$  は  $Q_B$ -closed であったからこの右辺は消える。すなわち、 $|1\rangle$  は  $Q_{\Phi}$ -closed である。したがって  $Q_{\Phi}$  の cohomology が消えるとすると、 $|1\rangle$  は  $Q_{\Phi}$ -exact になるため、ある弦の場  $A$  があって  $Q_{\Phi}A = |1\rangle$  をみたす。

逆に  $Q_{\Phi}A = |1\rangle$  をみたす弦の場  $A$  があったとすると、 $Q_{\Phi}$ -closed な任意の状態  $\Lambda$  をもってきたとき、

$$Q_{\Phi}(A * \Lambda) = (Q_{\Phi}A) * \Lambda = |1\rangle * \Lambda = \Lambda \quad (261)$$

となる。この形から  $\Lambda$  は  $Q_{\Phi}$ -exact であることが分かる。したがって、上の補題が示された。このような作用素  $A$  を homotopy 作用素 と呼ぶ。

この homotopy 作用素を sliver 座標における FS ゲージを取ることで構成することを考える。すなわち、 $\tilde{b}_0 A = 0$  の条件の下

$$Q_{\Phi_1}A = |1\rangle \quad (262)$$

を解く。両辺に  $\tilde{b}_0$  をかけると

$$\tilde{L}_0 A = \tilde{b}_0 |1\rangle - \tilde{b}_0 (\Phi_{\lambda=1} * A + A * \Phi_{\lambda=1}) \quad (263)$$

となるので、さらに  $\frac{1}{\tilde{L}_0}$  をかけて

$$A = \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} |1\rangle - \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} (\Phi_{\lambda=1} * A + A * \Phi_{\lambda=1}) \quad (264)$$

を得る。したがって、第一近似において  $A$  は

$$A = \frac{1}{\tilde{L}_0} \tilde{b}_0 |1\rangle \quad (265)$$

となる。これを書き換えていく。(188) を用いると、

$$= \frac{1}{\tilde{L}_0} \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*}{2} |1\rangle \quad (266)$$

となり、(377) と  $[\tilde{L}_0, \tilde{b}_0] = 0$  を用いることにより

$$= \frac{1}{2} (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*) \frac{1}{\tilde{L}_0 + 1} |1\rangle \quad (267)$$

を得る。 $\frac{1}{\tilde{L}_0+1}|1\rangle$ の部分は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{L}_0+1}|1\rangle &= \int_0^1 r^{\tilde{L}_0} dr |1\rangle = \int_0^1 dr U_{2/r} U_1^* |0\rangle \\ &= \int_0^1 dr U_{2-r}^* |0\rangle = \int_0^1 dr |2-r\rangle = \int_1^2 dr |r\rangle\end{aligned}$$

となる。これを代入すれば

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*) \int_1^2 dr |r\rangle \\ &= \frac{\pi}{2} \tilde{b}_{-1}^L \int_2^1 dr |r\rangle = A(1, 2)\end{aligned}\tag{268}$$

となる。これで  $A$  が第一近似で解けた。

方程式 (262) を完全に解くため、

$$A = A(1, 2) + A'\tag{269}$$

とにおいて方程式 (262) に代入すれば

$$A' = -\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} \left( \Phi_{\lambda=1} * (A(1, 2) + A') + (A(1, 2) + A') * \Phi_{\lambda=1} \right)\tag{270}$$

という  $A'$  に関する方程式になる。以下、この方程式に含まれる  $A(1, 2) * \Phi_{\lambda=1}$  や  $\Phi_{\lambda=1} * A(1, 2)$  を計算する。そのためには  $\psi_n * A(1, 2)$  や  $A(1, 2) * \psi_n$  を計算して適当に微分して和を取ればよい。

$$\psi_n * A(1, 2) = \int_2^1 dr c_1 |0\rangle * \tilde{b}_{-1}^L |n\rangle * c_1 |0\rangle * \tilde{b}_{-1}^L |r\rangle,\tag{271}$$

(155) を用いて

$$= \int_2^1 dr c_1 |0\rangle * \tilde{b}_{-1}^L \tilde{b}_{-1}^R (|n\rangle * c_1 |0\rangle * |r\rangle)\tag{272}$$

となるが、 $\tilde{b}_{-1}^L \tilde{b}_{-1}^R = \tilde{b}_{-1}^L (\tilde{b}_{-1} - \tilde{b}_{-1}^L) = \tilde{b}_{-1}^L \tilde{b}_{-1}$  や  $\tilde{b}_{-1}$  が Leibniz 則を満たすことも用いると

$$\begin{aligned}&= \int_2^1 dr c_1 |0\rangle * \tilde{b}_{-1}^L \tilde{b}_{-1} (|n\rangle * c_1 |0\rangle * |r\rangle) \\ &= \int_2^1 dr c_1 |0\rangle * \tilde{b}_{-1}^L (|n\rangle * |0\rangle * |r\rangle) \\ &= \int_2^1 dr \tilde{b}_{-1}^R (c_1 |0\rangle * |n+r\rangle)\end{aligned}\tag{273}$$

となる。 $A(1, 2) * \psi_n$  についても同様に求めると、

$$A(1, 2) * \psi_n = \int_2^1 dr \tilde{b}_{-1}^L (|r+n\rangle * c_1 |0\rangle)\tag{274}$$

となる。これらを両辺  $n$  で微分して和  $\sum_{n=0}^N$  を取れば

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \partial_n \psi_n * A(1, 2) &= \sum_{n=0}^N \int_1^2 dr \tilde{b}_{-1}^R(c_1|0) * \partial_r |n+r\rangle \\ &= \sum_{n=0}^N \tilde{b}_{-1}^R(c_1|0) * \{|n+1\rangle - |n+2\rangle\} \\ &= \tilde{b}_{-1}^R c_1|0\rangle - \tilde{b}_{-1}^R(c_1|0) * |N+2\rangle. \end{aligned} \quad (275)$$

$$A(1, 2) * \sum_{n=0}^N \partial_n \psi_n = \tilde{b}_{-1}^L c_1|0\rangle - \tilde{b}_{-1}^L(|N+2\rangle * c_1|0\rangle). \quad (276)$$

を得る。これらにより  $\Phi_{\lambda=1} * A(1, 2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N \partial_n \psi_n - \psi_N \right) * A(1, 2)$  などが計算できて

$$\Phi_{\lambda=1} * A(1, 2) + A(1, 2) * \Phi_{\lambda=1} = |0\rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} R_N \quad (277)$$

となる。ただし、 $R_N$  は

$$R_N = \tilde{b}_{-1}^R \left\{ c_1|0\rangle * \left( |N+2\rangle - \int_1^2 dr |N+r\rangle \right) \right\} + \tilde{b}_{-1}^L \left\{ \left( |N+2\rangle - \int_1^2 dr |N+r\rangle \right) * c_1|0\rangle \right\}. \quad (278)$$

によって与えられる。ここで  $N$  を無限大にもっていくことを考えると

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \left( |N+2\rangle - \int_1^2 dr |N+r\rangle \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} |N+2\rangle - \int_1^2 dr \lim_{N \rightarrow \infty} |N+r\rangle \\ &= |\infty\rangle - |\infty\rangle = 0 \end{aligned} \quad (279)$$

となるので、結局  $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$  である<sup>34</sup>。結局、次が示された。

$$\Phi_{\lambda=1} * A(1, 2) + A(1, 2) * \Phi_{\lambda=1} = |0\rangle. \quad (280)$$

これを (270) に代入すると

$$A' = -\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} \left( \Phi_{\lambda=1} * A' + A' * \Phi_{\lambda=1} + |0\rangle \right) = -\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{L}_0} \left( \Phi_{\lambda=1} * A' + A' * \Phi_{\lambda=1} \right) \quad (281)$$

となるが、この  $A'$  について方程式は明らかに自明な解  $A' = 0$  をもつ。したがって、(262) をみたとす  $A$  が

$$A = A(1, 2) \quad (282)$$

で構成された。それゆえ、上の補題 4.1 によって Schnabl 解  $\Phi_{\lambda=1}$  のまわりで定義される BRST 作用素  $Q_{\Phi_1}$  の cohomology が消えることが言え、Schnabl 解  $\Phi_{\lambda=1}$  において開弦の自由度がなくなっていることが示された。

<sup>34</sup>[14] によればレベル切断近似による計算は  $R_N \sim \mathcal{O}(N^{-3})$  となる。

### 4.3 他の解析解

Schnabl 解とは異なる解析解として小節 4.1.2 で紹介した初期条件が BRST-cohomology として非自明な場合があった。この場合で解を構成する際次のような仮定をおいた:

$$\phi_1 * | - \Lambda + 1 \rangle * \phi_1 = 0 \quad (283)$$

この左辺を図示すると次のようになる:

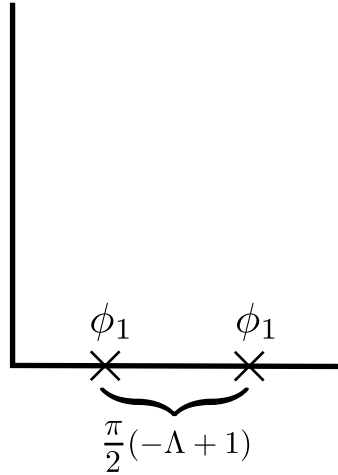


図 16:  $\phi_1 * | - \Lambda + 1 \rangle * \phi_1$  を  $\arctan$  で sliver 座標に移したもの。

今  $Q_B \phi_1 = 0$  と満たす  $\phi_1$  として

$$\phi_1(z) = \tilde{c}\tilde{J}(z) \quad (284)$$

と選んだとしよう。ただし  $J(z)$  は物質場  $X$  のみでできた共形次元 1 の primary 場とする。これが (283) を満たすかどうかは  $J(z)$  どうしの演算子積の特異性 (singularity) によって決定される。

すなわち、 $J(z)$  どうしの演算子積が近づけたとき発散しなければ正則化パラメータ  $\Lambda$  を  $\Lambda = 1 + 0$  に取ることによって無条件で (283) を満たすことができる。というのも、 $\Lambda$  を 1 に近づけることによって  $\phi_1(z) = \tilde{c}\tilde{J}(z)$  どうしが近づくと最終的に  $c$  ゴーストどうしがぶつかりると 0 になるからである。

逆に、 $J(z)$  どうしの演算子積が近づけたとき発散すれば一般に (283) を満たすことはできず正則化をきちんと定義する必要がある。その理由は、 $\phi_1(z) = \tilde{c}\tilde{J}(z)$  どうしが近づいて最終的にぶつかった場合、演算子積が 0 を返すとは限らないからである。

### 4.3.1 OPE が非特異な場合

具体的な例として、物質場  $X$  のみでできた作用素として次のように取ったものを考える:

$$J = e^{X^0}. \quad (285)$$

このように  $J$  を選んだのには理由がある。実はこの  $J$  は CSFT において相互作用がない場合のタキオン場の運動方程式

$$(\partial^\mu \partial_\mu + 1)t = 0 \quad (286)$$

において、タキオン場が空間に依存しない場合の解である<sup>35</sup>。タキオン場は時刻  $X^0 = -\infty$  においては摂動的真空にあり、時刻  $X^0 \rightarrow \infty$  でタキオン場はポテンシャルの底なしの方向に転がっていく。ここに CSFT の相互作用を考えたときにこのタキオン場がどのように振る舞うかを解の変形 (marginal deformation) の技術を用いて調べようというのである。こうしてできた解が次のような性質を持った解であると D ブレーン消滅の時間発展が記述できて望ましい:

1. 変形パラメータ  $\lambda$  が 0 でタキオン場は摂動的真空にある。
2. 変形パラメータ  $\lambda$  が特定の値  $\lambda = \lambda_c$  でタキオン場に時間依存はなくなりタキオン真空に落ち着く。
3. 変形パラメータ  $\lambda$  が 0 と  $\lambda = \lambda_c$  の間ではタキオン場は時間発展していて、時間が十分経つとタキオン場はタキオン真空に漸近的に近づく。

この状況を図示すると図 17 のようになる。

過去のレベル切断近似を用いた解析 [39, 40] ではこのような性質をもたないことが示唆されていた。では解の変形を用いて構成される厳密解はこのような性質をもつであろうか。

まずこの作用素  $J$  の性質は、まず  $X^\mu(z)$  の OPE の (313) から共形次元 1 の primary 場であることがわかる。したがって、

$$\tilde{J}(z) = \tan \circ J(z) = \cos^{-2} z J(\tan z) \quad (287)$$

となる。また、境界 (今は実軸) に挿入された場合のこの作用素の作用素積展開 (OPE) は、 $X^\mu(x)X^\nu(y) = \eta^{\mu\nu} \log(x-y)^2 + \dots$  より、

$$J(x)J(y) = (x-y)^2 J(x+y) + \dots \quad (288)$$

となり非特異である<sup>36</sup>。したがって、仮定 (283) を満たすので、 $\phi_1 = \tilde{c}\tilde{J}(0)|0\rangle$  としたときの運動方程式の解は (222) で与えられる:

$$\Phi_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \phi_n$$

<sup>35</sup>そもそも運動方程式 (190) は CSFT において相互作用がない場合の厳密な運動方程式である。

<sup>36</sup>OPE において  $\dots$  は非特異的な項を意味する。

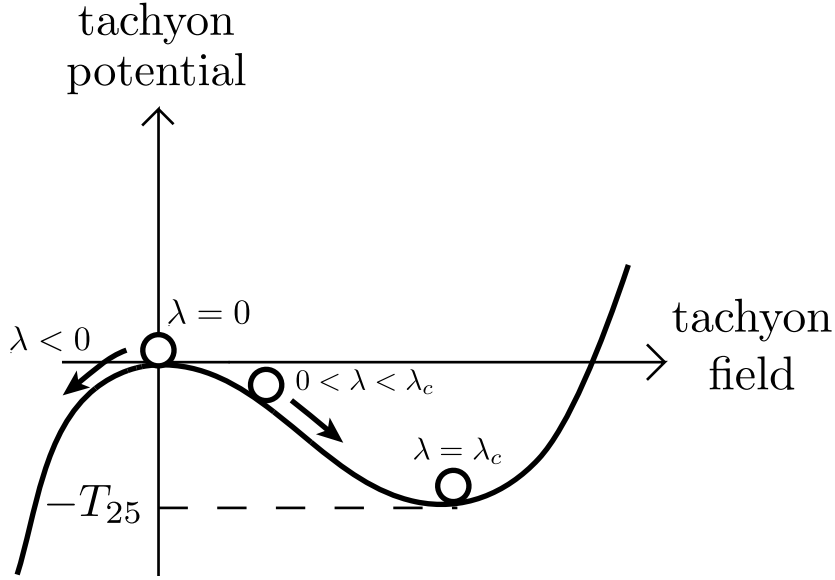


図 17: 予想されるタキオン凝縮の記述として、変形パラメータに対しその時間発展の様子を矢印で書いたもの。

ここに  $\phi_n$  は (219) より

$$\phi_n = \phi_{n-1} * A(1, 0) * \phi_1 = \cdots = \phi_1 (* A(1, 0) * \phi_1)^{n-1} \quad (289)$$

で与えられる。ただし、 $\Lambda = 1 + 0$  とした。これに  $A(1, 0) = \int_0^1 dr \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{b}_{-1}^L |r\rangle$  を代入すると

$$= \phi_1(0)|0\rangle * \int_0^1 dr_1 \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{b}_{-1}^L |r_1\rangle * \phi_1(0)|0\rangle * \cdots * \int_0^1 dr_{n-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{b}_{-1}^L |r_{n-1}\rangle \phi_1(0)|0\rangle \quad (290)$$

となり、さらに \* 積を計算すると

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \int_0^1 d^{n-1}r U_p^* U_p \phi_1(x_n) \cdots \phi_1(x_1) \quad (291)$$

となる。ここに

$$p \equiv \sum_{k=1}^{n-1} r_k + 2, \quad x_i \equiv \frac{\pi}{4} \left( \sum_{k=1}^{n-1} r_k - 2 \sum_{k=1}^{i-1} r_k \right), \quad \int_0^1 d^{n-1}r \equiv \int_0^1 dr_1 \cdots \int_0^1 dr_{n-1}$$

とおいた。ここで  $\phi_1 = \tilde{c}\tilde{J}(0)|0\rangle$  を代入し、物質部分とゴースト部分の分離 (matter-ghost factorization) を行って計算すると

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \int_0^1 d^{n-1}r U_p^* U_p \left[ \frac{1}{\pi} (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*) \tilde{c}(x_n) \tilde{c}(x_1) + \frac{1}{2} (\tilde{c}(x_n) + \tilde{c}(x_1)) \right] \tilde{J}(x_n) \cdots \tilde{J}(x_1) |0\rangle \quad (292)$$

となる。これをさらに計算すれば最終的に次のような形になる:

$$= a_n e^{nX^0} c(0)|0\rangle + \dots \quad (293)$$

ここに、第一項はタキオン場であって、...はそれより高次のレベルの場の項を表す。このタキオン場の係数  $a_n$  を求めるには、これに作用素  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle 0 | I \circ e^{-nX(\epsilon)} c_{-1} c_0 \rangle$  を作用してやれば

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle 0 | I \circ e^{-nX(\epsilon)} c_{-1} c_0, (293) \rangle = a_n^{37} \quad (294)$$

となり求まる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle 0 | I \circ e^{-nX(\epsilon)} c_{-1} c_0, (292) \rangle \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \int_0^1 d^{n-1} r \left(\frac{2}{p}\right)^{n^2+n-2} \cos^2\left(\frac{2x_1}{p}\right) \left[1 - \frac{4x_1}{p\pi} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4x_1}{p}\right)\right] \times \\ &\quad \times \langle I \circ e^{-nX^0(0)} \tilde{J}\left(\frac{2x_n}{p}\right) \dots \tilde{J}\left(\frac{2x_1}{p}\right) \rangle \end{aligned} \quad (295)$$

となる。物質場の相関関数は OPE(288) から求められ

$$\langle I \circ e^{-nX^0(0)} \tilde{J}\left(\frac{2x_n}{p}\right) \dots \tilde{J}\left(\frac{2x_1}{p}\right) \rangle = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2 \frac{2x_i}{p}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\tan \frac{2x_j}{p} - \tan \frac{2x_i}{p}\right)^2 \quad (296)$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \int_0^1 d^{n-1} r \left(\frac{2}{p}\right)^{n^2+n-2} \cos^2\left(\frac{2x_1}{p}\right) \left[1 - \frac{4x_1}{p\pi} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4x_1}{p}\right)\right] \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2 \frac{2x_i}{p}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\tan \frac{2x_j}{p} - \tan \frac{2x_i}{p}\right)^2 \end{aligned} \quad (297)$$

である。Mathmatica でこの値を求めると表 1 のようになる。ただし、ここではサンプル点の最大数を  $10^7$  とした。

$n$	$a_n$
1	1
2	-0.152059
3	$2.14766 \cdot 10^{-3}$
4	$-2.61925 \cdot 10^{-6}$
5	$2.79123 \cdot 10^{-10}$
6	$-2.80109 \cdot 10^{-15}$
7	$2.72865 \cdot 10^{-21}$
8	$-2.58949 \cdot 10^{-28}$

表 1: サンプル点の最大数を  $10^7$  としたときの  $a_n$  の値。

サンプル点の最大数を  $10^5$  として  $a_n$  の絶対値を自然対数でプロットしたものを図 18 に示す。

<sup>37</sup>ここには正確には体積要素が出てくるが、後に打ち消し合うので省略する。

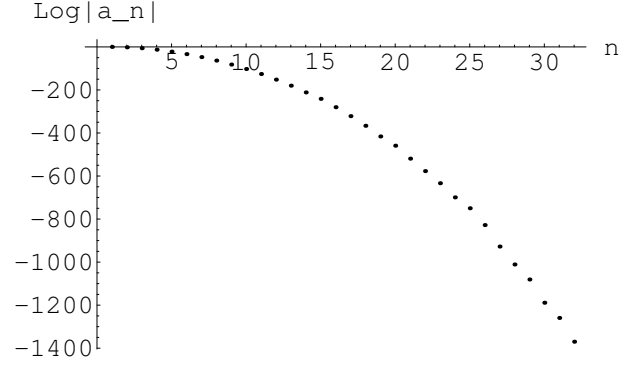


図 18: サンプル点の最大数を  $10^5$  として横軸に  $n$  を縦軸に  $\log |a_n|$  をプロットしたもの。

以上を総合して  $\phi_1 = \tilde{c}\tilde{J}(0)|0\rangle$  となる解のタキオン部分は

$$\Phi_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a_n e^{nx^0} c(0)|0\rangle + \dots \quad (298)$$

となる。 $\dots$  はそれより高次のレベルの場の項を表す。ここで  $\lambda$  の絶対値に関しては時間  $x^0$  の並進  $x^0 \rightarrow x^0 - \log |\lambda|$  をすればその依存性は解から取り除けるので、物理的に意味があるのはその符号である:

$$\Phi_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm)^n a_n e^{nx^0} c(0)|0\rangle + \dots \quad (299)$$

$a_n$  の符号は  $n$  が偶数のとき  $-$  で  $n$  が奇数のとき  $+$  であるから、 $\lambda = +$  の解はタキオンが安定なタキオン真空の方向に転がっていく解であり、 $\lambda = -$  の解はタキオンがポテンシャルが底なしの方向に転がっていく解である。また表 1 や図 18 から  $a_n$  は指数関数よりも速く減少するように振る舞って見える<sup>38</sup>。もしそうであれば無限和  $\Phi_+$  は  $x^0$  が任意の値で収束するので、振動したままの状態が続くことを意味する。タキオン解として望ましい性質は最終的にタキオン真空に落ち着くものであったので、この解はその性質をもっていない<sup>39</sup>。この結果は、過去のレベル切断近似を行った解析 [39, 40] と整合的ではある。

他の例として論文 [38] には光円錐様作用素 (lightcone-like operator)  $J(z) = i\partial(X^0 + X^1)$  を用いた解析解の構成がなされている。

<sup>38</sup>論文 [37] によれば  $a_n \sim n^{-0.38n^2}$  でよくフィットされるようである。

<sup>39</sup>タキオンが転がって D ブレーンが崩壊した後は“タキオン物質”と呼ばれる、エネルギーはもつが圧力をもたない流体ができる、という主張がある [41]。これは宇宙論的にはダークマターの候補になり得る。一方で、D ブレーンの崩壊のエネルギーは閉弦の励起に用いられる、という主張もなされている [42]。



### 4.3.2 OPE が特異的な場合

小節 4.3.1 で行った場合とは異なり物質場  $X$  のみでできた共形次元 1 の primary 場  $J$  とうしの OPE が特異的である場合を考える [38]。具体的には次のような OPE をもつ場合を考える:

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \dots \quad (300)$$

この場合もはや仮定 (283) は成立せず、 $\phi_2$  は正則化する必要がある。  $2\epsilon = -\Lambda + 1$  とおくと

$$\phi_2^{(0)} = \phi_1 * A(1, 2\epsilon) * \phi_1 \quad (301)$$

であるが、このままでは運動方程式は満たせない。(283) の部分が 0 にならず残るからである:

$$Q_B \phi_2^{(0)} = -\phi_1 * \phi_1 + \phi_1 * |2\epsilon\rangle * \phi_1. \quad (302)$$

第 2 項を計算する。まず  $*$  積を計算すると

$$\phi_1 * |2\epsilon\rangle * \phi_1 = U_{2\epsilon+2}^* U_{2\epsilon+2} \phi_1 \left( -\frac{\pi}{2}\epsilon \right) \phi_1 \left( \frac{\pi}{2}\epsilon \right) |0\rangle \quad (303)$$

となる。ここで  $\phi_1(x) = \tilde{c}\tilde{J}(x)$  を代入して OPE(300) を計算すると

$$\phi_1 \left( -\frac{\pi}{2}\epsilon \right) \phi_1 \left( \frac{\pi}{2}\epsilon \right) = \frac{1}{\epsilon\pi} \tilde{c}\tilde{\partial}\tilde{c}(0) + O(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon\pi} Q_B \tilde{c}(0) + O(\epsilon) \quad (304)$$

となる。ここで注意すべき点は発散部分が BRST-exact である、ということである。したがって、この部分を (302) の左辺にもってくれば

$$\begin{aligned} Q_B(\phi_2^{(0)} - U_{2\epsilon+2}^* U_{2\epsilon+2} \frac{1}{\epsilon\pi} \tilde{c}(0)) &= -\phi_1 * \phi_1 + O(\epsilon) \\ &=: Q_B(\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)}) \end{aligned} \quad (305)$$

となつて  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で運動方程式が解けたことになる。

しかし、話はここで終わるわけではない。状態  $\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)}$  が  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で有限な状態になっているか確かめる必要がある。もし発散があつた場合にはそれを取り除いたものが本当の解  $\phi_2$  である。(305) を見ると、この右辺は  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で有限な状態であるからもし  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で  $\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)}$  に発散があつた場合にはその項は BRST-closed な状態であるはずである。このことを念頭に  $\phi_2^{(0)}$  の発散項を計算すると

$$\begin{aligned} \phi_2^{(0)} &= \frac{\pi}{2} \int_{2\epsilon}^1 dr U_{2\epsilon+2}^* U_{2\epsilon+2} \left( \tilde{J} \left( -\frac{\pi}{4}r \right) \tilde{c}\tilde{J} \left( \frac{\pi}{4}r \right) - \tilde{b}_{-1}^L \tilde{c}\tilde{J} \left( -\frac{\pi}{4}r \right) \tilde{c}\tilde{J} \left( \frac{\pi}{4}r \right) \right) |0\rangle \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{2\epsilon}^1 dr e^{-\frac{\pi}{4}r(L_{-1}^R - L_{-1}^L)} \left( \tilde{c}(0) \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}r\right)^2} - \tilde{\partial}\tilde{c}(0) \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{4}r\right)} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}r\right)} \tilde{b}_{-1}^L \tilde{c}\tilde{\partial}\tilde{c}(0) \right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon} \tilde{c}(0) + \log(2\epsilon) (\tilde{b}_{-1}^L \tilde{c}\tilde{\partial}\tilde{c}(0) - \tilde{L}_{-1}^L \tilde{c}(0)) + O(\epsilon^0) \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon} \tilde{c}(0) + \log(2\epsilon) (-Q_B \tilde{b}_{-1}^L \tilde{c}(0)) + O(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (306)$$

となる。第1項は  $\phi_2^{(1)}$  から生じる部分であり、第2項

$$\log(2\epsilon)(-Q_B \tilde{b}_{-1}^L \tilde{c}(0)) = -\log(2\epsilon)\psi'_0 =: -\phi_2^{(2)} \quad (307)$$

は求めたかった  $\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)}$  にある BRST-closed な発散項である。以上により、運動方程式 (191) を満たす  $\phi_2$  として

$$\phi_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)} + \phi_2^{(2)}) \quad (308)$$

が構成できた。

同じような手続きで  $\phi_3$  まで構成できることが知られている。

## 5 結論

本論文では、Witten が導入した bosonic な開弦の場の理論における近年の進展を取り扱った。その中でも特にその解析解の構成法に焦点を絞り、そこで必要となる技術的な事柄を含め解説を行い実際に解析解の構成を行った。こうしてできた解析解の構成法の枠組みで Schnabl 解や過去に知られていた近似解が捉えられることを具体的に示した。それと同時に Schnabl 解はそのエネルギー密度が D25 ブレーンの張力を与えることや、Schnabl 解のまわりで定義される BRST 作用素の cohomology が消えることを示し、Sen 予想の 1 と 3 の一部が Schnabl 解で正しいことを示した。

今後の課題、方向性や本論文に収めることができなかつた話題などを思いつくままに挙げてみる。

### 1. Schnabl 解における Sen 予想の残りの証明

証明すべき事柄は、Schnabl 解を背景にするソリトン解はそれより低い次元の D ブレーンを表すことと、Schnabl 解は純閉弦理論を表すことの 2 点である。

### 2. 境界弦の場の理論 (BSFT) との関係

BSFT は弦理論の off-shell の情報を世界面の理論全体の中から引きだそうとするものである [43]。これは世界面が表す CFT の変形と SFT の解、もしくはその変形との関係を調べることに相当すると考えられるがよく分かっていない。

### 3. 真空弦の場の理論 (VSFT) と CSFT の Schnabl 解との関係

CSFT は弦の場の原点が摂動的真空に対応していた理論であったのに対し、VSFT は弦の場の原点をタキオン真空に対応させた理論として提唱された理論である [44]。これと Schnabl 解との関係があるのかないのか調べることも仕事として残っていると思われる。

### 4. Bataline-Vilkoviski 形式 (BV 形式)

BV 形式 [45] とは、ゲージ不変な場の理論を得る方法である。弦の場の理論はゲージ不変な場の理論であるため、BV 形式に則って定式化することが可能である。

### 5. 閉弦の場の理論との関係

現在閉弦の場の理論として挙げられるものとして、Witten 型の中点相互作用をする非多項式弦の場の理論 (nonpolynomial SFT) [46] と、パラメータをもたされた弦が相互作用をする HIKKO 型の弦の場の理論 [47] がよく知られている。閉弦の場の理論の特徴として、その運動方程式のべき等性が提唱されている [48]。これは VSFT における物質場とゴースト場の分離の仮説とも整合的である。

### 6. 超弦の場の理論との関係

超対称性をもった弦の場の理論もいくつか考案されているが、そのうち問題が最も少ない模型として知られているのが Berkovits によって構成された Wess-Zumino-Witten 型の超弦の場の理論である [49]。現在では、超弦の場の理論である WZW 型の超弦の場の理論についても解の変形の技術を用いて解析解が構成されている [50]。

他にも行列模型や非可換幾何などの分野との関係を調べることも興味深い。

## 謝辞

セミナーの手配や研究会・議論への参加を促していただくなど、さまざまな形で研究指導をしてくださった松尾先生に深く感謝します。多くの稚拙な質問に応じて議論してくださった今村さん、川野さんには大変お世話になりました。研究室の方々には物理を教えていただく以外にも様々な助言や激励をしていただいたことを心から感謝します。最後に、良い研究環境と伝統をもった本郷素粒子論研究室と家族の理解に感謝します。

## A 世界面上の開弦理論の簡単な解説と記号

補遺 A では、開弦理論の第一量子化の簡単な解説と記号を確認する [52, 53]。bosonic な開弦の Euclid 化された Polyakov 作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\sigma}{2\pi} \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (309)$$

である。本論文では bosonic な開弦理論のみしか扱わないため本文では bosonic と断らない。ここで、 $\gamma$  は世界面上の Euclidean metric であり、開弦の張力  $T$  は

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{\pi l_s^2} = \frac{1}{2\pi} \quad (310)$$

と規格化した。本論文を通じてこの規格化を用いる。この作用には世界面上における座標変換不変性と Weyl 対称性があるので、共形ゲージ (conformal gauge) をとって経路積分量子化を行うと、Faddeev-Popov 行列式からゴースト場と反ゴースト場  $c^a, b_{ab}$  がでてくる。座標  $\sigma_1, \sigma_2$  を複素座標  $w = \sigma_1 + i\sigma_2, \bar{w} = \sigma_1 - i\sigma_2$  に組んで作用を表すと、

$$S = \int \frac{d^2w}{2\pi} (\partial_w X^\mu \partial_{\bar{w}} X_\mu + b_{ww} \partial_{\bar{w}} c^w + b_{\bar{w}\bar{w}} \partial_w c^{\bar{w}}) \quad (311)$$

となる。ここから 2 点関数が求まって、上半平面 (UHP) 上の座標

$$\begin{cases} z = -\exp(-iw) \\ \bar{z} = -\exp(i\bar{w}) \end{cases} \quad (312)$$

で表示すると、

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= -\frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \log |z_{12}|^2 \\ \langle c(z_1) b(z_2) \rangle &= \frac{1}{z_{12}^2}, \quad \langle \tilde{c}(\bar{z}_1) \tilde{b}(\bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{\bar{z}_{12}^2} \end{aligned} \quad (313)$$

となる。ここに、 $z_{12} = z_1 - z_2, c(z) = c^z(z), b(z) = b_{zz}(z), \tilde{c}(\bar{z}) = c^{\bar{z}}(\bar{z}), \tilde{b}(\bar{z}) = b_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$  と書いた。これ以外の場の組み合わせで相関はない。

一方、(311) から運動方程式を導き境界上のカレント保存則

$$\partial X(z) = \bar{\partial} X(\bar{z}), \quad c(z) = \tilde{c}(\bar{z}), \quad b(z) = \tilde{b}(\bar{z}) \quad \text{on } z = \bar{z} \quad (314)$$

を満たすように解くと、

$$\begin{aligned} X^\mu(z, \bar{z}) &= X_L^\mu(z) + X_R^\mu(\bar{z}) \\ X_L^\mu(z) &= x_L^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \alpha_0 \log z + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} z^{-n} \\ X_R^\mu(\bar{z}) &= x_R^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \alpha_0 \log \bar{z} + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} \bar{z}^{-n} \\ c(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n z^{-n+1}, \quad \tilde{c}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \bar{z}^{-n+1} \\ b(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n z^{-n-2}, \quad \tilde{b}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n \bar{z}^{-n-2} \end{aligned} \quad (315)$$

である。\$X\_R^\mu(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z}), \tilde{b}(\bar{z})\$ も同様である。ここで、二重化のトリック (doubling trick) を用いて、\$\bar{z}\$ 平面を下半平面にもってきて境界を (314) で貼り合わせると、上半平面上の場たち \$X^\mu(z, \bar{z}), c(z), b(z), \tilde{c}(\bar{z}), \tilde{b}(\bar{z})\$ が複素平面 \$\mathbf{C}\$ 上の場たち \$X^\mu(z), c(z), b(z)\$ で表せる。本論文を通じて二重化のトリックを用いて場を表している。これらの場の相関が (313) をみtasることから、次の振動子代数が導かれる:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad , \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n} \quad , \quad \{c_n, b_m\} = \delta_{n+m} \quad (316)$$

その他の代数関係は消える。

漸近状態を作るのに必要な \$SL(2, \mathbf{R})\$ 真空 \$|0\rangle\$ は次で定義される:

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0\rangle &= 0, \quad n \geq 0. \\ b_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1 \\ c_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (317)$$

\$\alpha\_0^\mu\$ は、運動量演算子を \$p^\mu\$ として \$\sqrt{2}p^\mu\$ と等しいので、\$|0\rangle\$ は運動量が 0 の状態であることが分かる。運動量が \$k^\mu\$ の固有状態 \$|k\rangle\$ は、\$|k\rangle = \exp[ik\_\mu x^\mu]|0\rangle\$ である。

規格化は、

$$\langle k | c_{-1} c_0 c_1 | q \rangle = (2\pi)^d \delta^d(k+q) \quad (318)$$

とする。これは 2 点関数の運動量保存則を意味する。

他方、共形ゲージを取った作用 (311) にはまだ共形変換不変性が残っている。ここで、\$\partial X, c, b\$ の共形次元はそれぞれ 1, -1, 2 である。このことから、stress tensor \$T(z)\$ を求めると、

$$\begin{aligned} T(z) &= T^X(z) + T^{bc}(z) \\ &= (-:\partial X \cdot \partial X: + :(\partial b)c: - 2\partial:bc:) (z) \end{aligned} \quad (319)$$

となる。ただし、正則化 \$:\phi\_1\phi\_2:(z) \equiv \lim\_{w \rightarrow z} (\phi\_1(z)\phi\_2(w) - \langle \phi\_1(z)\phi\_2(w) \rangle)\$ を行っている。

このことから、stress tensor \$T(z)\$ は正則な座標変換に対して次のように振る舞うことが分かる:

$$T_w(w) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 T(z) + \frac{c}{12} S(z, w). \quad (320)$$

ただし、\$c = c^X + c^{bc}\$ としたが、今の場合 \$c^X = -c^{bc} = 26\$ なので \$c = 0\$ である。また \$S(z, w)\$ は Schwarz 微分 (Schwarzian) である:

$$S(z, w) = \frac{\frac{dz}{dw} \frac{d^3z}{dw^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2z}{dw^2}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}. \quad (321)$$

したがって、共形変換 \$w = f(z)\$ に対する変換は次のようになる:

$$f \circ T(z) = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)^2 \left[ T(f(z)) - \frac{c}{12} S(z, f(z)) \right]. \quad (322)$$

Virasoro 生成子  $L_n$  を  $T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$  から求めると、

$$\begin{aligned} L_m &= L_m^X + L_m^{bc} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : + \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} : \end{aligned} \quad (323)$$

となる。特に  $m=0$  の場合、

$$\begin{aligned} L_0 &= L_0^X + L_0^{bc} \\ &= p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_n (-n) : b_n c_{m-n} : \end{aligned} \quad (324)$$

である。

$L_n$  と  $\alpha_n^\mu, c_n, b_n$  の Lie 代数は、(316) を用いて

$$\begin{aligned} [L_m, \alpha_n^\mu] &= -n \alpha_{n+m}^\mu \\ [L_m, c_n] &= (-2m-n) c_{n+m} \\ [L_m, b_n] &= (m-n) b_{n+m} \end{aligned}$$

である。特に  $m=0$  の場合、

$$\begin{aligned} [L_0, \alpha_n^\mu] &= -n \alpha_n^\mu \\ [L_0, c_n] &= -n c_n \\ [L_0, b_n] &= -n b_n \end{aligned}$$

となる。作用素  $L_0$  は Hamiltonian に相当するものであったから、 $SL(2, \mathbf{R})$  真空  $|0\rangle$  はエネルギー基底状態 (Vock 真空) にはならず、 $|c\rangle := c_1|0\rangle, c_0|c\rangle = -Q_B|c\rangle$  が Vock 真空となる。Vock 空間は Vock 真空の上に上昇演算子  $\alpha_n^\mu, c_n, b_n, n \leq -1$  を作用させて張られる空間であり、 $L_0$  の固有値で分類されるが、 $L_0$  の固有値に 1 を足したものを レベル と呼ぶ。

$L_n$  同士のなす Lie 代数も同様に、

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n} \quad (325)$$

となる。今の場合  $c=0$  である。

BRST カレントは

$$j_B = cT^X + \frac{1}{2} : cT^{bc} : + \frac{3}{2} \partial^2 c = cT^X + : bc\partial c : + \frac{3}{2} \partial^2 c$$

であり、ここから BRST 作用素が

$$Q_B = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n L_{-n}^X + \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{(m-n)}{2} \circ c_m c_n b_{-m-n} \circ - c_0 \quad (326)$$

と求まる。その代数関係は

$$\begin{aligned}
 [Q_B, X^\mu(z)] &= c\partial X^\mu(z) \\
 \{Q_B, c(z)\} &= c\partial c(z) \\
 \{Q_B, b(z)\} &= T(z) \\
 [Q_B, T(z)] &= \frac{c}{12}\partial^3 c(z)
 \end{aligned}
 \tag{327}$$

となる。特に今の場合  $c = 0$  なので  $Q_B$  はべき零作用素になることがわかる。

(327)において0モードの関係を抜き出すと

$$\{Q_B, b_0\} = L_0
 \tag{328}$$

を得る。この式は本論文中でよく用いられる。

BPZ 共役は次で定義される:

$$\phi(z)^* := I \circ \phi(z)
 \tag{329}$$

右辺の意味は (333) による。共形次元  $h$  の primary 場  $\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n z^{-n-h}$  に対しては

$$\phi_n^* = (-)^{n+h} \phi_{-n}
 \tag{330}$$

となることが分かる。



## B 共形変換群の表現

複素平面上の有限共形変換の primary 場への作用を構成する。

共形次元  $d$  の primary 場  $\Psi(z)$  の定義は、微小共形変換  $\delta_{v(z)}$  に対して次のように振る舞うことである:

$$\delta_{v(z)}\Psi(z) = (v(z)\partial + d\partial v(z))\Psi(z). \quad (331)$$

ただし、 $v(z)$  は原点まわりで正則なベクトル場とする。微小共形変換の母関数である stress tensor を使って書けば、

$$T(z')\Psi(z) = \frac{d\Psi(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Psi(z)}{(z' - z)} + \dots \quad (332)$$

である。

ここから primary 場  $\Psi(z)$  に対する有限共形変換の作用へと持ち上げる (lift) と、

$$f \circ \Psi(z) = [f'(z)]^d \Psi(f(z)). \quad (333)$$

となる。ただし、左辺については

$$\begin{aligned} f \circ \Psi(z) &:= U_f \Psi(z) U_f^{-1} \\ U_f &:= e^{\int \frac{dz}{2\pi i} v(z) T(z)} \end{aligned} \quad (334)$$

とおき、右辺については、

$$f(z) = e^{v(z)\partial} z. \quad (335)$$

とおいた。

このことを示したければ、(333) の両辺の微分をとると (331) を再現することと、合成則  $g \circ (f \circ \Psi(z)) = (g \circ f) \circ \Psi(z)$  を満たすことを確認すればよい。ただし、注意しておくべきことは、(335) で得られた  $f(z)$  は明らかに原点まわりで正則な有限共形変換であるので、有限共形変換の合成  $g \circ f(z)$  も原点まわりで正則でないと、この有限共形変換にたいする  $v(z)$  が存在しない。この条件を満足させるため、最初のベクトル場に  $v(0) = 0$  の条件を課しておく。そうすれば、(335) で得られる有限共形変換は原点を固定するので、この合成も原点まわりで正則になる。

これで有限共形変換の作用が特定の有限共形変換で定義できた。これを一般化して、一般の有限共形変換  $f(z)$  が与えられたとき、この primary 場への作用を (333) によって定義する。この場合、一般に (335) を満たす  $v(z)$  が定まるとは限らず、したがって  $U_f$  が存在するとは限らない。しかし、上の場合のように共形変換  $f, g$  やその合成  $g \circ f$  の作用も Virasoro 生成子で書ける場合、

$$U_{f \circ g} = U_f U_g \quad (336)$$

が成立する。

<sup>40</sup>この式は、Julia 方程式  $v(z)\partial_z f(z) = v(f(z))$  を満たす。証明は、(左辺) =  $(v(z)\partial_z) e^{v(z)\partial_z} z = e^{v(z)\partial_z} (v(z)\partial_z) z =$  (右辺) である。最後の等式は、 $\partial$  が微分であることからしたがう。

この  $f(z)$  に対し、(335) を満たす  $v(z)$  を  $\text{logit} f(z)$  と書くことにすると、次が成立する [55]:

$$\text{logit} f^{-1} = -\text{logit} f \quad (337)$$

$$\text{logit}(\phi^{-1} \circ f \circ \phi) = \frac{1}{\phi'} ((\text{logit} f) \circ \phi) . \quad (338)$$

ただし、 $\phi(z)$  は原点を固定する、原点近傍の局所双正則同相とする。

証明は定義を用いて計算するだけである。

## C sliver 座標における Virasoro 代数と相関関数

くさび状態の定義で使われる共形変換

$$f^{(r)}(z) = \tan\left(\frac{2}{r} \arctan z\right) \quad (339)$$

に (338) を適用すると、 $\text{logit} f(z)$ 、すなわち  $U_{f^{(r)}}$  を求めることができる [30]:

$$\begin{aligned} \text{logit} f^{(r)}(z) &= \text{logit} \left[ \arctan^{-1} \circ \frac{2}{r} \circ \arctan \right] (z) \\ &= \log\left(\frac{2}{r}\right) (1+z^2) \arctan z. \end{aligned} \quad (340)$$

ここで、 $\text{logit}\left(\frac{2}{r}\right) = \log\left(\frac{2}{r}\right)$  を用いた。したがって、(334) より、

$$\begin{aligned} U_{f^{(r)}} &= e^{\oint \frac{dz}{2\pi i} \text{logit} f^{(r)}(z) T(z)} \\ &= e^{\log\left(\frac{2}{r}\right) \oint \frac{dz}{2\pi i} (1+z^2) \arctan z T(z)} \end{aligned} \quad (341)$$

となる。sliver 座標  $\tilde{z} = \arctan z$  を用いると、

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} (1+z^2) \arctan z T(z) = \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{T}(\tilde{z}) = \tilde{L}_0 \quad (342)$$

となるので、

$$(341) = \left(\frac{2}{r}\right)^{\tilde{L}_0} = :U_r \quad (343)$$

となる。sliver 座標を導入すると極めて簡潔に書ける点に注意すべきである。この表示から、(336) を用いて、

$$\begin{aligned} U_r U_s &= U_{\frac{rs}{2}}, \\ U_2 &= 1 \\ U_r^{-1} &= U_{\frac{4}{r}} \end{aligned} \quad (344)$$

がすぐにしたがう。一方、実際の計算によく現れる  $U_r U_s^*$  のような作用素を計算するには、 $\tilde{L}_0$  と  $\tilde{L}_0^*$  の交換関係を必要とする。(342) により  $\tilde{L}_0$  を具体的に計算すると、

$$\tilde{L}_0 = L_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} L_{2k} \quad (345)$$

となるので、Virasoro 代数 (325) を用いて、

$$[\tilde{L}_0, \tilde{L}_0^*] = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^* \quad (346)$$

が示される。これにより、有限共形変換の作用  $U_r$  の、無限小共形変換の作用  $\tilde{L}_0$  に対する随伴表現が計算できる:

$$U_r \tilde{L}_0^* U_r^{-1} = \frac{2-r}{r} \tilde{L}_0 + \frac{2}{r} \tilde{L}_0^*, \quad (347)$$

これと (344) を用いることで、

$$U_r^{-1} \tilde{L}_0^* U_r = \frac{r-2}{2} \tilde{L}_0 + \frac{r}{2} \tilde{L}_0^*, \quad (348)$$

を得る。両辺  $\star$  をとれば、

$$\begin{aligned} U_r^{\star-1} \tilde{L}_0 U_r^* &= \frac{2}{r} \tilde{L}_0 + \frac{2-r}{r} \tilde{L}_0^*, \\ U_r^* \tilde{L}_0 U_r^{\star-1} &= \frac{r}{2} \tilde{L}_0 + \frac{r-2}{2} \tilde{L}_0^*. \end{aligned} \quad (349)$$

を得る。

さて、 $U_r U_s^*$  を計算する。

$$a = \frac{2}{r}, \quad b = \frac{2}{s} \quad (350)$$

とおけば、(343) より

$$U_r U_s^* |0\rangle = a^{\tilde{L}_0} b^{\tilde{L}_0^*} |0\rangle = :X \quad (351)$$

と書ける。これを計算するには、 $X$  の  $a, b$  に関する微分方程式をたてて解けばよい。(349) を用いると、

$$\begin{aligned} a \partial_a X &= U_r \tilde{L}_0 U_s^* |0\rangle \\ &= U_r \left( \frac{2}{s} - 1 \right) \tilde{L}_0^* U_s^* |0\rangle \\ &= (b-1) b \partial_b X \end{aligned} \quad (352)$$

を得るので、初期条件  $X(a=1) = U_s^* |0\rangle$  のもとに (352) を解くと、

$$X = \left( \frac{b}{b+a(1-b)} \right)^{\tilde{L}_0^*} |0\rangle. \quad (353)$$

となる。(350) を用いて、変数を  $r$  と  $s$  に直せば、

$$(351) = U_{2+\frac{2}{r}(s-2)}^* |0\rangle. \quad (354)$$

を得る。これと、(346) の代数関係から、

$$U_r U_s^* = U_{2+\frac{2}{r}(s-2)}^* U_x \quad (355)$$

と置くことができる。この両辺で  $\star$  をとって  $|0\rangle$  に作用すると、 $x = 2 + \frac{2}{s}(r-2)$  を得る。すなわち、次が示された:

$$U_r U_s^* = U_{2+\frac{2}{r}(s-2)}^* U_{2+\frac{2}{s}(r-2)} \quad (356)$$

特に、 $r = s$  の場合には  $U_r^* U_r$  は別の表示をもち、 $\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*$  で生成されることが予想される。このことは、Baker-Campbell-Hausdorff の公式からも分かるが、 $U_r U_s^*$  を求めたときと同様に微分方程式を用いて求めることにする。

(350) を用いると、(343) より

$$U_r^* U_r = a^{\tilde{L}_0^*} a^{\tilde{L}_0} = : X \quad (357)$$

と書ける。これを計算するには、 $X$  の  $a$  に関する微分方程式をたてて解けばよい。(348) を用いることにより、

$$a \partial_a X = -\frac{1}{a} (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*) X \quad (358)$$

を得るので、(350) を用いて、変数を  $r$  に直せば、

$$\partial_r X = -\frac{1}{2} (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*) X. \quad (359)$$

初期条件  $X(r=2) = 1$  のもとに (359) を解くと、

$$X = \exp \left[ -\frac{1}{2} (r-2) (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*) \right]. \quad (360)$$

となる。よって、

$$U_r^* U_r = \exp \left[ -\frac{1}{2} (r-2) (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*) \right]. \quad (361)$$

となるが、実は、この  $\exp$  の肩の部分  $\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*$  は  $\tilde{L}_{-1}^R, \tilde{L}_{-1}^L$  で書き直せる:

$$\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^* = \frac{\pi}{2} (\tilde{L}_{-1}^R - \tilde{L}_{-1}^L). \quad (362)$$

証明は、定義にしたがって  $\tilde{L}_{-1}^R$  を計算すると、 $\tilde{L}_{-1}^R = \frac{1}{2} \tilde{L}_{-1} + \frac{1}{\pi} (\tilde{L}_0 + \tilde{L}_0^*)$  を得るので、 $\tilde{L}_{-1} = \tilde{L}_{-1}^R + \tilde{L}_{-1}^L$  を用いて結果がしたがう。

これにより、(361) は次のように書けることが分かる:

$$U_r^* U_r = \exp \left[ -(r-2) \frac{\pi}{4} (L_{-1}^R - L_{-1}^L) \right]. \quad (363)$$

一般に、sliver 上の Virasoro 生成子は (334) より次のように書ける:

$$\tilde{L}_n = U_{\tan} L_n U_{\tan}^{-1} = \tan \circ L_n = \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+1} \tilde{T}(\tilde{z}) \quad (364)$$

$$\begin{aligned} &= \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+1} \cos^{-4} \tilde{z} T(\tan \tilde{z}) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} (1+z^2) (\arctan z)^{n+1} T(z) \end{aligned} \quad (365)$$

一部 Mathematica で計算したものを書いておくと

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_2 &= L_2 - \frac{1}{15}L_6 + \frac{64}{945}L_8 + \dots \\
\tilde{L}_1 &= L_1 + \frac{1}{3}L_3 - \frac{7}{45}L_5 + \frac{29}{315}L_7 + \dots \\
\tilde{L}_0 &= L_0 + \frac{2}{3}L_2 - \frac{2}{15}L_4 + \frac{2}{35}L_6 + \dots \\
\tilde{L}_{-1} &= L_{-1} + L_1 \\
\tilde{L}_{-2} &= L_{-2} + \frac{4}{3}L_0 + \frac{11}{45}L_2 - \frac{8}{189}L_4 \dots \\
\tilde{L}_{-3} &= L_{-3} + \frac{5}{3}L_{-1} + \frac{3}{5}L_1 - \frac{31}{945}L_3 \dots
\end{aligned} \tag{366}$$

となる。特に  $n = -1$  の場合、(117) により  $\tilde{L}_{-1} = K_1$  となるので、 $\tilde{L}_{-1}$  は \*積に対する微分演算子になる。

したがって、sliver 上の Virasoro 代数は (325) より

$$[\tilde{L}_n, \tilde{L}_m] = (n - m)\tilde{L}_{n+m} \tag{367}$$

となる。

特に、 $\tilde{L}_0$  と  $\tilde{L}_{-1}$  の交換関係は

$$[\tilde{L}_0, \tilde{L}_{-1}] = \tilde{L}_{-1}, \tag{368}$$

であり、両辺 \*をとって、

$$[\tilde{L}_0^*, \tilde{L}_{-1}] = -\tilde{L}_{-1}. \tag{369}$$

を得る。(346) と合わせると、 $\tilde{L}_0, \tilde{L}_0^*, \tilde{L}_{-1}$  は部分 Lie 代数をなすことが分かる。

以上のことは、一部 Virasoro 生成子  $L_n$  を反ゴースト生成子  $b_n$  に変えて同じ議論、計算が使える。一部結果を書いておく：

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_n &= U_{\tan} b_n U_{\tan}^{-1} = \tan \circ b_n = \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+1} \tilde{b}(\tilde{z}) \\
&= \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+1} \cos^{-4} \tilde{z} b(\tan \tilde{z}) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} (1 + z^2) (\arctan z)^{n+1} b(z)
\end{aligned} \tag{370}$$

一部 Mathematica で計算したものを書いておくと

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_2 &= b_2 - \frac{1}{15}b_6 + \frac{64}{945}b_8 + \dots \\
\tilde{b}_1 &= b_1 + \frac{1}{3}b_3 - \frac{7}{45}b_5 + \frac{29}{315}b_7 + \dots \\
\tilde{b}_0 &= b_0 + \frac{2}{3}b_2 - \frac{2}{15}b_4 + \frac{2}{35}b_6 + \dots \\
\tilde{b}_{-1} &= b_{-1} + b_1 \\
\tilde{b}_{-2} &= b_{-2} + \frac{4}{3}b_0 + \frac{11}{45}b_2 - \frac{8}{189}b_4 \dots \\
\tilde{b}_{-3} &= b_{-3} + \frac{5}{3}b_{-1} + \frac{3}{5}b_1 - \frac{31}{945}b_3 \dots
\end{aligned} \tag{371}$$

となる。特に  $n = -1$  の場合、(119) により  $\tilde{b}_{-1} = B_1$  となるので、 $\tilde{b}_{-1}$  は \*積に対する微分演算子になる。

$\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*$  は、 $\tilde{b}_{-1}^R, \tilde{b}_{-1}^L$  で書き直せる:

$$\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^* = \frac{\pi}{2} (\tilde{b}_{-1}^R - \tilde{b}_{-1}^L) . \tag{372}$$

$\tilde{b}_0$  に対する  $U_r, U_r^*$  の作用は

$$\begin{aligned}
U_r \tilde{b}_0^* U_r^{-1} &= \frac{2-r}{r} \tilde{b}_0 + \frac{2}{r} \tilde{b}_0^*, \\
U_r^{*-1} \tilde{b}_0 U_r^* &= \frac{2}{r} \tilde{b}_0 + \frac{2-r}{r} \tilde{b}_0^*, \\
U_r^{-1} \tilde{b}_0^* U_r &= \frac{r-2}{2} \tilde{b}_0 + \frac{r}{2} \tilde{b}_0^*, \\
U_r^* \tilde{b}_0 U_r^{*-1} &= \frac{r}{2} \tilde{b}_0 + \frac{r-2}{2} \tilde{b}_0^*
\end{aligned} \tag{373}$$

である。

ゴースト場の振動子  $c_n$  の場合、共形次元が  $L_n, b_n$  とは異なるため sliver 座標での振る舞いは異なる:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n &= U_{\tan} c_n U_{\tan}^{-1} = \tan \circ b_n = \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+1} \tilde{c}(\tilde{z}) \\
&= \oint \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n-2} \cos^2 \tilde{z} c(\tan \tilde{z}) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} (1+z^2)^{-2} (\arctan z)^{n-2} c(z) .
\end{aligned} \tag{374}$$

Mathmatica により計算すると

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_2 &= c_2 - 2c_4 + \dots \\
\tilde{c}_1 &= c_1 - \frac{5}{3}c_3 + \frac{101}{45}c_5 + \dots \\
\tilde{c}_0 &= c_0 - \frac{4}{3}c_2 - \frac{8}{5}c_4 + \dots \\
\tilde{c}_{-1} &= c_{-1} - c_1 + \frac{16}{15}c_3 - \frac{1072}{945}c_5 + \dots \\
\tilde{c}_{-2} &= c_{-2} - \frac{2}{3}c_0 + \frac{29}{45}c_2 - \frac{608}{945}c_4 \dots \\
\tilde{c}_{-3} &= c_{-3} - \frac{1}{3}c_{-1} + \frac{1}{3}c_1 - \frac{61}{189}c_3 + \dots
\end{aligned} \tag{375}$$

となる。

$\tilde{b}_n$  と  $\tilde{c}_m$  の交換関係は、振動子代数の式より

$$\begin{aligned}
\{\tilde{c}_n, \tilde{b}_m\} &= \delta_{n+m} \\
\{\tilde{c}_n, \tilde{c}_m\} &= \{\tilde{b}_n, \tilde{b}_m\} = 0
\end{aligned} \tag{376}$$

である。

一方、BPZ 共役を取ったものとそうでないものとの Lie 代数は、いったん上半平面上のモードに直して計算する必要がある。ただし、 $\tilde{L}_0$  と  $\tilde{b}_0^*$  の交換関係は (346) から

$$\left[ \tilde{L}_0, \tilde{b}_0^* \right] = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^* \tag{377}$$

が分かるので、両辺 BPZ 共役を取って

$$\left[ \tilde{L}_0^*, \tilde{b}_0 \right] = -(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^*) \tag{378}$$

を得る。



上半平面の相関関数を  $f^{(\infty)}(z) := \arctan(z)$  で移した、円周  $\pi$ 、高さ無限大の円筒  $C_\pi$  上の sliver 座標で評価する:

$$\langle \phi_1(\tilde{x}_1) \dots \phi_n(\tilde{x}_n) \rangle_{C_\pi} = \langle \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1) \dots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n) \rangle_{\text{UHP}}. \quad (379)$$

これと  $\langle c(x)c(y)c(z) \rangle_{\text{UHP}} = (x-y)(x-z)(y-z)$  を利用すると

$$\langle c(x)c(y)c(z) \rangle_{C_\pi} = \sin(x-y) \sin(x-z) \sin(y-z) \quad (380)$$

が示される。sliver 座標では反転は  $-\frac{\pi}{2}$  の平行移動になるから

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I} \circ c(x)c(y)c(z) \rangle_{C_\pi} &= \cos(x-y) \cos(x-z) \sin(y-z) \\ \langle \tilde{I} \circ c(x)\tilde{I} \circ c(y)c(z) \rangle_{C_\pi} &= \sin(x-y) \cos(x-z) \cos(y-z) \\ \langle \tilde{I} \circ c(x)\tilde{I} \circ c(y)\tilde{I} \circ c(z) \rangle_{C_\pi} &= \sin(x-y) \sin(x-z) \sin(y-z) \end{aligned} \quad (381)$$

が順に示される。これらを  $\frac{p}{2}$  だけスケール変換すれば

$$\begin{aligned} \langle c(x)c(y)c(z) \rangle_{C_{\frac{\pi}{2}p}} &= \left(\frac{2}{p}\right)^{-3} \sin\left(\frac{2}{p}(x-y)\right) \sin\left(\frac{2}{p}(x-z)\right) \sin\left(\frac{2}{p}(y-z)\right) \\ \langle \tilde{I}_p \circ c(x)c(y)c(z) \rangle_{C_{\frac{\pi}{2}p}} &= \left(\frac{2}{p}\right)^{-3} \cos\left(\frac{2}{p}(x-y)\right) \cos\left(\frac{2}{p}(x-z)\right) \sin\left(\frac{2}{p}(y-z)\right) \\ \langle \tilde{I}_p \circ c(x)\tilde{I}_p \circ c(y)c(z) \rangle_{C_{\frac{\pi}{2}p}} &= \left(\frac{2}{p}\right)^{-3} \sin\left(\frac{2}{p}(x-y)\right) \cos\left(\frac{2}{p}(x-z)\right) \cos\left(\frac{2}{p}(y-z)\right) \\ \langle \tilde{I}_p \circ c(x)\tilde{I}_p \circ c(y)\tilde{I}_p \circ c(z) \rangle_{C_{\frac{\pi}{2}p}} &= \left(\frac{2}{p}\right)^{-3} \sin\left(\frac{2}{p}(x-y)\right) \sin\left(\frac{2}{p}(x-z)\right) \sin\left(\frac{2}{p}(y-z)\right) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\tilde{I}_p$  は円周  $\frac{\pi}{2}p$ 、高さ無限大の円筒  $C_{\frac{\pi}{2}p}$  で見たときの反転を表す。ゴースト部分の相関関数の計算はこれらの相関関数に帰着する。

## D D<sub>p</sub> ブレーンの張力

付録 C において bosonic な D<sub>p</sub> ブレーンの tree level での張力を SFT を用いて導出する [27, 15]. 本論文では、弦の世界面の理論で知られている T 双対性を用いることにより、弦の場の 3 点関数を計算せずに求めている。

まず、D<sub>p</sub> ブレーンが伸びている p 個の空間方向をコンパクト化してそこに D<sub>p</sub> ブレーンを巻き付けておく。そうすると、コンパクト化されていない座標から見ればその D<sub>p</sub> ブレーンは点粒子のように振る舞う。一般に D<sub>p</sub> ブレーン上の場の理論は Yang-Mills 理論を再現するから、この D<sub>p</sub> ブレーンを記述する有効作用の運動項は次のように書ける:

$$S_2(\Phi) = -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \langle \Phi, Q\Phi \rangle. \quad (382)$$

さらに、コンパクト化していなかった残りの座標もコンパクト化して、このときの点粒子と見た D<sub>p</sub> ブレーンの (非相対論的) 質量を求める。というのも、今の場合、D<sub>p</sub> ブレーン上の Lorentz 対称性があるので、D<sub>p</sub> ブレーンの質量と張力が等しくなるからである。点粒子と見たときの D<sub>p</sub> ブレーンの集団座標  $X^i$  は、弦の世界面にある T 双対性を用いると D<sub>p</sub> ブレーン上にいたゲージ場の横軸方向の成分 (transverse component)  $A^i$  に対応することが分かる [52]:

$$X^i = -2\pi A^i. \quad (383)$$

したがって、D<sub>p</sub> ブレーンの質量を求めるには、弦の場のうちこの成分の時間に依存する部分だけを見れば十分である:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= A_i(t)\alpha_{-1}^i|c\rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int dk_0 X^i(k_0) \alpha_{-1}^i c_1|k_0\rangle. \end{aligned} \quad (384)$$

これを作用に代入して、運動項の係数を求めればよい:

$$\begin{aligned} S_2(\Phi) &= -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \langle \Phi, Q\Phi \rangle \\ &= -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int dk_0 dk'_0 \langle k'_0 | (-\alpha_1^j) c_{-1} X^j(k'_0) Q X^i(k_0) \alpha_{-1}^i c_1 |k_0\rangle \end{aligned}$$

(44) により、 $Q$  は Feynman-Siegel ゲージ条件を満たす状態に対しては、 $Q = c_0 L_0$  とおいて計算できた。 $L_0$  は今の場合、 $L_0 = k^2$  になる。さらに、規格化が  $\langle k_0 | c_{-1} c_0 c_1 |k'_0\rangle = 2\pi\delta(k_0+k'_0)$  であったことにも注意して計算すると

$$= \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 2\pi \int dk_0 X^i(-k_0) k_0^2 X^i(k_0) \quad (385)$$

となる。 $X^i(k_0)$  を Fourier 変換して  $X^i(t)$  で書き直す:

$$\int dk_0 X^i(-k_0) k_0^2 X^i(k_0) = \frac{1}{2\pi} \int dt \partial_t X^i \partial_t X^i. \quad (386)$$

これを (385) に代入すると、

$$S_2(\Phi) = \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int dt \partial_t X^i \partial_t X^i. \quad (387)$$

従って、Dp ブレーンの質量が次のようになることが分かった:

$$M = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \quad (388)$$

YM 理論の結合定数と  $g_{\text{YM}}$  と開弦の結合定数  $g$  は、 $g = g_{\text{YM}}\sqrt{2}$  の関係があることが分かるので [52](p.187)、Dp ブレーンの質量は最終的に次のように書ける:

$$M = \frac{1}{2\pi^2 g^2}. \quad (389)$$

よって、Dp ブレーンの張力は次のようになる:

$$T_p = \frac{1}{2\pi^2 g^2}. \quad (390)$$

この議論は、最後のところで、開弦の結合定数  $g$  を on shell でのタキオンの 3 点の結合定数  $g_T$  に入れ替えても成立する [57]。

## 参考文献

- [1] T. Yoneya, “Connection of Dual Models to Electrodynamics and Gravidynamics,” *Prog. Theor. Phys.* **51** (1974) 1907. J. Scherk and J. H. Schwarz, “Dual Models For Non-hadrons,” *Nucl. Phys. B* **81**, 118 (1974).
- [2] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Anomaly Cancellation In Supersymmetric D=10 Gauge Theory And Superstring Theory,” *Phys. Lett. B* **149**, 117 (1984). “Infinity Cancellations In SO(32) Superstring Theory,” *Phys. Lett. B* **151**, 21 (1985).
- [3] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724 (1995) [arXiv:hep-th/9510017].
- [4] E. Witten, “String theory dynamics in various dimensions,” *Nucl. Phys. B* **443**, 85 (1995) [arXiv:hep-th/9503124].
- [5] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
- [6] M. Kaku and K. Kikkawa, “The Field Theory Of Relativistic Strings, Pt. 1. Trees,” *Phys. Rev. D* **10**, 1110 (1974). “The Field Theory Of Relativistic Strings. 2. Loops And Pomerons,” *Phys. Rev. D* **10**, 1823 (1974).
- [7] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Manifestly Covariant Field Theory Of Interacting String,” *Phys. Lett. B* **172**, 186 (1986). “Manifestly Covariant Field Theory Of Interacting String. 2,” *Phys. Lett. B* **172**, 195 (1986).
- [8] E. Witten, “Non-commutative geometry and string field theory,” *Nucl. Phys.* **B268** 253, (1986).
- [9] 畑浩之 “弦の場の理論 – 現状と展望 –” *日本物理学会誌* Vol.60, No.5 (2005),
- [10] A. Sen, “Tachyon condensation on the brane antibrane system,” *JHEP* **9808**, 012 (1998) [arXiv:hep-th/9805170]. “Non-BPS states and branes in string theory,” arXiv:hep-th/9904207. “Descent relations among bosonic D-branes,” *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 4061 (1999) [arXiv:hep-th/9902105].
- [11] D. Gaiotto and L. Rastelli, “Experimental string field theory,” *JHEP* **0308**, 048 (2003) [arXiv:hep-th/0211012].
- [12] H. Hata and S. Teraguchi, “Test of the absence of kinetic terms around the tachyon vacuum in cubic string field theory,” *JHEP* **0105**, 045 (2001) [arXiv:hep-th/0101162]. I. Ellwood and W. Taylor, “Open string field theory without open strings,” *Phys. Lett. B* **512**, 181 (2001) [arXiv:hep-th/0103085]. I. Ellwood, B. Feng, Y. H. He and N. Moeller, “The identity string field and the tachyon vacuum,” *JHEP* **0107**, 016 (2001) [arXiv:hep-th/0105024].

- [13] M. Schnabl, “Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **10**, 433 (2006) [arXiv:hep-th/0511286].
- [14] I. Ellwood and M. Schnabl, “Proof of vanishing cohomology at the tachyon vacuum,” *JHEP* **0702**, 096 (2007) [arXiv:hep-th/0606142].
- [15] W. Taylor and B. Zwiebach, “D-branes, tachyons, and string field theory,” arXiv:hep-th/0311017.
- [16] A. Sen, “Tachyon dynamics in open string theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **20**, 5513 (2005) [arXiv:hep-th/0410103].
- [17] W. Taylor, “String field theory,” arXiv:hep-th/0605202.
- [18] K. Ohmori, “A review on tachyon condensation in open string field theories,” hep-th/0102085.
- [19] A. S. Schwarz and A. Sen, “Gluing Theorem, Star Product And Integration In Open String Field Theory In Arbitrary Background Fields,” *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 5387 (1991).
- [20] D. J. Gross and W. Taylor, “Split string field theory. I,” *JHEP* **0108**, 009 (2001) [arXiv:hep-th/0105059]. “Split string field theory. II,” *JHEP* **0108**, 010 (2001) [arXiv:hep-th/0106036].
- [21] T. Asakawa, T. Kugo and T. Takahashi, “On the generalized gluing and resmoothing theorem,” *Prog. Theor. Phys.* **100**, 437 (1998) [arXiv:hep-th/9805119].
- [22] M. Kato and K. Ogawa, “Covariant Quantization Of String Based On Brs Invariance,” *Nucl. Phys. B* **212**, 443 (1983).
- [23] H. Hata and S. Shinohara, “BRST invariance of the non-perturbative vacuum in bosonic open string field theory,” *JHEP* **0009**, 035 (2000) [arXiv:hep-th/0009105].
- [24] B. Zwiebach, “Trimming the tachyon string field with SU(1,1),” arXiv:hep-th/0010190.
- [25] M. R. Gaberdiel and B. Zwiebach, “Tensor constructions of open string theories 1., 2.,” *Nucl. Phys.* **B505** (1997), 569, hep-th/9705038; *Phys. Lett.* **B410** (1997), 151, hep-th/9707051.
- [26] A. Leclair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, “String field theory on the conformal plane (I),” *Nucl. Phys.* **B317** (1989), 411-463. “String Field Theory on the Conformal Plane. 2. Generalized Gluing,” *Nucl. Phys. B* **317**, 464 (1989).
- [27] A. Sen, “Universality of the tachyon potential,” *JHEP* **9912**, 027 (1999) [arXiv:hep-th/9911116].

- [28] L. Rastelli and B. Zwiebach, “tachyon potentials, star products and universality,” JHEP **0109**, 038 (2001), hep-th/0006240.
- [29] G. T. Horowitz and A. Strominger, “TRANSLATIONS AS INNER DERIVATIONS AND ASSOCIATIVITY ANOMALIES IN OPEN STRING FIELD THEORY,” Phys. Lett. B **185**, 45 (1987).
- [30] M. Schnabl, “Wedge states in string field theory,” JHEP **0301**, 004 (2003) [arXiv:hep-th/0201095].
- [31] T. Takahashi and S. Tanimoto, “Marginal and scalar solutions in cubic open string field theory,” JHEP **0203**, 033 (2002) [arXiv:hep-th/0202133].
- [32] J. Kluson, “Exact solutions of open bosonic string field theory,” JHEP **0204**, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0202045].
- [33] Y. Okawa, “Comments on Schnabl’s analytic solution for tachyon condensation in Witten’s open string field theory,” JHEP **0604**, 055 (2006) [arXiv:hep-th/0603159].
- [34] 岸本功, “弦の場の理論における解析解についての最近の進展,” 基研研究会「弦理論と場の量子論における新たな進展」(2006)
- [35] L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Classical solutions in string field theory around the tachyon vacuum,” Adv. Theor. Math. Phys. **5**, 393 (2002), hep-th/0102112.
- [36] M. Kiermaier, A. Sen and B. Zwiebach, “Linear b-Gauges for Open String Fields,” arXiv:0712.0627 [hep-th].
- [37] M. Schnabl, “Comments on marginal deformations in open string field theory,” Phys. Lett. B **654**, 194 (2007) [arXiv:hep-th/0701248].
- [38] M. Kiermaier, Y. Okawa, L. Rastelli and B. Zwiebach, “Analytic solutions for marginal deformations in open string field theory,” arXiv:hep-th/0701249.
- [39] N. Moeller and B. Zwiebach, “Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons,” JHEP **0210**, 034 (2002) [arXiv:hep-th/0207107].
- [40] M. Fujita and H. Hata, “Time dependent solution in cubic string field theory,” JHEP **0305**, 043 (2003) [arXiv:hep-th/0304163].
- [41] A. Sen, “Tachyon matter,” JHEP **0207**, 065 (2002) [arXiv:hep-th/0203265]. “Rolling tachyon,” JHEP **0204**, 048 (2002) [arXiv:hep-th/0203211].
- [42] A. Hashimoto and N. Itzhaki, “Observables of string field theory,” JHEP **0201**, 028 (2002) [arXiv:hep-th/0111092]. D. Gaiotto, L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Ghost structure and closed strings in vacuum string field theory,” Adv. Theor. Math. Phys. **6**, 403 (2003) [arXiv:hep-th/0111129]. A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, “Stringy

- Higgs mechanism and the fate of open strings,” JHEP **0101**, 019 (2001) [arXiv:hep-th/0011009].
- [43] E. Witten, “On background independent open string field theory,” Phys. Rev. D **46**, 5467 (1992) [arXiv:hep-th/9208027]. “Some computations in background independent off-shell string theory,” Phys. Rev. D **47**, 3405 (1993) [arXiv:hep-th/9210065].
- [44] L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Classical solutions in string field theory around the tachyon vacuum,” Adv. Theor. Math. Phys. **5**, 393 (2002) [arXiv:hep-th/0102112].
- [45] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, “Gauge Algebra And Quantization,” Phys. Lett. B **102**, 27 (1981). “Quantization Of Gauge Theories With Linearly Dependent Generators,” Phys. Rev. D **28**, 2567 (1983) [Erratum-ibid. D **30**, 508 (1984)].
- [46] M. Saadi and B. Zwiebach, “Closed String Field Theory from Polyhedra,” Annals Phys. **192**, 213 (1989). T. Kugo, H. Kunitomo and K. Suehiro, “Nonpolynomial Closed String Field Theory,” Phys. Lett. B **226**, 48 (1989).
- [47] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Covariant String Field Theory,” Phys. Rev. D **34** (1986) 2360. “Covariant String Field Theory. 2,” Phys. Rev. D **35**, 1318 (1987).
- [48] I. Kishimoto, Y. Matsuo and E. Watanabe, “Boundary states as exact solutions of (vacuum) closed string field Phys. Rev. D **68**, 126006 (2003) [arXiv:hep-th/0306189]. I. Kishimoto and Y. Matsuo, “Cardy states, factorization and idempotency in closed string field Nucl. Phys. B **707**, 3 (2005) [arXiv:hep-th/0409069].
- [49] N. Berkovits, “SuperPoincare invariant superstring field theory,” Nucl. Phys. B **450**, 90 (1995) [Erratum-ibid. B **459**, 439 (1996)] [arXiv:hep-th/9503099].
- [50] Y. Okawa, “Real analytic solutions for marginal deformations in open superstring field theory,” JHEP **0709**, 082 (2007) [arXiv:0704.3612 [hep-th]]. Y. Okawa, “Analytic solutions for marginal deformations in open superstring field theory,” JHEP **0709**, 084 (2007) [arXiv:0704.0936 [hep-th]]. M. Kiermaier and Y. Okawa, “General marginal deformations in open superstring field theory,” arXiv:0708.3394 [hep-th]. T. Erler, “Marginal Solutions for the Superstring,” JHEP **0707**, 050 (2007) [arXiv:0704.0930 [hep-th]].
- [51] I. Bars, “Map of Witten’s  $*$  to Moyal’s  $*$ ,” Phys. Lett. B **517**, 436 (2001) hep-th/0106157. I. Bars and Y. Matsuo, “Associativity anomaly in string field theory,” Phys. Rev. D **65**, 126006 (2002) hep-th/0202030; I. Bars, I. Kishimoto and Y. Matsuo, “Fermionic ghosts in Moyal string field theory,” JHEP **0307**, 027 (2003) hep-th/0304005.
- [52] Polchinski, J. *String theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998).
- [53] D.Lüst, S.Theisen “Lecture on String Theory” (Springer-Verlag, 1989).

- [54] Green, M. B., J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987).
- [55] M. Kuczma, B. Choczewski and R. Ger, “Iterative Functional Equations” Cambridge University Press, 1990
- [56] E. Coletti, I. Sigalov and W. Taylor, “Abelian and nonabelian vector field effective actions from string field theory,” JHEP **0309**, 050 (2003) [arXiv:hep-th/0306041].
- [57] Y. Okawa, “Open string states and D-brane tension from vacuum string field theory,” JHEP **0207**, 003 (2002), hep-th/0204012.