

# Skyrme模型の束縛法を用いたK中間子・核 子間相互作用の導出

大阪大学 理学研究科 物理学専攻 博士前期課程

クォーク核理論グループ

江添貴之

2016年2月



## 概要

近年、カイラル理論を用いた K 中間子・核子間相互作用に関する研究が盛んに行なわれている。カイラル理論では、K 中間子・核子間相互作用は質点と質点の相互作用として記述される。本論文では現実の粒子が大きさを持っているということに注目し、構造を持った核子と構造を持たない K 中間子の相互作用を導出する。その手段として、核子をソリトンという構造を持ったものとして扱う Skyrme 模型を用いる。その結果、s-波の基底状態の K 中間子に対する相互作用は非局所的かつ、K 中間子のエネルギーに依存する相互作用となり、相互作用には斥力芯と見られる構造があることがわかった。得られた相互作用を用いて反 K 中間子と核子の束縛エネルギーを求めると、10MeV から 80MeV 程度の値が得られた。



# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>11</b>
1.1	研究の背景	11
1.1.1	K 中間子原子核	11
1.1.2	反 K 中間子・核子間相互作用	12
1.2	本論文の構成	13
<b>第2章</b>	<b>カイラル対称性</b>	<b>15</b>
2.1	フェルミオン Lagrangian	15
2.2	左巻きフェルミオン・右巻きフェルミオン	16
2.3	カイラル変換とカイラル対称性	17
2.4	カイラル対称性の破れ	18
2.4.1	カイラル対称性の明示的破れ	18
2.4.2	カイラル対称性の自発的破れ	20
2.5	$SU(3)$ メソンと $SU(3)$ バリオン	22
2.6	非線形表現 Lagrangian	25
2.7	Weinberg-Tomozawa 型相互作用	26
<b>第3章</b>	<b>Skyrme 模型</b>	<b>29</b>
3.1	モデル Lagrangian	29
3.2	Hedgehog 解	30
3.3	量子化	33
<b>第4章</b>	<b>束縛法</b>	<b>37</b>
4.1	モデル Lagrangian	37
4.2	束縛状態	39
4.3	Wess-Zumino 項	44
4.4	束縛状態の波動関数	45
<b>第5章</b>	<b>K 中間子・核子間ポテンシャル</b>	<b>51</b>
5.1	研究方法	51
5.2	Lagrangian と量子化の方法	51

5.3	K 中間子・核子間相互作用 . . . . .	52
5.4	考察 . . . . .	58
<b>第 6 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>65</b>
	謝辞	67
付録 A	$SU(2)$ Wess-Zumino term	69
付録 B	Lagrangian の導出	71
B.1	導出のための準備 . . . . .	71
B.2	$\mathcal{O}(1/N_c)$ までの寄与を導出する . . . . .	76
B.2.1	微分の 2 次 . . . . .	76
B.2.2	微分の 4 次 . . . . .	80
B.3	運動方程式 . . . . .	92
B.4	Wess-Zumino 項に由来する $\mathcal{O}(1/N_c)$ の寄与 . . . . .	99
	参考文献	101

# 目 次

1.1	Weinberg-Tomozawa 型の相互作用	13
2.1	$SU(3)$ メソン	23
2.2	$SU(3)$ バリオン	23
2.3	バリオンの 8 重項	23
2.4	メソンの 8 重項	23
2.5	$SU(3)$ 群の昇降演算子	24
2.6	Weinberg-Tomozawa 型の相互作用	27
3.1	ソリトンのエネルギー:Skyrme 項を加えると有限の $a$ に対して、エネルギーは最小値を持つ。	31
3.2	境界条件 (3.16) 式の下での Profile function $F(r)$ のグラフ	32
4.1	$(l, T) = (1, 1/2)$ の場合の K 中間子の動径方向波動関数:Wess-Zumino 項を含まない場合の波動関数 (without WZ term) と反 K 中間子の波動関数 (with WZ term)。K 中間子は Wess-Zumino 項の寄与を加えると束縛しない。	46
4.2	K 中間子の動径方向波動関数:Wess-Zumino 項を含まない場合のポテンシャル (without WZ term) と反 K 中間子のポテンシャル (with WZ term)。	48
5.1	本研究での方法により得られた反 K 中間子・核子間相互作用 (左列) と束縛状態の波動関数 (右列) : K 中間子の質量 $m_K = 495\text{MeV}$ は共通。それ以外のパラメーターセットはそれぞれ $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$ (一行目)、 $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$ (二行目)、 $(F_\pi, e) = (186, 4.82)$ (三行目)	60
5.2	本研究での方法により得られた反 K 中間子・核子間相互作用 (左列) と束縛状態の波動関数 (右列) : K 中間子の質量は換算質量を用いている。パラメーターセットは $(F_\pi, e, m_K) = (129, 5.45, 324.3)$ を用いている。	62



# 表 目 次

1.1	$K^-pp$ の束縛状態に関する理論予測 . . . . .	12
2.1	$SU(3)$ カイラル対称性の自発的破れによって生成される NG ボソン . . . . .	22
2.2	$u$ 、 $d$ 、 $s$ の 3 種類のクォークから構成されるバリオン . . . . .	22
4.1	$l, T$ ごとの $l_{eff}$ の値 ( $l = 3$ まで) . . . . .	43
4.2	束縛エネルギー (B.E.) の大きさ . . . . .	49
5.1	パラメーターごとの束縛エネルギー (B.E.) の大きさ:パラメーターセットは 左から順にそれぞれ $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$ 、 $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$ 、 $(F_\pi, e) =$ $(186, 4.82)$ . . . . .	59
5.2	パラメーターごとのポテンシャルの積分値 . . . . .	61
5.3	束縛エネルギー (B.E.) の大きさ:パラメーターセットは $(F_\pi, e, m_K) = (129, 5.45, 324.3)$ を用いている。 . . . . .	62



# 第1章 序論

## 1.1 研究の背景

### 1.1.1 K 中間子原子核

K 中間子原子核とは反 K 中間子が原子核中に強い相互作用によって束縛したものである。反 K 中間子と核子の間には強い引力が働いており、その引力の効果でヘリウム 3 などの軽い原子核に反 K 中間子を入れると、原子核が圧縮されることが理論的に予言されている [1, 2, 3, 4]。これは、原子核密度は一定でそれ以上の圧縮はできないという原子核の性質 (原子核密度の飽和性) に反する驚くべき予言である。

また、反 K 中間子と核子間の強い引力の結果、反 K 中間子と核子が束縛状態を作り  $\Lambda(1405)$  の共鳴状態ができると考えられている [5, 6, 7]。 $\Lambda(1405)$  はストレンジネス  $S = -1$  を持ち、アイソスピン  $I = 0$ 、スピン・パリティ  $J^P = 1/2^-$  を持つバリオンの共鳴状態である。 $\Lambda(1405)$  は同じスピン・パリティ  $J^P = 1/2^-$  を持つバリオンの共鳴状態の中で最も軽く、ストレンジ・クォーク含まない核子の第一励起状態  $N(1535)$  よりも軽い。クォーク模型ではストレンジ・クォーク ( $s$ ) は、アップ・クォーク ( $u$ ) とダウン・クォーク ( $d$ ) に比べて質量が約 100MeV 重いはずである。したがって、 $\Lambda(1405)$  のこのような性質をクォーク模型で記述することは難しい。しかし、カイラル理論では  $\Lambda(1405)$  の性質の記述が可能である。カイラル理論では  $\Lambda(1405)$  は反 K 中間子と核子の束縛状態として扱われている [5, 6, 7]。

K 中間子原子核の理論予想は 1963 年に Nogami が初めて発表した [8]。彼は  $\Lambda(1405)$  が反 K 中間子と核子の束縛状態あるとして、反 K 中間子と 2 つの核子の束縛状態が存在することを理論的に予言した。2002 年には Akaishi と Yamazaki が現象論的に構成したポテンシャルを用いて、反 K 中間子と少数の核子との束縛状態の存在を予言した [1, 2]。反 K 中間子と少数の核子との束縛状態に関する研究は多数なされている [10, 11, 12]。また、反 K 中間子と重い原子核 (質量数  $A=16-208$ ) との束縛状態に関する研究もなされている [13]。

これらの研究手法により得られた結果のうち、特に軽い K 中間子原子核に分類される  $K^-pp$  の束縛状態についての結果を表 1.1 にまとめる。表 1.1 より  $K^-pp$  の束縛状態に関する理論研究は様々な方法で行われており、その結果も様々な値を取っていることがわかる。これは、実験結果が確定していないという理由もあるが、反 K 中間子と核子間の相互作用が正しく求められていないことが最大の理由である。K 中間子原子核の性質を理解

表 1.1:  $K^-pp$  の束縛状態に関する理論予測

	束縛エネルギー [MeV]	崩壊幅 [MeV]	導出方法
Akaishi and Yamazaki [1]	48	61	Variationa method
Ivanov, Kienle, Marton [9] and Widmann	118	58	Penomenological model
Shevchenko, Gal and Mares [10]	55~70	95~110	Coupled-channel Faddeev calculation
Doté, Hyodo and Weise [11]	$19 \pm 3$	40~70	Chiral SU(3) coupled-channel dynamics
Nishikawa and Kondo [12]	Skyrmion 同士の 相対距離に依存		Skyrme model

するためには、反 K 中間子・核子間の相互作用を正しく理解することが必要不可欠であると言える。

### 1.1.2 反 K 中間子・核子間相互作用

反 K 中間子・核子間相互作用を求める方法として、まず Akaishi と Yamazaki の行った方法を説明する [2]。彼らは  $\Lambda(1405)$  が反 K 中間子と核子をアイソスピン  $I = 0$  となるように組んだ場合の束縛状態であると仮定した。そして、その束縛状態の束縛エネルギー、崩壊幅、Martin による  $\bar{K}N$  散乱実験のデータ [14]、および K 中間子水素の基底状態のエネルギーシフトに関する実験データ [15, 16] を再現するようなポテンシャルを構成した。

次に、カイラル理論による導出方法を述べる。真空の対称性が自発的に破れることによって、 $\pi$  中間子や K 中間子などの Nambu-Goldston ボソン (NG ボソン) が生成される [17, 18, 19, 20]。 $u, d, s$  の 3 種類のクォークが中心的な役割をする低エネルギー領域では、この NG ボソンと他の粒子との性質は低エネルギー定理によって記述される [21]。そして、NG ボソンの一つである反 K 中間子と核子の性質は低エネルギー定理の一つである Weinberg-Tomozawa 定理 (WT 定理) [22, 23] を基礎にして求められている [24, 25, 26]。カイラル理論における反 K 中間子と核子間の相互作用は、最低次の Feynman ダイアグラムでは図 1.1 のように書ける。図 1.1 は局所的な 4 点相互作用を表しており、このような相互作用を Weinberg-Tomozawa 型 (WT 型) の相互作用とよぶ。カイラル理論では、この WT 型の相互作用を基礎にして K 中間子・核子間相互作用の研究がおこなわれている。

このように、K 中間子・核子間相互作用は現象論的な手法やカイラル理論を用いて研

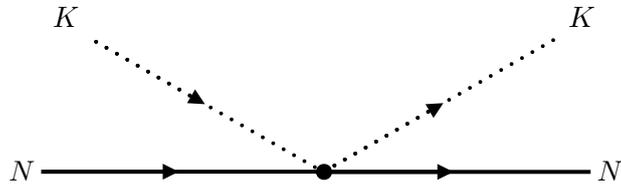


図 1.1: Weinberg-Tomozawa 型の相互作用

究されている。本研究では、これらの方法ではなく Skyrme 模型 [27] を用いた K 中間子・核子間相互作用の導出を行う。Skyrme 模型は量子色力学の低エネルギー有効理論であり、フレーバー  $SU(2)$  のハドロンの性質をよく記述する [28]。具体的な方法としては Callan と Klebanov が提唱した束縛法 [29, 30] を用いて K 中間子・核子間相互作用の導出を行う。Skyrme 模型では核子を構造を持つものとして扱うので、K 中間子・核子間相互作用はカイラル理論の WT 型相互作用のような局所的な相互作用にはならない。つまり、本研究では構造を持つ核子と構造を持たない K 中間子との相互作用を導出する。これによりカイラル理論とは異なる描像が得られると期待できる。

## 1.2 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。まず、第 2 章でカイラル対称性とその破れの復習を行う。その後、カイラル理論においてにおける反 K 中間子・核子間相互作用研究の基礎となる Weinberg-Tomozawa 型相互作用 [22, 23] の導出を行う。第 3 章では Skyrme 模型 [27] のレビューを行い、集団量子化についてその概略を述べる。第 4 章では Callan と Klebanov が提案した束縛法 [29, 30] のレビューを行う。第 5 章で Callan と Klebanov とは異なる手法を用いて、反 K 中間子・核子間の相互作用を導出し、その結果を考察する。最後に、第 6 章で本研究で得られた結果をまとめ今後の展望を議論する。



## 第2章 カイラル対称性

この章では、カイラル理論を用いたK中間子・核子間相互作用研究の基礎となる Weinberg-Tomozawa(WT) 定理 [22, 23] の復習をする。WT 定理は、自発的対称性の破れによって生じる Nambu-Goldstone ボソン (NG ボソン)[18, 19, 20] と他の粒子の相互作用を決める、低エネルギー定理 [21] と呼ばれる定理の1つである。

### 2.1 フェルミオン Lagrangian

質量  $m$  を持つフェルミオンの自由場の Lagrangian は以下で与えられる。

$$L = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi \quad (2.1)$$

ただし、

$$\partial \equiv \partial_\mu \gamma^\mu \quad (2.2)$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.3)$$

である。ここで、 $\gamma^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$  は以下の関係式を満たす  $4 \times 4$  の Dirac 行列である。

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4} \quad (2.4)$$

ただし、 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  とする。

(2.4) 式を満たす1組の行列は、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

で与えられる。ここで、 $\gamma^0$  に現れる  $1$  は  $2 \times 2$  の単位行列  $1 = \mathbf{1}_{2 \times 2}$  であり、 $\sigma^i (i = 1, 2, 3)$  は Pauli のスピン行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

である。

また、 $\psi$  は幾つかの内部自由度を持ち、以下では  $u$  クォークと  $d$  クォークからなる2つの内部自由度を持つものとする。つまり、

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

とする。ここで、 $u$  と  $d$  はそれぞれ  $u$  クォークと  $d$  クォークの場を表し、どちらも4成分の Dirac スピナーである。

## 2.2 左巻きフェルミオン・右巻きフェルミオン

$\gamma_5$  を次のように定義し、

$$\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (2.8)$$

以下のような2つの演算子を導入する。

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (2.9)$$

$\gamma_5$  は(2.5) 式を用いると以下のように書ける。

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ここでも、1 は  $2 \times 2$  の単位行列を表すものとする。

(2.9) 式の演算子は以下のような射影演算子としての性質をもつ。

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L + P_R = 1, \\ \gamma_5 P_L &= -P_L, \quad \gamma_5 P_R = P_R \\ P_L P_R &= P_L P_R = 0, \quad \gamma_\mu P_L = P_R \gamma_\mu, \quad \gamma_\mu P_R = P_L \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.9) 式で導入した  $P_L$  と  $P_R$  を用いて、フェルミオン場  $\psi$  と  $\bar{\psi}$  を

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \quad (2.12)$$

と2つに分ける。ここで、

$$\psi_L \equiv P_L \psi, \quad \psi_R \equiv P_R \psi, \quad \bar{\psi}_L \equiv \bar{\psi} P_R, \quad \bar{\psi}_R \equiv \bar{\psi} P_L \quad (2.13)$$

と定義した。(2.11) 式の性質を用いると、

$$\gamma_5 \psi_L = -P_L \psi = -\psi_L, \quad \gamma_5 \psi_R = P_R \psi = \psi_R \quad (2.14)$$

が得られる。このことから  $\psi_L$  と  $\psi_R$  は  $\gamma_5$  の固有状態になっており、その固有値が  $\pm 1$  になっていることがわかる。 $\psi_L$  を左巻きフェルミオン、 $\psi_R$  を右巻きフェルミオンと呼ぶ。

(2.11) 式、(2.12) 式を使うと、Lagrangian(2.1) 式は、

$$L = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - \bar{\psi}_L m \psi_R - \bar{\psi}_R m \psi_L \quad (2.15)$$

のように左巻きフェルミオンと右巻きフェルミオンを用いて書くことができる。

## 2.3 カイラル変換とカイラル対称性

この節では、カイラル変換及びカイラル対称性の定義を説明する。前の節で導入した左巻きフェルミオン・右巻きフェルミオンに対して以下の2つの演算子による変換を考える。

$$\begin{aligned} g_V &= \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}] \\ g_A &= \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}\gamma_5] \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで、 $\boldsymbol{\theta}$  と  $\boldsymbol{\phi}$  は実数の定数ベクトルであり、 $\mathbf{T}$  はこの変換の生成子と呼ばれるものである。  $g_V$  による変換をアイソスピン変換と呼び、  $g_A$  による変換を軸性変換と呼ぶ。

(2.16) 式の微小変換の下で  $\psi_L$  と  $\psi_R$  は以下のように変換する。

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow g_V \psi_L = \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}] \psi_L \simeq (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_L \\ \psi_R &\rightarrow g_V \psi_R = \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}] \psi_R \simeq (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_R \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow g_A \psi_L = \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}\gamma_5] \psi_L \simeq (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}\gamma_5) \psi_L = (1 - i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_L \\ \psi_R &\rightarrow g_A \psi_R = \exp [i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}\gamma_5] \psi_R \simeq (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}\gamma_5) \psi_R = (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_R \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで、(2.18) 式を導く際に (2.11) 式を用いた。

アイソスピン変換 (2.17) 式と軸性変換 (2.18) 式を用いて以下の (微小) 変換を作る。

$$\begin{aligned} \frac{g_V + g_A}{2} \psi_L &\simeq \left( 1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\phi}}{2} \right) \psi_L \equiv g_L \psi_L \\ \frac{g_V - g_A}{2} \psi_L &\simeq i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}}{2} \psi_L \\ \frac{g_V + g_A}{2} \psi_R &\simeq \left( 1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}}{2} \right) \psi_R \equiv g_R \psi_R \\ \frac{g_V - g_A}{2} \psi_R &\simeq i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\phi}}{2} \psi_R \end{aligned} \quad (2.19)$$

さらに、(2.19) 式において変換パラメーター  $\boldsymbol{\theta}$  と  $\boldsymbol{\phi}$  を以下のように取る。

- 左巻きフェルミオンに対しては  $\boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{l}$
- 右巻きフェルミオンに対しては  $\boldsymbol{\theta} = +\boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{r}$

これは、左巻きフェルミオンに対してはアイソスピン変換と軸性変換は、それぞれ同じだけ逆方向に回転させることに対応し、右巻きフェルミオンに対してはアイソスピン変換と軸性変換は、それぞれ同じだけ同じ方向に回転させることに対応する。上で導入した  $\boldsymbol{l}$  と  $\boldsymbol{r}$  を使って (2.19) 式の  $g_L$  と  $g_R$  による変換を書き直すと、左巻きフェルミオンに対しては

$$\begin{aligned} g_L \psi_L &= \left( 1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}}{2} \right) \psi_L = (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{l}) \psi_L \\ g_R \psi_L &= \left( 1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}}{2} \right) \psi_L = \psi_L \end{aligned} \quad (2.20)$$

が得られ、右巻きフェルミオンに対しては

$$g_L \psi_R = \left(1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2}\right) \psi_R = \psi_R \quad (2.21)$$

$$g_R \psi_R = \left(1 + i\mathbf{T} \cdot \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right) \psi_R = \psi = (1 + i\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) \psi_R$$

が得られる。したがって、(2.20) 式、(2.21) 式から  $g_L$  は  $\psi_L$  にのみ作用し、 $g_R$  は  $\psi_R$  にのみ作用することがわかった。そこで、 $g_L$  による変換を左変換、 $g_R$  による変換を右変換と呼ぶことにする。ただし、アイソスピン変換  $g_V$  と軸性変換  $g_A$ 、左変換  $g_L$  と右変換  $g_R$  は変換パラメーターが異なるだけで互いに等価な変換であることに注意する。

アイソスピン変換 (2.17) 式と軸性変換 (2.18) 式、そして、それに等価な左変換 (2.20) 式と右変換 (2.21) 式のように、左巻きフェルミオン・右巻きフェルミオンそれぞれに独立な変換を施すことをカイラル変換という。系がカイラル変換の下で不変になる場合には、その系にカイラル対称性があるという。

## 2.4 カイラル対称性の破れ

前の節で定義したカイラル対称性が成り立たない場合に、それをカイラル対称性の破れと呼ぶ。カイラル対称性の破れには、明示的な破れと自発的な破れが存在する。

### 2.4.1 カイラル対称性の明示的破れ

アイソスピン変換 (2.17) 式と軸性変換 (2.18) 式、そして、左変換 (2.20) 式と右変換 (2.21) 式がどのような場合に対称性を破るのかを確認する。まず最初に質量がゼロの場合を考える。このとき Lagrangian (2.15) 式は

$$L = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \quad (2.22)$$

となる。この Lagrangian は各変換の下で以下のように変換する

- アイソスピン変換

(2.17) 式より

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \\ \rightarrow & \bar{\psi}_L (1 - i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) i \not{\partial} (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_R + \bar{\psi}_R (1 - i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) i \not{\partial} (1 + i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_L \\ \simeq & \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \end{aligned}$$

- 軸性変換

(2.18) 式より

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \\ \rightarrow & \bar{\psi}_L (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) i \not{\partial} (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_L + \bar{\psi}_R (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) i \not{\partial} (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_R \\ \simeq & \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \end{aligned}$$

- 左変換

(2.20) 式より

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R & \rightarrow \bar{\psi}_L (1 - i \mathbf{T} \cdot \mathbf{l}) i \not{\partial} (1 + i \mathbf{T} \cdot \mathbf{l}) \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \\ & \simeq \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \end{aligned}$$

- 右変換

(2.21) 式より

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R & \rightarrow \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R (1 + i \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) i \not{\partial} (1 - i \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) i \not{\partial} \psi_R \\ & \simeq \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \end{aligned}$$

したがって、ゼロ質量のフェルミオンはここで考えた全てのカイラル変換に対して不変になる。

次に、質量のあるフェルミオンに対する変換性を調べる。質量を持つフェルミオンの Lagrangian は (2.15) 式で与えられる。しかし、第1項と第2項は (2.22) 式と同じなので、考えるべきは質量  $m$  に比例する項だけである。よって、それぞれの変換に対する変換性は以下のようになる。

- アイソスピン変換

(2.17) 式より

$$\begin{aligned} & m \bar{\psi}_L \psi_R + m \bar{\psi}_R \psi_L \\ \rightarrow & m \bar{\psi}_L (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_R + m \bar{\psi}_R (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi_L \\ \simeq & m \bar{\psi}_L \psi_R + m \bar{\psi}_R \psi_L \end{aligned}$$

- 軸性変換

(2.18) 式より

$$\begin{aligned} & m \bar{\psi}_L \psi_R + m \bar{\psi}_R \psi_L \\ \rightarrow & m \bar{\psi}_L (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) (1 + i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_R + m \bar{\psi}_R (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) (1 - i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi_L \\ \simeq & m \bar{\psi}_L \psi_R + m \bar{\psi}_R \psi_L + 2im (\bar{\psi}_L \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi} \psi_R - \bar{\psi}_R \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi} \psi_L) \end{aligned}$$

- 左変換

(2.20) 式より

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L &\rightarrow m\bar{\psi}_L(1 - i\mathbf{T}\cdot\mathbf{l})\psi_R + m\bar{\psi}_R(1 + i\mathbf{T}\cdot\mathbf{l})\psi_L \\ &= m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L - im(\bar{\psi}_L\mathbf{T}\cdot\mathbf{l}\psi_R - \bar{\psi}_R\mathbf{T}\cdot\mathbf{l}\psi_L) \end{aligned}$$

- 右変換

(2.21) 式より

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L &\rightarrow m\bar{\psi}_L(1 + i\mathbf{T}\cdot\mathbf{r})\psi_R + m\bar{\psi}_R(1 - i\mathbf{T}\cdot\mathbf{r})\psi_L \\ &= m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L + im(\bar{\psi}_L\mathbf{T}\cdot\mathbf{r}\psi_R - \bar{\psi}_R\mathbf{T}\cdot\mathbf{r}\psi_L) \end{aligned}$$

以上より質量のあるフェルミオンに対してはアイソスピン変換に対する対称性のみが残ることが示された。このようにフェルミオンに質量があることでカイラル対称性が破れることを明示的な対称性の破れと呼ぶ。

## 2.4.2 カイラル対称性の自発的破れ

前小節で見たように、フェルミオンの質量がゼロでないならば対称性は明示的に破れる。明示的な破れとは異なる対称性の破れとして自発的対称性の破れ [17, 18, 19] が存在する。ここでは自発的対称性の破れについて説明する。系に変換  $U$  に対する対称性が存在するときには、系の Lagrangian を  $L$ 、Hamiltonian を  $H$  とすると、

$$L = ULU^\dagger \quad (2.23)$$

$$H = UHU^\dagger \quad (2.24)$$

が成り立つ。次に  $a^\dagger$  と  $b^\dagger$  をそれぞれ生成演算子として、

$$|A\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad |B\rangle = b^\dagger|0\rangle \quad (2.25)$$

と定義される状態  $|A\rangle$  と  $|B\rangle$  を考える。さらに、これら2つ生成演算子は以下の関係で結ばれているとする。

$$b^\dagger = Ua^\dagger U^\dagger \quad (2.26)$$

このとき状態  $|A\rangle$  は  $U$  の下で

$$\begin{aligned} |A\rangle \rightarrow U|A\rangle &= Ua^\dagger|0\rangle \\ &= Ua^\dagger UU^\dagger|0\rangle \\ &= b^\dagger U|0\rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

と変換する。

もし、真空  $|0\rangle$  が  $U$  の下で不変ならば、

$$U|0\rangle = |0\rangle \quad (2.28)$$

なので、状態  $|A\rangle$  と  $|B\rangle$  のエネルギーは、(2.24) 式、(2.26) 式より

$$\begin{aligned} E_A \equiv \langle A|H|A\rangle &= \langle 0|aHa^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 0|U^\dagger U a U^\dagger U H U^\dagger U a^\dagger U^\dagger U|0\rangle \\ &= \langle 0|bUHU^\dagger b^\dagger|0\rangle \\ &= \langle B|H|B\rangle \equiv E_B \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。これは2つの状態  $|A\rangle$  と  $|B\rangle$  が縮退していることを意味する。ここで重要なことは、(2.28) 式が成り立つこと、つまり真空が  $U$  の下で不変であるということである。Hamiltonian の持つ対称性  $U$  の下で真空が不変になる場合には、(2.27) 式より

$$|A\rangle \rightarrow U|A\rangle = |B\rangle \quad (2.30)$$

となり異なる2つの状態は  $U$  によって結びつけられる。

一方で、真空が  $U$  の下で不変でない場合には

$$|0\rangle \neq U|0\rangle \quad (2.31)$$

となる。この場合には状態  $|A\rangle$  と  $|B\rangle$  の縮退は起こらない。(2.31) 式は真空が対称性  $U$  を破っていることを表しており、自発的対称性の破れと呼ばれる [17, 18, 19]。ハドロンのカイラル対称性の場合には、軸性変換が自発的に破れていることが知られており、これをカイラル対称性の自発的破れと呼ぶ。対称性が自発的に破れると、破れた対称性の数と同じだけゼロ質量の中間子が生成される。この生成された中間子のことを Nambu-Goldstone ボソン (NG ボソン) と呼ぶ [18, 19, 20]。

構成粒子としてアップ・クォーク ( $u$ )、ダウン・クォーク ( $d$ )、ストレンジ・クォーク ( $s$ ) の3種類のクォークを含む  $SU(3)$  カイラル対称性の場合には、

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V \quad (2.32)$$

と自発的に破れる。したがって生成される NG ボソンの数は8種類である。表2.1に、スピン  $s = 0$  の基底状態の8種類の NG ボソンをまとめた。表中の  $I$  はアイソスピンの大きさを表し、 $I_3$  はアイソスピンの第3成分を、 $S$  はストレンジネスをそれぞれ表す。

表2.1において各 NG ボソンはゼロ質量ではないが、これは質量による明示的なカイラル対称性の破れにより、破れた対称性、 $SU(3)_A$  が完全な対称性ではないからである。しかし、 $u, d, s$  の3種類のクォークが構成粒子として中心的な役割を果たす低エネルギー領域では、典型的なエネルギースケールが約  $1\text{GeV}$  であることから、これらの NG ボソンはゼロ質量とみなすことができる。また  $SU(3)_V$  の対称性も各クォークの質量差によって完全な対称性ではないので、NG ボソンの間にも質量差が生じている [31]。

表 2.1:  $SU(3)$  カイラル対称性の自発的破れによって生成される NG ボソン

	質量 [MeV]	構成クォーク	$I$	$I_3$	$S$
$K^+$	493.7	$\bar{s}u$	1/2	1/2	1
$K^0$	497.6	$\bar{s}d$	1/2	-1/2	1
$\pi^+$	139.6	$\bar{d}u$	1	1	0
$\pi^0$	135.0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{u}u + \bar{d}d)$	1	0	0
$\pi^-$	139.6	$-\bar{u}d$	1	-1	0
$\eta$	547.9	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$	0	0	0
$\bar{K}^0$	497.6	$\bar{d}s$	1/2	1/2	-1
$K^-$	493.7	$\bar{u}s$	1/2	-1/2	-1

## 2.5 $SU(3)$ メソンと $SU(3)$ バリオン

Gell-Mann の八道説より  $SU(3)$  の中間子及びバリオンはどちらも 8 重項に属すると考えることができる。  $u$ 、  $d$ 、  $s$  の 3 種類のクォークから構成されるバリオンのうちスピンの  $s = 1/2$  の基底状態のバリオンを表 2.2 にまとめる。  $I$  などの記号の意味は表 2.1 と同じである。

表 2.2:  $u$ 、  $d$ 、  $s$  の 3 種類のクォークから構成されるバリオン

	質量 [MeV]	構成クォーク	$I$	$I_3$	$S$
$p$	938.3	$uud$	1/2	1/2	1
$n$	939.6	$udd$	1/2	-1/2	1
$\Lambda^0$	1115.7	$uds$	0	0	0
$\Sigma^+$	1189.4	$uus$	1	1	0
$\Sigma^0$	1192.6	$uds$	1	0	0
$\Sigma^-$	1197.4	$dds$	1	-1	0
$\Xi^0$	1314.9	$uss$	1/2	1/2	-1
$\Xi^-$	1321.7	$dss$	1/2	-1/2	-1

表 2.2 から以下のことが読み取れる。まずバリオン中に含まれる  $s$  クォークの数が増えるほど、質量が約 100MeV ずつ重くなっていることがわかる。これは  $u$  クォーク、  $d$  クォークに比べ  $s$  クォークが約 100MeV 重たいことの反映である。次に、同じアイソスピンの多重項の中では、  $d$  クォークの数が多い方が質量がわずかに重たい。これは  $d$  クォークが  $u$  クォークよりわずかに重たいことに加えて、アイソスピン対称性を破る電弱相互作用の効果も反映されている [32]。

表 2.1 及び表 2.2 に挙げた中間子及びバリオンは全て以下の関係式

$$Q = I_3 + Y/2 \quad (2.33)$$

を満たす。この式は、中野-西島-Gell-Mann の公式 [33, 34] と呼ばれている。ここで、 $Q$  は陽子電荷を単位とした電荷で、 $I_3$  はアイソスピンの第 3 成分、 $Y$  はハイパーチャージであり

$$Y = B + S \quad (2.34)$$

で定義される量子数である。ここで  $B$  はバリオン数である。上で挙げた 8 種類のバリオンを  $I_3$  と  $Y$  を軸にしてプロットすると図 2.1、及び図 2.2 が得られる。

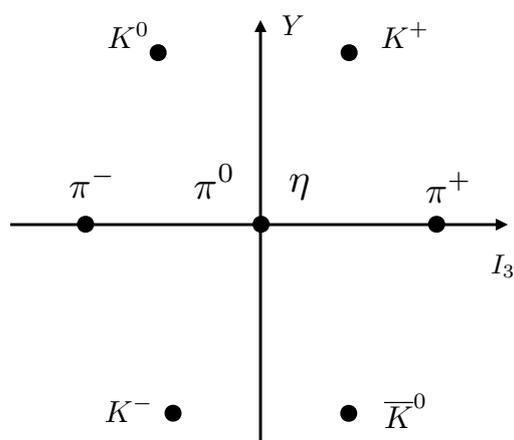


図 2.1:  $SU(3)$  メソン

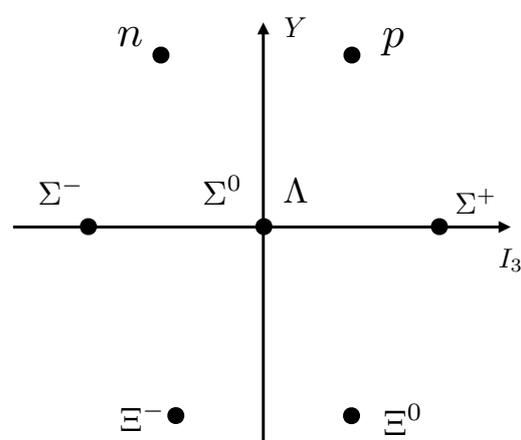


図 2.2:  $SU(3)$  バリオン

図 2.2 の六角形を正六角形にするために、

$$H_1 = I_3, \quad H_2 = \sqrt{3}Y/2 \quad (2.35)$$

と新しい座標軸を導入すると図 2.3、及び図 2.4 が得られる。

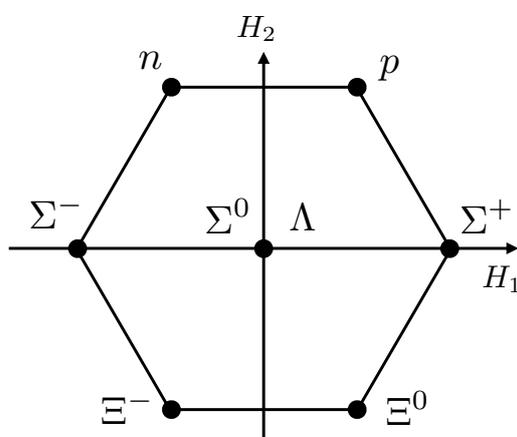


図 2.3: バリオンの 8 重項

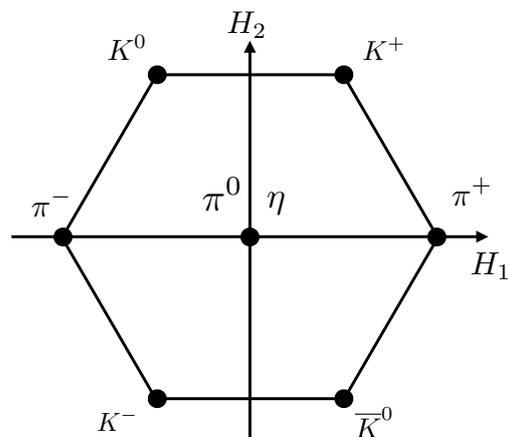


図 2.4: メソンの 8 重項

ここで導入した新しい座標軸は、 $SU(3)$  の生成子  $T_a (a = 1, 2, \dots, 8)$  を用いると、

$$H_1 = T_3, \quad H_2 = T_8 \quad (2.36)$$

と書くことができる [35]。ここで、 $T_a$  は  $T_a = \lambda_a/2$  の関係を満たし、 $\lambda_a$  は Gell-Mann 行列と呼ばれる以下のような 8 種類の行列である。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

図 2.3 及び図 2.4 は  $SU(3)$  のルート図と同じ形をしている [35]。(2.37) 式を使って以下のような演算子を定義する。

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2) \\ V_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm iT_5) \\ U_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm iT_7) \end{aligned} \quad (2.38)$$

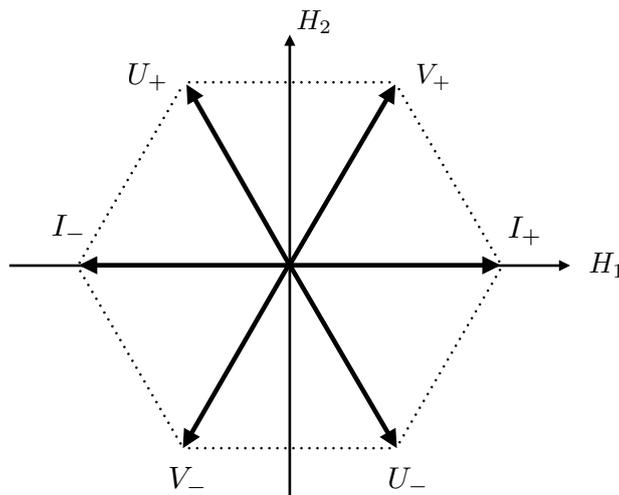


図 2.5:  $SU(3)$  群の昇降演算子

ここで、(2.39) 式で導入した演算子と、 $H_1$ 、 $H_2$  つまり、 $T_3$  と  $T_8$  には以下の関係がある。

$$\begin{aligned} [T_3, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm}, & [T_8, I_{\pm}] &= 0 \\ [T_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm}, & [T_8, V_{\pm}] &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} V_{\pm} \\ [T_3, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm}, & [T_8, U_{\pm}] &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} U_{\pm} \end{aligned} \quad (2.39)$$

したがって、 $I_{\pm}$ 、 $V_{\pm}$  及び  $U_{\pm}$  は  $H_1$ - $H_2$  平面上での昇降演算子として振る舞うことがわかる (図 2.5)。図 2.3 及び図 2.4 のようにまとめたバリオンと中間子を図 2.5 の昇降演算子と対応付けると  $SU(3)$  のリー代数の行列の形で

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 B_a \lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & & \Sigma^+ & p \\ & \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ & & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda \\ & \Xi^- & & \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 M_a \lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & & \pi^+ & K^+ \\ & \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ & & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \\ & K^- & & \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

と書くことができる [36]。

## 2.6 非線形表現 Lagrangian

2.4 節で見たようにカイラル対称性は自発的に破れる。対称性が自発的に破れた場合に、NG ボソンと他の粒子との相互作用を求める方法の 1 つに非線形表現 Lagrangian を用いる方法がある [21]。Callan-Coleman-Wess-Zumino の方法 (CCWZ の方法)[37, 38] を用いると、 $SU(3)$  の場合の非線形表現 Lagrangian は

$$L = \text{tr} (\bar{B} i \not{D} B) - m_0 \text{tr} (\bar{B} B) + \frac{F}{2} \text{tr} (\bar{B} \gamma_5 [\not{a}, B]) + \frac{D}{2} \text{tr} (\bar{B} \gamma_5 \{ \not{a}, B \}) \quad (2.42)$$

と書ける [36]。ここで、 $m_0$  はバリオンの質量、 $F, D$  は任意のパラメーターであり、

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 B_a \lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & & \Sigma^+ & p \\ & \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ & & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda \\ & \Xi^- & & \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 M_a \lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$U = \xi^2 = \exp(i\phi/f_\pi) \quad (2.45)$$

$$D_\mu B = \partial_\mu B + i[v_\mu, B] \quad (2.46)$$

$$v_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \quad (2.47)$$

$$a_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \quad (2.48)$$

である。(2.42) 式の第1項は (2.46) の共変微分で定義されたバリオンの運動項であり、第2項はバリオンの質量項である。

## 2.7 Weinberg-Tomozawa型相互作用

2.4節で述べたように、対称性が自発的に破れたとき破れた対称性の数と同じ数の NG ボソンが生成される。低エネルギー領域において、この NG ボソンと他の粒子との相互作用は幾つかの低エネルギー定理によって規定される [21]。Weinberg-Tomozawa 定理 (WT 定理)[22, 23] は、低エネルギー定理の1つである。

以下では、バリオンとして核子を考え、NG ボソンとして K 中間子を考える。つまり

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K^+ \\ 0 & 0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & K \\ K^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

とする。ただし、

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

とした。また、(2.42) 式のバリオンの運動項は

$$L = \text{tr} (\bar{B} i \not{D} B) = \text{tr} (\bar{B} i \not{\partial} B) - \text{tr} (\bar{B} \gamma^\mu [v_\mu, B]) \quad (2.52)$$

と書ける。ただし、

$$v_\mu = \frac{1}{2} [\xi^\dagger (\partial_\mu \xi) + \xi (\partial_\mu \xi^\dagger)]$$

$$\xi^2 = \exp \left( i \frac{\phi}{f_\pi} \right)$$

である。ここで、

$$L_{int} = -\text{tr} (\bar{B} \gamma^\mu [v_\mu, B]) \quad (2.53)$$

と定義すると、この項はバリオンとメソンの4点相互作用を表す。この  $L_{int}$  に (2.49) 式と (2.50) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} L_{int} = & \frac{1}{2f_\pi^2} \left[ \bar{N} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma^\mu N \cdot \left( \partial_\mu K^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} K - K^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \partial_\mu K \right) \right] \\ & + \frac{1}{2f_\pi^2} \frac{3}{4} \left[ \bar{N} \gamma^\mu N \cdot (\partial_\mu K^\dagger K - K^\dagger \partial_\mu K) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

が得られる。(2.54) 式の第1項は核子のアイソスピンカレントと K 中間子のアイソスピンカレントの積になっている。中間子とフェルミオンの相互作用がこのような形になることを WT 定理という。(2.54) 式の第2項は核子のアイソスカラーと K 中間子のアイソスカラーの積になっている。そして、(2.53) 式の Lagrangian を Weinberg-Tomozawa 型 (WT 型) の相互作用 Lagrangian という。

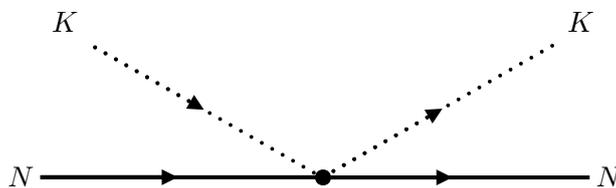


図 2.6: Weinberg-Tomozawa 型の相互作用

(2.53) 式の WT 型 Lagrangian を用いれば、核子と K 中間子の相互作用を求めることができる。WT 型 Lagrangian は図 2.6 のように局所的な 4 点相互作用になる。カイラル理論では、この WT 型 Lagrangian を基礎として K 中間子・核子間を導出する。

## 第3章 Skyrme 模型

本研究は Skyrme 模型を用いた研究である。具体的な研究方法に入る前に、この章で参考文献 [27, 28, 39] に基づいて Skyrme 模型のレビューを行う

### 3.1 モデル Lagrangian

Skyrme 模型は低エネルギー領域での有効理論であり、Skyrme が 1961 年に提唱した模型である [27]。Skyrme はメソンを基本的な粒子として、バリオンとメソンの相互作用を記述しようとした。Skyrme はメソンとして  $\pi$  中間子を選び、 $\pi$  中間子を基本的な粒子として Skyrme 模型を作り上げた。Skyrme 模型ではバリオンはメソンからなるソリトンという形で現れる。 $\pi$  中間子の質量がゼロの場合の Skyrme 模型の Lagrangian は以下のよう  
に与えられる [27]。

$$L_{\text{Skyrme}} = \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger(\mathbf{x}) \partial^\mu U(\mathbf{x})] + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x}), \partial_\nu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x})]^2 \quad (3.1)$$

ここで、 $U$  は  $\pi$  中間子からなる非線形な場で

$$U(\mathbf{x}) = \exp \left[ i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \right] \quad (3.2)$$

である。ただし、 $\boldsymbol{\tau}$  はアイソスピン行列であり、その値は pauli のスピン行列 (2.6) 式と同じ値をとる。 $F_\pi$  と  $e$  はそれぞれ理論のパラメーターであり、 $F_\pi$  は  $\pi$  中間子の崩壊定数、 $e$  は Skyrme パラメーターと呼ばれる。ここでは Adkins 達の値を採用する [28]。

$$F_\pi = 129[\text{MeV}], \quad e = 5.45 \quad (3.3)$$

これらのパラメーターは、後述する核子と  $\Delta$  粒子の質量を再現するように選ばれている。

(3.1) 式の右辺第 1 項は (4.6) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] &\simeq \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} \left[ \partial_\mu \left( 1 - i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right) \partial^\mu \left( 1 + i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} \left[ \frac{4}{F_\pi^2} \tau_a \tau_b \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となるので、この項は  $\pi$  中間子の運動項を表す。場の配位  $U(\mathbf{x})$  に対して、定数  $a$  を用いて  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = a\mathbf{x}$  なるスケール変換を施す。このとき、時間に依存しないエネルギーを

$$E_2 = \int d^3x \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger(\mathbf{x}) \partial^\mu U(\mathbf{x})] \quad (3.5)$$

と定めると、 $E_2$  はスケール変換によって

$$\begin{aligned} E'_2 &= \int d^3y \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger(\mathbf{y}) \partial^\mu U(\mathbf{y})] \\ &= a \int d^3x \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger(\mathbf{x}) \partial^\mu U(\mathbf{x})] = aE_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。これは、配位を小さくすればするほどエネルギーが減少し、最終的に配位が潰れてしまうことを意味している。この状況を避けるためには、配位を小さくするにつれてエネルギーが増加する項を加えればよく、この役割をしているのが (3.1) 式の右辺第2項の Skyrme 項と呼ばれる項である。Skyrme 項は微分の4次の項なので、スケール変換  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = a\mathbf{x}$  によって

$$E_4 = \int d^3x \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x}), \partial_\nu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x})]^2 \quad (3.7)$$

は

$$\begin{aligned} E'_4 &= \int d^3y \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U(\mathbf{y}) U^\dagger(\mathbf{y}), \partial_\nu U(\mathbf{y}) U^\dagger(\mathbf{y})]^2 \\ &= \frac{1}{a} \int d^3x \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x}), \partial_\nu U(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x})]^2 \\ &= \frac{1}{a} E_4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

となるので、確かに  $a$  を小さくするとエネルギー  $E_4$  は大きくなる。したがって、エネルギーの和  $E = E_2 + E_4$  はスケール変換  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = a\mathbf{x}$  の下で

$$E = E_2 + E_4 \rightarrow E' = aE_2 + \frac{1}{a}E_4 \quad (3.9)$$

となるので有限の  $a$  に対して最小値を持つ (図 3.1 参照)。

## 3.2 Hedgehog 解

Lagrangian(3.1) 式から得られる運動方程式は  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$  の3つの自由度を持つが、 $\pi$  中間子の3つの自由度をそのまま扱おうと運動方程式は非常に複雑になる。そこで、Skyrme は  $\pi$  中間子の3つの自由度のうち2つを角度変数  $\hat{r}$  に関係づけ、残りの1つを動径方向の距離  $r$  にのみ依存する関数を用いて表すことにした。このようにして作られたのが、

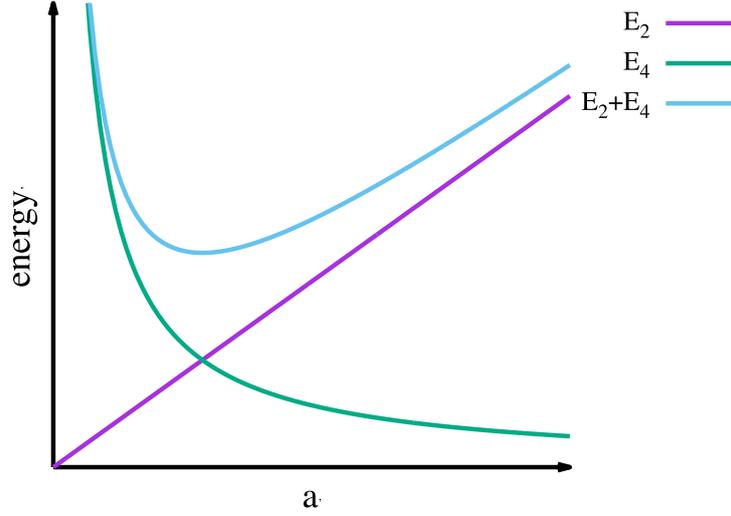


図 3.1: ソリトンのエネルギー:Skyrme 項を加えると有限の  $a$  に対して、エネルギーは最小値を持つ。

Hedgehog 解という特別な配位である。Hedgehog 解は  $\pi$  中間子のアイソスピンベクトルと、動径ベクトルが平行になるような配位として定義され、以下のような形をとる。

$$U_H = \exp [iF(r)\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}] = \cos F + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r} \sin F \quad (3.10)$$

ここで、(3.10) 式の  $F(r)$  は Profile function と呼ばれる  $r$  にのみ依存する関数である。 $F(r)$  は以下のようにして求められる。まず系の Lagrangian(3.1) 式

$$L = \frac{1}{16}F_\pi^2 \text{tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2 \quad (3.11)$$

の  $U$  に (3.10) 式を代入すると、

$$L = -\frac{1}{8}F_\pi^2 \left[ F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right] - \frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right] \quad (3.12)$$

となる。ソリトンの質量を

$$M = \int d^3x L \quad (3.13)$$

と定義すると、(3.12) 式から

$$\begin{aligned} M &= \int d^3x L \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{1}{8}F_\pi^2 \left[ F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right] + \frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

が得られる。 $F \rightarrow F + \delta F$  と変分をとり  $\tilde{r} \equiv eF_\pi r$ ,  $M \equiv mF_\pi/e$  と無次元量  $\tilde{r}, m$  を導入すると (3.14) 式から以下のような  $F(\tilde{r})$  についての運動方程式が得られる。

$$\left( \frac{1}{4}\tilde{r}^2 + 2\sin^2 F \right) F'' + \frac{1}{2}\tilde{r}F' + \sin(2F)(F')^2 - \frac{1}{4}\sin(2F) + \frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2} \sin(2F) = 0 \quad (3.15)$$

以下の境界条件の下で (3.15) 式を解くと、profile function  $F(r)$  が得られる。

$$F(r=0) = \pi, \quad F(r=\infty) = 0 \quad (3.16)$$

この境界条件は  $\pi$  中間子のソリトンのバリオン数が 1 になるために必要な条件である。バリオン数が 1 の場合の  $\pi$  中間子のソリトンのことを Skymion と呼ぶ。図 3.2 は、運動方程式 (3.15) 式を数値計算を用いて解いた結果である。

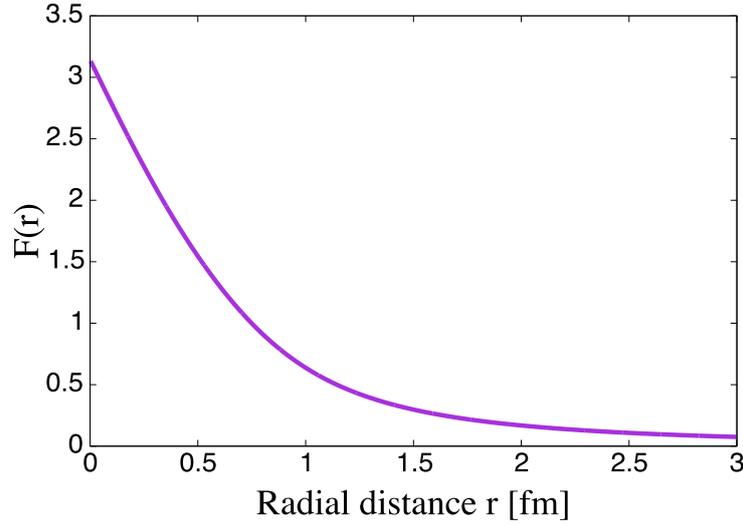


図 3.2: 境界条件 (3.16) 式の下での Profile function  $F(r)$  のグラフ

次に Hedgehog 解に対するアイソスピン回転と空間回転を考える。初めに Hedgehog 解のアイソスピン回転を考える。アイソスピン回転の生成子を  $\tau$  行列を用いて  $\mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}/2$  と書くと、アイソスピン変換を引き起こす演算子は

$$A = \exp(i\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{I}) \quad (3.17)$$

と書ける。ここで、 $\boldsymbol{\phi}$  は実数の定数ベクトルである。この  $A$  を用いると、アイソスピン回転の下での Hedgehog 解は

$$\begin{aligned} U_H \rightarrow AU_H A^\dagger &= \exp[iF(r)A\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}A^\dagger] \\ &= \exp[iF(r)A\tau_a A^\dagger \hat{r}_a] \\ &= \exp[iF(r)\tau_b R_{ba} \hat{r}_a] \end{aligned} \quad (3.18)$$

と変換する。 $R_{ba}$  はアイソスピン空間でのベクトルの回転を表す  $3 \times 3$  の直交行列で、

$$R_{ba} = \frac{1}{2} \text{tr} [\tau_b A \tau_a A^\dagger] \quad (3.19)$$

と書ける。

次に Hedgehog 解を空間回転させる。空間回転の生成子を  $\mathbf{L}$  と定義する。空間回転によって  $\hat{r}_a \rightarrow D_{ab}\hat{r}_b$  と変化するので、空間回転の下で Hedgehog 解は

$$U_H = \exp [iF(r)\tau_a\hat{r}_a] \rightarrow \exp [iF(r)\tau_a D_{ab}\hat{r}_b] \quad (3.20)$$

と変換する。ただし、 $D_{ab}$  は実空間でのベクトルの回転を表す  $3 \times 3$  の直交行列である。

最後に、アイソスピン回転と空間回転を同時に行う場合を考える。(3.18) 式、(3.20) 式より

$$U_H \rightarrow AU_H A^\dagger = \exp [iF(r)\tau_a R_{ab}D_{ba}\hat{r}_a] \quad (3.21)$$

となる。したがって、アイソスピン回転と空間回転を同じ角度だけ、それぞれ逆方向に回転させる場合には  $R_{ab}D_{ba} = 1$  なる。このとき (3.21) 式より  $R_{ab}D_{ba} = 1$  なので  $U_H$  は不変になる。 $\mathbf{I} + \mathbf{L} = \mathbf{T}$  で定義される  $\mathbf{T}$  を導入すると、このことは Hedgehog 解は  $\mathbf{T}$  の下での回転で不変になることを意味している。つまり、Hedgehog 解は  $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{L} = 0$  となっている。アイソスピンとスピンの大きさをそれぞれ  $I, L$  とすると、Hedgehog 解は  $I = L$  の状態、すなわちアイソスピンとスピンの大きさが同じ大きさの状態 (例えば、核子や  $\Delta$  粒子) を記述することができる。

### 3.3 量子化

前節で扱った Hedgehog 解は古典解であるので、スピンとアイソスピンという量子数を持たないので物理状態ではない。したがって古典的な配位である  $U_H$  から、どのようにして核子や  $\Delta$  粒子といった物理状態を作るのかが問題になる。これは Hedgehog 解をどのようにして量子化するかという問題に他ならない。Hedgehog 解の量子化は半古典量子化を用いて行われる。これは、古典解周りの微小なゆらぎを量子化する方法である。今、Lagrangian(3.1) 式にはアイソスピン回転に対する対称性と空間回転に対する対称性が存在する。したがって、これら 2 つの変換に起因するゆらぎは系のエネルギーを変えないゼロモードである。低エネルギー領域ではこのゼロモードが重要な役割を果たすので、半古典量子化ではアイソスピン回転と空間回転に起因するゆらぎを量子化する。しかし前節で述べたように Hedgehog 解は  $\mathbf{I} + \mathbf{L} = 0$  なので、アイソスピン空間での回転、若しくは実空間での回転のうちどちらか片方を考えれば十分である。したがって、以下のような回転している Hedgehog 解を考える。

$$U(t, \mathbf{x}) = A(t) U(\mathbf{x}) A^\dagger(t) \quad (3.22)$$

ここで、

$$A(t) \in SU(2) \quad (3.23)$$

であり、 $A(t)$  を集団座標系の力学変数として扱う [28]。(3.22) 式を (3.1) 式に代入すると、

$$L = -M + \Lambda \text{tr} \left[ \dot{A} \dot{A}^\dagger \right] \quad (3.24)$$

が得られる。ここで、 $M$  は (3.14) 式で与えられるソリトンの質量であり、

$$\Lambda = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{e^3 F_\pi} \lambda \quad (3.25)$$

$$\lambda = \int d\tilde{r} \tilde{r}^2 \sin^2(F) \left[ 1 + 4 \left( (F')^2 + \frac{\sin^2(F)}{\tilde{r}^2} \right) \right] \quad (3.26)$$

である (ただし、 $\tilde{r} \equiv eF_\pi r$ )。 $A$  は  $SU(2)$  に含まれるので

$$A = a_0 + ia_a \tau_a \quad (3.27)$$

と書くことができる。ただし、

$$\sum_{i=0}^3 a_i^2 = 1$$

の制限を持つ。このとき、

$$\text{tr} \left[ \dot{A} \dot{A}^\dagger \right] = \text{tr} \left[ \dot{a}_0^2 + \dot{a}_a^2 + i\epsilon_{abc} \dot{a}_a \dot{a}_b \tau_c \right] = 2 \sum_{i=0}^3 (\dot{a}_i)^2$$

となるので、

$$L = -M + 2\Lambda \sum_{i=0}^3 (\dot{a}_i)^2 \quad (3.28)$$

となる。(3.28) 式を使うと、 $a_i$  に共役な運動量  $\pi_i$  は  $\pi_i = \partial L / \partial \dot{a}_i = 4\Lambda \dot{a}_i$  となるので、Hamiltonian  $H$  は、

$$H = \pi_i \dot{a}_i - L = M + 2\Lambda \sum_{i=0}^3 (\dot{a}_i)^2 = M + \frac{1}{8\Lambda} \sum_{i=0}^3 (\pi_i)^2 \quad (3.29)$$

となる。量子力学の規則に従い、共役運動量  $\pi_i$  を微分演算子  $-i\partial/\partial a_i$  に置き換えると、Hamiltonian 演算子は

$$\hat{H} = M + \frac{1}{8\Lambda} \sum_{i=0}^3 \left( -\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} \right) \quad (3.30)$$

となる。Lagrangian(3.24) 式に対して空間回転とアイソスピン回転を施すと、Noether の定理より Noether チャージとしてスピン演算子  $J_a$  とアイソスピン演算子  $I_a$  が得られる [39]。

$$J_a = i\Lambda \text{tr} \left[ \tau_a \dot{A}^\dagger A \right] \quad (3.31)$$

$$I_a = i\Lambda \text{tr} \left[ \tau_a \dot{A} A^\dagger \right] \quad (3.32)$$

また、Hedgehog 解をフェルミオンとして量子化した場合の規格化された波動関数は

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\pi} (a_1 + ia_2), & |p \downarrow\rangle &= -\frac{1}{\pi} (a_0 - ia_3) \\ |n \uparrow\rangle &= \frac{i}{\pi} (a_0 + ia_3), & |n \downarrow\rangle &= -\frac{1}{\pi} (a_1 - ia_2) \\ |\Delta^{++}, J_z = \frac{3}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_1 + ia_2)^3 \\ |\Delta^+, J_z = \frac{1}{2}\rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_1 + ia_2) (1 - 3(a_0^2 + a_3^2)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

と与えられる [28]。ここで  $J_Z$  はスピンの Z 成分を表す。(3.30) 式に (3.33) を代入すると、核子の質量  $M_N$  と  $\Delta$  粒子の質量  $M_\Delta$  として

$$M_N = M + \frac{1}{2\Lambda} \frac{3}{4}, \quad M_\Delta = M + \frac{1}{2\Lambda} \frac{15}{4} \quad (3.34)$$

が得られる。(3.3) 式のパラメーターは (3.34) 式の質量がそれぞれ

$$M_N = 939\text{MeV}, \quad M_\Delta = 1232\text{MeV} \quad (3.35)$$

となるように選ばれている [28]。



## 第4章 束縛法

束縛法は Callan と Klebanov が 1985 年に提唱したモデルである [29, 30]。フレーバー  $SU(3)$  の Skyrme モデル [40, 41, 42] とは異なり、束縛法では  $SU(3)$  の対称性を仮定しない。つまり、 $u$  クォークと  $d$  クォークと、 $s$  クォークを区別して扱う。この章では参考文献 [29, 30, 43] に基づき束縛法のレビューを行う。

### 4.1 モデル Lagrangian

初めに束縛法の特徴を述べる。

- $SU(3)$  の対称性を仮定しない  
束縛法では  $SU(3)$  の対称性を仮定しないので、クォークの質量による対称性の破れが存在する。
- $\pi$  中間子のソリトン背景場として扱う  
束縛法では  $\pi$  中間子のソリトン背景場とし、 $K$  中間子を  $\pi$  中間子のソリトンのゆらぎとして扱う。

$\pi$  中間子のソリトンは  $\mathcal{O}(N_c)$  であり、その揺らぎである  $K$  中間子は  $\mathcal{O}(N_c^0)$  である。そして、量子化をした後にできる核子は  $\mathcal{O}(1/N_c)$  であるので、Callan と Klebanov の方法は  $1/N_c$  展開に忠実に理論を構成している。

系を記述するための Lagrangian は以下の条件に従って定義される。

1.  $SU(3)$  対称性が破れていないなら、通常の Skyrme モデルの Lagrangian [27] と同じであると仮定する。これにより、Lagrangian は

$$L_{\text{Skyrme}} = \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U] + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2 \quad (4.1)$$

と書ける。ここで、 $U = U(\mathbf{x}, t)$  は  $SU(3)$  の値をとる。 $F_\pi$  は  $\pi$  中間子の崩壊定数、 $e$  は Skyrme パラメーターと呼ばれるパラメーターである。ここでは Adkins 達の値を採用する [28]。

$$F_\pi = 129[\text{MeV}], \quad e = 5.45 \quad (4.2)$$

2. 質量による明示的なカイラル対称性の破れは以下の Lagrangian により表される [40, 41, 43]。

$$L_{mass} = \frac{1}{48} F_\pi^2 (m_\pi^2 + 2m_K^2) \text{tr} [U + U^\dagger - 2] + \frac{\sqrt{3}}{24} (m_\pi^2 - m_K^2) \text{tr} [\lambda_8 (U + U^\dagger)] \quad (4.3)$$

ここで、 $m_\pi$  と  $m_K$  はそれぞれ  $\pi$  中間子と  $K$  中間子の質量を表す。本論文では Callan と Klebanov の論文に従い、 $u$  クォークと  $d$  クォークの質量をゼロにとり、 $s$  クォークの質量を有限の大きさにとる [29, 30]。これにより、 $m_\pi = 0$  となる。

$K$  中間子に質量を与えることで対称性が明示的に破れた場合の場の配位として、 $K$  中間子が励起し、なおかつ純粋な  $\pi$  中間子のソリトンに近い配位を選ぶ。解としてはカイラル対称性の非線形表現 [37, 38] を用いて以下のものを考える [29, 30]。

$$U = \sqrt{N} U_K \sqrt{N} \quad (4.4)$$

ここで、 $N$  は  $SU(3)$  に埋め込んだ  $\pi$  中間子のソリトン解であり以下のように定義する。

$$N = \begin{pmatrix} U_\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$U_\pi \equiv \xi^2 = \exp \left[ i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right] \quad (4.6)$$

$$U_K = \exp \left[ i \frac{2}{F_\pi} \lambda_a K_a \right], \quad a = 3, 4, 5, 6 \quad (4.7)$$

$\boldsymbol{\tau}$  はアイソスピン行列であり、その値は pauli のスピン行列 (2.6) 式と同じ値をとる。そして、 $\lambda_a (a = 4, 5, 6, 7)$  は (2.37) 式の Gell-Mann 行列である。(2.37) 式を用いて  $\lambda_a K_a$  を以下のように書く。

$$\lambda_a K_a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & K \\ K^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ただし、 $K$  は 2 成分アイソスピナー

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

である。

(4.1) 式、(4.3) 式に (4.4) 式を代入し、 $K$  の 2 次まで展開すると

$$L = L_{SU(2)} + L_K \quad (4.10)$$

$$L_{SU(2)} = \frac{1}{16} F_\pi^2 \text{tr} [\partial_\mu U_\pi^\dagger \partial^\mu U_\pi] + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2 \quad (4.11)$$

$$L_K = L_K^{(2)} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} L_K^{(4)} - m_K^2 K^\dagger K \quad (4.12)$$

$$L_K^{(2)} = (D_\mu K)^\dagger D^\mu K - K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} L_K^{(4)} = & -K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2 - 2 (D_\mu K)^\dagger D_\nu K \text{tr} (a^\mu a^\nu) \\ & - \frac{1}{2} (D_\mu K)^\dagger D^\mu K \text{tr} (\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi) + 6 (D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] D_\mu K \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。ここで、

$$a_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \quad (4.15)$$

$$v_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger)$$

$$D_\mu K = \partial_\mu K + v_\mu K \quad (4.16)$$

である。

(4.11) 式は  $SU(2)$  での Skyrme モデルの Lagrangian であり、この Lagrangian は量子化を行うことで核子の性質を記述する [28]。(4.12) 式は  $K$  中間子の場と  $\pi$  中間子のソリトンの相互作用を表す Lagrangian である。以下ではこの Lagrangian(4.12) 式について議論する。

## 4.2 束縛状態

$\pi$  中間子の場を Hedgehog 解という特別な配位にとった場合に  $K$  中間子と  $\pi$  中間子のソリトンとの束縛状態を考える。つまり、

$$U_\pi = U_H = \exp [iF(r)\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}] \quad (4.17)$$

とする。(4.12) 式、(4.13) 式、及び (4.14) 式から、Lagrangian は  $K$  中間子の時間並進に対して不変になる。したがって、 $K$  中間子のエネルギーは保存するので  $K$  中間子の場を

$$K = K(\mathbf{r}) \exp(-iEt) \quad (4.18)$$

と書くことができる。

前節で述べたように、Hedgehog 解は  $\mathbf{T}$  の下での回転に対して不変になる。このとき、 $T = I + L$  が良い量子数になるので  $K$  中間子の場を  $T$  と  $L$  を用いて部分波展開をすると、 $K(\mathbf{r})$  の一般解は

$$K(\mathbf{r}) = \sum_{T,L,T_z} C_{TLT_z} \mathcal{Y}_{TLT_z}(\theta, \phi) k_{TL}(r) \quad (4.19)$$

と書ける [29, 30]。ただし、 $C_{TLT_z}$  は展開係数である。また、 $\mathcal{Y}_{TLT_z}(\theta, \phi)$  は

$$\mathcal{Y}_{TLT_z}(\theta, \phi) = \sum_m (L \ m \ 1/2 \ T_z - m | T \ T_z) Y_{Lm}(\theta, \phi) \chi_{T_z - m} \quad (4.20)$$

で与えられ、 $\chi_{T_z - m}$  は  $T_z - m = \pm 1/2$  に対して

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

と与えられる。また、 $L$  は  $K$  中間子の軌道核運動量の大きさ、 $m$  は軌道核運動量の第3成分、 $1/2$  は  $K$  中間子のアイソスピンの大きさ、 $T_z - m$  は  $K$  中間子のアイソスピンの第3成分、つまり  $T_z - m = \pm 1/2$  をとる。そして、 $(L \ m \ 1/2 \ T_z - m | T \ T_z)$  は、軌道核運動量  $L$  とアイソスピン  $1/2$  を合成してスピン  $T$  を作る時の Clebsch-Gordan 係数であり、 $Y_{Lm}(\theta, \phi)$  は球面調和関数である。以下では、部分波の個々のモードの性質を調べていくことにする。

$$K(\mathbf{r}) \rightarrow \mathcal{Y}_{TLT_z}(\theta, \phi) k_{TL}(r) \quad (4.23)$$

(4.12) 式、(4.13) 式、(4.14) 式、及び (4.23) 式を用いると Lagrangian は以下のように書ける。

$$- \int d\Omega L_K \equiv -\tilde{L}_K = h(r) k_{TL}^* k'_{TL} + k_{TL}^* k_{TL} (m_K^2 - f(r)E + V_{eff}(r)) \quad (4.24)$$

ここで、

$$f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \{2s(r) + d(r)\}, \quad h(r) = 1 + \frac{2}{(eF_\pi)^2} s(r) \quad (4.25)$$

$$d(r) = \left( \frac{dF(r)}{dr} \right)^2 = (F')^2, \quad s(r) = (\sin^2 F/r)^2, \quad c(r) = \sin^2 \frac{F}{2} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
V_{eff}(r) = & -\frac{1}{4}(d+2s) - \frac{2s}{(eF_\pi)^2}(s+2d) + \frac{l(l+1) + 2c^2 + 4c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}}{r^2} \\
& + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{d+s}{r^2} (l(l+1) + 2c^2 + 4c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) \\
& + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left\{ s(c^2 + 2c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} - c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) + \frac{d}{dr} ((c + \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) F' \sin F) \right\}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

である。ただし、 $\mathbf{I}$  は K 中間子のアイソスピン演算子である。

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$  の値は以下のようにして求められる。まず、 $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{L}$  なので

$$\mathbf{T}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^2 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} \tag{4.28}$$

となるから、その固有値は

$$T(T+1) = I(I+1) + l(l+1) + 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} \tag{4.29}$$

である。したがって、 $\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$  は

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} [T(T+1) - I(I+1) - l(l+1)] \tag{4.30}$$

により定まる。ここで、 $T$  は  $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{L}$  の大きさを表す。そして、 $I$  は K 中間子のアイソスピンの大きさ ( $I = 1/2$ ) を表し、 $l(l = 0, 1, 2, \dots)$  は K 中間子の軌道角運動量の大きさを表す。

(4.27) 式に  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$  という構造が現れている。これは、スピン軌道相互作用 (いわゆる LS 力) に類似するものである。Lagrangian に LS 力が存在する場合には  $J = L + S$  が良い量子数になる。それと同様に、今回は  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$  という構造が存在するので  $T = I + L$  が良い量子数になるはずである。そして、Hedgehog 解は  $T = I + L$  による変換のもとで不変になるので、 $T$  は確かに良い量子数となっている。

以下では簡単のために  $k_{TL}$  を  $k$  と書くことにする。(4.24) 式より角度積分された Lagrangian が求められたので、作用  $S$  は

$$-S \equiv - \int dt d^3x L_K = - \int dt dr r^2 \tilde{L}_K \tag{4.31}$$

と書ける。 $k \rightarrow k + \delta k$  として変分をとると、最小作用の原理から

$$\begin{aligned}
-\delta S & \simeq - \int dr r^2 [h(r) (k^{*'} \delta k' + \delta k^{*'} k') + (k^* \delta k + \delta k^* k) (m_K^2 - E^2 f(r) + V_{eff}(r))] \\
& = - \int dr \delta k^* \left[ -\frac{d}{dr} (r^2 h(r) k') + r^2 (m_K^2 - E^2 f(r) + V_{eff}(r)) k \right] \\
& \quad - \int dr \delta k \left[ -\frac{d}{dr} (r^2 h(r) k^{*'}) + r^2 (m_K^2 - E^2 f(r) + V_{eff}(r)) k^* \right] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

となるので、 $k$ についての運動方程式として

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( h(r) r^2 \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r) k + (m_K^2 + V_{eff}(r)) k = 0 \quad (4.33)$$

が得られる。ここで、 $h(r), f(r), V_{eff}(r)$  はそれぞれ (4.25) 式、(4.27) 式で定める。(4.33) 式には通常のシュレーディンガー方程式と異なり運動エネルギーに対応する部分に  $h(r)$  が含まれているが、これは  $K$  中間子がソリトンという構造に由来する背景場の中を運動していることに由来する。

以下では、束縛状態の  $K$  中間子の波動関数の振る舞いを見るために、原点付近と無限遠での振る舞いを調べる。まず、 $r \rightarrow \infty$  の場合を考える。このとき、(4.25) 式、(4.26) 式、及び (4.27) 式より、

$$f(r) \rightarrow 1, \quad h(r) \rightarrow 1$$

$$d(r) \rightarrow 0, \quad s(r) \rightarrow 0, \quad c(r) \rightarrow 0$$

となるので、

$$V_{eff} \rightarrow 0 \quad (4.34)$$

となる。また、無限遠では

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) \rightarrow \frac{d^2 k}{dr^2} \quad (4.35)$$

となるので、運動方程式 (4.33) 式は

$$-\frac{d^2 k}{dr^2} + (m_K^2 - E^2) k = 0 \quad (4.36)$$

となり、無限遠では  $K$  中間子は自由粒子として振る舞うことがわかる。束縛状態では  $m_K > E$  なので、境界条件  $k(r = \infty) = 0$  より正則解として

$$k(r) = \exp \left( -\sqrt{m_K^2 - E^2} r \right) \quad (4.37)$$

が得られる。

次に、原点付近での振る舞いを調べる。 $F(r)$  についての運動方程式 (3.15) 式を原点付近で展開すると、 $a$  を定数として

$$F(r \sim 0) = \pi - ar \quad (4.38)$$

と振る舞うことがわかる。この式を用いると (4.25) 式、(4.26) 式、及び (4.27) 式から原点付近で

$$f(r) \rightarrow 1 + \frac{2a^2}{(eF_\pi)^2}, \quad h(r) \rightarrow 1 + \frac{2a^2}{(eF_\pi)^2}$$

$$d(r) \rightarrow \frac{a^2}{(eF_\pi)^2}, \quad s(r) \rightarrow \frac{a^2}{(eF_\pi)^2}, \quad c(r) \rightarrow 1 - \frac{a^2 r^2}{4(eF_\pi)^2}$$

となるので、

$$V_{eff} \rightarrow \left(1 + \frac{2a^2}{(eF_\pi)^2}\right) \frac{l(l+1) + 4\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} + 2}{r^2} \quad (4.39)$$

となる。したがって、運動方程式 (4.33) 式は原点近傍で

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \left(1 + \frac{2a^2}{(eF_\pi)^2}\right) r^2 \frac{dk}{dr} \right) + \left(1 + \frac{2a^2}{(eF_\pi)^2}\right) \frac{l(l+1) + 4\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} + 2}{r^2} k = 0 \quad (4.40)$$

つまり、

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) + \frac{l_{eff}(l_{eff} + 1)}{r^2} k = 0 \quad (4.41)$$

となる。ここで、

$$l_{eff}(l_{eff} + 1) = l(l+1) + 4\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} + 2 \quad (4.42)$$

と定義した。(4.41) 式は K 中間子が原点付近で斥力の (有効) 遠心力ポテンシャルの影響を受けていることを示している。(4.41) 式より、原点付近で波動関数は

$$k(r \sim 0) = r^{l_{eff}}, \quad r^{-(l_{eff}+1)} \quad (4.43)$$

と振る舞うので、原点付近での正則解として

$$k(r \sim 0) = r^{l_{eff}} \quad (4.44)$$

が得られる。

(4.30) 式を用いて  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$  を求めると、 $l=1$  のときに  $l_{eff}=0$  となることがわかる (表 4.1 参照)。これは K 中間子が p 波の場合に、 $\pi$  中間子のソリトンに最も強く束縛することを意味している。水素原子の量子力学と同様に考えると、 $l_{eff}=0$  の部分波、つまり p-波が最小エネルギー状態をとると考えられる。

表 4.1:  $l, T$  ごとの  $l_{eff}$  の値 ( $l=3$  まで)

$l$	$T$	$\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}$	$l_{eff}(l_{eff} + 1)$	$l_{eff}$
0	1/2	0	2	1
1	3/2	1/2	6	2
1	1/2	-1	0	0
2	5/2	1	12	3
2	3/2	-3/2	2	1
3	7/2	3/2	20	4
3	5/2	-2	6	2

### 4.3 Wess-Zumino 項

前節の Lagrangian では K 中間子と反 K 中間子を区別する情報がなかったため、K 中間子と反 K 中間子の束縛状態に対してそれぞれ同じ相互作用が得られる。しかし、これはクォーク模型に反している。この矛盾は Wess-Zumino 項を考慮に入れることで解決できる。Wess-Zumino 項とはカイラルアノマリーを表す項であり、以下のように書ける [44, 45]。

$$L_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int d^5x \operatorname{tr} [(U^\dagger \partial_\mu U) (U^\dagger \partial_\nu U) (U^\dagger \partial_\alpha U) (U^\dagger \partial_\beta U) (U^\dagger \partial_\gamma U)] \quad (4.45)$$

ここで、 $N_c$  はカラーの数であり  $N_c = 3$  である。(4.45) 式に (4.4) 式を代入し  $U_\pi$  を Hedgehog 解にすると、

$$L_{WZ} = -i \frac{N_c}{F_\pi^2} B^\mu \left[ (D_\mu K)^\dagger K - K^\dagger (D_\mu K) \right] \quad (4.46)$$

となる。ここで、 $B^\mu$  は  $SU(2)$  のバリオンナンバーカレントで

$$B^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \operatorname{tr} [(U_\pi^\dagger \partial_\nu U_\pi) (U_\pi^\dagger \partial_\alpha U_\pi) (U_\pi^\dagger \partial_\beta U_\pi)] \quad (4.47)$$

である [28]。(3.10) 式より Hedgehog 解には時間依存性がないので、 $\nu, \alpha, \beta$  は 1, 2, 3 の場合にのみゼロでない値を持つ。したがって  $B^0$  のみがゼロでない値を持ち、その値は以下で与えられる。

$$B^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr} \quad (4.48)$$

前節と同様に K 中間子の場を部分波展開し、その中の 1 つの部分波を考えると (4.23) 式より Wess-Zumino 項は

$$\begin{aligned} \int d\Omega L_{WZ} &= \int d\Omega \frac{2N_c E}{F_\pi^2} B^0 K^\dagger(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{N_c E}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr} k^* k \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。ここでも、簡単のために  $k_{TL}(r)$  と書くべきところを  $k$  と書いた。(4.49) 式に対して  $k \rightarrow k + \delta k$  と変分をとると、Wess-Zumino 項に由来する K 中間子の運動方程式への寄与は

$$-\frac{N_c E}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \frac{dF}{dr} k = 0 \quad (4.50)$$

と書ける。

(4.46) 式は  $SU(2)$  のバリオンナンバーカレントと K 中間子の相互作用を表している。この項は、電荷を持った場とベクトルポテンシャルとの相互作用を記述し、この場合にはストレンジネスが電荷の役割を担い、バリオンナンバーカレントがベクトルポテンシャルの役割をしている [30]。したがって、核子と K 中間子に関しては Wess-Zumino 項は斥力的としての寄与を与え、核子と反 K 中間子の間では引力的な寄与をする。このように Wess-Zumino 項を加えることで K 中間子と反 K 中間子を区別することができる。

## 4.4 束縛状態の波動関数

4.2節で見たように、 $(T, l) = (1/2, 1)$ の状態が最低エネルギー状態になる。ここで、 $T = I + L$ で定義され、 $I$ と $L$ はそれぞれK中間子のアイソスピンと軌道角運動量であり、 $l$ は軌道角運動量の大きさである。K中間子の動径方向の運動方程式は(4.33)で与えられ、Wess-Zumino項からの寄与は(4.50)で与えられる。前節で述べたように、Wess-Zumino項はK中間子に対しては斥力的な寄与を与え、反K中間子に対しては引力的な寄与を与えることに注意すると、K中間子の動径方向の運動方程式は

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( h(r) r^2 \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r) k + (m_K^2 + V_{eff}(r)) k - A_{WZ}(r) k = 0 \quad (4.51)$$

となり、反K中間子の波動関数は

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( h(r) r^2 \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r) k + (m_K^2 + V_{eff}(r)) k + A_{WZ}(r) k = 0 \quad (4.52)$$

となる。ただし、(4.25)式、(4.26)式、及び(4.27)式より

$$f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \{2s(r) + d(r)\}, \quad h(r) = 1 + \frac{2}{(eF_\pi)^2} s(r)$$

$$d(r) = \left( \frac{dF(r)}{dr} \right)^2 = (F')^2, \quad s(r) = (\sin^2 F/r)^2, \quad c(r) = \sin^2 \frac{F}{2}$$

$$\begin{aligned} V_{eff}(r) = & -\frac{1}{4} (d + 2s) - \frac{2s}{(eF_\pi)^2} (s + 2d) + \frac{l(l+1) + 2c^2 + 4c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}}{r^2} \\ & + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{d+s}{r^2} (l(l+1) + 2c^2 + 4c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) \\ & + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left\{ s(c^2 + 2c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} - c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) + \frac{d}{dr} ((c + \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) F' \sin F) \right\} \end{aligned}$$

であり、(4.50)式から

$$A_{WZ}(r) = \frac{N_c E \sin^2 F}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{dF}{dr} \quad (4.53)$$

である。K中間子の質量を495MeVとして、Wess-Zumino項を含まない運動方程式(4.33)式と、Wess-Zumino項を含む運動方程式(4.51)式と(4.52)式を数値計算で解くと、束縛状態の規格化された動径方向波動関数として図4.1が得られる。CallanとKlebanovが主張したように、K中間子はWess-Zumino項からの寄与を加えると束縛しなかった[29, 30]。

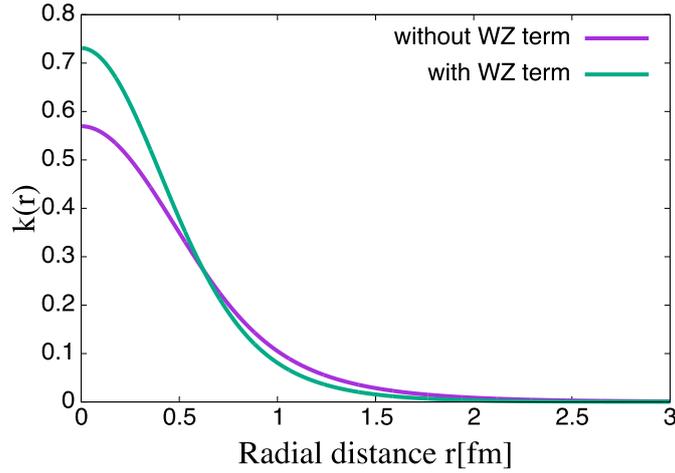


図 4.1:  $(l, T) = (1, 1/2)$  の場合の K 中間子の動径方向波動関数:Wess-Zumino 項を含まない場合の波動関数 (without WZ term) と反 K 中間子の波動関数 (with WZ term)。K 中間子は Wess-Zumino 項の寄与を加えると束縛しない。

次に束縛状態のポテンシャルと束縛エネルギーを求める。束縛状態をとるのは Wess-Zumino 項を考えない場合と、反 K 中間子に対して Wess-Zumino 項からの寄与を考えた場合なので、以下ではこの2つの場合を考える。(4.27) 式の  $V_{eff}$  はエネルギーの2乗の次元を持っている。同じように Wess-Zumino 項からの寄与  $A_{WZ}$  もエネルギーの2乗の次元を持っている。ポテンシャルをエネルギーの1次の次元を持つものとして求めたいので、(4.33) 式と (4.52) 式をシュレーディンガー方程式と同じ形になるように変形する。(4.33) 式と (4.52) 式は、以下のような形をしている。

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( h(r) r^2 \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r) k + (m_K^2 + \tilde{V}(r)) k = 0 \quad (4.54)$$

ここで、 $\tilde{V}(r)$  は  $V_{eff}$  もしくは  $V_{eff} + A_{WZ}$  を表すものとする。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( h(r) r^2 \frac{dk}{dr} \right) &= \frac{h(r)}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{dh(r)}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) \\ &= \frac{h(r)}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) + \frac{dh(r)}{dr} \frac{dk}{dr} \end{aligned} \quad (4.55)$$

であることを用いて、(4.54) 式を

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{h}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{dh}{dr} \frac{d}{dr} k + \left( m_K^2 - E^2 f + \tilde{V} \right) k \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{h-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{dh}{dr} \frac{d}{dr} k + \left( m_K^2 - E^2 f + \tilde{V} \right) k \end{aligned} \quad (4.56)$$

と変形する。さらに、K 中間子の運動量を  $\mathbf{p}_K$  と書くと  $E^2 = m_K^2 + \mathbf{p}_K^2$  なので、

$$E = \sqrt{m_K^2 + \mathbf{p}_K^2} = m_K + \frac{\mathbf{p}_K^2}{2m_K} + \cdots \equiv m_K + \varepsilon \quad (4.57)$$

と書くことができる。(4.57) 式を使うと、

$$\begin{aligned} m_K^2 - E^2 f &= m_K^2 - E^2 - (f - 1) E^2 \\ &= (m_K - E)(m_K + E) - (f - 1) E^2 \\ &= -\varepsilon(2m_K + \varepsilon) - (f - 1) E^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

が得られる。この結果をもちると、(4.56) 式は

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{h-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{dh}{dr} \frac{d}{dr} k \\ &\quad + \left( -\varepsilon(2m_K + \varepsilon) - (f-1) E^2 + \tilde{V} \right) k \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{h-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) - \frac{dh}{dr} \frac{d}{dr} k \\ &\quad - 2m_K \varepsilon k - \left( \varepsilon^2 + (f-1) E^2 - \tilde{V} \right) k \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) + U_{eff}(r) k - 2m_K \varepsilon k \end{aligned} \quad (4.59)$$

となる。ただし、

$$U_{eff}(r) = -\frac{h(r)-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{dh(r)}{dr} \frac{d}{dr} - \left( \varepsilon^2 + (f(r)-1) E^2 \right) + \tilde{V}(r) \quad (4.60)$$

である。(4.59) 式の両辺を  $2m_K$  で割ると、

$$-\frac{1}{2m_K} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) + \frac{U_{eff}(r)}{2m_K} k = \varepsilon k \quad (4.61)$$

が得られる。したがって、エネルギーの 1 次の次元を持つポテンシャルとして  $U_{eff}/2m_K$  が得られた。ここで、(4.25) 式、(4.26) 式、(4.27) 式、及び (4.53) 式より

$$\left\{ \begin{aligned} U_{eff}(r) &= -\frac{h(r)-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{dh(r)}{dr} \frac{d}{dr} - \left( \varepsilon^2 + (f(r)-1) E^2 \right) + \tilde{V}(r) \\ f(r) &= 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \{2s(r) + d(r)\}, \quad h(r) = 1 + \frac{2}{(eF_\pi)^2} s(r) \\ d(r) &= \left( \frac{dF(r)}{dr} \right)^2 = (F')^2, \quad s(r) = (\sin^2 F/r)^2, \quad c(r) = \sin^2 \frac{F}{2} \\ V_{eff}(r) &= -\frac{1}{4} (d+2s) - \frac{2s}{(eF_\pi)^2} (s+2d) + \frac{l(l+1) + 2c^2 + 4\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}}{r^2} \\ &\quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{d+s}{r^2} (l(l+1) + 2c^2 + 4\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) \\ &\quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left\{ s(c^2 + 2c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L} - c\mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) + \frac{d}{dr} ((c + \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}) F' \sin F) \right\} \\ A_{WZ}(r) &= \frac{N_c E \sin^2 F}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{dF}{r^2} \frac{dF}{dr} \end{aligned} \right. \quad (4.62)$$

であり、 $\tilde{V}(r)$  は Wess-Zumino 項を考えない場合には  $V_{eff}(r)$  をとり、Wess-Zumino 項を考える場合には  $V_{eff}(r) + A_{WZ}(r)$  をとる。また、 $U_{eff}$  は微分演算子を含んでいるので、ポテンシャルを

$$\frac{(U_{eff}k)1}{2m_K k} \quad (4.63)$$

により定義する。そして、Wess-Zumino 項からの寄与にエネルギー依存性があるので、そのエネルギーを束縛状態の K 中間子のエネルギーとし、K 中間子の波動関数を束縛状態の波動関数とする。この場合のポテンシャルを図 4.2 に示す。 $U_{eff}$  の無限遠での振る舞いを調べると、(4.63) 式から

$$U_{eff}(r = \infty) = -\varepsilon^2 \quad (4.64)$$

が得られる。したがって、無限遠でのポテンシャルの値は  $-\varepsilon^2/2m_K$  という負の値を持つ。この寄与により図 4.2 において、ポテンシャルは無限遠でゼロにならない。

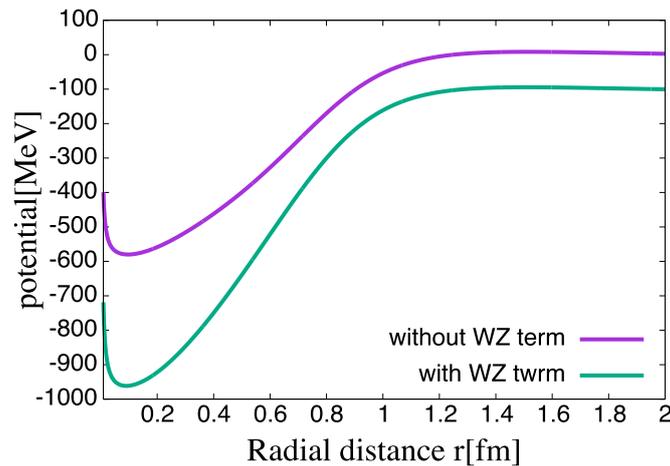


図 4.2: K 中間子の動径方向波動関数:Wess-Zumino 項を含まない場合のポテンシャル (without WZ term) と反 K 中間子のポテンシャル (with WZ term)。

反 K 中間子と  $\pi$  中間子のソリトンとのポテンシャル (with WZ term) は Wess-Zumino 項の引力的な寄与により、Wess-Zumino 項の寄与を含まない場合 (without WZ term) に比べポテンシャルが深くなっていることが見て取れる。Wess-Zumino 項を含まない場合の束縛エネルギーと、Wess-Zumino 項を含む場合の反 K 中間子の束縛エネルギーを求めると以下の結果が得られた。ただし、パラメーターセットとして  $F_\pi = 129\text{MeV}$ 、 $e = 5.45$  及び  $m_K = 495\text{MeV}$  を用いている [29, 30]。

表 4.2: 束縛エネルギー (B.E.) の大きさ

	B.E. [MeV]
without WZ term	122.5
with WZ term	342.4

表 4.2 から Wess-Zumino 項がある場合には、反 K 中間子はより強く束縛していることがわかる。これは Wess-Zumino 項が反 K 中間子に対して引力的な作用を及ぼしている結果であり、Callan と Klebanov の主張した通りである [29, 30]。

ここで、求めたポテンシャルは K 中間子と  $\pi$  中間子のソリトンとの相互作用であるので、現実の物理と比較できるものではない。現実の物理と比較するためには、 $\pi$  中間子のソリトンを量子化する必要がある。Callan と Klebanov は以下のように量子化を行っている [29, 30]。

$$\sqrt{U_H}U_K\sqrt{U_H} \rightarrow A\sqrt{U_H}U_K\sqrt{U_H}A^\dagger = \left(A\sqrt{U_H}A^\dagger\right) \left(AU_KA^\dagger\right) \left(A\sqrt{U_H}A^\dagger\right) \quad (4.65)$$

ここで、 $U_H$  は Hedgehog 解である。これは、 $\pi$  中間子のソリトンと K 中間子を同時に回転させていることに対応する。しかし、この方法で量子化を行うと束縛状態の K 中間子の量子数は  $(I, J) = (1/2, 0)$  となり、 $A\sqrt{U_H}A^\dagger$  は量子数として  $(I, J) = (i, i), (i = 0, 1, 2, \dots)$  を持つ [29, 30]。ここで、 $I$  はアイソスピンの大きさであり、 $J$  は軌道角運動量の大きさである。これは K 中間子が  $s$  クォークのように振る舞い、核子がダイクォークのように振る舞うということの意味している。このように彼らの方法では、量子化を行っても K 中間子・核子間相互作用は求めることはできない。しかしながら、彼らの方法で量子化を行うと解  $A\sqrt{U_H}U_K\sqrt{U_H}A^\dagger$  のもつ量子数は  $(I, J) = (i, i + 1/2), (i = 0, 1, 2, \dots)$  となるので、 $i = 0, 1, 2, \dots$  に対応して  $\Lambda$  粒子、 $\Sigma$  粒子などのハイペロンの性質を記述することができる。



## 第5章 K 中間子・核子間ポテンシャル

前の章で述べたように Callan と Klebanov の方法では量子化の結果、ハイペロンの性質を記述できるが、K 中間子・核子間相互作用は得られなかった。この章では、同じ束縛法であるが Callan と Klebanov の方法とは異なる量子化の手法を用いて核子と K 中間子の相互作用を求める。

### 5.1 研究方法

基本的な考え方は Callan と Klebanov の方法 [29, 30] と同じであるので、彼らの方法との違いを以下に述べる。

- 初めに核子を作る

Callan と Klebanov の方法は、まず初めに  $\pi$  中間子のソリトンを用意し、そこに K 中間子をゆらぎとして導入し、最後に量子化を行っている。一方、本研究での方法は初めに  $\pi$  中間子のソリトンを回転させ核子を用意する。その後、K 中間子を導入することで K 中間子と核子の相互作用を求める。

- $1/N_c$  展開は壊れる

Callan と Klebanov の方法とは異なり、 $\pi$  中間子のソリトンを初めに核子にしてしまうので  $1/N_c$  展開は壊れてしまう。

このような方法を用いて、K 中間子・核子間相互作用を導出していく。

### 5.2 Lagrangian と量子化の方法

考える Lagrangian は前章で与えた Lagrangian と同じものである。しかし、この章では核子と K 中間子の相互作用を求めるために、以下のように量子化を行う。

$$U = \sqrt{U_H} U_K \sqrt{U_H} \rightarrow \left( A(t) \sqrt{U_H} A^\dagger(t) \right) U_K \left( A(t) \sqrt{U_H} A^\dagger(t) \right) \quad (5.1)$$

ただし、 $U_H$  は Hedgehog 解

$$U_H \equiv \xi^2 = \exp [iF(r)\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}] \quad (5.2)$$

であり、 $A(t)$  は  $SU(2)$  の行列である。この量子化の方法により Hedgehog 解  $\xi$  が核子となるので、核子と K 中間子の相互作用を記述することができる。(4.12) 式、(4.13) 式、及び (4.14) 式から、K 中間子と核子の相互作用を記述する Lagrangian は Wess-Zumino 項を含めて以下ようになる。

$$L_K = L_K^{(2)} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} L_K^{(4)} - m_K^2 K^\dagger K \pm L_{WZ} \quad (5.3)$$

$$L_K^{(2)} = (D_\mu K)^\dagger D^\mu K - K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} L_K^{(4)} = & -K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2 - 2(D_\mu K)^\dagger D_\nu K \text{tr} (a^\mu a^\nu) \\ & - \frac{1}{2} (D_\mu K)^\dagger D^\mu K \text{tr} (\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi) + 6(D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] D_\mu K \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$L_{WZ} = -i \frac{N_c}{F_\pi^2} B^\mu [(D_\mu K)^\dagger K - K^\dagger (D_\mu K)] \quad (5.6)$$

ここで、

$$K = K(\mathbf{r}) \exp(-iEt) \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} a_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \\ v_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \end{cases} \quad (5.8)$$

$$D_\mu K = \partial_\mu K + v_\mu K \quad (5.9)$$

$$B^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{tr} [(U_\pi^\dagger \partial_\nu U_\pi) (U_\pi^\dagger \partial_\alpha U_\pi) (U_\pi^\dagger \partial_\beta U_\pi)] \quad (5.10)$$

である。また、Wess-Zumino 項の符号は K 中間子か、反 K 中間子なのかによって変わるので  $\pm L_{WZ}$  の形で Lagrangian に含んである。

### 5.3 K 中間子・核子間相互作用

この節では前節で与えた Lagrangian を用いて本研究の目的である K 中間子・核子間相互作用の導出を行う。計算の詳細は Appendix を参照。Hedgehog 解を回転させると、

$$\xi \rightarrow A \xi A^\dagger = A (\cos(F/2) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} \sin(F/2)) A^\dagger \quad (5.11)$$

となる。ここで、 $A$ を

$$A(t) = \exp\left(i\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}t\right) \equiv \exp(i\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}t) \quad (5.12)$$

と書けば、

$$\dot{A}^\dagger A = i\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5.13)$$

が得られる。ここで、 $\boldsymbol{\omega}$  は古典物理では角速度にあたる量である。この量は (3.31) 式より、

$$\dot{A}^\dagger A = -\frac{i}{2\Lambda} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{J}^N \quad (5.14)$$

と書けるので、核子のスピン演算子  $\mathbf{J}^N$  に対応する量である。ここで、 $\Lambda$  は (3.25) 式で定義される慣性モーメントである。

$v_\mu$  と  $a_\mu$  は Hedgehog 解を回転させると

$$\begin{cases} v_0 = 2is^2 A [\Omega_b \tau_b - \hat{r}_a \tau_a \hat{r}_b \Omega_b] A^\dagger \\ v_i = \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b A^\dagger \\ a_0 = 2ics A [\epsilon_{abc} \Omega_a \hat{r}_b \tau_c] A^\dagger \\ a_i = i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_a A^\dagger \end{cases} \quad (5.15)$$

となる。ただし、 $c \equiv \cos(F(r)/2)$ ,  $s \equiv \sin(F(r)/2)$  である。

次に、(5.14) 式の  $\boldsymbol{\tau}$  が作用する対象を確認しておく。上で得られた  $v_\mu$  と  $a_\mu$  は全て  $\tau_a$  という構造を持っており、これは (5.14) 式の  $\boldsymbol{\tau}$  に由来するものである。 $\tau_a$  は  $2 \times 2$  の構造を持っており、K 中間子のアイソスピン成分に作用することで対応するアイソスピンの値に変わる。つまり、(5.14) 式の  $\boldsymbol{\tau}$  は K 中間子のアイソスピン成分に作用する。そして、 $v_\mu$  と  $a_\mu$  に含まれる  $\tau_a$  に関しても同じように K 中間子に作用する。

$v_\mu$  と  $a_\mu$  には  $A\tau_a A^\dagger$  という構造が含まれているが、これは以下の恒等式を用いて

$$A\tau_i A^\dagger = \frac{1}{2} \tau_j \text{tr} [\tau_j A\tau_i A^\dagger] \quad (5.16)$$

と書ける。上で述べたように  $v_\mu$  と  $a_\mu$  に含まれる  $\tau_a$  は K 中間子に作用するので、K 中間子に作用する行列を添字  $K$  で表すと、左辺の  $\tau_i$  は添字  $K$  を持つ。一方で、右辺では  $\tau_j$  が  $2 \times 2$  の構造を持っているので、右辺では  $\tau_j$  が添字  $K$  を持つ。したがって添字を頭に書くと

$$A\tau_i^K A^\dagger = \frac{1}{2} \tau_j^K \text{tr} [\tau_j A\tau_i A^\dagger] \quad (5.17)$$

となる。

次に以下の関係式 [28]

$$\langle N | \text{tr} [\tau_i A^\dagger \tau_j A] | N \rangle = -\frac{2}{3} \langle N | \sigma_i \tau_j | N \rangle \quad (5.18)$$

を考える。(5.18)式は核子で行列要素を取っているの、右辺の $\sigma_i$ と $\tau_j$ は核子に作用する行列であり、添字 $N$ でこれを表す。以上を踏まえて、(5.17)式と(5.18)式を用いると以下のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\langle N|A\tau_i^K A^\dagger|N\rangle &= \frac{1}{2}\langle N|\tau_j^K \text{tr}[\tau_j A\tau_i A^\dagger]|N\rangle \\ &= -\frac{1}{3}\langle N|\tau_j^K \sigma_i^N \tau_j^N|N\rangle \\ &= -\frac{1}{3}\langle N|\sigma_i^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N)|N\rangle\end{aligned}\quad (5.19)$$

ここで、上付き添字 $N, K$ はそれぞれ核子とK中間子を意味している。

(5.19)式から、 $A\tau_i^K A^\dagger$ という構造を $\langle N|, |N\rangle$ で挟み行列要素をとることで、 $\sigma_i^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N)$ という構造が得られることがわかる。 $\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N$ はK中間子のアイソスピンと核子のアイソスピンの積に対応する量である。別の言い方をすれば、K中間子と核子のアイソスピンの情報は $A\tau_i^K A^\dagger$ という構造から得られる。

Lagrangianの各項(5.4)式、(5.5)式、及び(5.6)式にK中間子の場(5.7)式を代入し、Hedgehog解を(5.11)式のように回転させる。その後、 $\langle N|, |N\rangle$ で挟み行列要素をとり、(5.19)式を用いると、

$$\begin{aligned}L_K^{(2)} &= -K'^\dagger K' + E^2 K^\dagger K - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} K^\dagger K \\ &\quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 K^\dagger K + \left\{ \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \right\} K^\dagger K\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}L_K^{(4)} &= -\frac{2}{r^2} \sin^2 F K'^\dagger K' + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) E^2 K^\dagger K \\ &\quad + K^\dagger K \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\ &\quad - \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} K^\dagger K - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \\ &\quad - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} K^\dagger K + \frac{4E \sin F F'}{\Lambda} I_{NK} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \\ &\quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K + \frac{3E \sin F F'}{\Lambda} [K^\dagger K' + K'^\dagger K]\end{aligned}\quad (5.21)$$

$$L_{WZ} = \frac{3E \sin^2 F}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{F'}{r^2} F' K^\dagger K - \frac{3 \sin^2 F s^2}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{F'}{\Lambda r^2} F' K^\dagger K\quad (5.22)$$

が得られる。ここで、 $I_{NK}$ は

$$\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N = 4 \frac{\boldsymbol{\tau}^K}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}^N}{2} = 4 \mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N = 4 I_{NK}\quad (5.23)$$

と定義しており、 $\mathbf{I}^K, \mathbf{I}^N$  はそれぞれ K 中間子のアイソスピン、核子のアイソスピンを表す。また、今考えているものは K 中間子と核子の相互作用なので、 $\mathcal{O}(1/N_c)$  のオーダーまでの寄与を求めている。

上で述べたように K 中間子と核子のアイソスピンの情報は  $\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N = 4I_{NK}$  に含まれている。全アイソスピンを  $I$  とすれば、

$$\mathbf{I}^2 \equiv (\mathbf{I}^K + \mathbf{I}^N)^2 = (\mathbf{I}^K)^2 + (\mathbf{I}^N)^2 + 2\mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N \quad (5.24)$$

なので、

$$I(I+1) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2\mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N \quad (5.25)$$

が得られる。したがって、 $I_{NK}$  の値は全アイソスピン  $I = 0, 1$  に対して

$$I_{NK} = \mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N = -\frac{3}{4} \quad \text{for } I = 0 \quad (5.26)$$

$$I_{NK} = \mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N = +\frac{1}{4} \quad \text{for } I = 1$$

となる。

K 中間子は 2 成分アイソスピナーであるが、(5.26) 式を用いることで、K 中間子と核子のアイソスピンの合計さえ決めてしまえばアイソスピン行列の積  $I_{NK} = \mathbf{I}^K \cdot \mathbf{I}^N$  の値が決まってしまう。したがって、K 中間子の特徴付ける量としては軌道角運動量を考えれば十分である。そこで、K 中間子の場を以下のように書き

$$K = K(\mathbf{r}) \exp(-iEt) \quad (5.27)$$

空間依存性を持つ部分を以下の様に置き換える。

$$K(\mathbf{r}) \rightarrow \sum_{l,m,n} C_{lmn} Y_l^m(\theta, \phi) k_l^n(r) \quad (5.28)$$

これは K 中間子の場をアイソスピン情報を持つ部分と、それ以外の情報を持つ部分に分けた場合に後者を部分波展開したものに等しい。ここで、 $C_{lmn}$  は部分波の重み、 $l (l = 0, 1, 2, \dots)$  は軌道角運動量の大きさ、 $m (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$  は軌道角運動量の第 3 成分、 $n (n = 1, 2, \dots)$  は主量子数と呼ばれる量である。

以下では簡単のために K 中間子の波動関数として基底状態の s-波を考える。このとき  $l = 0$  であるので自動的に  $m = 0$  となり、

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (5.29)$$

となる。展開係数  $C_{lmn}$  は Lagrangian の中に常に  $K$  が 2 乗で現れるのでこれを落とすと、K 中間子の場は

$$K(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}} k e^{-iEt} \quad (5.30)$$

と置き換えることができる。ここで、本来ならば  $k_l^n$  と書くべきところを  $l=0$  の状態を考えていることを考慮して、 $l$  を書くことを省略した。 $n$  については基底状態  $n=1$  を考えることにして、書くことを省略する。

(5.3) 式、(5.20) 式、(5.21) 式、及び(5.22) 式より

$$\begin{aligned}
\int d\Omega L &= L_K^{(2)} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} L_K^{(4)} - m_K^2 K^\dagger K \pm L_{WZ} \\
&= -\left(1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F\right) k^* k' + \left\{1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left(\frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2\right)\right\} E^2 k^* k \\
&\quad - m_K^2 k^* k + V(r) k^* k + \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} (k^* k' + k' k) \\
&\quad + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} (k^* k' + k' k) \pm A_{WZ}(r) k^* k
\end{aligned} \tag{5.31}$$

ただし、 $s = \sin(F/2)$  として

$$\begin{aligned}
V(r) &= \frac{1}{4} \left(2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + F'^2\right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \\
&\quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left[2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2F'^2\right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left[\frac{s^4 \sin^2 F}{r^2} + \frac{d}{dr} \{s^2 \sin F F'\}\right] \\
&\quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left(F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F\right) \\
&\quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left[1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left(F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F\right)\right] \\
&\quad - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{8Es^2}{3\Lambda} \left[F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F\right] I_{NK}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$A_{WZ}(r) = \frac{3E \sin^2 F}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{F'}{r^2} - \frac{3 \sin^2 F s^2}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{F'}{\Lambda r^2} \tag{5.33}$$

と定義する。これらに加えて

$$h(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F \tag{5.34}$$

$$f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left(\frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2\right) \tag{5.35}$$

$$P(r) = m_K^2 - f(r) E^2 - V(r) \mp A_{WZ}(r) \tag{5.36}$$

$$Q(r) = \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} \tag{5.37}$$

と定義すると Lagrangian は

$$\begin{aligned} -\int d\Omega L &= h(r)k^*k' + [m_K^2 - f(r)E^2 - V(r) \mp A_{WZ}(r)] k^*k - Q(r)(k^*k' + k'^*k) \\ &= h(r)k^*k' + P(r)k^*k - Q(r)(k^*k' + k'^*k) \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。ここで、全空間積分のうち角度積分のみを行っている。(5.38)式において残っている動径方向の積分  $\int dr r^2$  を実行し、 $k \rightarrow k + \delta k$  として変分を取ると K 中間子の運動方程式として

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 h(r) \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r)k + (m_K^2 + V_{eff}(r))k \pm A_{WZ}k = 0 \quad (5.39)$$

が得られる。ただし、 $s = \sin(F/2)$  であり、

$$h(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F, \quad f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( \frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2 \right) \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} V_{eff}(r) &= -\frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + F'^2 \right) + 2 \frac{s^4}{r^2} \\ &\quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2F'^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left[ \frac{s^4 \sin^2 F}{r^2} + \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} \right] \\ &\quad + \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left[ 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\ &\quad + \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{8Es^2}{3\Lambda} \left[ F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right] I_{NK} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

である。また、 $A_{WZ}$  は Wess-Zumino 項からの寄与であり、以下のように与えられる。

$$A_{WZ}(r) = \frac{3E}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} F' - \frac{3}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2} F' \quad (5.42)$$

(5.39) 式において、+ 符号は反 K 中間子の運動方程式への寄与であり、- 符号は K 中間子の運動方程式への寄与である。

$V_{eff}$  はエネルギーの 2 乗の次元を持っているので、(5.39) 式の運動方程式を前節と同様に、シュレーディンガー方程式と同じ形になるように変形すると、

$$-\frac{1}{2m_K} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} k \right) + \frac{U_{eff}(r)}{2m_K} k = \varepsilon k \quad (5.43)$$

が得られる。ここで、K 中間子の質量を  $m_K$  とし、 $E = m_K + \varepsilon$  を満たす。また、

$$U_{eff}(r) = -\frac{h(r)-1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{dh(r)}{dr} \frac{d}{dr} - (\varepsilon^2 + (f(r)-1)E^2) + V_{eff}(r) \pm A_{WZ}(r) \quad (5.44)$$

である。 $h(r), f(r), V_{eff}(r), A_{WZ}(r)$  はそれぞれ (5.40) 式、(5.41) 式、および (5.42) 式で定める。 $A_{WZ}$  の符号は反 K 中間子に対しては  $+A_{WZ}$  を取り、K 中間子に対しては  $-A_{WZ}$  をとる。(5.43) 式の  $U_{eff}/2m_K$  が求めるべきエネルギーの 1 乗の次元を持った K 中間子・核子間相互作用である。

## 5.4 考察

この節では、前節で得られた相互作用の表式  $U_{eff}/2m_K$  を用いてその結果を考察する。まず初めに、 $U_{eff}/2m_K$  の原点付近での振る舞いを見る。原点付近では  $F(r) \simeq \pi - ar$  と書けることを用いると、(5.40) 式、(5.41) 式、および (5.42) 式から、原点付近での運動方程式を求めると (5.43) 式より

$$-\frac{1}{2m_K} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dk}{dr} \right) + \frac{2}{2m_K r^2} k = 0 \quad (5.45)$$

が得られる。(5.45) 式の第 2 項は角運動量  $L = 1$  の場合の遠心力ポテンシャルと同様の構造をしている。そして、この構造は (5.41) 式の

$$V_{eff}(r) = 2 \frac{s^4}{r^2} + \frac{2}{(eF_\pi)^2} \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \quad (5.46)$$

から得られる。これらの寄与は全て  $\mathcal{O}(N_c^0)$  からの寄与であり、Lagrangian(5.3) 式においては、

$$K^\dagger v_i^\dagger v^i K - \frac{2}{(eF_\pi)^2} K^\dagger v_i^\dagger v_j K \text{tr}(a^i a^j) - \frac{1}{2(eF_\pi)^2} K^\dagger v_i^\dagger v^i K \text{tr}(\partial_j U_\pi^\dagger \partial^j U_\pi) \quad (5.47)$$

から得られる寄与である。したがって、ポテンシャルの  $\mathcal{O}(N_c^0)$  からの寄与が斥力芯に似た構造を生んでいることがわかった。また、この議論は相互作用の表式のみを用いた議論であるので、相互作用が (5.44) 式の  $U_{eff}$  を用いて  $U_{eff}/2m_K$  と表される限り必ずこのような斥力芯が生じることがわかった。

次に、(5.42) 式、(5.44) 式からわかるように、ポテンシャルは非局所的な相互作用であり、かつ K 中間子のエネルギーに依存していることがわかる。そこで、エネルギーとして束縛状態のエネルギーを考え、ポテンシャルを

$$\frac{(U_{eff}k)}{2m_K} \frac{1}{k} \quad (5.48)$$

と定めて、この関数形を評価することにする。ただし、4.4 節と同様に無限遠でのポテンシャルの値は  $-\varepsilon^2/2m_K$  という負の値になる。以下では、相互作用の表式  $U_{eff}/2m_K$  含まれる 3 つのパラメーター  $F_\pi$  [MeV]、 $e$ 、及び  $m_K$  [MeV] をそれぞれ変えることで、相互作用と K 中間子の束縛エネルギーがどのように変化するかを見る。ここで、今考えてい

るものはK中間子と核子の2体のポテンシャルであるので、K中間子の質量として換算質量を用いた場合のポテンシャルを考えるために  $m_K$  をパラメータとしてあつかっている。

ただし、得られたポテンシャルの下で運動方程式を数値的に解いたところ、K中間子については束縛状態が存在しなかったので考えないものとする。

$m_K = 495\text{MeV}$  の場合

まず、K中間子の質量を  $495\text{MeV}$  と共通の値にとった場合を考える。このとき、他のパラメータを以下のようにとる。

- $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$

このパラメータセットは Adkins 達が提唱したパラメータセットで、核子の質量として  $939\text{MeV}$  を再現する [28]。

- $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$

このパラメータセットは Adkins 達のパラメータセットから、 $\pi$ 中間子の崩壊定数  $F_\pi$  を実験値の  $186\text{MeV}$  に変えたものである。

- $(F_\pi, e) = (186, 4.82)$

このパラメータセットは  $\pi$ 中間子の崩壊定数  $F_\pi$  を実験値にとった場合に、 $\Delta$ 粒子と核子の質量差を再現するように  $e$  を選んだものである。

これら3つのパラメータの下で得られたポテンシャルと束縛状態の規格化された反K中間子の波動関数、及び束縛エネルギーを図5.1と表5.1に示す。

表 5.1: パラメータごとの束縛エネルギー (B.E.) の大きさ：パラメータセットは左から順にそれぞれ  $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$ 、 $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$ 、 $(F_\pi, e) = (186, 4.82)$

	B.E. [MeV]		B.E. [MeV]		B.E. [MeV]
$I = 0$	82.9	$I = 0$	27.2	$I = 0$	32.9
$I = 1$	43.1				

図5.1から、得られたポテンシャルには斥力芯に似た構造が見て取れる。これは上で述べた通りの結果である。また、波動関数はp波のように振舞っていることがわかる。波動関数のこの振る舞いは、ポテンシャルの斥力の結果であると考えられる。

また図5.1からポテンシャルのパラメータ依存性として、 $F_\pi$  を大きくするとポテンシャルは深くなり、 $e$  を小さくするとポテンシャルは浅くなることがわかった。2つのパラメータ  $F_\pi$  と  $e$  はポテンシャルの中に複雑に入り込んでいるので、これらのパラメータを変えることでポテンシャルの深さにどれだけの影響が出るのかといった定量的な予言はできなかった。

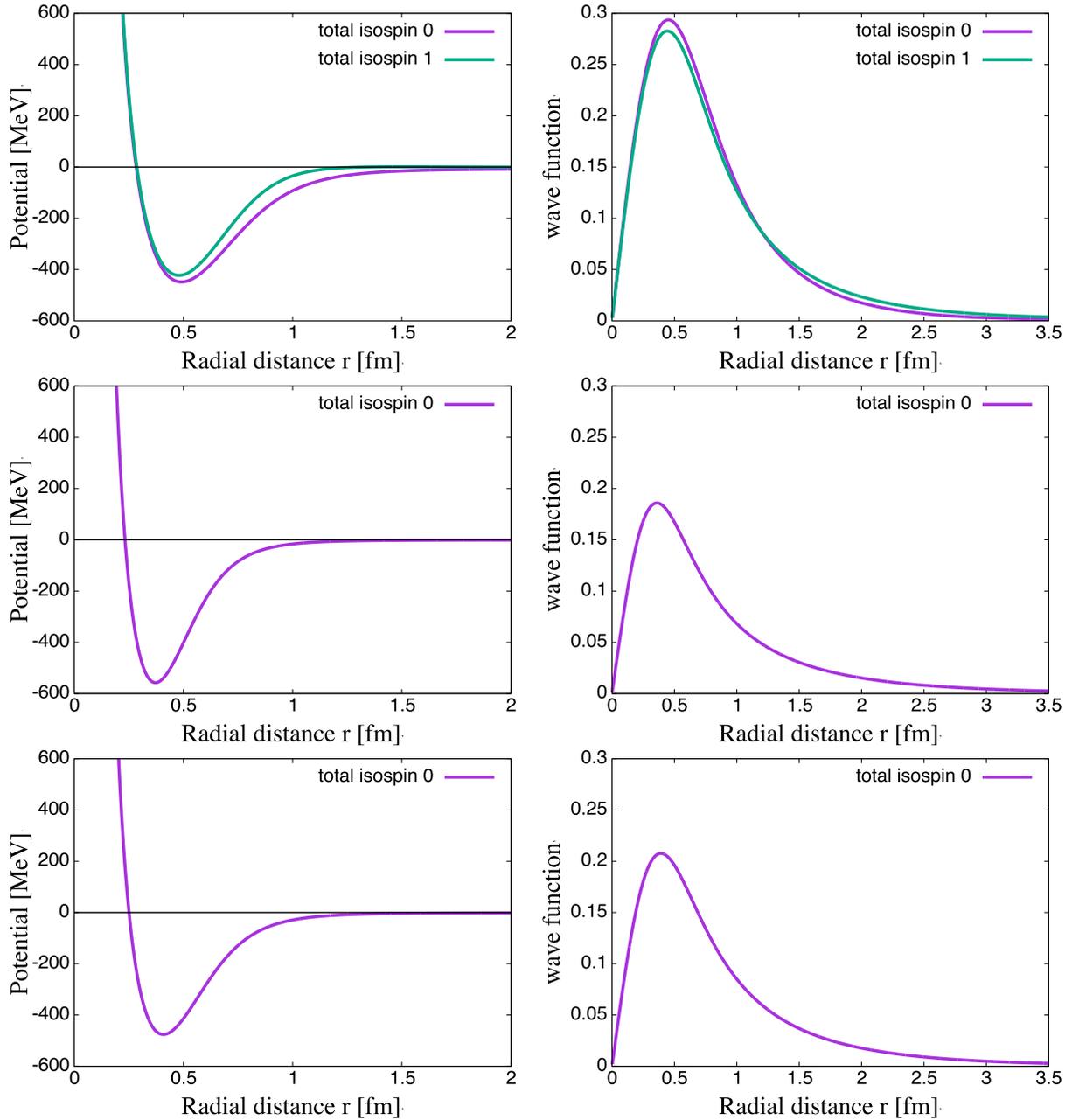


図 5.1: 本研究での方法により得られた反K中間子・核子間相互作用(左列)と束縛状態の波動関数(右列):K中間子の質量 $m_K = 495\text{MeV}$ は共通。それ以外のパラメーターセットはそれぞれ $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$ (一行目)、 $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$ (二行目)、 $(F_\pi, e) = (186, 4.82)$ (三行目)

次に 2.7 節で導出した Weinberg-Tomozawa 型 (WT 型) の相互作用との比較を行う。(2.54) 式より、WT 型の相互作用は  $\pi$  中間子の崩壊定数  $F_\pi$  の 2 乗に反比例している。したがって、パラメーターセット  $(F_\pi, e) = (129, 5.45)$  と  $(F_\pi, e) = (186, 5.45)$  の下では相互作用の大きさが  $1/129^2 : 1/186^2 \simeq 1/4 : 1/9$  となっているはずである。これを確かめるために、アイソスピン 0 の場合のポテンシャルの積分値を求める。ただし、上で述べたよう

に無限遠でのポテンシャルは  $-\varepsilon^2/2m_K$  という負の値を持つ。そこで、積分範囲を原点からポテンシャルが  $-\varepsilon^2/2m_K$  の値で一定になる距離までと定める。このような方法を用いて得られたポテンシャルの積分値は、表 5.2 のようになった。表 5.2 よりポテンシャルの

表 5.2: パラメーターごとのポテンシャルの積分値

パラメーターセット	積分する距離 [fm]	積分値 [MeV <sup>-2</sup> ]
$(F_\pi, e) = (129, 5.45)$	4.5	$-4.0 \times 10^{-5}$
$(F_\pi, e) = (186, 5.45)$	3.9	$-0.7 \times 10^{-5}$

平均値の比は 6 : 1 なので、WT 型相互作用の予言のようにはならなかった。この結果は、本研究での研究手法は  $SU(3)$  を破っているので WT 定理は厳密に成立しないことを踏まえれば当然のことである。しかし、 $\pi$  中間子の崩壊定数  $F_\pi$  を大きくするとポテンシャルの積分値は小さくなっているため、 $\pi$  中間子の崩壊定数を大きくすると相互作用は小さくなるという WT 定理の傾向を満たしていることは確認できた。

#### $m_K$ を換算質量に変えた場合

次に、今考えている相互作用が核子と K 中間子の 2 体の相互作用であることを踏まえて、K 中間子の質量を換算質量に変えた場合を考える。核子と K 中間子の質量をそれぞれ  $m_N, m_K$  とすると、換算質量は以下のように定義される。

$$\frac{1}{\mu_K} = \frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_K} \quad (5.49)$$

ここで、核子の質量は各パラメーターごとに (3.34) 式によって求められる。各パラメーターごと核子の質量  $m_N$  と具体的なパラメーターセットは以下の通りである。

- $(F_\pi, e, \mu_K) = (129, 5.45, 324.3), m_N = 939$
- $(F_\pi, e, \mu_K) = (186, 5.45, 362.3), m_N = 1351.6$
- $(F_\pi, e, \mu_K) = (186, 4.82, 371.1), m_N = 1281.8$

これら 3 つのパラメーターの下で得られたポテンシャルと束縛状態の規格化された波動関数、及び束縛エネルギーを図 5.2 と表 5.3 に示す。K 中間子の質量として換算質量を用いた場合には、 $(F_\pi, e, \mu_K) = (129, 5.45, 324.3), m_N = 939$  の場合にのみ束縛状態が存在した。

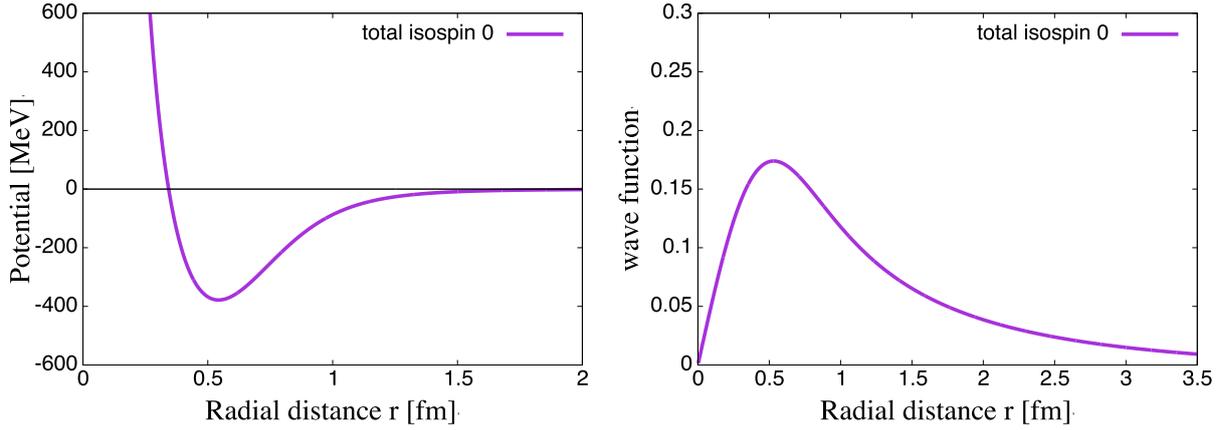


図 5.2: 本研究での方法により得られた反 K 中間子・核子間相互作用 (左列) と束縛状態の波動関数 (右列) : K 中間子の質量は換算質量を用いている。パラメーターセットは  $(F_\pi, e, m_K) = (129, 5.45, 324.3)$  を用いている。

表 5.3: 束縛エネルギー (B.E.) の大きさ: パラメーターセットは  $(F_\pi, e, m_K) = (129, 5.45, 324.3)$  を用いている。

	B.E. [MeV]
$I = 0$	11.9

表 5.1 と表 5.3 より、K 中間子の質量を換算質量に変えることで束縛エネルギーは 70MeV 程度小さくなるということがわかった。この理由は以下のように考えられる。まず束縛状態において、束縛エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差によって決まる。ただし、束縛エネルギーとポテンシャルエネルギーは負の値をとる。運動エネルギーは K 中間子の運動量を  $\mathbf{P}$  と書けば、 $\mathbf{P}^2/2m$  と定義されるので、K 中間子の質量が小さくなると運動エネルギーは増加する。したがって、K 中間子の質量を換算質量に変えた結果、運動エネルギーが大きくなったので運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差で表される束縛エネルギーが小さくなったと考えられる。

本研究によって得られた、K 中間子・核子間相互作用を用いて反 K 中間子と核子の束縛状態を考えると、表 5.1 と表 5.3 から束縛エネルギー 10MeV から 80MeV の値をとることがわかった。特に、 $\pi$  中間子の崩壊定数  $F_\pi$  を実験値と同じ 186MeV にとった場合には束縛エネルギーは 30MeV 程度になるという予言が得られた。 $\pi$  中間子の崩壊定数を 186MeV にとった場合には核子の質量は実験値を再現しないがこれについては以下のように考えることができる。Skyrme 模型では核子の質量は

$$M_N = M + \frac{1}{2\Lambda} \frac{3}{4} \quad (5.50)$$

で与えられる。ここで、第 1 項はソリトンの質量であり、第 2 項はソリトンの回転に由来

する寄与である。この2つの項を  $1/N_c$  展開の観点から見ると、第1項は  $\mathcal{O}(N_c)$  であり、第2項は  $\mathcal{O}(1/N_c)$  である。ここで注目すべきことは、(5.50) 式には  $\mathcal{O}(N_c^0)$  の寄与が存在していないということである。 $\mathcal{O}(N_c^0)$  の寄与は核子の質量を減少させる効果があると考えられているので、 $\pi$  中間子の崩壊定数を 186MeV にとった場合にも核子の質量を再現する可能性はある。しかし、 $\mathcal{O}(N_c^0)$  の寄与の導出は未だなされていない。

最後に、 $1/N_c$  展開をについて考察する。 $1/N_c$  展開において、Hedgehog 解などのソリトンは  $N_c$  のオーダーを持ち、K 中間子は  $N_c^0$  のオーダーを、核子は  $1/N_c$  のオーダーをそれぞれ持つ。 $N_c$  はカラーの数であり、クォーク 1 粒子につき 1 つのカラーを持っていることを考慮すると、 $N_c$  は質量のようなものであると考えることができる。

第3章で述べたように、Hedgehog 解は回転させることで核子へと量子化される。したがって、Hedgehog 解と K 中間子からなる 2 体系を考えた場合には、K 中間子から見て Hedgehog 解が回転しているように見えれば Hedgehog 解は核子として振る舞う。つまり、Hedgehog 解が K 中間子の軌道運動よりも速く回転していれば、Hedgehog 解と K 中間子からなる 2 体系で Hedgehog 解を核子として量子化できる。これは、 $\mathcal{O}(N_c)$  である Hedgehog 解が  $\mathcal{O}(N_c^0)$  の K 中間子よりも速く動かなければならないことを意味している。しかし、上で述べたように  $N_c$  は質量のようなものなので、 $1/N_c$  展開の枠組みの中では Hedgehog 解は K 中間子より重たい。したがって、 $1/N_c$  展開を守ると Hedgehog 解は K 中間子よりも速く動くことができず、Hedgehog 解と K 中間子からなる 2 体系では Hedgehog 解を核子として量子化することができない。このような理由から、本研究のように Hedgehog 解と K 中間子からなる系を考えて、その系において Hedgehog 解を核子として量子化する場合には  $1/N_c$  展開は良い展開方法ではないと考えられる。



## 第6章 まとめ

本研究では、Callan と Klebanov が提唱した Skyrme 模型の束縛法の量子化の方法を変えることで K 中間子・核子間相互作用の導出した。これは、構造を持つ核子と構造を持たない K 中間子の相互作用を導出する方法であり、質点と質点の相互作用を記述するカイラル理論とは異なる手法である。その結果として、s-波の反 K 中間子の基底状態に対する相互作用は非局所的、かつ反 K 中間子のエネルギーに依存する相互作用となった。また得られた相互作用には、 $\mathcal{O}(N_c^0)$  の寄与に由来する斥力芯のような構造が見られた。そして K 中間子の波動関数として s-波を考えている限り、必ずこの斥力芯が生じることも明らかになった。相互作用のパラメーター依存性については  $\pi$  中間子の崩壊定数  $F_\pi$  を大きくすることでポテンシャルは深くなり、Skyrme パラメーター  $e$  を小さくするとポテンシャルが浅くなるという傾向があることがわかった。また、本研究で得られた相互作用を用いて反 K 中間子と核子の束縛状態を考えると、反 K 中間子の束縛エネルギーとして 10MeV から 80MeV 程度の値をとることがわかった。

本研究のように、Hedgehog 解と K 中間子からなる系において Hedgehog 解を核子として量子化するというような場合には  $1/N_c$  展開はあまり良い展開方法ではないことについても考察を行った。しかしながら、その考察は非常に定性的なものであったので、 $1/N_c$  展開があまりよい展開方法ではないということに対する定量的な説明を与えることが今後の課題である。

本研究の手法はアップ・クォークとダウン・クォークを軽いクォークだと扱い、ストレンジ・クォークを重いクォークとして扱っている。この考え方で重要なことは、アップ・クォークとダウン・クォークよりも重いクォークを区別して扱うことである。したがって、ストレンジ・クォークの代わりにチャーム・クォークやボトム・クォークを用いて同様の議論を行うことも可能である。チャーム・クォークやボトム・クォークを用いた場合に、どのような相互作用が得られるのかを研究することも今後の課題としてあげられる。



## 謝辞

本修士論文は、筆者が大阪大学大学院理学研究科物理学専攻博士前期課程において、クォーク核理論グループで行った研究をまとめたものである。本研究に関して終始ご指導ご鞭撻をいただきました指導教員である保坂淳教授に心から感謝いたします。本論文をご精読いただきました橋本幸士教授、緒方一介准教授、および石井理修准教授に心から感謝いたします。



## 付録A $SU(2)$ Wess-Zumino term

第3章の  $SU(2)$  Skyrme 模型の場合には Wess-Zumino 項を考えなかったが、それは  $SU(2)$  Skyrme 模型の場合には Wess-Zumino 項がゼロになるからである。ここでは  $SU(2)$  Skyrme 模型の場合に Wess-Zumino 項がゼロになることを示す。Wess-Zumino 項は以下のように書ける [44, 45]。

$$L_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int d^5x \operatorname{tr} [(U^\dagger \partial_\mu U) (U^\dagger \partial_\nu U) (U^\dagger \partial_\alpha U) (U^\dagger \partial_\beta U) (U^\dagger \partial_\gamma U)] \quad (\text{A.1})$$

$U$  が  $SU(2)$  であることから、

$$U = a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.2})$$

と書ける。ただし、

$$\sum_{i=0,1,2,3} a_i^2 = 1 \quad (\text{A.3})$$

を満たす。この  $U$  を用いると、

$$\begin{aligned} U^\dagger \partial_\mu U &= (a_0 - i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\partial_\mu a_0 + i\partial_\mu \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ &= a_0 \partial_\mu a_0 + a_i \partial_\mu a_i + i\tau_a (a_0 \partial_\mu a_a - a_a \partial_\mu a_0 + \epsilon_{abc} a_b \partial_\mu a_c) \\ &= i\tau_a (a_0 \partial_\mu a_a - a_a \partial_\mu a_0 + \epsilon_{abc} a_b \partial_\mu a_c) \equiv i\tau_a X_{a\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで、

$$\partial_\mu \left( \sum_{i=0,1,2,3} a_i^2 \right) = 2(a_0 \partial_\mu a_0 + a_i \partial_\mu a_i) = 0 \quad (\text{A.5})$$

を用いた。(A.1) 式に (A.5) 式を代入すると

$$\begin{aligned} L_{WZ} &= \frac{N_c}{240\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int d^5x X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} \operatorname{tr} [\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d \tau_e] \\ &= \frac{2iN_c}{240\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \int d^5x X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} [\delta_{ab}\epsilon_{cde} + \delta_{cd}\epsilon_{abe} - \delta_{be}\epsilon_{cda} + \delta_{ae}\epsilon_{cdb}] \end{aligned}$$

特に以下の量を考える。

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} [\delta_{ab}\epsilon_{cde} + \delta_{cd}\epsilon_{abe} - \delta_{be}\epsilon_{cda} + \delta_{ae}\epsilon_{cdb}] \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{a\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{cde} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{abe} \\
& - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{b\gamma} \epsilon_{cda} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{a\gamma} \epsilon_{cdb} \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{a\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{cde} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{abe} \\
& - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{b\gamma} \epsilon_{cda} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{a\gamma} \epsilon_{cdb}
\end{aligned}$$

第1項と第4項は

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{a\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{cde} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{a\gamma} \epsilon_{cdb} \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} (X_{a\mu} X_{a\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} + X_{a\mu} X_{a\gamma} X_{e\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta}) \epsilon_{cde} \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} (X_{a\mu} X_{a\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{e\gamma} - X_{a\mu} X_{a\nu} X_{e\alpha} X_{c\beta} X_{d\gamma}) \epsilon_{cde} \\
= & 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

第2項と第3項は

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma} \epsilon_{abe} - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{d\beta} X_{b\gamma} \epsilon_{cda} \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} (X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma} - X_{a\mu} X_{b\alpha} X_{c\nu} X_{c\gamma} X_{e\beta}) \epsilon_{abe} \\
= & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} (X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma} - X_{a\mu} X_{b\nu} X_{c\alpha} X_{c\beta} X_{e\gamma}) \epsilon_{abe} \\
= & 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

となるので、

$$L_{WZ} = 0 \tag{A.8}$$

になる。

## 付録B Lagrangianの導出

ここでは、第5章で用いたK中間子と核子の相互作用を記述するLagrangianの導出を行う。

### B.1 導出のための準備

K中間子と核子の相互作用を記述するLagrangianはWess-Zumino項を含めて以下のようになる。

$$L_K = L_K^{(2)} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} L_K^{(4)} - m_K^2 K^\dagger K \pm L_{WZ} \quad (\text{B.1})$$

$$L_K^{(2)} = (D_\mu K)^\dagger D^\mu K - K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} L_K^{(4)} = & -K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2 - 2(D_\mu K)^\dagger D_\nu K \text{tr} (a^\mu a^\nu) \\ & - \frac{1}{2} (D_\mu K)^\dagger D^\mu K \text{tr} (\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi) + 6(D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] D_\mu K \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$L_{WZ} = -i \frac{N_c}{F_\pi^2} B^\mu \left[ (D_\mu K)^\dagger K - K^\dagger (D_\mu K) \right] \quad (\text{B.4})$$

ここで、

$$U_\pi = \xi^2 = \exp \left[ i \frac{2}{F_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$K(r) = K(\mathbf{r}) e^{-iEt}$$

$$D_\mu K \equiv \partial_\mu K + v_\mu K$$

$$v_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger)$$

$$a_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger)$$

である。 $U_\pi$ をHedgehog解とし、 $A(t) \in SU(2)$ を用いて

$$\xi \rightarrow A \xi A^\dagger = A (c + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{r}s) A^\dagger \quad (\text{B.6})$$

と  $\xi$  を回転させる。ここで、 $c \equiv \cos(F(r)/2)$ ,  $s \equiv \sin(F(r)/2)$  と定義した。さらに、

$$A(t) = \exp\left(i\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}t\right) \equiv \exp(i\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (\text{B.7})$$

と書けば、

$$\dot{A}^\dagger A = i\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.8})$$

が得られる。ここで、 $\boldsymbol{\omega}$  は角速度である。角速度  $\boldsymbol{\omega}$  は以下のようにスピン演算子  $\mathbf{J}$  と対応づけられる。

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega} \rightarrow -\frac{1}{\Lambda}\mathbf{J} \quad (\text{B.9})$$

ここで、のちの計算のために  $A(t)$  と  $J_k^N$  の交換関係を調べておく。 $A(t)$  は

$$A(t) = a_0(t) + i\tau_i a_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.10})$$

と書ける。ここで、 $a_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) には

$$\sum_{\mu=0}^3 a_\mu^2(t) = 1 \quad (\text{B.11})$$

という束縛条件が付く。 $A(t)$  を  $a_\mu(t)$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) を用いて書けば、 $\mathbf{J}^N$  は

$$J_k^N = \frac{i}{2} \left( a_k \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - \epsilon_{klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right)$$

と書ける [28]。したがって、

$$\begin{aligned} [J_k^N, A] &= J_k^N A - A J_k^N = (J_k^N A) + A J_k^N - A J_k^N = J_k^N A \\ &= \frac{i}{2} \left( a_k \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - \epsilon_{klm} a_l \frac{\partial}{\partial a_m} \right) (a_0 + i a_a \tau_a) \\ &= \frac{i}{2} (a_k - a_0 (i\tau_a \delta_{ak}) - \epsilon_{klm} a_l (i\tau_a \delta_{am})) \\ &= \frac{i}{2} (a_k - i a_0 \tau_k - \epsilon_{klm} a_l \tau_m) \\ &= \frac{1}{2} (i a_k + a_0 \tau_k - i \epsilon_{klm} a_l \tau_m) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

が得られる。一方で、

$$\begin{aligned} A\tau_k &= (a_0 + i a_a \tau_a) \tau_k \\ &= a_0 \tau_k + i a_a \tau_a \tau_k \\ &= a_0 \tau_k + i a_a (\delta_{ak} + i \epsilon_{akl} \tau_l) \\ &= a_0 \tau_k + i a_k + i \epsilon_{akl} a_a \tau_l \\ &= a_0 \tau_k + i a_k + i \epsilon_{lkm} a_l \tau_m \\ &= a_0 \tau_k + i a_k - i \epsilon_{klm} a_l \tau_m \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

なので、(B.12) 式、(B.13) 式から、最終的な  $A$  と  $J_k^N$  の交換関係として

$$[J_k, A] = \frac{1}{2} A \tau_k \quad (\text{B.14})$$

が得られる。

次に、Hedgehog 解を回転させた場合の  $v_\mu, a_\mu$  の各成分を具体的に計算する。

$$\bullet v_0 = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_0 \xi + \xi \partial_0 \xi^\dagger)$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_0 \xi + \xi \partial_0 \xi^\dagger) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger (\dot{A} \xi A^\dagger + A \xi \dot{A}^\dagger) + A \xi A^\dagger (\dot{A} \xi^\dagger A^\dagger + A \xi^\dagger \dot{A}^\dagger) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi A^\dagger + A \xi^\dagger A^\dagger A \xi \dot{A}^\dagger + A \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger A^\dagger + A \xi A^\dagger A \xi^\dagger \dot{A}^\dagger \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi A^\dagger + A \dot{A}^\dagger + A \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger A^\dagger + A \dot{A}^\dagger \right] \\ &= \frac{1}{2} A \left[ \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi + 2 \dot{A}^\dagger A + \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger \right] A^\dagger \\ &= \frac{1}{2} A \left[ -\xi^\dagger \dot{A}^\dagger A \xi + 2 \dot{A}^\dagger A - \xi \dot{A}^\dagger A \xi^\dagger \right] A^\dagger \\ &= \frac{1}{2} A \left[ -i(c - i\hat{r}_a \tau_a s) \Omega_b \tau_b (c + i\hat{r}_c \tau_c s) + 2i\Omega_a \tau_a - i(c + i\hat{r}_a \tau_a s) \Omega_b \tau_b (c - i\hat{r}_c \tau_c s) \right] A^\dagger \\ &= iA \left[ -c^2 \Omega_a \tau_a - \hat{r}_a \hat{r}_c s^2 \Omega_b \tau_a \tau_b \tau_c + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -\hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b \tau_a \tau_b \tau_c + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -\hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b (\delta_{ab} + i\epsilon_{abd} \tau_d) \tau_c + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -(\hat{r}_a \Omega_a \hat{r}_c + i\hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b \epsilon_{abd} \tau_d) \tau_c + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -(\hat{r}_a \Omega_a \hat{r}_c \tau_c + i\hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b \epsilon_{abd} (\delta_{dc} + i\epsilon_{dce} \tau_e)) + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -(\hat{r}_a \Omega_a \hat{r}_c \tau_c - \hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b \epsilon_{abd} \epsilon_{dce} \tau_e) + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -(\hat{r}_a \Omega_a \hat{r}_c \tau_c - \hat{r}_a \hat{r}_c \Omega_b (\delta_{ac} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bc}) \tau_e) + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= is^2 A \left[ -(\hat{r}_a \Omega_a \hat{r}_c \tau_c - (\Omega_b \tau_b - \hat{r}_a \tau_a \hat{r}_b \Omega_b)) + \Omega_a \tau_a \right] A^\dagger \\ &= 2is^2 A \left[ \Omega_b \tau_b - \hat{r}_a \tau_a \hat{r}_b \Omega_b \right] A^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\bullet v_i = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_i \xi + \xi \partial_i \xi^\dagger)$$

$$P_{ai} = \frac{\delta a_i - \hat{r}_a \hat{r}_i}{r} \quad (\text{B.16})$$

と定めると、

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger \partial_i \xi &= (c - i\hat{r}_a \tau_a s) \left( -s \frac{F'}{2} \hat{r}_i + i\hat{r}_b \tau_b c \frac{F'}{2} \hat{r}_i + iP_{ai} \tau_a s \right) \\
&= ic^2 \frac{F'}{2} \hat{r}_a \hat{r}_i \tau_a + ics P_{ai} \tau_a + is^2 \frac{F'}{2} \hat{r}_a \hat{r}_i \tau_a + s^2 P_{ai} \hat{r}_b \tau_b \tau_a \\
&= i\tau_a \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) + \frac{s^2}{r} \epsilon_{abi} \hat{r}_b \right]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\xi \partial_i \xi^\dagger = i\tau_a \left[ -\delta_{ai} \frac{cs}{r} - \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) + \frac{s^2}{r} \epsilon_{abi} \hat{r}_b \right] \tag{B.18}$$

なので、

$$\begin{aligned}
v_i &= \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_i \xi + \xi \partial_i \xi^\dagger) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} (A \xi^\dagger A^\dagger A \partial_i \xi A^\dagger + A \xi A^\dagger A \partial_i \xi^\dagger A^\dagger) \\
&= \frac{1}{2} A [\xi^\dagger \partial_i \xi + \xi \partial_i \xi^\dagger] A^\dagger \\
&= \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b A^\dagger
\end{aligned} \tag{B.19}$$

となる。

- $a_0 = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_0 \xi - \xi \partial_0 \xi^\dagger)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_0 \xi - \xi \partial_0 \xi^\dagger) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger (\dot{A} \xi A^\dagger + A \xi \dot{A}^\dagger) - A \xi A^\dagger (\dot{A} \xi^\dagger A^\dagger + A \xi^\dagger \dot{A}^\dagger) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi A^\dagger + A \xi^\dagger A^\dagger A \xi \dot{A}^\dagger - A \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger A^\dagger - A \xi A^\dagger A \xi^\dagger \dot{A}^\dagger \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ A \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi A^\dagger + A \dot{A}^\dagger - A \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger A^\dagger - A \dot{A}^\dagger \right] \\
&= \frac{1}{2} A \left[ \xi^\dagger A^\dagger \dot{A} \xi - \xi A^\dagger \dot{A} \xi^\dagger \right] A^\dagger \\
&= -\frac{1}{2} A \left[ \xi^\dagger \dot{A}^\dagger A \xi - \xi \dot{A}^\dagger A \xi^\dagger \right] A^\dagger \\
&= -\frac{i}{2} A \left[ (c - i\hat{r}_a \tau_a s) \Omega_b \tau_b (c + i\hat{r}_c \tau_c s) - (c + i\hat{r}_a \tau_a s) \Omega_b \tau_b (c - i\hat{r}_c \tau_c s) \right] A^\dagger \\
&= -iA [i\hat{r}_a cs \Omega_b (\tau_b \tau_a - \tau_a \tau_b)] A^\dagger \\
&= 2icsA [\epsilon_{bac} \hat{r}_a \Omega_b \tau_c] A^\dagger \\
&= 2icsA [\epsilon_{abc} \Omega_a \hat{r}_b \tau_c] A^\dagger
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\bullet a_i = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_i \xi - \xi \partial_i \xi^\dagger)$$

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_i \xi - \xi \partial_i \xi^\dagger) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_i \xi - \xi \partial_i \xi^\dagger) A^\dagger \\ &= i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_a A^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

以上をまとめると、

$$\begin{cases} v_0 = 2is^2 A [\Omega_b \tau_b - \hat{r}_a \tau_a \hat{r}_b \Omega_b] A^\dagger \\ v_i = \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b A^\dagger \\ a_0 = 2ics A [\epsilon_{abc} \Omega_a \hat{r}_b \tau_c] A^\dagger \\ a_i = i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_a A^\dagger \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

が得られる。

(5.19) 式より、

$$\langle N | A \tau_i^K A^\dagger | N \rangle = -\frac{1}{3} \langle N | \sigma_i^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) | N \rangle \quad (\text{B.23})$$

が成り立つ。ここで、上付き添字  $N, K$  はそれぞれ核子と  $K$  中間子を意味している。(B.23) 式は、 $A \tau_i^K A^\dagger$  という構造を  $\langle N |, |N \rangle$  で挟み行列要素をとることで、 $\sigma_i^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N)$  という構造が得られることを表している。 $\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N$  は  $K$  中間子と核子のアイソスピンの積を表している。別の言い方をすれば、 $K$  中間子と核子のアイソスピンの情報は  $A \tau_i^K A^\dagger$  という構造から得られる。

次に  $K$  中間子の場を

$$K(\mathbf{r}, t) = K(\mathbf{r}) e^{-iEt} \quad (\text{B.24})$$

と書く。核子と  $K$  中間子のアイソスピン情報は全て、 $\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K$  の中に含まれていることに注意すると、 $K$  中間子を特徴付ける量はスピンのみになる。したがって、 $K$  中間子の場を以下のように置き換えることができる。

$$K(\mathbf{r}) \rightarrow \sum_{l,m,n} C_{lmn} Y_l^m(\theta, \phi) k_l^n \quad (\text{B.25})$$

ここで、 $C_{lmn}$  は部分波の重み、 $l (l = 0, 1, 2, \dots)$  はスピンの大きさ、 $m (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$  はスピンの第 3 成分、 $n (n = 1, 2, \dots)$  は主量子数と呼ばれる値である。

今は s-波を考えているので、 $l = 0$  であるので自動的に  $m = 0$  となり、このとき

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{B.26})$$

である。展開係数  $C_{lmn}$  は Lagrangian の中に常に 2 乗で現れるのでこれを落とすと、K 中間子の場は

$$K(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}} k e^{-iEt} \quad (\text{B.27})$$

と書ける。ここで、本来ならば  $k_l^n$  と書くべきところを  $l=0$  の状態を考えていることを暗黙の了解とすることで、 $l$  を書くことを省略した。 $n$  については基底状態  $n=1$  のみを考えたいので、書くことを省略する。

## B.2 $\mathcal{O}(1/N_c)$ までの寄与を導出する

量子化(回転)の前は  $\mathcal{O}(N_c^0)$  であり、このオーダーが Leading order になっている。Hedgehog 解を回転をさせ核子として量子化することで、新たな効果として  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与が現れる。従って、核子と K 中間子の相互作用を記述する Lagrangian は  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与まで考えれば良い。Hedgehog 解  $\xi$  の回転の結果  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与を生むものは以下のものである。角速度  $\Omega \sim 1/(Mass) \sim \mathcal{O}(1/N_c)$  なので、 $V_0$  若しくは  $A_0$  を 1 つだけ含むもの。Lagrangian の各項について  $\mathcal{O}(1/N_c)$  までの項を集め、さらに簡単のために s-波を考える。このとき K 中間子の場の空間微分は、

$$\partial_i K = \frac{\partial K}{\partial r} \hat{r}_i - i \frac{(\hat{r} \times \mathbf{L})_i}{r} K \rightarrow \frac{\partial K}{\partial r} \hat{r}_i \quad (\text{B.28})$$

と書けることに注意する。

導出方法の概略を説明する。まず、 $A\tau_a A^\dagger$  という構造は、公式 (B.23) を用いることで量子化される。次に、 $A\Omega_b \tau_a A^\dagger$  という構造は  $\Omega_b$  がスピン演算子に対応する量なので、 $A(t)$  とスピン演算子  $J_k$  との交換関係 (B.14) 式を用いて、

$$\begin{aligned} J_k^N A - A J_k^N &= \frac{1}{2} A \tau_k^K \\ A J_k^N &= J_k^N A - \frac{1}{2} A \tau_k^K \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

と  $J_k^N$  を  $A$  の左側に持って行く。その後、関係式 (B.23) を使えば良い。

以下で具体的に Lagrangian (B.1) 式の各項からの寄与を求めていく。

### B.2.1 微分の 2 次

$$(D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) - K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K \quad (\text{B.30})$$

からの寄与を考える。

$$(D_\mu K)^\dagger (D^\mu K)$$

$$\begin{aligned} (D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) &= \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_\mu K^\dagger v^\mu K + K^\dagger v_\mu^\dagger \partial^\mu K + K^\dagger v_\mu^\dagger v^\mu K \\ &\rightarrow \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_\mu K^\dagger v^\mu K + K^\dagger v_\mu^\dagger \partial^\mu K + K^\dagger v_i^\dagger v^i K \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

これが  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与である。ここで、(B.31) 式の第 1 項は K 中間子の運動項である。第 2 項、第 3 項の空間成分は s-波の場合には、

$$\partial_i K^\dagger v^i K = \frac{\partial K}{\partial r} \hat{r}_i \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b A^\dagger \propto \epsilon_{aib} \hat{r}_i \hat{r}_a = 0 \quad (\text{B.32})$$

よりゼロになる。よって、 $(D_\mu K)^\dagger (D^\mu K)$  から得られる  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与は

$$\partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_0 K^\dagger v^0 K + K^\dagger v_0^\dagger \partial^0 K + K^\dagger v_i^\dagger v^i K \quad (\text{B.33})$$

となる。

- $\partial_0 K^\dagger v^0 K + K^\dagger v_0^\dagger \partial^0 K$

$$\begin{aligned} v^0 &= 2is^2 A [\Omega_b \tau_b^K - \hat{r}_a \tau_a^K \hat{r}_b \Omega_b] A^\dagger \\ &\rightarrow -\frac{i}{\Lambda} s^2 A [J_b^N \tau_b^K - \hat{r}_a \tau_a^K \hat{r}_b J_b^N] A^\dagger \\ &= -\frac{i}{\Lambda} s^2 [A J_a^N \tau_a^K A^\dagger - A \hat{r}_a \tau_a^K \hat{r}_b J_b^N A^\dagger] \\ &= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \left[ \left( J_a^N A - \frac{1}{2} A \tau_a^K \right) \tau_a^K A^\dagger - \hat{r}_a \hat{r}_b \left( J_b^N A - \frac{1}{2} A \tau_b^K \right) \tau_a^K A^\dagger \right] \\ &= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \left[ J_a^N A \tau_a^K A^\dagger - \frac{3}{2} - \hat{r}_a \hat{r}_b J_b^N A \tau_a^K A^\dagger + \hat{r}_a \hat{r}_b \frac{1}{2} A \tau_b^K \tau_a^K A^\dagger \right] \\ &= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \left[ J_a^N A \tau_a^K A^\dagger - \frac{3}{2} - \hat{r}_a \hat{r}_b J_b^N A \tau_a^K A^\dagger + \frac{1}{2} \right] \\ &= -\frac{i}{\Lambda} s^2 [J_a^N A \tau_a^K A^\dagger - \hat{r}_a \hat{r}_b J_b^N A \tau_a^K A^\dagger - 1] \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

が得られる。次に、この  $v^0$  を  $\langle N |, |N \rangle$  で挟み行列要素をとり、次のことに注意する。まず、

$$\langle N | J_a^N A \tau_a^K A^\dagger | N \rangle = \sum_{i=N, \Delta} \langle N | J_a^N | i \rangle \langle i | A \tau_a^K A^\dagger | N \rangle \quad (\text{B.35})$$

と書ける。しかし、スピン演算子  $J_a^N$  はスピンの大きさを変えないので、 $\langle N | J_a^N | i \rangle = \langle N | J_a^N | N \rangle$  となる。つまり、中間状態としては  $i = N$  の状態のみが許される。このことに気をつけながら  $\langle N |$  と  $|N \rangle$  で挟むと (以下では、中間状態の  $\langle N |, |N \rangle$  は書く

ことを省略する。)、

$$\begin{aligned}
& \langle N | -\frac{i}{\Lambda} s^2 [J_a^N A \tau_a^K A^\dagger - \hat{r}_a \hat{r}_b J_b^N A \tau_a^K A^\dagger - 1] | N \rangle \\
&= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \left[ J_a^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_a^N \boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K \right) - \hat{r}_a \hat{r}_b J_b^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_a^N \boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K \right) - 1 \right] | N \rangle
\end{aligned} \tag{B.36}$$

$\mathbf{J}^N = \boldsymbol{\sigma}^N/2$ なので (B.35) 式は、

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \left[ \frac{1}{2} \sigma_a^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_a^N \boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K \right) - \hat{r}_a \hat{r}_b \frac{1}{2} \sigma_b^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_a^N \boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K \right) - 1 \right] | N \rangle \\
&= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \left[ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + \frac{1}{6} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) - 1 \right] | N \rangle \\
&= -\frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \left[ -\frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) - 1 \right] | N \rangle \\
&= \frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \left[ \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right] | N \rangle
\end{aligned} \tag{B.37}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\langle N | \partial_0 K^\dagger v^0 K | N \rangle &= \frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \partial_0 K^\dagger \left( \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right) K | N \rangle \\
&= \frac{i}{3\Lambda} s^2 \langle N | \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K | N \rangle + \frac{i}{\Lambda} s^2 \langle N | \partial_0 K^\dagger K | N \rangle
\end{aligned} \tag{B.38}$$

が得られる。

•  $K^\dagger v_i^\dagger v^i K$

$$\begin{aligned}
v_i^\dagger v^i = v_i v_i &= -\frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \hat{r}_a A \tau_b A^\dagger \epsilon_{cid} \hat{r}_c A \tau_d A^\dagger \\
&= -\frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \epsilon_{cid} \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \\
&= -\frac{s^4}{r^2} (\delta_{bd} \delta_{ac} - \delta_{bc} \delta_{ad}) \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \\
&= -\frac{s^4}{r^2} (\delta_{bd} \delta_{ac} - \delta_{bc} \delta_{ad}) \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \\
&= -\frac{s^4}{r^2} (A \tau_b \tau_b A^\dagger - \hat{r}_a \hat{r}_b A \tau_a \tau_b A^\dagger) \\
&= -2 \frac{s^4}{r^2}
\end{aligned} \tag{B.39}$$

なので、

$$K^\dagger v_i^\dagger v^i K = -2 \frac{s^4}{r^2} K^\dagger K \tag{B.40}$$

となる。

よって、(B.33) 式、(B.38) 式、(B.40) 式より、

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_0 K^\dagger V^0 K + K^\dagger V_0^\dagger \partial^0 K + K^\dagger V_i^\dagger V^i K \\
&= \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \frac{i}{3\Lambda} s^2 [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
& \quad + \frac{i}{\Lambda} s^2 (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) - 2 \frac{s^4}{r^2} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.41}$$

が得られる。

$$-K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K$$

考える  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与は以下のもの。

$$K^\dagger a_\mu^\dagger a^\mu K \rightarrow K^\dagger a_i^\dagger a^i K \tag{B.42}$$

ここで、

$$a_i = i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_a A^\dagger \equiv i B_{ai} A \tau_a A^\dagger \tag{B.43}$$

と書くと、

$$\begin{aligned}
a_i^\dagger a^i &= a_i a_i = -B_{ai} B_{bi} A \tau_a \tau_b A^\dagger \\
&= -B_{ai} B_{ai} - i \epsilon_{abc} B_{ai} B_{bi} A \tau_c A^\dagger \\
&= -B_{ai} B_{ai} - i \epsilon_{abc} \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \left[ \delta_{bi} \frac{cs}{r} + \hat{r}_b \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_c A^\dagger \\
&= -B_{ai} B_{ai} \\
&= - \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\
&= - \left[ 3 \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + 2 \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) + \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right)^2 \right] \\
&= - \left[ 3 \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \left( \frac{F'}{2} + \frac{cs}{r} \right) \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\
&= - \left[ 2 \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \left( \frac{F'}{2} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{B.44}$$

よって、

$$\begin{aligned}
-K^\dagger a_i^\dagger a^i K &= \left[ 2 \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \left( \frac{F'}{2} \right)^2 \right] K^\dagger K \\
&= \frac{1}{4} \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right]
\end{aligned} \tag{B.45}$$

以上より、(B.30) 式、(B.41) 式、(B.45) 式から  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与として、

$$\begin{aligned} \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \frac{i}{3\Lambda} s^2 [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\ - 2 \frac{s^4}{r^2} K^\dagger K + \frac{1}{4} \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right] K^\dagger K \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

が得られる。

### B.2.2 微分の4次

考える Lagrangian は以下の4つの項からなる。

- $-\frac{1}{8} \frac{1}{(eF_\pi)^2} K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2$
- $-\frac{2}{(eF_\pi)^2} (D_\mu K)^\dagger (D_\nu K) \text{tr} [a^\mu a^\nu]$
- $-\frac{1}{2} \frac{1}{(eF_\pi)^2} (D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) \text{tr} [\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi]$
- $+\frac{6}{(eF_\pi)^2} (D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] (D_\mu K)$

以下の計算では、簡単のために  $1/(eF_\pi)^2$  を書くことを省略する。

$$-\frac{1}{8} K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2$$

$\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与としては以下の寄与が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8} K^\dagger K \text{tr} [\partial_\mu U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_\nu U_\pi U_\pi^\dagger]^2 \\ \rightarrow & -\frac{1}{8} K^\dagger K \text{tr} [\partial_i U_\pi U_\pi^\dagger, \partial_j U_\pi U_\pi^\dagger]^2 \\ = & -\frac{1}{8} K^\dagger K \left[ -16 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] \\ = & 2K^\dagger K \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$-2(D_\mu K)^\dagger (D_\nu K) \text{tr}[a^\mu a^\nu]$$

まず、 $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与を書き出すと、

$$\begin{aligned} (D_\mu K)^\dagger (D_\nu K) \text{tr}[a^\mu a^\nu] &\rightarrow (D_0 K)^\dagger (D_i K) \text{tr}[a^0 a^i] + (D_i K)^\dagger (D_0 K) \text{tr}[a^i a^0] \\ &\quad + (D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr}[a^i a^j] \\ &\rightarrow (\partial_0 K)^\dagger (\partial_i K + v_i K) \text{tr}[a^0 a^i] + (\partial_i K + v_i K)^\dagger (\partial_0 K) \text{tr}[a^i a^0] \\ &\quad + (D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr}[a^i a^j] \\ &= (\partial_0 K^\dagger \partial_i K + \partial_i K^\dagger \partial_0 K) \text{tr}[a^0 a^i] \\ &\quad + \left( \partial_0 K^\dagger v_i K + K^\dagger v_i^\dagger \partial_0 K \right) \text{tr}[a^0 a^i] \\ &\quad + (D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr}[a^i a^j] \end{aligned} \tag{B.48}$$

が得られるので、以下で各項からの寄与求めていく。

- $(\partial_0 K^\dagger \partial_i K + \partial_i K^\dagger \partial_0 K) \text{tr}[a^0 a^i]$

$$\begin{aligned} \text{tr}[a^0 a^i] &= -\text{tr}[a_0 a_i] \\ &= -\text{tr} \left[ -2csA [\epsilon_{abc} \Omega_a \hat{r}_b \tau_c^K] A^\dagger \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_d^K A^\dagger \right] \\ &= 2cs \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \text{tr} [\epsilon_{abc} \Omega_a \hat{r}_b (\delta_{cd} + i\epsilon_{cde} \tau_e^K)] \end{aligned}$$

次に、 $\Omega_a$  は古典的な量なので、トレースの外に出すと

$$\begin{aligned} \text{tr}[a^0 a^i] &= 2cs\epsilon_{abc}\Omega_a \hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \text{tr} [\delta_{cd} + i\epsilon_{cde} \tau_e^K] \\ &= 4cs\epsilon_{abc}\Omega_a \hat{r}_b \delta_{cd} \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\ &= 4cs\epsilon_{abd}\Omega_a \hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\ &= \frac{4c^2 s^2}{r} \epsilon_{abi} \Omega_a \hat{r}_b \end{aligned} \tag{B.49}$$

が得られる。この結果を用いると、

$$\hat{r}_i \text{tr}[a^0 a^i] \propto \hat{r}_i \epsilon_{abi} \hat{r}_b = 0 \tag{B.50}$$

なので、

$$(\partial_0 K^\dagger \partial_i K + \partial_i K^\dagger \partial_0 K) \text{tr}[a^0 a^i] = 0 \tag{B.51}$$

となる。

- $(\partial_0 K^\dagger v_i K + K^\dagger v_i^\dagger \partial_0 K) \text{tr} [a^0 a^i]$

$$\begin{aligned}
v_i \text{tr} [a^0 a^i] &= \left( \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b^K A^\dagger \right) \left( \frac{4c^2 s^2}{r} \epsilon_{ghi} \Omega_g \hat{r}_h \right) \\
&= \frac{4ic^2 s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \epsilon_{ghi} \hat{r}_a \hat{r}_h A \tau_b^K A^\dagger \Omega_g \\
&= \frac{4ic^2 s^4}{r^2} (\delta_{bg} \delta_{ah} - \delta_{bh} \delta_{ag}) \hat{r}_a \hat{r}_h A \tau_b^K A^\dagger \Omega_g \\
&= \frac{4ic^2 s^4}{r^2} (A \tau_b^K A^\dagger \Omega_b - \hat{r}_b \hat{r}_a A \tau_b^K A^\dagger \Omega_a) \tag{B.52}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\langle N | v_i \text{tr} [a^0 a^i] | N \rangle \\
&= \frac{4ic^2 s^4}{r^2} \langle N | (A \tau_b^K A^\dagger \Omega_b - \hat{r}_b \hat{r}_a A \tau_b^K A^\dagger \Omega_a) | N \rangle \\
&= -\frac{2ic^2 s^4}{\Lambda r^2} \langle N | (A \tau_b^K A^\dagger J_b^N - \hat{r}_b \hat{r}_a A \tau_b^K A^\dagger J_a^N) | N \rangle \\
&= -\frac{2ic^2 s^4}{\Lambda r^2} \langle N | \left[ -\frac{1}{3} J_b^N \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) + \frac{1}{3} \hat{r}_b \hat{r}_a \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) J_a^N \right] | N \rangle \\
&= \frac{2ic^2 s^4}{3\Lambda r^2} \langle N | \left[ \frac{1}{2} \sigma_b^N \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) - \hat{r}_b \hat{r}_a \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) \frac{1}{2} \sigma_a^N \right] | N \rangle \\
&= \frac{ic^2 s^4}{3\Lambda r^2} \langle N | \left[ (\boldsymbol{\sigma}^N \cdot \boldsymbol{\sigma}^N) (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) - (\hat{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^N)^2 (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) \right] | N \rangle \\
&= \frac{2ic^2 s^4}{3\Lambda r^2} \langle N | (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) | N \rangle \tag{B.53}
\end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\langle N | \partial_0 K^\dagger v_i K \text{tr} [a^0 a^i] | N \rangle = \frac{2ic^2 s^4}{3\Lambda r^2} \langle N | \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K | N \rangle \tag{B.54}$$

となる。

- $(D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr} [a^i a^j]$

最後に時間微分を含まない項  $(D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr} [a^i a^j]$  を考える。今まで同様、

$$a_i = i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A \tau_a A^\dagger \equiv i B_{ai} A \tau_a A^\dagger \tag{B.55}$$

と書くと、

$$\begin{aligned}
\text{tr}[a^i a^j] &= \text{tr}[a_i a_j] \\
&= -B_{ai} B_{bj} \text{tr}[A \tau_a A^\dagger A \tau_b A^\dagger] \\
&= -B_{ai} B_{bj} \text{tr}[\tau_a \tau_b] \\
&= -2B_{ai} B_{aj} \\
&= -2 \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \left[ \delta_{aj} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\
&= -2 \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + 2\hat{r}_i \hat{r}_j \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right)^2 \right] \\
&= -2 \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \frac{F'}{2} + \frac{cs}{r} \right) \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\
&= -2 \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \left( \frac{F'}{2} \right)^2 - \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \right) \right] \tag{B.56}
\end{aligned}$$

が得られる。次に、

$$(D_i K)^\dagger (D_j K) = \partial_i K^\dagger \partial_j K + \partial_i K^\dagger v_j K + K^\dagger v_i^\dagger \partial_j K + K^\dagger v_i^\dagger v_j K \tag{B.57}$$

$$v_i = \frac{i}{r} \epsilon_{aib} \hat{r}_a s^2 A \tau_b A^\dagger \tag{B.58}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\left[ \partial_i K^\dagger v_j K + K^\dagger v_i^\dagger \partial_j K \right] \text{tr}[a^i a^j] \\
&\propto (\hat{r}_i \epsilon_{ajb} \hat{r}_a + \epsilon_{aib} \hat{r}_a \hat{r}_j) \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \left( \frac{F'}{2} \right)^2 - \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \right) \right] \\
&= 0 \tag{B.59}
\end{aligned}$$

が得られるから、この2項は落とす。

$$\begin{aligned}
v_i^\dagger v_j &= -v_i v_j = \frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \hat{r}_a A \tau_b A^\dagger \epsilon_{cjd} \hat{r}_c A \tau_d A^\dagger \\
&= \frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \epsilon_{cjd} \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \tag{B.60}
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
& v_i^\dagger v_j \text{tr} [a^i a^j] \\
&= -2 \frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \epsilon_{cjd} \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \left( \frac{F'}{2} \right)^2 - \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \right) \right] \\
&= -2 \frac{s^4}{r^2} \epsilon_{aib} \epsilon_{cid} \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \\
&= -2 \frac{c^2 s^6}{r^4} (\delta_{bd} \delta_{ac} - \delta_{ad} \delta_{bc}) \hat{r}_a \hat{r}_c A \tau_b \tau_d A^\dagger \\
&= -2 \frac{c^2 s^6}{r^4} (A \tau_b \tau_d A^\dagger - \hat{r}_a \hat{r}_b A \tau_a \tau_b A^\dagger) \\
&= -4 \frac{c^2 s^6}{r^4}
\end{aligned} \tag{B.61}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
& \hat{r}_i \hat{r}_j \text{tr} [a^i a^j] \\
&= -2 \hat{r}_i \hat{r}_j \left[ \delta_{ij} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j \left( \left( \frac{F'}{2} \right)^2 - \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \right) \right] \\
&= -2 \left[ \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \left( \frac{F'}{2} \right)^2 - \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \right] \\
&= -2 \left( \frac{F'}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{B.62}$$

であるので、(B.56) 式、(B.61) 式、(B.62) 式より

$$\begin{aligned}
& (D_i K)^\dagger (D_j K) \text{tr} [a^i a^j] \\
&= -2 \left( \frac{F'}{2} \right)^2 K'^\dagger K' - 4 \frac{c^2 s^6}{r^4} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.63}$$

が得られる。

(B.54) 式、(B.63) 式より、

$$\begin{aligned}
& -2 (D_\mu K)^\dagger (D_\nu K) \text{tr} [a^\mu a^\nu] \\
\rightarrow & -\frac{4ic^2 s^4}{3\Lambda r^2} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) \partial_0 K] \\
& + 4 \left( \frac{F'}{2} \right)^2 K'^\dagger K' + 8 \frac{c^2 s^6}{r^4} K^\dagger K \\
= & -\frac{is^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) \partial_0 K] \\
& + (F')^2 K'^\dagger K' + 2 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.64}$$

が得られる。

$$-\frac{1}{2}(D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) \text{tr} [\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi]$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi &= \partial_0 U_\pi^\dagger \partial^0 U_\pi + \partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi \\ &\rightarrow \partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

が  $\mathcal{O}(1/N_c^0)$  の寄与なので考える項は (B.33) 式より

$$\left[ \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_0 K^\dagger v^0 K + K^\dagger v_0^\dagger \partial^0 K + K^\dagger v_i^\dagger v^i K \right] \text{tr} [\partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi] \quad (\text{B.66})$$

である。

まず、 $\text{tr} [\partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi]$  を求める。  $U_\pi = AU_0A^\dagger$  であることに気をつける ( $U_0$  は Hedgehog 解)。

$$\begin{aligned} \partial_i U_0 &= -\sin FF' \hat{r}_i + i\tau_a P_{ai} \sin F + i\tau_a \hat{r}_a \cos FF' \hat{r}_i \\ &\equiv -\sin FF' \hat{r}_i + i\tau_a X_{ai} \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} \partial_i U_0^\dagger &= -\sin FF' \hat{r}_i - i\tau_a P_{ai} \sin F - i\tau_a \hat{r}_a \cos FF' \hat{r}_i \\ &\equiv -\sin FF' \hat{r}_i - i\tau_a X_{ai} \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

ただし、 $P_{ai} \equiv \frac{1}{r} (\delta_{ai} - \hat{r}_a \hat{r}_i)$  とする。これらを用いると、

$$\begin{aligned} \text{tr} [\partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi] &= \text{tr} [A \partial_i U_0^\dagger \partial^i U_0 A^\dagger] = -\text{tr} [\partial_i U_0^\dagger \partial^i U_0] \\ &\equiv -\text{tr} [(-\sin FF' \hat{r}_i - i\tau_a X_{ai}) (-\sin FF' \hat{r}_i + i\tau_b X_{bi})] \\ &\equiv -\text{tr} [\sin^2 FF'^2 + X_{ai} X_{bi} \tau_a \tau_b + iY_{ai} \tau_a] \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

のように書ける。ここで、 $\tau_a$  の1次の項はトレースを取ることで消える。 $P_{ai}$  の定義より  $P_{ai} \hat{r}_i = P_{ai} \hat{r}_a = 0$  なので、これを使いながら計算を進めてい、

$$\begin{aligned} \text{tr} [\partial_i U_\pi^\dagger \partial^i U_\pi] &= -\text{tr} [\sin^2 FF'^2 + X_{ai} X_{bi} \tau_a \tau_b + iY_{ai} \tau_a] \\ &= -2 [\sin^2 FF'^2 + X_{ai} X_{ai}] \\ &= -2 [\sin^2 FF'^2 + (P_{ai} \sin F + \hat{r}_a \hat{r}_i \cos FF') (P_{ai} \sin F + \hat{r}_a \hat{r}_i \cos FF')] \\ &= -2 [\sin^2 FF'^2 + P_{ai} P_{ai} \sin^2 F + \hat{r}_a \hat{r}_i \hat{r}_a \hat{r}_i \cos^2 FF'^2] \\ &= -2 \left[ F'^2 + \frac{1}{r^2} (\delta_{ai} - \hat{r}_a \hat{r}_i) (\delta_{ai} - \hat{r}_a \hat{r}_i) \sin^2 F \right] \\ &= -2 \left[ F'^2 + \frac{1}{r^2} (3 - 1 - 1 + 1) \sin^2 F \right] \\ &= -2 \left[ F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right] \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

となる。また、(B.41)式より

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \partial_0 K^\dagger V^0 K + K^\dagger V_0^\dagger \partial^0 K + K^\dagger V_i^\dagger V^i K \\
= & \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \frac{i}{3\Lambda} s^2 [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
& + \frac{i}{\Lambda} s^2 (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) - 2 \frac{s^4}{r^2} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.71}$$

なので

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} (D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) \text{tr} [\partial_\nu U_\pi^\dagger \partial^\nu U_\pi] \\
\rightarrow & \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K \\
& + \frac{i}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
& + \frac{i}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) \\
& - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.72}$$

となる。

$$+6 (D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] (D_\mu K)$$

$\mathcal{O}(1/N_c)$ の寄与をする項は

$$\begin{aligned}
(D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] (D_\mu K) &= (D_0 K)^\dagger [a^0, a^i] (D_i K) + (D_i K)^\dagger [a^i, a^0] (D_0 K) \\
&+ (D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K) \\
\rightarrow & \partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] (D_i K) + (D_i K)^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K \\
&+ (D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K) \\
= & \partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] (\partial_i K + v_i K) + \left( \partial_i K^\dagger + K^\dagger v_i^\dagger \right) [a^i, a^0] \partial_0 K \\
&+ (D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K) \\
= & \partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] \partial_i K + \partial_i K^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K \\
&+ \partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] v_i K + K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K \\
&+ (D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K)
\end{aligned} \tag{B.73}$$

なので、以下で各項の寄与を求める。

- $\partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] v_i K + K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K$

はじめに  $[a^0, a^i]$  を求める。

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] &= [a_0, -a_i] = -a_0 a_i + a_i a_0 = [a_i, a_0] = -[a_0, a_i] \\
&= 2cs\epsilon_{abc}\hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] [A\Omega_a \tau_c^K A^\dagger, A\tau_d^K A^\dagger] \\
&= 2cs\epsilon_{abc}\hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] [A\Omega_a (\tau_c^K \tau_d^K - \tau_d^K \tau_c^K) A^\dagger] \\
&= 2cs\epsilon_{abc}\hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] [A\Omega_a 2i\epsilon_{cde} \tau_e^K A^\dagger] \\
&= 4ics\epsilon_{abc}\epsilon_{cde}\hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] [A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger] \\
&= 4ics (\delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}) \hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] [A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger]
\end{aligned} \tag{B.74}$$

次に、係数を計算し整理すると

$$\begin{aligned}
&(\delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}) \hat{r}_b \left[ \delta_{di} \frac{cs}{r} + \hat{r}_d \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \\
&= \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] - \hat{r}_b \left[ \delta_{bi} \frac{cs}{r} + \hat{r}_b \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] \delta_{ae} \\
&= \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] - \frac{F'}{2} \hat{r}_i \delta_{ae}
\end{aligned} \tag{B.75}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] &= 4ics \left[ \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] - \frac{F'}{2} \hat{r}_i \delta_{ae} \right] [A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger] \\
&= 4ics \left[ \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - \frac{F'}{2} \hat{r}_i A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{B.76}$$

が得られる。これを用いると、

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] v_i &= 4ics \left[ \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - \frac{F'}{2} \hat{r}_i A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right] \\
&\quad \times \left( \frac{i}{r} \epsilon_{hij} \hat{r}_h s^2 A\tau_j^K A^\dagger \right) \\
&= -\frac{4}{r} cs^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \left[ \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\Omega_a \tau_e^K \tau_j^K A^\dagger - \frac{F'}{2} \hat{r}_i A\Omega_a \tau_a^K \tau_j^K A^\dagger \right] \\
&= -\frac{4}{r} cs^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \hat{r}_e \delta_{ai} \frac{cs}{r} A\Omega_a \tau_e^K \tau_j^K A^\dagger \\
&= -\frac{4}{r} cs^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \hat{r}_e \delta_{ai} \frac{cs}{r} A\Omega_a (\delta_{ej} + i\epsilon_{ejk} \tau_k^K) A^\dagger
\end{aligned} \tag{B.77}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{r} c s^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \hat{r}_e \delta_{ai} \frac{cs}{r} A \Omega_a \delta_{ej} A^\dagger \\
&= \frac{4}{r} c s^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \hat{r}_j \delta_{ai} \frac{cs}{r} A \Omega_a A^\dagger \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.78}$$

なので、

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] v_i &= -\frac{4i}{r} c s^3 \epsilon_{hij} \hat{r}_h \hat{r}_e \delta_{ai} \frac{cs}{r} A \Omega_a \epsilon_{ejk} \tau_k^K A^\dagger \\
&= -\frac{4i}{r^2} c^2 s^4 (\delta_{kh} \delta_{ei} - \delta_{ki} \delta_{eh}) \hat{r}_h \hat{r}_e A \Omega_i \tau_k^K A^\dagger \\
&= -\frac{4i}{r^2} c^2 s^4 (\hat{r}_a \hat{r}_b A \Omega_a \tau_b^K A^\dagger - A \Omega_a \tau_a^K A^\dagger) \\
&= \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 (\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) A J_a^N \tau_b^K A^\dagger \\
&= \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 (\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) \left( J_a^N A - \frac{1}{2} A \tau_a^K \right) \tau_b^K A^\dagger \\
&= \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 (\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) \left( J_a^N A \tau_b^K A^\dagger - \frac{1}{2} A (\delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \tau_c^K) A^\dagger \right) \\
&= \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 [(\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) J_a^N A \tau_b^K A^\dagger + 1]
\end{aligned} \tag{B.79}$$

となる。これを  $\langle N |, |N \rangle$  で挟むと、

$$\begin{aligned}
& \langle N | \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 [(\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) J_a^N A \tau_b^K A^\dagger + 1] |N \rangle \\
&= \langle N | \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \left[ (\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) J_a^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \right) + 1 \right] |N \rangle \\
&= \langle N | \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \left[ (\hat{r}_a \hat{r}_b - \delta_{ab}) \frac{1}{2} \sigma_a^N \left( -\frac{1}{3} \sigma_b^N (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \right) + 1 \right] |N \rangle \\
&= \langle N | \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \left[ -\frac{1}{6} \left( (\hat{r}_a \sigma_a^N)^2 - \sigma_a^N \sigma_a^N \right) (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right] |N \rangle \\
&= \langle N | \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \left( \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right) |N \rangle
\end{aligned} \tag{B.80}$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}
& \langle N | \partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] v_i K |N \rangle \\
&= \langle N | \partial_0 K^\dagger \left[ \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \left( \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right) \right] K |N \rangle \\
&= \frac{2i}{3\Lambda r^2} c^2 s^4 \langle N | \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K |N \rangle + \frac{2i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \langle N | \partial_0 K^\dagger K |N \rangle
\end{aligned} \tag{B.81}$$

となる。

- $\partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] \partial_i K + \partial_i K^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K$

次に空間微分と時間微分を1つずつ含む項を調べる。

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] \hat{r}_i &= 4ics \left[ \hat{r}_e \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - \frac{F'}{2} \hat{r}_i A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right] \hat{r}_i \\
&= 4ics \left[ \hat{r}_e \left[ \hat{r}_a \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - \frac{F'}{2} A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right] \\
&= 4ics \left[ \hat{r}_e \hat{r}_a \frac{F'}{2} A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - \frac{F'}{2} A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right] \\
&= 2icsF' \left[ \hat{r}_e \hat{r}_a A\Omega_a \tau_e^K A^\dagger - A\Omega_a \tau_a^K A^\dagger \right] \tag{B.82}
\end{aligned}$$

核子の行列要素をとると、

$$\begin{aligned}
[a^0, a^i] \hat{r}_i &\rightarrow -\frac{icsF'}{\Lambda} \left[ \hat{r}_e \hat{r}_a A J_a^N \tau_e^K A^\dagger - A J_a^N \tau_a^K A^\dagger \right] \\
&= -\frac{icsF'}{\Lambda} \left[ \hat{r}_e \hat{r}_a \left( J_a^N A - \frac{1}{2} A \tau_a^K \right) \tau_e^K A^\dagger - \left( J_a^N A - \frac{1}{2} A \tau_a^K \right) \tau_a^K A^\dagger \right] \\
&= -\frac{icsF'}{\Lambda} \left[ \hat{r}_e \hat{r}_a J_a^N A \tau_e^K A^\dagger - J_a^N A \tau_a^K A^\dagger + 1 \right] \\
&= -\frac{icsF'}{\Lambda} \left[ -\frac{1}{3} \hat{r}_e \hat{r}_a J_a^N \sigma_e^N (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + \frac{1}{3} J_a^N \sigma_a^N (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) + 1 \right] \\
&= -\frac{icsF'}{3\Lambda} (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) - \frac{icsF'}{\Lambda} \tag{B.83}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\partial_0 K^\dagger [a^0, a^i] \partial_i K + \partial_i K^\dagger [a^i, a^0] \partial_0 K \\
&= -\frac{icsF'}{3\Lambda} \left[ \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' - K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K \right] \\
&\quad - \frac{icsF'}{\Lambda} \left[ \partial_0 K^\dagger K' - K'^\dagger \partial_0 K \right] \tag{B.84}
\end{aligned}$$

が得られる。

- $(D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K)$

最後に空間微分を2つ含む項を考える。

$$a_i = i \left[ \delta_{ai} \frac{cs}{r} + \hat{r}_a \hat{r}_i \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \right] A\tau_a A^\dagger \equiv iB_{ai} A\tau_a A^\dagger \tag{B.85}$$

と書く。

1.  $\partial_i K^\dagger [a^i, a^j] \partial_j K$

$$\begin{aligned}
[a^i, a^j] &= [a_i, a_j] = -B_{ai} B_{bj} [A\tau_a A^\dagger, A\tau_b A^\dagger] \\
&= -2i\epsilon_{abc} B_{ai} B_{bj} A\tau_c A^\dagger \\
&= -2i \left[ \epsilon_{ijc} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\epsilon_{ibc} \hat{r}_b \hat{r}_j + \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \hat{r}_i) \right] A\tau_c A^\dagger \tag{B.86}
\end{aligned}$$

となるので、この結果を使うと、

$$\begin{aligned}\hat{r}_i [a^i, a^j] \hat{r}_j &\sim \epsilon_{ijc} \hat{r}_i \hat{r}_j + (\epsilon_{ibc} \hat{r}_b \hat{r}_j + \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \hat{r}_i) \hat{r}_i \hat{r}_j \\ &= 0\end{aligned}\tag{B.87}$$

が得られるから、

$$\partial_i K^\dagger [A^i, A^j] \partial_j K = 0\tag{B.88}$$

となる。

$$2. \partial_i K^\dagger [a^i, a^j] v_j K + K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^j] \partial_j K$$

片方を考えればもう片方はそのエルミート共役を取れば良いので、第1項を考える。

$$\begin{aligned}&\hat{r}_i [a^i, a^j] v_j \\ &= -2i \hat{r}_i \left[ \epsilon_{ijc} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\epsilon_{ibc} \hat{r}_b \hat{r}_j + \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \hat{r}_i) \right] A \tau_c A^\dagger \\ &\quad \times \frac{i}{r} \epsilon_{xjy} \hat{r}_x s^2 A \tau_y A^\dagger \\ &= 2 \frac{s^2}{r} A \tau_c \tau_y A^\dagger \epsilon_{xjy} \hat{r}_x \left[ \epsilon_{ijc} \hat{r}_i \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \right] \\ &= 2 \frac{s^2}{r} A \tau_c \tau_y A^\dagger \hat{r}_x \left[ (\delta_{cy} \delta_{ix} - \delta_{cx} \delta_{iy}) \hat{r}_i \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\delta_{cy} \delta_{ax} - \delta_{cx} \delta_{ay}) \hat{r}_a \right] \\ &= 2 \frac{s^2}{r} A \tau_c \tau_y A^\dagger \left[ (\delta_{cy} - \hat{r}_c \hat{r}_y) \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\delta_{cy} - \hat{r}_c \hat{r}_y) \right] \\ &= 2 \frac{s^2}{r} A \tau_c \tau_y A^\dagger (\delta_{cy} - \hat{r}_c \hat{r}_y) \frac{cs}{r} \frac{F'}{2} \\ &= 2 \frac{s^2}{r} F' \frac{cs}{r} \\ &= 2 \frac{cs^3}{r^2} F'\end{aligned}\tag{B.89}$$

となるから、

$$\partial_i K^\dagger [a^i, a^j] v_j K + K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^j] \partial_j K = 2 \frac{cs^3}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K')\tag{B.90}$$

が得られる。

$$3. K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^j] v_j K$$

$$\begin{cases} v_i = \frac{i}{r} \epsilon_{xiy} \hat{r}_x s^2 A \tau_y A^\dagger \\ v_j = \frac{i}{r} \epsilon_{mjn} \hat{r}_m s^2 A \tau_n A^\dagger \\ [a^i, a^j] = -2i \left[ \epsilon_{ijc} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\epsilon_{ibc} \hat{r}_b \hat{r}_j + \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \hat{r}_i) \right] A \tau_c A^\dagger \end{cases}\tag{B.91}$$

と添字を定める。

$$\begin{aligned}
& v_i^\dagger [a^i, a^j] v_j = -v_i [a^i, a^j] v_j \\
&= 2i \frac{s^4}{r^2} A \tau_y \tau_c \tau_n A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_m \epsilon_{xiy} \epsilon_{mjn} \left[ \epsilon_{ijc} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 + \frac{cs}{r} \left( \frac{F'}{2} - \frac{cs}{r} \right) (\epsilon_{ibc} \hat{r}_b \hat{r}_j + \epsilon_{ajc} \hat{r}_a \hat{r}_i) \right] \\
&= 2i \frac{s^4}{r^2} A \tau_y \tau_c \tau_n A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_m \epsilon_{xiy} \epsilon_{mjn} \epsilon_{ijc} \left( \frac{cs}{r} \right)^2 \\
&= 2i \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y \tau_c \tau_n A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_m \epsilon_{xiy} \epsilon_{mjn} \epsilon_{ijc} \\
&= 2i \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y \tau_c \tau_n A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_m \epsilon_{xiy} (\delta_{nc} \delta_{mi} - \delta_{ni} \delta_{mc}) \\
&= -2i \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y \tau_c \tau_n A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_c \epsilon_{xny} \\
&= -2i \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y (\delta_{cn} + i \epsilon_{cnd} \tau_d) A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_c \epsilon_{xny} \\
&= 2 \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y \tau_d A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_c \epsilon_{cnd} \epsilon_{xny} \\
&= 2 \frac{c^2 s^6}{r^4} A \tau_y \tau_d A^\dagger \hat{r}_x \hat{r}_c (\delta_{dy} \delta_{cx} - \delta_{dx} \delta_{cy}) \\
&= 4 \frac{c^2 s^6}{r^4}
\end{aligned} \tag{B.92}$$

となるので、

$$K^\dagger v_i^\dagger [a^i, a^j] v_j K = -K^\dagger v_i [a^i, a^j] v_j K = -4 \frac{c^2 s^6}{r^4} K^\dagger K \tag{B.93}$$

となる。

まとめると、

$$(D_i K)^\dagger [a^i, a^j] (D_j K) = 2 \frac{cs^3}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 4 \frac{c^2 s^6}{r^4} K^\dagger K \tag{B.94}$$

が得られる。

(B.81) 式、(B.84) 式、(B.94) 式より

$$\begin{aligned}
& 6(D_\nu K)^\dagger [a^\nu, a^\mu] (D_\mu K) \\
\rightarrow & \frac{4i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K + \frac{12i}{\Lambda r^2} c^2 s^4 (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) \\
& - \frac{2icsF'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' - K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
& - \frac{6icsF'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger K' - K'^\dagger \partial_0 K] \\
& + 2\frac{6cs^3}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 24\frac{c^2 s^6}{r^4} K^\dagger K \\
= & \frac{i}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F \partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K + \frac{3i}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) \\
& - \frac{i \sin F F'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' - K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
& - \frac{3i \sin F F'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger K' - K'^\dagger \partial_0 K] \\
& + \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 6\frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.95}$$

### B.3 運動方程式

最終的に得られた  $\mathcal{O}(1/N_c)$  までの寄与を含む Lagrangian を書き出す (簡単のため  $\langle N |, |N \rangle$  は書くことを省略する)。ただし Wess-Zumino 項は今は考えない。また

$$\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K = 4\frac{\boldsymbol{\tau}^N}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}^K}{2} = 4I_{NK} \tag{B.96}$$

と  $I_{NK}$  を導入する。(B.2) 式、(B.46) 式、および (B.24) 式より

$$\begin{aligned}
L^{(2)} &= \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K + \frac{i}{3\Lambda} s^2 [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
&+ \frac{i}{\Lambda} s^2 (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) - 2\frac{s^4}{r^2} K^\dagger K + \frac{1}{4} \left[ 2\frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right] K^\dagger K \\
&= (\partial_0 K^\dagger \partial_0 K - K'^\dagger K') + \frac{i}{3\Lambda} s^2 [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\
&+ \frac{i}{\Lambda} s^2 (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) - 2\frac{s^4}{r^2} K^\dagger K + \frac{1}{4} \left[ 2\frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right] K^\dagger K \\
&= E^2 K^\dagger K - K'^\dagger K' - \frac{2E}{3\Lambda} s^2 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K \\
&- \frac{2E}{\Lambda} s^2 K^\dagger K - 2\frac{s^4}{r^2} K^\dagger K + \frac{1}{4} \left[ 2\frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right] K^\dagger K \\
&= -K'^\dagger K' + E^2 K^\dagger K - \frac{2E}{3\Lambda} s^2 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K \\
&- \frac{2E}{\Lambda} s^2 K^\dagger K + \left\{ \frac{1}{4} \left( 2\frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2\frac{s^4}{r^2} \right\} K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.97}$$

となる。角度積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int d\Omega L^{(2)} &= -k^{*'}k' + E^2 k^*k - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} k^*k \\ &\quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 k^*k + \left\{ \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \right\} k^*k \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

が得られる。(B.3) 式、(B.47) 式、(B.64) 式、(B.72) 式、(B.95) 式、および (B.24) 式から、

$$\begin{aligned} L^{(4)} &= 2K^\dagger K \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] \\ &\quad - \frac{is^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) \partial_0 K] \\ &\quad + (F')^2 K'^\dagger K' + 2 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \\ &\quad + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) \partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K \\ &\quad + \frac{i}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\ &\quad + \frac{i}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) \\ &\quad - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\ &\quad + \frac{is^2 \sin^2 F}{\Lambda r^2} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\ &\quad + \frac{3is^2 \sin^2 F}{\Lambda r^2} (\partial_0 K^\dagger K - K^\dagger \partial_0 K) \\ &\quad - \frac{i \sin F F'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' - K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) \partial_0 K] \\ &\quad - \frac{3i \sin F F'}{\Lambda} [\partial_0 K^\dagger K' - K'^\dagger \partial_0 K] \\ &\quad + \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{(4)} &= 2K^\dagger K \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] + \frac{2Es^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K \\
&+ (F')^2 K'^\dagger K' + 2 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) (E^2 K^\dagger K - K'^\dagger K') \\
&- \frac{2E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\
&- 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\
&- \frac{2s^2 \sin^2 FE}{\Lambda r^2} K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - \frac{6Es^2 \sin^2 F}{\Lambda r^2} K^\dagger K \\
&+ \frac{E \sin FF'}{\Lambda} [K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' + K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K] \\
&+ \frac{3E \sin FF'}{\Lambda} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \\
&+ \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \\
&= 2K^\dagger K \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] + \frac{2Es^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K \\
&+ (F')^2 K'^\dagger K' + 2 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) (E^2 K^\dagger K - K'^\dagger K') \\
&- \frac{2E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\
&- 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\
&- \frac{2E}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K - \frac{6E}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F K^\dagger K \\
&+ \frac{E \sin FF'}{\Lambda} [K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' + K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K] \\
&+ \frac{3E \sin FF'}{\Lambda} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \\
&+ \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \tag{B.99}
\end{aligned}$$

各項を以下のように3種類に分類してさらに整理していく。

1.  $\Lambda$  を含まないもの

$$\begin{aligned}
& 2K^\dagger K \left[ \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) \right] \\
& + (F')^2 K'^\dagger K' + 2 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) (E^2 K^\dagger K - K'^\dagger K') \\
& - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K \\
& + \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^\dagger K + K^\dagger K') - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \\
= & - \frac{2}{r^2} \sin^2 F K'^\dagger K' + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) E^2 K^\dagger K \\
& + K^\dagger K \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\
& - \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} K^\dagger K - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^\dagger K \tag{B.100}
\end{aligned}$$

2.  $\Lambda$  と  $\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N = 4I_{NK}$  を含むもの

$$\begin{aligned}
& \frac{2Es^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N) K - \frac{2E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K \\
& - \frac{2E}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K \\
& + \frac{E \sin F F'}{\Lambda} [K^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K' + K'^\dagger (\boldsymbol{\tau}^N \cdot \boldsymbol{\tau}^K) K] \\
= & \frac{8Es^2 \sin^2 F}{3\Lambda r^2} I_{NK} K^\dagger K - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} K^\dagger K \\
& - \frac{8E}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F I_{NK} K^\dagger K + \frac{4E \sin F F'}{\Lambda} I_{NK} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \\
= & - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} K^\dagger K + \frac{4E \sin F F'}{\Lambda} I_{NK} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \tag{B.101}
\end{aligned}$$

3.  $\Lambda$  を含むが  $\boldsymbol{\tau}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^N$  を含まないもの

$$\begin{aligned}
& - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K - \frac{6E}{\Lambda r^2} s^2 \sin^2 F K^\dagger K + \frac{3E \sin F F'}{\Lambda} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \\
= & - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) K^\dagger K + \frac{3E \sin F F'}{\Lambda} [K^\dagger K' + K'^\dagger K] \tag{B.102}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
& \int dr^3 \frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^{\dagger} K + K^{\dagger} K') \\
&= \int d\Omega dr 6s^2 \sin F F' (K'^{\dagger} K + K^{\dagger} K') \\
&= 6 \int d\Omega dr \left\{ \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F' K^{\dagger} K] - \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F'] K^{\dagger} K \right\} \\
&= 6 \int d\Omega [s^2 \sin F F' K^{\dagger} K]_{r=0}^{r=\infty} - 6 \int d\Omega dr \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F'] K^{\dagger} K
\end{aligned}$$

であるが、 $F(r)$ の境界条件より  $F(r = \infty) = 0$  となること、および今は  $K$  中間子の束縛状態を考えているので  $K$  が無限遠でゼロになることを用いると、

$$\begin{aligned}
\int dr^3 \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F' K^{\dagger} K] &= \int d\Omega dr 6 \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F' K^{\dagger} K] \\
&= \int d\Omega 6 [s^2 \sin F F' K^{\dagger} K] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.103}$$

となる。よって、空間積分することを前提にすれば、

$$\frac{6s^2 \sin F}{r^2} F' (K'^{\dagger} K + K^{\dagger} K') \rightarrow -\frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} [s^2 \sin F F'] K^{\dagger} K$$

とおきかえても構わないことを用いた。よって、

$$\begin{aligned}
L^{(4)} &= -\frac{2}{r^2} \sin^2 F K'^{\dagger} K' + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) E^2 K^{\dagger} K \\
&+ K^{\dagger} K \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\
&- \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} K^{\dagger} K - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} K^{\dagger} K \\
&- \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} K^{\dagger} K + \frac{4E \sin F F'}{\Lambda} I_{NK} [K^{\dagger} K' + K'^{\dagger} K] \\
&- \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) K^{\dagger} K + \frac{3E \sin F F'}{\Lambda} [K^{\dagger} K' + K'^{\dagger} K] \tag{B.104}
\end{aligned}$$

が得られる。角度積分を行うと、

$$\begin{aligned}
\int d\Omega \alpha^2 L^{(4)} &= -\frac{2}{r^2} \sin^2 F k'^* k' + \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) E^2 k^* k \\
&+ k^* k \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\
&- \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} K^{\dagger} K - 6 \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} k^* k \\
&- \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} k^* k + \frac{4E \sin F F'}{\Lambda} I_{NK} [k^* k' + k'^* k] \\
&- \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) k^* k + \frac{3E \sin F F'}{\Lambda} [k^* k' + k'^* k] \tag{B.105}
\end{aligned}$$

となる。したがって、K 中間子の質量項と (B.98) 式、(B.105) 式から、

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega L = \int d\Omega (L^{(2)} + L^{(4)} - m_K^2 K^\dagger K) \\
& = -k^* k' + E^2 k^* k - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} k^* k \\
& \quad - \frac{2E}{\Lambda} s^2 k^* k + \left\{ \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \right\} k^* k \\
& \quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F k'^* k' + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) E^2 k^* k \\
& \quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} k^* k \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin FF' \} K^\dagger K - 6 \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{s^4 \sin^2 F}{r^4} k^* k \\
& \quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{8E}{3\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right) I_{NK} k^* k + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{4E \sin FF'}{\Lambda} I_{NK} [k^* k' + k'^* k] \\
& \quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) k^* k + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{3E \sin FF'}{\Lambda} [k^* k' + k'^* k] \\
& \quad - m_K^2 k^* k \\
& = - \left( 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) k^* k' + \left\{ 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( \frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2 \right) \right\} E^2 k^* k - m_K^2 k^* k \\
& \quad + V_s(r) k^* k + V_v k^* k + \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} (k^* k' + k'^* k) + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} [k^* k' + k'^* k]
\end{aligned} \tag{B.106}$$

が得られる。ただし、 $s = \sin(F/2)$  であり、

$$V_s = V_{s1} + V_{s2} \tag{B.107}$$

$$\begin{aligned}
V_{s1}(r) & = \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \\
& \quad + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left[ \frac{s^4 \sin^2 F}{r^2} + \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin FF' \} \right]
\end{aligned} \tag{B.108}$$

$$\begin{aligned}
V_{s2} & = - \frac{2E}{\Lambda} s^2 - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) \\
& = - \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left[ 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.109}$$

$$V_v = - \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{8Es^2}{3\Lambda} \left[ F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right] I_{NK} \tag{B.110}$$

と定義する。これらに加えて

$$h(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F \quad (\text{B.111})$$

$$f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( \frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2 \right) \quad (\text{B.112})$$

と定義して、さらにまとめると Lagrangian は

$$\begin{aligned} -\int d\Omega L &= h(r)k^*k' + [m_K^2 - f(r)E^2 - V_s(r) - V_{v1}(r)] k^*k \\ &\quad - Q(r)(k^*k' + k^*k) \\ &= h(r)k^*k' + P(r)k^*k - Q(r)(k^*k' + k^*k) \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

となる。ここで、式を簡単にするために

$$P(r) = m_K^2 - f(r)E^2 - V_s(r) - V_{v1}(r) \quad (\text{B.114})$$

$$Q(r) = \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} \quad (\text{B.115})$$

と新たに定義した。

$k \rightarrow k + \delta k$  として変分をとると、

$$\begin{aligned} &\int dr r^2 [h(k^* \delta k' + \delta k^* k') + P(k^* \delta k + \delta k^* k) - Q(k^* \delta k' + \delta k^* k' + k^* \delta k + \delta k^* k)] \\ &= \int dr \delta k \left[ -\frac{d}{dr} (r^2 h k^*) + r^2 P k^* - r^2 Q k^* + \frac{d}{dr} (r^2 Q k^*) \right] \\ &\quad + \int dr \delta k^* \left[ -\frac{d}{dr} (r^2 h k') + r^2 P k - r^2 Q k' + \frac{d}{dr} (r^2 Q k) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

よって、 $k$  の運動方程式として

$$0 = -\frac{d}{dr} (r^2 h k') + r^2 P k - r^2 Q k' + \frac{d}{dr} (r^2 Q k) \quad (\text{B.117})$$

が得られる。さらに、両辺  $r^2$  で割ると

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 h k') + P k - Q k' + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Q k) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 h \frac{dk}{dr} \right) + P k - Q k' + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Q) k + Q k' = 0 \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 h \frac{dk}{dr} \right) + P k + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Q) k = 0 \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 h \frac{dk}{dr} \right) + P k + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Q) k = 0 \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 h(r) \frac{dk}{dr} \right) - E^2 f(r) k + (m_K^2 + V_{eff}) k \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

が得られる。ここで、 $s = \sin(F/2)$  であり、

$$h(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{2}{r^2} \sin^2 F$$

$$f(r) = 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( \frac{2}{r^2} \sin^2 F + F'^2 \right)$$

$$V_{eff} = -V_s(r) - V_v(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Q(r)) \quad (\text{B.119})$$

$$V_s = V_{s1} + V_{s2} \quad (\text{B.120})$$

$$\begin{aligned} V_{s1}(r) = & \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + (F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \\ & + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left[ 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \left( \frac{\sin^2 F}{r^2} + 2(F')^2 \right) - 2 \frac{s^4}{r^2} \left( F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \\ & - \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{6}{r^2} \left[ \frac{s^4 \sin^2 F}{r^2} + \frac{d}{dr} \{ s^2 \sin F F' \} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.121})$$

$$-V_{s2} = \frac{2E}{\Lambda} s^2 \left[ 1 + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \left( F'^2 + \frac{5}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \quad (\text{B.122})$$

$$-V_v = \frac{8E}{3\Lambda} s^2 I_{NK} + \frac{1}{(eF_\pi)^2} \frac{8Es^2}{3\Lambda} \left[ F'^2 + \frac{4}{r^2} \sin^2 F \right] I_{NK} \quad (\text{B.123})$$

$$Q(r) = \frac{4}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} I_{NK} + \frac{3}{(eF_\pi)^2} \frac{EF' \sin F}{\Lambda} \quad (\text{B.124})$$

である。

## B.4 Wess-Zumino 項に由来する $\mathcal{O}(1/N_c)$ の寄与

最後に Wess-Zumino 項からの寄与を考える。Wess-Zumino 項は以下で与えられる。

$$L_{WZ} = i \frac{N_c}{F_\pi^2} B^\mu \left( (D_\mu K)^\dagger K - K^\dagger (D_\mu K) \right) \quad (\text{B.125})$$

ここで、 $B^\mu$  は

$$\begin{cases} B^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} F' \\ B^i = i \frac{\epsilon^{ijk}}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r} F' \hat{r}_k \text{tr} \left[ \dot{A}^\dagger A \tau_j \right] \end{cases} \quad (\text{B.126})$$

で与えられる [28]。Wess-Zumino 項から得られる  $\mathcal{O}(1/N_c)$  の寄与は以下のものである。

$$\begin{aligned}
L_{WZ} &= i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^0\left((\partial_0 K)^\dagger K - K^\dagger(\partial_0 K)\right) + i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^0\left(K^\dagger v_0^\dagger K - K^\dagger v_0 K\right) \\
&\quad + i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^i\left(K^\dagger v_i^\dagger K - K^\dagger v_i K\right) \\
&= i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^0\left((\partial_0 K)^\dagger K - K^\dagger(\partial_0 K)\right) - 2i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^0 K^\dagger v_0 K - 2i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^i K^\dagger v_i K
\end{aligned} \tag{B.127}$$

である。ここで、 $N_c = 3$  である。

第1項は、

$$\begin{aligned}
i\frac{3}{F_\pi^2}B^0\left((\partial_0 K)^\dagger K - K^\dagger(\partial_0 K)\right) &= i\frac{3}{F_\pi^2}\left[-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F'\right]\left((\partial_0 K)^\dagger K - K^\dagger(\partial_0 K)\right) \\
&= -\frac{3i}{2\pi^2 F_\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F'\left((\partial_0 K)^\dagger K - K^\dagger(\partial_0 K)\right)
\end{aligned} \tag{B.128}$$

なので、(B.24) 式を用いると、

$$\int d\Omega L_{WZ} = \frac{3E}{\pi^2 F_\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F'k^*k \tag{B.129}$$

が得られる。したがって、 $k \rightarrow k + \delta k$  として変分をとると、

$$\int dr r^2 \left[ \frac{3E}{\pi^2 F_\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F'(k^*\delta k + \delta k^*k) \right] = 0 \tag{B.130}$$

が得られるので、(B.118) 式の導出と同様に  $r^2$  で割ると、Wess-Zumino 項からの K 中間子の運動方程式への寄与としては

$$\frac{3E}{\pi^2 F_\pi^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}F'k \tag{B.131}$$

が得られる。

第2項と第3項は  $v_0, v_i$  を  $\langle N|, |N\rangle$  で挟み量子化を行うだけなので、得られる結果は

$$\begin{aligned}
&-2i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^0 K^\dagger v_0 K - 2i\frac{N_c}{F_\pi^2}B^i K^\dagger v_i K \\
&= -\frac{N_c}{F_\pi^2 \pi^2}\frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2}F'\left[\frac{4}{3}I_{NK} + 1\right]K^\dagger K + \frac{N_c}{F_\pi^2 \pi^2}\frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2}F'\frac{4}{3}I_{NK}K^\dagger K \\
&= -\frac{N_c}{F_\pi^2 \pi^2}\frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2}F'K^\dagger K
\end{aligned} \tag{B.132}$$

となる。よって、角度積分を行い変分をとることで K 中間子への運動方程式への寄与として

$$-\frac{3}{F_\pi^2 \pi^2}\frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2}F'k \tag{B.133}$$

が得られる。

以上より Wess-Zumino 項からの寄与として

$$\frac{3E}{\pi^2 F_\pi^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} F' k - \frac{3}{F_\pi^2 \pi^2} \frac{\sin^2 F s^2}{\Lambda r^2} F' k \quad (\text{B.134})$$

が得られる。



## 参考文献

- [1] T. Yamazaki and Y. Akaishi, Phys. Lett. B 535, (2002) 70
- [2] Y. Akaishi and T. Yamazaki, Phys. Rev. C 65 (2002) 044005
- [3] A. Doté, H. Horiuchi, Y. Akaishi and T. Yamazaki, Phys. Lett. B590, (2004) 51.
- [4] A. Doté, H. Horiuchi, Y. Akaishi and T. Yamazaki, Phys. Rev. C70, (2004) 044313.
- [5] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Ann. Phys. 10 (1960) 307
- [6] J. K. Kim, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 29
- [7] J. K. Kim, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1074
- [8] Y. Nogami, Phys. Lett. 7, (1963) 288
- [9] A. N. Ivanov, P. Kienle, J. Marton and E. Widmann, nucl-th 0512037
- [10] N. V. Shevchenko, A. Gal, and J. Mares, Phys. Rev. Lett. 98, (2007) 082301
- [11] A. Doté, T. Hyodo, W. Weise, Nucl. Phys. A 804 (2008) 197
- [12] T. Nishikawa and Y. Kondo, Phys. Rev. c 77, (2008) 055202
- [13] W. Weise, R. Härtle, Nucl. Phys. A 804 (2008) 173
- [14] A. D. Martin, Nucl. Phys. B 179 (1981) 33
- [15] T. M. Itoh et al., Phys. Rev. C 58, (1998) 2366
- [16] M. Iwasaki et al., Phys. Rev. Lett. 78, (1997) 3067
- [17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345 ; 124 (1961) 246
- [18] J. Goldstone, Nuovo Cim. 19 (1961) 154
- [19] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965
- [20] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 380

- [21] 九後汰一郎, 『ゲージ場の量子論 I, II』, 培風館, 1989 年
- [22] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17, (1966) 616
- [23] Y. Tomozawa, Nuovo Cimento A 46 (1966) 707
- [24] B. Borasoy, R. Nisler and W. Weise, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 213401
- [25] T. Hyodo and W. Weise, Phys. Rev. C 77 (2008) 035204
- [26] Y. Ikeda, T. Hyodo and W. Weise, Nucl. Phys. A 881 (2012) 98
- [27] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. 31 (1962) 550, 556; Proc. Roy. Soc. 260 (1961) 127
- [28] G. Adkins, C. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. B 228 (1983) 552
- [29] C. G. Callan and I. Klebanov, Nucl. Phys. B 262 (1985) 365
- [30] C. G. Callan, K. Hornbostel and I. Klebanov, Phys.Lett.B 202 (1988) 269
- [31] V. P. ナイア, 『現代的な視点からの場の量子論 基礎編』, 阿部泰裕・磯暁訳, 丸善, 2012 年
- [32] 井上研三, 『素粒子物理学』, 共立出版株式会社, 2011 年
- [33] M. Gell-Mann, Nuovo Cimento 4 (Suppl. 2) (1956) 848
- [34] T. Nakano and K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. (1953) 581
- [35] ジョージアイ, 『物理学におけるリー代数』, 九後汰一郎訳, 吉岡書店, 2010 年
- [36] A. Hosaka and H. Toki, Quarks, baryons and chiral symmetry (World Scientific, Singapore, 2001)
- [37] S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2239
- [38] C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2247
- [39] I. Zahed and G. E. Brown, Phys. Rep. 142 (1986) 1
- [40] M. Praszalowicz, Phys. Lett. B 158 (1985) 264
- [41] H. Yabu and K. Ando, Nucl. Phys. B 301 (1988) 601
- [42] E. Guadanini, Nucl. Phys. B 236 (1984) 35
- [43] Y. Oh, D.-P. Min, M. Rho and N. N. Scoccola, Nucl. Phys. A 534 (1991) 493

- [44] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B 37 (1971) 95
- [45] E. Witten, Nucl. Phys. B 223 (1983) 422, 433