

# 修士論文

## AGT予想の漸化式を用いた証明と 一般化された Jack 多項式による証明

2013年度

名古屋大学・多元数理科学研究科

大久保勇輔

## 概要

本論文は 2 次元共形場理論の相関関数と 4 次元ゲージ理論の分配関数が一致するという AGT 予想に関するサーベイ論文である。著者は修士 2 年次で AGT 予想の Zamolodchikov 漸化式を用いた証明と、一般化された Jack 多項式を用いた“証明”について詳細を確認した。ただし前者は特殊な場合についての証明で、後者は一般の場合だが、別の予想に基づいた証明になっている。本論文では共形場理論の基礎についてまとめた後、この 2 種類の証明を詳述した。また後者の証明に必要な Jack 対称関数や Macdonald 対称関数の基礎、さらに Jack 対称関数と Virasoro 代数の特異ベクトルとの関係についても簡単にまとめた。またこれは著者の修士論文であるが、本文の補足とその後の発展としてあとがきを加筆しておいた。

## 目次

<b>1</b>	<b>序文</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>共形場理論</b>	<b>6</b>
2.1	共形変換と Virasoro 代数	6
2.2	プライマリー場と相関関数	8
2.3	ミニマル表現	9
2.4	相関関数と共形ブロック	13
2.5	自由場表現	18
2.6	命題 2.16 の証明	21
<b>3</b>	<b>Nekrasov 公式</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>AGT 予想</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Zamolodchikov 漸化式を用いた証明</b>	<b>38</b>
5.1	イレギュラーブロックの満たす漸化式	38
5.2	Nekrasov 公式の満たす漸化式	42
<b>6</b>	<b>Jack 多項式と Macdonald 多項式</b>	<b>55</b>
6.1	Calogero-Sutherland 模型と Jack 多項式	56
6.2	Macdonald 多項式	60
6.3	Cauchy の公式	62
6.4	Virasoro 代数の特異ベクトルとの対応	63
<b>7</b>	<b>一般化された Jack 多項式を用いた“証明”</b>	<b>66</b>
7.1	相関関数の自由場表示	66
7.2	$\beta = 1$ の場合 (予想 7.5 の証明)	71
7.3	一般化された Jack 多項式	74
7.4	一般化された Jack 多項式を用いた“証明”(予想 7.5 の“証明”)	88
<b>8</b>	<b>補遺：<math>\tilde{H}_{\beta,N}</math> と <math>H_{\beta,N}</math> の違い</b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>あとがき</b>	<b>94</b>

# 1 序文

2009年, Alday-Gaiotto-立川によって4次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称  $SU(2)$  ゲージ理論のインスタントン分配関数と, 2次元共形場理論の共形ブロックが一致するという驚くべき関係 (AGT 予想) が, 素粒子物理学の超弦理論による立場から発見された [2].

ゲージ理論は長い歴史を持ち, 数学者や物理学者によって精力的に研究された魅力的な理論である. この理論の分配関数を一般に計算することは困難であるが, 簡単化して計算できるようにしたインスタントン分配関数は, 2004年に Nekrasov によって明示的な公式 (Nekrasov 公式) が与えられている [26]. Nekrasov 公式は

$$Z_{\text{Nek}}(q) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{|\vec{Y}|=N} Z_{\vec{Y}}$$

という Yang 図の組  $\vec{Y}$  によってパラメトライズされた項  $Z_{\vec{Y}}$  の和で書き表される. この各項  $Z_{\vec{Y}}$  は因子化された形で与えられており,  $N$  が大きくなると計算量が膨大になるが, 単純な組合せ論的な方法で計算することができる. この内4次元でゲージ群を  $SU(2)$  にしたものが2次元共形場理論と深い関係にある.

共形場理論は1984年に, Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ) の3人によってその基礎がほぼ完成され, 強磁性体をモデル化した2次元 Ising 模型の臨界現象などを記述した [9]. この理論は Virasoro 代数の表現を用いて構築される. Virasoro 代数とは交換関係

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m, 0}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$
$$[L_n, c] = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

を持つ生成元  $L_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) と中心元  $c$  によって生成される Lie 代数である. この Virasoro 代数の表現空間上の作用素で, 生成元  $L_n$  との交換関係が

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n \left( z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi(z), \quad z, h \in \mathbb{C}$$

となるプライマリー場  $\Phi(z)$  が共形場理論で重要な役割を演じ, 様々な興味深い性質を持つ. (このとき  $h$  をプライマリー場の共形次元という.) 例えば共形次元  $h$  のプライマリー場  $\Phi(z)$  に対して, 共形変換の下で  $\Phi(z)dz^h$  は不変となる. さらに共形場理論ではこのプライマリー場の相関関数を求めることが基本的な問題である. 相関関数の計算は難しく通常は近似して解かれることが多いが, BPZ はこれの厳密な形を決定することに成功した. 具体的には相関関数の満たす確定特異点型の微分方程式を導いた.

しかし BPZ の行った研究は, プライマリー場が特殊な共形次元を持つときに限定して行われたもので, 相関関数を一般的な形で調べることはされていなかった. また相関関数の満たす微分方程式を導いても, その解を綺麗に表すことは難しい. 実はプライマリー場の相関関数を少し変形したものが共形ブロックであるのだが, このような共形場理論の立場からみると, Nekrasov 公式と共形ブロックの一致を述べた AGT 予想の研究は, プライマリー場の相関関数に一般的な公式を与えられるという期待の下に行われている.

AGT 予想は発見された直後から様々な拡張が行われた. まず元々の AGT 予想は4次元  $SU(2)$  ゲージ理論で物質場の数が  $N_f = 4$  のものを考えていたが, これはすぐに

$N_f = 0, 1, 2, 3$  の場合に拡張された [12]. これは  $N_f = 4$  の場合から, Nekrasov 公式と共形ブロックに同じ退化極限を施すことによって得ることができる. このとき物質場の少ない Nekrasov 公式に対応させた共形ブロックを, イレギュラーブロックという. またゲージ群をより高階にした 4 次元  $SU(N)$  ゲージ理論と対応するものもある. この場合は  $W_N$  代数という Virasoro 代数を一般化した代数と対応することが予想されている [32]. また [6, 7] によって 4 次元のゲージ理論を  $q$  変形した 5 次元のゲージ理論が, Virasoro 代数や  $W_N$  代数を  $q$  変形したものと対応することも予想されている. 本論文では, 4 次元  $SU(2)$  ゲージ理論と Virasoro 代数を対称性に持つ共形場理論との対応について説明する.

4 次元  $SU(2)$  では [13, 33] によって  $N_f = 0, 1, 2$  の場合の証明が与えられており, また [24] によって  $N_f = 4$  の場合の証明がなされている<sup>1</sup>. [13, 33] では, 1980 年代から知られている, Zamolodchikov が発見した共形ブロックに関する漸化式 (Zamolodchikov 漸化式) を用いて証明している. この漸化式を用いてイレギュラーブロックの満たす漸化式を導くことができ, それと  $N_f = 0, 1, 2$  の Nekrasov 公式が, 同じ漸化式を満たすので一致しているという論法で証明できる. しかし残念なことに, 物質場の多い場合では, Nekrasov 公式の満たす漸化式の確認に技術的な困難が生じてしまい, 現在  $N_f \geq 3$  の AGT 予想には, この論法による証明は与えられていない.

[24] では一般化された Jack 多項式を用いて“証明”している. Jack 多項式とは Calogero-Sutherland 模型という量子可積分模型の励起状態を記述する多項式であり, 優れた可解性を持つ. 例えば, Jack 多項式はパーティションによってパラメトライズされ, ある内積に対して直交関数系を成し, 内積値などの種々の性質が組合せ論的に論じられる. この優れた可解性を用いて, まず Virasoro 代数の中心が  $c = 1$  の場合における AGT 予想が証明されていた [22]. この証明では一旦, 共形ブロックを自由場表示するというアプローチを用いている. 共形ブロックを自由場表示すると Selberg 型の積分  $\langle\langle F \rangle\rangle$  (ここに  $\langle\langle \ \rangle\rangle$  は Selberg 積分に関する特殊な積分記号を表す. 定義 7.1 参照.) で表すことができるのだが, [22] では, そのときの被積分関数  $F$  を Jack 多項式で展開することによって Nekrasov 公式との一致をみている. つまり, 被積分関数を  $F = \sum_{\vec{\lambda}} a_{\vec{\lambda}} P_{\vec{\lambda}}$  と Jack 多項式  $P_{\vec{\lambda}}$  (正確には Jack 多項式の 2 つの積) で展開すると, パーティションの組  $\vec{\lambda}$  でパラメトライズされた各項の積分値が, Nekrasov 公式の各項  $Z_{\vec{\lambda}}$  にそのまま一致していることが確かめられる. ここに,  $a_{\vec{\lambda}}$  は定数とした. ただし, これが上手くいくのは  $c = 1$  のときだけであった.  $c$  が一般の場合には各項が  $Z_{\vec{\lambda}}$  に一致せず, Jack 多項式をそのまま用いても証明が困難である. そこで [24] では Jack 多項式を一般化した多項式を新たに導入している. この一般化された Jack 多項式で被積分関数を展開すれば, Nekrasov 公式を上手く再現することができる. この“証明”は [13, 33] と比べ, 漸化式を使わないので直接的であり,  $N_f = 4$  の場合を証明しているのでより一般的な“証明”といえる. しかし [24] による“証明”は未完成な部分や不完全な議論を含んでいるので, 今後さらに整備される必要がある. 本論文では, この 2 種類の証明を詳述した.

では本論文の構成を説明する. まず第 2 章では共形場理論の基礎についてまとめる. 特に Virasoro 代数の最高ウエイト表現の性質や, その既約性を判定できる特異ベクトルの構成方法などについて述べた. また最高ウエイト表現を解析する上で重要な, 自由場による表現についても説明する. 第 3 章では Nekrasov 公式についてまとめる. Nekrasov 公式

<sup>1</sup>[19, 28] では幾何学的表現論による AGT 予想の説明も与えられている.

には様々なものがあるが、本論文では  $U(2)$  または  $SU(2)$  ゲージ理論の場合のものだけ説明した。また大変心残りではあるが、Nekrasov 公式に関しては著者の浅学によりその導出については説明せず、全て定義とした。第 4 章では AGT 予想の主張をまとめる。この章でイレギュラーブロックの導出や、それを構成する Gaiotto 状態についても詳しく説明し、 $N_f = 4$  の場合からの極限で  $N_f = 0, 1, 2, 3$  の予想が得られることをみる。第 5 章では Zamolodchikov 漸化式を用いた AGT 予想の証明を行う。Zamolodchikov 漸化式を用いたイレギュラーブロックの満たす漸化式の導出や、Nekrasov 公式が同じ漸化式を満たすことについて詳しく述べた。第 6 章では第 7 章で述べる証明の為に、Jack 多項式の基本的な性質についてまとめる。Jack 多項式には Macdonald 多項式というより整った理論を持つ重要な多項式があるので、この多項式についても説明する。また Virasoro 代数の特異ベクトルが Jack 多項式で表示できるということについても述べた。第 7 章では、一般化された Jack 多項式を用いた AGT 予想の“証明”を与える。この証明は未完成な部分や議論が不十分である所が残っているので、その点については予想として明確に記述した。また、この章で与える一般化された Jack 多項式の存在定理とその証明は [24] では与えられていない。類似の多項式の存在定理を調整して著者自身で考えたものを載せた。第 8 章では、Jack 多項式を固有関数に持つ 2 つのハミルトニアンを比較を行い、著者なりの考察を与えた。

## 表記

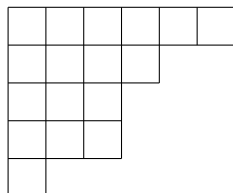
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  によりそれぞれ自然数の集合、整数環、有理数体、実数体、複素数体を表す。
- $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  により非負整数の集合を表す。
- $\mathbb{Z}_{\neq 0}$  により 0 以外の整数の集合を表す。
- $\delta_{i,j}$  によりクロネッカーのデルタを表す。
- $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  により  $x_1, \dots, x_n$  の  $\mathbb{K}$  係数多項式環を表す。
- $\#\{ \quad \}$  により集合のサイズを表す。
- $n$  変数の組  $(z_1, \dots, z_n)$  を誤解を招かないところでは省略して  $(z)$  と表す。

パーティションやヤング図形に関しては以下の表記を用いる。

定義 1.1. パーティション  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  とは、非増加な  $n$  個の整数  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  の列である。このとき  $|\lambda| \equiv \sum_i \lambda_i$  と書き、 $\lambda_i \neq 0$  となる  $\lambda_i$  の数をパーティションの長さといい  $\ell(\lambda)$  と書く。また 0 以外の要素が全て等しければパーティションは同一視する。例えば  $(3, 2) = (3, 2, 0)$  である。

$\lambda$  の中に同じ数がある場合  $m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$  と定めて,  $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$  のように表記することもある. 例えば  $\lambda = (6, 6, 6, 2, 2, 1) = (6^3, 2^2, 1)$  となる.

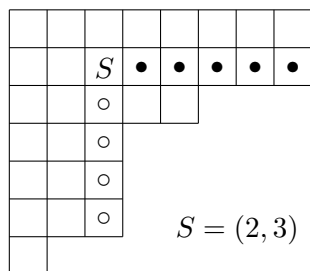
パーティション  $\lambda$  をヤング図形と言われる図形に対応させて考えることがある. それは  $i$  行目に  $\lambda_i$  個の箱を並べて左端をそろえて書いた図形である. 例えば  $\lambda = (6, 4, 3, 3, 1)$  ならば以下のようなになる:



$\lambda'$  により行と列を転置させたヤング図形に対応するパーティションを表す. 例えば上図の  $\lambda = (6, 4, 3, 3, 1)$  の転置は  $\lambda' = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$  である. さらにパーティション  $\lambda$  とそのヤング図の中の座標  $(i, j)$  に対して

$$A_\lambda(i, j) = \lambda_i - j, \quad L_\lambda(i, j) = \lambda'_j - i \quad (1.1)$$

と定めて  $A_\lambda(i, j)$  をアーム長,  $L_\lambda(i, j)$  をレッグ長と呼ぶ. 図形的にはそれぞれヤング図の  $i$  行  $j$  列目にある箱の右または下にある箱の数を表す. 例えば  $\lambda = (8, 8, 5, 3, 3, 3, 1)$  とすると  $A_\lambda(2, 3) = 5, L_\lambda(2, 3) = 4$  となる.



ただし  $A_\lambda(3, 7) = -2, L_\lambda(3, 7) = -1$  のように負の値を取ることもある.

またパーティションに対して次の半順序を付けることができる.

定義 1.2. パーティション  $\lambda, \mu$  に対して  $\lambda \geq \mu$  であるとは  $|\lambda| = |\mu|$  であり, かつ

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r \geq \mu_1 + \dots + \mu_r \quad (\forall r) \quad (1.2)$$

となることである. これをドミナンス半順序という.

注意 1.3. この順序はあくまで半順序であるから全てのパーティションを比べられるわけではない.  $\lambda = (4, 1, 1), \mu = (3, 3, 0)$  が良い例である.

さらに本論文では2つのパーティションの組  $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$  を扱う. このときその大きさを  $|\vec{\lambda}| = |\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}|$  と定める. また2つのパーティションの組を扱うときは, 括弧の形を変えて,  $\vec{\lambda} = ([3, 2, 1], [2, 1])$  のように表記することもある.

ここでは主に  $\lambda, \mu$  によりパーティションを表したが, 第2章のように Virasoro 代数の生成元の表記に用いるときは記号  $I, J, K$ , また第3章のように Nekrasov 公式の表記に用いるときは記号  $Y$ , 第6章のように Jack 多項式などの多項式の表記に用いるときは記号  $\lambda, \mu, \nu$  によりパーティションを表すことにした.

## 2 共形場理論

まずこの章では共形場理論の基礎についてまとめる。特にプライマリー場の相関関数について述べ、さらに自由場を用いた Virasoro 代数の表現を説明する。またプライマリー場の重要な具体例である頂点作用素を紹介する。

共形場理論とは共形変換で不変な場の理論のことである。このような理論は一般に多次元の空間で考えることができるが、共形場理論の中で最も重要であるのが2次元の場合であるので、本論文では2次元共形場理論のみを扱う。2次元の場合では3次元以上の場合とは異なり、共形変換が無数種類存在し、その対称性が無限次元の Lie 代数である Virasoro 代数によって表される。

### 2.1 共形変換と Virasoro 代数

まず共形変換について説明する。共形変換とは、大きさは変えても角度は変えない変換のことである。つまり、 $\mathbb{R}^2$  上の任意の点  $p = {}^t(p_1, p_2)$  を始点とする2本の微小ベクトル  $\Delta A = {}^t(\Delta a_1, \Delta a_2)$ ,  $\Delta B = {}^t(\Delta b_1, \Delta b_2)$  に対して、その余弦

$$\frac{\Delta a_1 \Delta b_1 + \Delta a_2 \Delta b_2}{\sqrt{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2} \sqrt{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2}} \quad (2.1)$$

を不変に保つ十分なめらかな変換  ${}^t(x_1, x_2) \mapsto {}^t(x'_1, x'_2)$  が共形変換である。ではこのような変換の持つ条件を調べる。まず微小ベクトルの終点を変換し、 $\Delta a_i$ ,  $\Delta b_i$  の高次の項を無視すると

$$\begin{pmatrix} x'_1(p + \Delta A) \\ x'_2(p + \Delta A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1(p) \\ x'_2(p) \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} x'_1(p + \Delta B) \\ x'_2(p + \Delta B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1(p) \\ x'_2(p) \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

となる。また始点  $p$  は  ${}^t(x'_1(p), x'_2(p))$  に変換されるから、2本のベクトル  $U\Delta A$  と  $U\Delta B$  の成す余弦が (2.1) と等しくなる為の条件を調べれば良いが、それは  $\Delta A$  と  $\Delta B$  が直交する場合、例えば

$$(\Delta A, \Delta B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

の場合を調べるとすぐに分かり、 ${}^t U U \propto E$  となる。すると、Cauchy-Riemann の関係式

$$\left( \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right) = \left( \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \right), \quad \left( \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \right) = - \left( \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.6)$$

または関係式

$$\left( \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right) = - \left( \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \right), \quad \left( \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \right) = \left( \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.7)$$

を得ることができる。したがって Euclid 空間  $\mathbb{R}^2$  を複素平面  $\mathbb{C}$  とみなし、複素座標  $z = x_1 + \sqrt{-1} x_2$ ,  $z' = x'_1 + \sqrt{-1} x'_2$  を用いれば以下の命題が従う。



命題 2.1 ([38, 命題 4.6], [37, 1.3 節]). 複素平面  $\mathbb{C}$  上の共形変換  $z \mapsto z'$  は,  $\mathbb{C}$  上の正則関数 (または反正則関数) によって表すことができる.

注意 2.2. 実は  $\mathbb{C}$  上の変換を可逆なものに限ればこの逆も成立つ. つまり, 可逆な変換が共形変換であることと (反) 正則関数であることは同値である. また以下簡単の為, 共形変換は正則関数のみを扱うものとする. また  $\mathbb{C}$  上の開集合  $U, V$  に対して  $U$  上で定義された可逆な正則関数  $f : U \rightarrow V$  も共形変換という. このように共形変換を局所的に考えることもある.

ここまでは単に複素平面  $\mathbb{C}$  上での共形変換を説明した. これに無限遠点  $\infty$  を付け加え Riemann 球面  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上での共形変換を考えることもできる.

命題 2.3 ([37, 1.3.2 節]). Riemann 球面  $\mathbb{P}^1$  上での共形変換は一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}) \quad (2.8)$$

によって表すことができる.

したがって  $\mathbb{P}^1$  上の共形変換の成す群は  $SL(2, \mathbb{C})$  と同型な群となる<sup>2</sup>. またこのような  $\mathbb{P}^1$  上での共形変換を大域的共形変換という. これに対して, ある近傍上で定義された共形変換を局所的共形変換という.

### Virasoro 代数の導入

ここで無限小共形変換の生成子の成す代数を調べる. 無限小共形変換は微小な正則関数

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1} \quad (2.9)$$

を用いて,  $z \mapsto z' = z + \epsilon(z)$  と表せる<sup>3</sup>. ここに  $\epsilon_n$  は無限小の複素定数である. この変換による正則関数  $f(z)$  の変化は

$$f(z) \mapsto f(z') = f(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n \left( z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(z) \quad (2.10)$$

となる. したがって無限小共形変換の生成子は  $l_n \equiv -z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) である. さらにこの生成子は交換関係

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m} \quad (2.11)$$

を持つ Lie 代数を成すことが分かる. この Lie 代数を中心拡大すると以下に定義する Virasoro 代数を得ることができる. すなわち, 全ての元と可換になるような中心部分を付加すると,  $l_n$  と  $l_m$  の交換関係に中心部分からくる項  $c_{n,m}$  が付け加わったもの

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c_{n,m} \quad (2.12)$$

を考えることになるが, この交換関係を持つ代数に, Lie 代数となる為に必要な条件 (Jacobi 律) を課すと, その最も一般的なものが Virasoro 代数になっている [40, 3.1 節].

<sup>2</sup>正確には  $SL(2, \mathbb{C})$  の部分群  $\{\pm 1\}$  による商  $PSL(2, \mathbb{C})$  と同型である.

<sup>3</sup>(2.9) の負冪を含む場合は  $\mathbb{C}$  上で正則でないので, 原点を除いた近傍上で定義された共形変換考えている.

定義 2.4. Virasoro 代数とは交換関係

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

$$[L_n, c] = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

を持つ生成元  $L_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) と中心元  $c$  によって生成される Lie 代数である. このとき中心元  $c$  は複素パラメータの役割を果たす.

この無限次元の Lie 代数である Virasoro 代数が 2 次元共形場理論の対称性を表し, 重要な働きをする.

## 2.2 プライマリー場と相関関数

共形場理論で主な考察の対象となるのがプライマリー場という以下のように定義される演算子である.

定義 2.5.  $V_1, V_2$  を Virasoro 代数の表現空間とする. パラメータ  $h \in \mathbb{C}$  に対して線形作用素  $\Phi(z) : V_1 \rightarrow V_2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) が, 交換関係

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n \left( z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi(z) \quad (2.15)$$

を満たすとき  $\Phi(z)$  を共形次元  $h$  のプライマリー場という.

注意 2.6. 幾何学的には, この交換関係は  $\Phi(z)dz^h$  が共形変換で不変なことを意味する. ただし  $dz$  は微小な線要素を表す.

このプライマリー場の具体的な例は 2.5 節で自由場表現を用いて与えることにする. ここではさらにその相関関数を定義する.

定義 2.7.  $N$  個のプライマリー場  $\Phi_i(z_i) : V_i \rightarrow \tilde{V}_{i+1}$  ( $\tilde{V}_{i+1} \subset V_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) とベクトル  $|v\rangle \in V_1$  と双対空間のベクトル  $\langle u| \in V_{N+1}^*$  に対して, その合成により定まる関数

$$\langle u | \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) | v \rangle \quad (2.16)$$

をプライマリー場の  $N$  点相関関数という.

このプライマリー場の相関関数を求めることが共形場理論における基本的な問題である. また 2.5 節において, 相関関数の例として自由場を用いたものをあげた.

また共形場理論では  $L_n$  の母関数であるストレストンソル

$$T(z) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \quad (2.17)$$

を用いて共形変換性を規定する方法もある. そのときに作用素積展開 (OPE) と呼ばれる, 場の演算子の積の特異性を演算子の和で表した式を用いる. 例えば, 共形次元  $h$  のプライマリー場  $\Phi(w)$  とストレストンソルの OPE は

$$T(z)\Phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2} \Phi(w) + \frac{1}{z-w} \Phi'(w) + \text{:}T(z)\Phi(w)\text{:}, \quad \left| \frac{w}{z} \right| < 1, \quad (2.18)$$

$$\Phi(w)T(z) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w) + {}_0T(z)\Phi(w)_0, \quad \left|\frac{z}{w}\right| < 1 \quad (2.19)$$

となる ([40, (3.30)], [36]). ここに,  ${}_0 - {}_0$  は Virasoro 代数の正規順序化という操作であり, 整数  $n$  と任意の演算子  $\mathcal{O}$  に対して

$${}_0L_n\mathcal{O}_0 = \begin{cases} {}_0\mathcal{O}_0L_n, & n > -2 \\ L_n{}_0\mathcal{O}_0, & n \leq -2 \end{cases} \quad (2.20)$$

で定められる線形写像である. そして逆に (2.18), (2.19) を満たす演算子  $\Phi(w)$  はプライマリー場の定義である交換関係 (2.15) を満たすことが示せる. このように, 基本的に OPE と交換関係は等価である. また (2.18), (2.19) のように  $T(z)\Phi(w)$  と  $\Phi(w)T(z)$  は解析接続すると同じ有理関数を用いて表される. 以後, そのような関係を

$$T(z)\Phi(w) \stackrel{a.c.}{\sim} \Phi(w)T(z) \quad (2.21)$$

と表すことにする.

### 2.3 ミニマル表現

この節ではプライマリー場の相関関数をミニマル表現上で考える. ミニマル表現上での相関関数は, 特異性が完全に決定されるという良い性質をもつ貴重な例である. まずはミニマル表現を与える為に, その元となる Virasoro 代数の最高ウエイト表現を定義し, その構造について述べる.

**定義 2.8.** ベクトル空間  $V$  上の Virasoro 代数の表現で,  $V$  の元  $|h\rangle \neq 0$  と  $h \in \mathbb{C}$  が存在して

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad (2.22)$$

$$L_n|h\rangle = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.23)$$

を満たし, かつ

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_i}|h\rangle, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_i \geq 1 \quad (2.24)$$

の形をしたベクトルによって  $V$  が生成されるとき, この表現を Virasoro 代数の最高ウエイト表現という. また  $|h\rangle$  を最高ウエイト  $h$  の最高ウエイトベクトルという. 特に, (2.24) の形をしたベクトルが全て線形独立であるとき,  $V$  を Verma 加群といい  $M_h$  と書く.

**注意 2.9.** Virasoro 代数の任意の生成元を  $|h\rangle$  に有限回作用させたものは, 全て (2.24) の形のベクトルの線形結合で書ける. 例えば,

$$L_{-1}L_{-3}|h\rangle = (L_{-3}L_{-1} + 2L_{-4})|h\rangle, \quad (2.25)$$

$$L_1L_{-4}L_{-1}|h\rangle = (L_{-4}L_1 + 5L_{-3})L_{-1}|h\rangle = (2hL_{-4} + 5L_{-3}L_{-1})|h\rangle \quad (2.26)$$

などとなる. よって

$$M_h = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|h\rangle \quad (2.27)$$

$$= (|h\rangle, L_{-1}|h\rangle, L_{-1}^2|h\rangle, L_{-2}|h\rangle, \dots \text{で張られるベクトル空間})$$

のように定義することもある.

(2.24) のようなベクトルを表示するに、次のようにパーティションを用いることがある。0 を含まないパーティション  $J = (J_1, \dots, J_n)$ ,  $J_1 \geq J_2 \geq \dots \geq J_n > 0$  に対して、Virasoro 代数の演算子を

$$L_{-J} = L_{-J_1} L_{-J_2} \cdots L_{-J_n} \quad (2.28)$$

と書くことにする。ただし添え字  $J$  の前にマイナスがつかない場合は

$$L_J = L_{J_n} L_{J_{n-1}} \cdots L_{J_1} \quad (2.29)$$

を表すものとする。

ではこの Verma 加群  $M_h$  の構造について説明する。まず  $M_h$  の基底  $L_{-J}|h\rangle$  は全て  $L_0$  の固有ベクトルになっている。例えば、

$$L_0 L_{-2} L_{-1}|h\rangle = (h+3)L_{-2} L_{-1}|h\rangle \quad (2.30)$$

のようになる。その固有値から  $h$  を引いた数をそのベクトルの次数と呼び、さらに基底  $L_{-J}|h\rangle$  ( $J = (J_1, \dots, J_n)$ ) の次数は  $J_1 + J_2 + \dots + J_n$  になっていることが分かる。よって次のように、 $M_h$  は  $L_0$  の固有空間で分解することができ、固有空間はその固有値によって次数 (レベル) を割り当てられる。

次数	次元	基底
0	1	$ h\rangle$
1	1	$L_{-1} h\rangle$
2	2	$L_{-2} h\rangle, L_{-1}^2 h\rangle$
3	3	$L_{-3} h\rangle, L_{-2}L_{-1} h\rangle, L_{-1}^3 h\rangle$
4	5	$L_{-4} h\rangle, L_{-3}L_{-1} h\rangle, L_{-2}^2 h\rangle, L_{-2}L_{-1}^2 h\rangle, L_{-1}^4 h\rangle$

次数  $k$  の固有空間を  $M_h(k)$  と書くと  $M_h$  は  $M_h(k)$  の無限直和になっている：

$$M_h = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_h(k). \quad (2.31)$$

ここで固有空間  $M_h(k)$  の次元は、次数  $k$  の分割数  $P(k)$  になっている。分割数  $P(k)$  とは  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  かつ  $a_1 + \dots + a_k = k$  を満たす、 $k$  個の非負整数の組  $(a_1, \dots, a_k)$  の組数 (つまり大きさが  $k$  のパーティションの数) であり、母関数を用いて、

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)q^k = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1} \quad (2.32)$$

と表せる。

さらに Verma 加群  $M_h$  上での相関関数を与える為に、 $M_h$  の双対空間を定義する。

**定義 2.10.** Virasoro 代数の表現空間  $M_h^*$  を

$$\langle h|L_0 = \langle h|h, \quad (2.33)$$

$$\langle h|L_{-n} = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.34)$$

を満たすベクトル  $\langle h|$  を用いて、

$$M_h^* = \langle h|\mathbb{C}[L_1, L_2, \dots] \quad (2.35)$$

と定める。

注意 2.11.  $M_h^*$  は  $M_h$  と同様の構造をしており, その基底はパーティション  $J$  を用いて  $\langle h | L_J$  と書ける. さらに  $M_h^*$  を  $L_0$  の固有空間で分解し, それを次数付けることができる.

$M_h$  と  $M_h^*$  との間のペアリング  $M_h^* \times M_h \rightarrow \mathbb{C}$  は性質

$$\langle u | L_n | v \rangle \equiv \left( \langle u | L_n \rangle | v \rangle = \langle u | (L_n | v \rangle), \quad \langle u | \in M_h^*, | v \rangle \in M_h \quad (2.36)$$

及び  $\langle h' | h \rangle = \delta_{h,h'}$  によって定まる双線形形式と定義する. 例えば,  $\langle h | L_2 L_{-2} | h \rangle$  は Virasoro 代数の交換関係を用いて正モードは右へ, 負モードは左へ移動させることによって

$$\langle h | L_2 L_{-2} | h \rangle = \langle h | \left( L_{-2} L_2 + 4L_0 + \frac{c}{2} \right) | h \rangle = 4h + \frac{c}{2} \quad (2.37)$$

と一意的に求まる.

さらに Verma 加群  $M_h$  の構造を調べるのに重要なのが, 特異ベクトルと呼ばれるベクトルである.

定義 2.12.  $V$  上の Virasoro 代数の表現において,  $V$  の元  $|\chi\rangle \neq 0$  が特異ベクトルであると任意の正モード  $L_n$  ( $n \geq 1$ ) に対して

$$L_n |\chi\rangle = 0 \quad (2.38)$$

となることである.

Verma 加群  $M_h$  上では最高ウェイトベクトル  $|h\rangle$  の定数倍は自明な特異ベクトルである. ここで, 他の特異ベクトルの存在を議論することは, 表現の既約性を判定するのに役立つ. 実際, 自明でない特異ベクトル  $|\chi\rangle$  が存在するとき,  $|\chi\rangle$  に負モードを作用させて得られる部分空間

$$\begin{aligned} M_h \supset \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots] |\chi\rangle \\ = ( |\chi\rangle, L_{-1} |\chi\rangle, L_{-1}^2 |\chi\rangle, L_{-2} |\chi\rangle \dots \text{で張られるベクトル空間} ) \end{aligned} \quad (2.39)$$

は, 元の表現の部分表現になっていることが分かる. 特に Virasoro 代数の最高ウェイト表現において, その表現が可約であることと, 自明でない特異ベクトルが存在することは同値であることが知られている [15, Proposition 3.6]. このように, Verma 加群  $M_h$  の構造を調べるのに特異ベクトルは重要である. この特異ベクトルに関する研究は十分に行われており, その存在性については以下のように知られている.

命題 2.13 ([40, 3.7 節]). Virasoro 代数の中心  $c$  を  $\beta \in \mathbb{C}$  を用いて

$$c = 13 - 6 \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) \quad (2.40)$$

とパラメトライズしておき, 整数  $r, s$  に対して

$$h_{r,s} = \frac{(r\beta - s) - (\beta - 1)^2}{4\beta} \quad (2.41)$$

と定める. このとき Verma 加群  $M_h$  は,  $h = h_{r,s}$  ( $rs > 0$ ) のとき, 次数  $rs$  に特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  を持ち, それは定数倍を除いて一意である.

この特異ベクトルの存在を示す特殊な値  $h_{r,s}$  は、以下に定義する Kac 行列の行列式の零点になっている。

**定義 2.14.** Verma 加群  $M_h$  上において、 $n$  次の部分空間  $M_h(n)$  の基底同士のペアリング  $\langle h | L_J L_{-K} | h \rangle$  を成分に持つ行列を Kac 行列と呼び、 $[B_{c,h}^n]$  と書く。またその成分を  $[B_{c,h}^n]_{J,K}$  と書く。

**例 2.15.** 1 次、2 次、3 次の Kac 行列は

$$[B_{c,h}^1] = (\langle h | L_1 L_{-1} | h \rangle) = (2h), \quad (2.42)$$

$$[B_{c,h}^2] = \begin{pmatrix} \langle h | L_2 L_{-2} | h \rangle & \langle h | L_2 L_{-1} L_{-1} | h \rangle \\ \langle h | L_1 L_1 L_{-2} | h \rangle & \langle h | L_1 L_1 L_{-1} L_{-1} | h \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c+8h}{2} & 6h \\ 6h & 4h(1+2h) \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} [B_{c,h}^3] &= \begin{pmatrix} \langle h | L_3 L_{-3} | h \rangle & \langle h | L_3 L_{-2} L_{-1} | h \rangle & \langle h | L_3 L_{-1}^3 | h \rangle \\ \langle h | L_1 L_2 L_{-3} | h \rangle & \langle h | L_1 L_2 L_{-2} L_{-1} | h \rangle & \langle h | L_1 L_2 L_{-1}^3 | h \rangle \\ \langle h | L_1^3 L_{-3} | h \rangle & \langle h | L_1^3 L_{-2} L_{-1} | h \rangle & \langle h | L_1^3 L_{-1}^3 | h \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(c+3h) & 10h & 24h \\ 10h & h(8+c+8h) & 12h(1+3h) \\ 24h & 12h(1+3h) & 24h(1+3h+2h^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。

このように、 $\langle h | L_J L_{-K} | h \rangle = \langle h | L_K L_{-J} | h \rangle$  なので Kac 行列は対称行列である。中心  $c$  をパラメトライズすることによって、この Kac 行列式が  $h$  の一次式に因数分解できることが示せる。（証明は 2.6 節）

**命題 2.16** ([40, (3.182)]). Virasoro 代数の中心  $c$  を (2.40) によってパラメトライズすると、 $n$  次の Kac 行列式は

$$\det[B_{c,h}^n] = (\text{定数}) \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ rs \leq n}} (h - h_{r,s})^{P(n-rs)} \quad (2.45)$$

となる。ここに  $h_{r,s}$  は (2.41) で定めたものであり、 $P(n)$  は  $n$  の分割数を表す。

この Kac 行列式を認めれば、次のように特異ベクトルを作ることができる [38, 4.2.10 節]。例えば 3 次の場合で説明する。まず定義から、特異ベクトルは任意のベクトルとの内積が 0 である。レベルの異なるベクトル同士の内積は自明に 0 となるので、3 次のベクトル  $(C_1 L_{-3} + C_2 L_{-2} L_{-1} + C_3 L_{-1}^3) | h \rangle$  で、

$$\begin{pmatrix} \langle h | L_3 \\ \langle h | L_1 L_2 \\ \langle h | L_1^3 \end{pmatrix} (C_1 L_{-3} + C_2 L_{-2} L_{-1} + C_3 L_{-1}^3) | h \rangle = [B_{c,h}^3] \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

を満たすものを探せばよい。例えば  $h = h_{3,1}$  のときは Kac 行列式が 0 になるので、非自明な解  $(C_1, C_2, C_3)$  が得られる。この値を係数に持つベクトルが 3 次の特異ベクトルになっ

ている. このとき, 任意のベクトルとの内積が 0 になるベクトルは, 0 ベクトルか, 特異ベクトルか, もしくは低い次数の特異ベクトルに負モードを作用させて得られるベクトルである. しかし, ここで  $rs = n$  となる  $h_{r,s}$  で, 上記の方法で得た  $n$  次のベクトルが特異ベクトルでない心配はない. なぜなら,  $\beta$  が generic なとき,  $(r, s) \neq (r', s')$  ならば  $h_{r,s} \neq h_{r',s'}$  となる ( $r, s \geq 1$  とする) ので,  $n$  次で初めて現れた Kac 行列式の零点  $h_{r,s}$  に  $h$  が等しいとき, それより低い次数の特異ベクトルは構成できないからである.

また特異ベクトルには Jack 多項式を用いた表示が知られている. それについては第 6 章で述べる.

例 2.17 ([40, (3.101)-(3.103)]). 以下のベクトルは特異ベクトルである.

$$|\chi_{1,1}\rangle = L_{-1} |h_{1,1}\rangle, \quad (2.47)$$

$$|\chi_{2,1}\rangle = (tL_{-2} - L_{-1}^2) |h_{2,1}\rangle, \quad (2.48)$$

$$|\chi_{1,2}\rangle = \left(\frac{1}{t}L_{-2} - L_{-1}^2\right) |h_{1,2}\rangle, \quad (2.49)$$

$$|\chi_{3,1}\rangle = (2t(2t-1)L_{-3} + -4tL_{-2}L_{-1} + L_{-1}^3) |h_{3,1}\rangle, \quad (2.50)$$

$$|\chi_{1,3}\rangle = \left(\frac{2(t-2)}{t^2}L_{-3} + -\frac{4}{t}L_{-2}L_{-1} + L_{-1}^3\right) |h_{1,3}\rangle. \quad (2.51)$$

これらの特異ベクトルから  $M_{h_{r,s}}$  の部分表現が作り出される. ここで, 本節の始めにふれたミニマル表現とは, この部分表現で割った既約表現のことである.

定義 2.18. ミニマル表現を Verma 加群  $M_h$  の全ての特異ベクトルから生成される部分表現による商として定義する.

注意 2.19. 例えば特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  から生成される部分表現  $\mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots] |\chi_{r,s}\rangle$  による商を考えるということは,  $|\chi_{r,s}\rangle = 0$  とみなすことと同じである. よってミニマル表現といった場合には今後, 単に特異ベクトルが全て 0 であることを意味するものとする.

このミニマル表現を用いて, BPZ はプライマリー場の相関関数の満たす微分方程式を導くことに成功した.

## 2.4 相関関数と共形ブロック

この節で相関関数について知られている基本的な内容を, 簡単に説明する. また相関関数の中で重要な共形ブロックという構成要素を導入する.

まず相関関数の特異性は, プライマリー場同士の作用素積展開により考えることができる. それを記述する為に, Virasoro 代数のプライマリー場  $\Phi(w)$  への作用を

$$(\hat{L}_n \Phi)(w) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{n+1} T(z) \Phi(w) \quad (2.52)$$

と定義する<sup>4</sup>. ここに, 積分  $\oint_w$  は極  $z = w$  を含む閉曲線上で積分することを表す. また  $\Phi(w)$  はプライマリー場でなくてもよく,  $T(z)\Phi(w) \stackrel{a.c.}{\sim} \Phi(w)T(z)$  となる一般的な場に対し

<sup>4</sup>Verma 加群  $M_h$  に作用する Virasoro 代数の生成元と区別する為に, プライマリー場に作用する Virasoro 代数の生成元を  $\hat{L}_n$  と書く.

ても同じように定義する. もし  $\Phi(w)$  が共形次元  $h$  のプライマリー場であるならば, ストレステンソルとの作用素積展開 (2.18) から

$$(\hat{L}_n\Phi)(w) = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.53)$$

$$(\hat{L}_0\Phi)(w) = h\Phi(w), \quad (2.54)$$

$$(\hat{L}_{-1}\Phi)(w) = \Phi'(w) \quad (2.55)$$

となる. このことから分かるようにプライマリー場は最高ウェイトベクトルに対応しており, Virasoro 代数が作用したプライマリー場の族は, Verma 加群と同じような階層構造をもつ.

$$\begin{array}{c} \Phi \\ \hat{L}_{-1}\Phi \\ \hat{L}_{-2}\Phi, \hat{L}_{-1}^2\Phi \\ \hat{L}_{-3}\Phi, \hat{L}_{-2}\hat{L}_{-1}\Phi, \hat{L}_{-1}^3\Phi \\ \hat{L}_{-4}\Phi, \hat{L}_{-3}\hat{L}_{-1}\Phi, \hat{L}_{-2}^2\Phi, \hat{L}_2\hat{L}_{-1}^2\Phi, \hat{L}_{-1}^4\Phi \end{array}$$

これらの場を descendant 場といい, その族を共形族と呼ぶ. また共形族の張るベクトル空間は Virasoro 代数の表現空間になっている.

プライマリー場同士の作用素積展開は, この descendant 場を用いて

$$\begin{aligned} \Phi_1(z)\Phi_2(w) &= (z-w)^{h-h_1-h_2} \{ \Phi(w) + (z-w)A_1(w) + (z-w)^2A_2(w) + \dots \}, \\ A_1(w) &= b_1(\hat{L}_{-1}\Phi)(w), \\ A_2(w) &= b_2(\hat{L}_{-2}\Phi)(w) + b_{12}(\hat{L}_{-1}^2\Phi)(w) \end{aligned} \quad (2.56)$$

と書くことができる [40, (3.63)]. ここに,  $b_1, b_{12}, b_2$  は定数であり,  $\Phi(w)$  は共形次元  $h$  のプライマリー場とした. この共形次元  $h$  は一般には  $h_1, h_2$  には依存せず, 様々な値を考えることができる. この場合は作用素  $\Phi_1(z)$  の値域を  $M_h$  に指定して考えている. ただし中心  $c$  が特殊な値を持つとき, ミニマル模型という有限個のプライマリー場からなる模型を考えることができるが, この模型では有限個のプライマリー場が閉じた OPE をなす.

では一般にプライマリー場の相関関数が実際にどのような関数になるのかをみる. 特に, 真空  $|0\rangle$  (最高ウェイト 0 の最高ウェイトベクトル) でプライマリー場を挟んだ真空期待値

$$\langle \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \rangle = \langle 0 | \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) | 0 \rangle \quad (2.57)$$

を考える. ここにプライマリー場  $\Phi_i(z_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) は適当な Verma 加群の間の作用素とし, その共形次元は  $h_i$  とする.

まず 3 点関数までは完全に座標依存性が決定される.

**命題 2.20** ([40, (3.117)]). 1 点, 2 点, 3 点のプライマリー場の相関関数は

$$\langle \Phi_1(z_1) \rangle = C_1 \delta_{h_1, 0}, \quad (2.58)$$

$$\langle \Phi_2(z_2)\Phi_1(z_1) \rangle = \frac{C_{21}}{z_{21}^{2h_1}} \delta_{h_1, h_2}, \quad (2.59)$$

$$\langle \Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2)\Phi_1(z_1) \rangle = \frac{C_{321}}{z_{21}^{h_1+h_2-h_3} z_{31}^{h_1+h_3-h_2} z_{32}^{h_2+h_3-h_1}} \quad (2.60)$$

となる. ここに  $C_1, C_{21}, C_{321}$  は定数であり,  $z_{ij} = z_i - z_j$  とした.



これは真空の  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性を用いるだけで求めることができる.  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性とは, Virasoro 代数の部分代数  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  との交換関係だけを用いるということである. この部分代数が Lie 代数  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  と同型であり, 大域的共形変換の成す群と対応している. ミニマル表現で考えると特異ベクトルは 0 となるから,  $L_{-1}|0\rangle = \langle 0|L_1 = 0$  とみなされる. よってミニマル表現の真空は  $L_n|0\rangle = \langle 0|L_n = 0$  ( $n = 0, \pm 1$ ) となる. このことから, 一般に  $N$  点関数  $\Psi(z) = \langle \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \rangle$  に対して

$$\langle 0|L_n \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1)|0\rangle = 0, \quad n = 0, \pm 1 \quad (2.61)$$

において交換関係を使って  $L_n$  を右端まで移動させれば, 微分方程式

$$\sum_{i=1}^N z_i^n \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + h_i(n+1) \right) \Psi(z) = 0, \quad n = 0, \pm 1 \quad (2.62)$$

を得ることができる. この 3 本の連立微分方程式を解けば, (2.58)-(2.60) などが得られる. また定数  $C_{321}$  などの具体的な値は

$$\begin{aligned} C_{321} &= \lim_{w \rightarrow \infty} w^{2h_3} \langle 0| \Phi_3(w) \Phi_2(1) \Phi_1(0) |0\rangle \\ &= \langle h_3| \Phi_2(1) |h_1\rangle \end{aligned} \quad (2.63)$$

によって計算される [40, (3.118)].

しかし 4 点関数の場合は  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性だけでは完全には決まらない.

**命題 2.21** ([40, (3.120)]).  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性を用いて 4 点関数を評価すると,

$$\langle \Phi_4(z_4) \Phi_3(z_3) \Phi_2(z_2) \Phi_1(z_1) \rangle = z_{43}^{h_1+h_2-h_3-h_4} z_{42}^{2h_2} z_{41}^{-h_1+h_2+h_3-h_4} z_{31}^{h_1+h_2+h_3-h_4} f(x) \quad (2.64)$$

となる. ここに  $x$  は複比と呼ばれるもので

$$x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \quad (2.65)$$

とし,  $f(z)$  は  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性だけでは不定に残ってしまう関数であり

$$f(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} w^{2h_4} \langle \Phi_4(w) \Phi_3(1) \Phi_2(z) \Phi_1(0) \rangle = \langle h_4| \Phi_3(1) \Phi_2(z) |h_1\rangle$$

とした.

**注意 2.22.** このように  $SL(2, \mathbb{C})$  不変性だけでは, 4 点関数の場合は  $f(x)$  の分だけ任意性が残ってしまう. さらに一般に  $N$  点関数では,  $N-3$  の自由度を持った関数の分だけ任意性が残ってしまう.

そこでプライマリー場の共形次元が, 特異ベクトルを持つ最高ウェイト  $h_{r,s}$  と同じであるとき, さらに高階の対称性を用いて新たな微分方程式を導出することができる. 例えば  $h_1 = h_{2,1}$  の場合には, 微分方程式

$$\left[ \frac{1}{t} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \sum_{i=2}^N \left( \frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right] \Psi(z) = 0 \quad (2.66)$$

が導かれる [40, (3.125)]. これは descendant 場を組み合わせると, Null 場という特異ベクトルに対応した場が得られることを使う. 例えば  $h_1 = h_{2,1}$  のとき, 場

$$t\hat{L}_{-2}\Phi_1(z) - \hat{L}_{-1}^2\Phi_1(z) \quad (2.67)$$

は Null 場となる. この Null 場が相関関数中で 0 になることを要請する. つまりミニマル表現上で相関関数を考える. このときに, ストレステンソルの挿入された相関関数に対する共形 Ward 恒等式

$$\langle 0|T(z)\Phi_N(w_N)\cdots\Phi_1(w_1)|0\rangle = \sum_{i=1}^N \left( \frac{h_i}{(z-w_i)} + \frac{1}{z-w_i} \frac{\partial}{\partial w_i} \right) \langle 0|\Phi_N(w_N)\cdots\Phi_1(w_1)|0\rangle \quad (2.68)$$

を用いて微分方程式を導くことができる. またこの恒等式は作用素積展開 (2.18) により導かれる [40, (3.35)]. さらに  $\Psi(z)$  が 4 点関数で  $h_1 = h_{2,1}$  のとき, (2.64) の  $f(x)$  は超幾何微分方程式を満たし, 相関関数が超幾何関数で与えられることが知られている [37, 3.2 節].

### 共形ブロック

このように BPZ の研究によって不定に残った  $f(x)$  に重要な情報を与えることができるが, これは相関関数の中に Null 場を持つようなプライマリー場があるときのみ考えられる. また, 超幾何関数などによって相関関数を綺麗に書くことができるものはごく稀な例である. 序文でも述べたが, このような共形場理論の立場からみれば, AGT 予想の研究はこの  $f(x)$  に一般的な公式を与えようという動機の基に行われている. この節の最後に  $f(x)$  を変形して AGT 予想で用いる共形ブロックを導入する.

まず  $f(z) = \langle h_4|\Phi_3(1)\Phi_2(z)|h_1\rangle$  の中間状態の空間, つまり  $\Phi_2(z)$  の値域で  $\Phi_3(1)$  の定義域の空間を 1 つ指定する. ここではそれを Verma 加群  $M_h$  とする. この空間へ射影する作用素

$$1_h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|J|=|K|=n} L_{-J}|h\rangle [B_{c,h}^n]^{J,K} \langle h|L_K \quad (2.69)$$

を  $f(z)$  に差し込んだものは,

$$f_h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|J|=|K|=n} \langle h_4|\Phi_3(1)L_{-J}|h\rangle [B_{c,h}^n]^{J,K} \langle h|L_K\Phi_2(z)|h_1\rangle \quad (2.70)$$

となり, 3 点関数の和の形に帰着できる<sup>5</sup>. ここに, 添え字が上についた  $[B_{c,h}^n]^{J,K}$  は,  $n$  次の Kac 行列の逆行列成分を表す. 例えば,

$$[B_{c,h}^1]^{[1],[1]} = \frac{1}{2h}, \quad (2.71)$$

<sup>5</sup>通常はモデルの持つ全てのプライマリー場の共形次元の集合  $\{h_a\}$  を考え, Hilbert 空間を  $\bigoplus_a M_{h_a}$  とする. 従って挿入すべき完全系は

$$1 = \sum_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|J|=|K|=n} L_{-J}|h_a\rangle [B_{c,h}^n]^{J,K} \langle h_a|L_K$$

であるが, ここでは簡単のため中間状態を一つの共形次元に制限したものをだけを表記した.

$$\begin{pmatrix} [B_{c,h}^2]^{[2],[2]} & [B_{c,h}^2]^{[2],[1,1]} \\ [B_{c,h}^2]^{[1,1],[2]} & [B_{c,h}^2]^{[1,1],[1,1]} \end{pmatrix} = \frac{1}{16h^2 + 2ch - 10h + c} \begin{pmatrix} 2(2h+1) & -3 \\ -3 & \frac{8h+c}{4h} \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

$$[B_{c,h}^3]^{[1^3],[1^3]} = \frac{8c + c^2 - 26h + 11ch + 24h^2}{24h(2 + c - 7h + ch + 3h^2)(c - 10h + 2ch + 16h^2)} \quad (2.73)$$

となる<sup>6</sup>. 一般の  $N$  点関数においても, 同様に 3 点関数の計算に帰着することができる.

ここでプライマリー場の 3 点関数は (2.60) のようになるが, 定数  $C_{321}$  は共形場理論のモデルに依存するものであり, Virasoro 代数の表現論からは決まらない. 同じように (2.70) のような 3 点関数の中に Virasoro 代数の演算子が入っている場合でも, モデルに依存する部分がある. 実際, (2.60) から

$$\langle h | \Phi_2(z) | h_1 \rangle = \lim_{w \rightarrow \infty} w^{2h} \langle \Phi_3(w) \Phi_2(z) \Phi_1(0) \rangle = z^{h-h_1-h_2} \langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle \quad (2.74)$$

となることと, Virasoro 代数とプライマリー場の交換関係を使って

$$\langle h | L_K \Phi_2(z) | h_1 \rangle = z^{h-h_1-h_2+|K|} \prod_{i=1}^{\ell(K)} \left( h - h_1 + K_{\ell(K)+1-i} h_2 + \sum_{j>\ell(K)-i} K_j \right) \langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle, \quad (2.75)$$

$$\langle h_4 | \Phi_3(z) L_{-J} | h \rangle = z^{h_4-h_3-h+|J|} \prod_{i=1}^{\ell(J)} \left( h - h_4 + J_{\ell(J)+1-i} h_3 + \sum_{j>\ell(J)-i} J_j \right) \langle h_4 | \Phi_3(1) | h \rangle \quad (2.76)$$

と計算できる [40, (3.144)].

共形ブロックはこのモデル依存因子を  $f_h(z)$  から取り除いた量として定義される. モデル依存因子を  $C_{h21} = \langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle$ ,  $C_{43h} = \langle h_4 | \Phi_3(1) | h \rangle$  と置いて

$$f_h(z) = C_{43h} C_{h21} z^{h-h_2-h_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|J|=|K|=n} \frac{\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle}{\langle h_4 | \Phi_3(1) | h \rangle} [B_{c,h}^n]^{J,K} \frac{\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle}{\langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle} \quad (2.77)$$

と変形すれば, モデルに依存している部分を分離することができる. この式の後半の Virasoro 代数の表現論のみから決定される部分を, 共形ブロックとして定義する.

**定義 2.23.**  $z \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  に対して, 関数

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|J|=|K|=n} \frac{\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle}{\langle h_4 | \Phi_3(1) | h \rangle} [B_{c,h}^n]^{J,K} \frac{\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle}{\langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle} \quad (2.78)$$

を球面上の 4 点共形ブロックという.

**注意 2.24.** 簡単のため, 以下  $\langle h_4 | \Phi_3(1) | h \rangle = \langle h | \Phi_2(1) | h_1 \rangle = 1$  とする.

この 4 点共形ブロックが AGT 予想により, 4 次元ゲージ理論の Nekrasov 公式と一致する (第 4 章). また本論文では完全系 (2.69) を差し込み, 交換関係を用いて共形ブロックを導出したが, OPE と交換関係は等価なので, プライマリー場同士の OPE (2.56) を用いても導出できる [39, 2.3 節].

<sup>6</sup> 3 次の例のように, Kac 行列の逆行列要素はその分子が上手く因子化されず, あまり綺麗ではない.

例 2.25. 共形ブロックの  $z$  に関する低次の項は

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1, h}(z) &= 1 + z \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-1} | h \rangle [B_{c,h}^1]^{[1],[1]} \langle h | L_1 \Phi_2(1) | h_1 \rangle \\ &\quad + z^2 \left( \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-2} | h \rangle \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-1}^2 | h \rangle \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} [B_{c,h}^2]^{[2],[2]} & [B_{c,h}^2]^{[2],[1,1]} \\ [B_{c,h}^2]^{[1,1],[2]} & [B_{c,h}^2]^{[1,1],[1,1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle h | L_2 \Phi_2(1) | h_1 \rangle \\ \langle h | L_1^2 \Phi_2(1) | h_1 \rangle \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.79)$$

と展開され, 1 次の項の係数は

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-1} | h \rangle [B_{c,h}^1]^{[1],[1]} \langle h | L_1 \Phi_2(1) | h_1 \rangle = \frac{(h - h_1 + h_2)(h + h_3 - h_4)}{2h} \quad (2.80)$$

となる. 2 次以降の係数も (2.72) と

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-2} | h \rangle = h + 2h_2 - h_1, \quad (2.81)$$

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-1} L_{-1} | h \rangle = (h + h_3 - h_4)(h + h_3 - h_4 + 1), \quad (2.82)$$

$$\langle h | L_2 \Phi_2(1) | h_1 \rangle = h + 2h_2 - h_1, \quad (2.83)$$

$$\langle h | L_1 L_1 \Phi_2(1) | h_1 \rangle = (h - h_1 + h_2)(h - h_1 + h_2 + 1) \quad (2.84)$$

から計算できる.

このように一般の  $N$  点関数においても, その共形ブロックは Virasoro 代数の表現論によって完全に決定できる. しかし AGT 予想が現れるまでは, Kac 行列の逆行列の形から, それが綺麗で扱い易い関数になっているなどとは誰も予想していなかった.

## 2.5 自由場表現

この節では, Virasoro 代数のもう一つの重要な表現である自由場表現について説明する. 自由場表現ではプライマリー場を具体的に書くことができ, その相関関数も完全に計算することができる. また Verma 加群を解析する上でも非常に役に立つ道具である.

まずは自由場といわれる Heisenberg 代数を定める.

定義 2.26. 整数  $n, m$  に対して交換関係

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad [a_n, Q] = \delta_{n,0} \quad (2.85)$$

を持つ  $a_n, Q$  によって生成される Heisenberg 代数を自由場という.

これによって Fock 空間が構成される. まず真空  $|0\rangle$  を  $a_n|0\rangle = 0$  ( $n \geq 0$ ) を満たすものとし,  $|\alpha\rangle = e^{\alpha Q}|0\rangle$  とする. このとき  $a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  となる.

定義 2.27. Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  を, 負モードを有限回作用させて得られるベクトルの張る空間  $\mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \dots]|\alpha\rangle$  と定義する. 同様にその双対を  $\mathcal{F}_\alpha^* = \langle \alpha | \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$  と定め, ペアリング  $\mathcal{F}_\alpha^* \times \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  も Verma 加群のときと同様に定義する.

Fock 空間は Verma 加群と同様に,  $a_0$  の固有空間で分解でき, その固有値から  $\alpha$  を引いた数を次数として定めることができる. そして, その固有空間の次元は次数  $k$  の分割数  $P(k)$  となる.

次数	次元	基底
0	1	$ \alpha\rangle$
1	1	$a_{-1} \alpha\rangle$
2	2	$a_{-2} \alpha\rangle, a_{-1}^2 \alpha\rangle$
3	3	$a_{-3} \alpha\rangle, a_{-2}a_{-1} \alpha\rangle, a_{-1}^3 \alpha\rangle$
4	5	$a_{-4} \alpha\rangle, a_{-3}a_{-1} \alpha\rangle, a_{-2}^2 \alpha\rangle, a_{-2}a_{-1}^2 \alpha\rangle, a_{-1}^4 \alpha\rangle$

次に Fock 空間への Virasoro 代数の作用を定義する. その為に, まず (2.20) とは異なる, 自由場の正規順序化  $: - :$  を定める. この正規順序化は自由場の変数  $a_n, Q, F(a, Q)$  ( $a = (a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \dots)$ ) に対して,

$$: a_n F(a, Q) := \begin{cases} : F(a, Q) : a_n, & n \geq 0 \\ a_n : F(a, Q) :, & n < 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

$$: Q F(a, Q) := Q : F(a, Q) : \quad (2.87)$$

で定められる線形写像である. つまり  $: - :$  の中では積は全て可換とみなせ, 正モードは右へ, 負モードは左へ移す操作のことである. 例えば,

$$: a_{-2} a_2 : = : a_2 a_{-2} : = a_{-2} a_2 \quad (2.88)$$

となる.

この記号を用いて, Virasoro 代数を自由場の言葉で表示することができる. ただし, ここでは Virasoro 代数の中心元を  $c = 1 - 12\rho^2$  とパラメトライズしておく. このとき Virasoro 代数の中心  $c$  をパラメトライズする 2 つのパラメータ  $\beta$  と  $\rho$  は,

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \quad (2.89)$$

とすれば上手く  $c = 1 - 12\rho^2 = 13 - 6\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$  となる. すると直接計算することにより, 次のことが簡単に分かる.

**命題 2.28** ([38, 命題 4.34]).  $c = 1 - 12\rho^2$  のとき,  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} : a_{n-k} a_k : - \rho(n+1)a_n \quad (2.90)$$

と定めると  $L_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) は Virasoro 代数の交換関係 (2.13) を満たす.

この表示によって, Virasoro 代数の Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  への作用を定めることができ,  $\mathcal{F}_\alpha$  を Virasoro 代数の表現空間とみることができる. この表現を自由場表現という. このとき,  $|\alpha\rangle$  は最高ウェイト

$$h(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\rho) \quad (2.91)$$

の最高ウェイトベクトルになっていること, つまり

$$L_0 |\alpha\rangle = h(\alpha) |\alpha\rangle, \quad L_n |\alpha\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \quad (2.92)$$

となることが簡単な計算で分かる. このことから以下の命題が成立つ.

**命題 2.29** ([38, 命題 4.37]).  $h = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\rho)$  のとき,  $M_h$  から  $\mathcal{F}_\alpha$  への写像

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_i} |h\rangle \mapsto L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_i} |\alpha\rangle \quad (2.93)$$

は Virasoro 代数の表現空間として準同型である.

この写像によって,  $M_h$  の元を自由場の言葉で表現することができる. またストレステンソルも次のように,  $z$  を複素変数とみた自由場の演算子を係数にもつ形式的冪級数

$$\phi(z) = Q + a_0 \log z - \sum_{n \in \mathbb{Z} \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \quad (2.94)$$

を用いて,

$$T(z) = \frac{1}{2} : \partial\phi(z)^2 : + \rho \partial^2 \phi(z) \quad (2.95)$$

と自由場表示できる. またこの  $\phi(z)$  同士の作用素積展開は

$$\phi(z)\phi(w) = \log(z-w) + : \phi(z)\phi(w) :, \quad \left| \frac{w}{z} \right| < 1 \quad (2.96)$$

となる.

さらに自由場表現を用いるとプライマリー場を具体的に構成することができる.

**定義 2.30.**  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対して, 頂点作用素  $V_\alpha(z)$  を

$$V_\alpha(z) = : e^{\alpha\phi(z)} : \quad (2.97)$$

と定義する. このとき本論文では  $\alpha$  を頂点作用素のチャージと呼ぶ.

これが自由場における代表的なプライマリー場である.

**命題 2.31** ([40, (2.55)]). 頂点作用素  $V_\alpha(z)$  は共形次元  $\alpha(\alpha - 2\rho)/2$  のプライマリー場である. つまり, ストレステンソルとの OPE が

$$T(z)V_\alpha(w) = \frac{\alpha(\alpha - 2\rho)/2}{(z-w)^2} V_\alpha(w) + \frac{V'_\alpha(w)}{(z-w)} + : T(z)V_\alpha(w) : + \cdots, \quad \left| \frac{w}{z} \right| < 1 \quad (2.98)$$

及び,  $V_\alpha(w)T(z) \stackrel{a.c.}{\sim} T(z)V_\alpha(w)$  となる.

この頂点作用素の作用素積展開は

$$\begin{aligned} V_\alpha(z)V_\beta(w) &= (z-w)^{\alpha\beta} : V_\alpha(z)V_\beta(w) : \\ &= (z-w)^{\alpha\beta} V_{\alpha+\beta}(w) + (z-w)^{\alpha\beta+1} \alpha : J(w)V_{\alpha+\beta}(w) : + \cdots, \quad \left| \frac{w}{z} \right| < 1 \end{aligned} \quad (2.99)$$

となることがハウスドルフの公式から分かる [40, (2.48)]. ここに,  $J(w) = \phi'(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n w^{-n-1}$  とした. またこの OPE によって, 頂点作用素の相関関数は以下のように完全に求めることができる.

命題 2.32 ([40, (2.49)]). 頂点作用素の真空期待値は

$$\langle 0 | V_{\alpha_N}(z_N) \cdots V_{\alpha_1}(z_1) | 0 \rangle = \delta_{0, \sum_i \alpha_i} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \quad (2.100)$$

となる.

これらの自由場表現の性質は, Wick の定理という非可換な代数を扱う公式によって証明することができる.

注意 2.33. 例えば 3 点関数では

$$\begin{aligned} \langle 0 | V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_1}(z_1) | 0 \rangle &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \langle 0 | : V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_1}(z_1) : | 0 \rangle \\ &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \langle 0 | e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)Q} | 0 \rangle \\ &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \langle 0 | \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rangle \\ &= \delta_{0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \end{aligned}$$

となつて, 自由場の場合にはチャージ保存則  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  が成立していないと, 非自明な値を出さないことを注意しておく.

以上のように自由場表現上では相関関数など, 共形場理論としての様々な性質が知られている. また完全に決定できる自由場の相関関数を用いて, 一般の相関関数を自由場表示して求めようという問題が古くから研究されている. 実は AGT 予想に関連した研究によって, この相関関数の自由場表示の問題が進歩して来ている. それについては 7.1 節で述べる.

## 2.6 命題 2.16 の証明

この節で自由場表示の応用例として, 命題 2.16 で述べた Kac 行列式の証明を与える. 本論文では自由場の理論によって, 特異ベクトルを一般的に構成できることを用いて証明する.

まず整数  $r, s$  に対して  $\alpha_{r,s}$  を

$$\alpha_{r,s} = (1+r) \sqrt{\frac{\beta}{2}} - (1+s) \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \quad (2.101)$$

とすると,  $\alpha = \alpha_{r,s}$  のとき Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  には特異ベクトルが存在する. 実際以下の命題のように, 遮蔽作用素を用いて特異ベクトルを積分表示することができる. 遮蔽作用素  $S$  とは, チャージが  $\sqrt{2\beta}$  の頂点作用素の積分

$$S = \oint dz V_{\sqrt{2\beta}}(z) \quad (2.102)$$

のことである. ここに,  $\beta$  は中心  $c$  のパラメトライズ (2.40) で用いたものと同じである.

命題 2.34 ([40, 3.11 節], [5, Section 4], [21]). Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  ( $\alpha = \alpha_{r,s}$ ) 上において,

$$|\chi_{r,s}\rangle = S^r |\alpha_{-r,s}\rangle \quad (2.103)$$

$$= \oint \cdots \oint dz_1 \cdots dz_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{2\beta} \prod_{i=1}^r z_i^{\sqrt{2\beta}\alpha_{-r,s}} \prod_{i=1}^r e^{\sqrt{2\beta}\phi_-(z_i)} |\alpha_{r,s}\rangle \quad (2.104)$$

は次数  $r_s$  の特異ベクトルである. ここに,  $\phi_-(z)$  は  $\phi(z)$  の負モードだけをとったもの

$$\phi_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} z^n \quad (2.105)$$

とした.

この命題は, 遮蔽作用素  $S$  が Virasoro 代数の任意の元  $L_n$  と可換であるという, 遮蔽作用素の特殊な性質から証明される.

注意 2.35. 命題 2.13 にて,  $c = 13 - 6\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$  とパラメトライズすると,  $h = h_{r,s}$  のとき, 特異ベクトルが存在すると述べたが, この  $h_{r,s}$  と  $\alpha_{r,s}$  との関係は

$$h_{r,s} = \frac{1}{2}\alpha_{r,s}(\alpha_{r,s} - 2\rho) \quad (2.106)$$

となっており, 命題 2.29 の準同型である為の条件式を満たす. つまり,  $h = h_{r,s}$  のとき存在する特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  を,  $\mathcal{F}_{\alpha_{r,s}}$  上に移しとったものだと考えることができる.

では Kac 行列式の証明の流れを説明する. ここで与える証明は, 命題 2.29 で与えた, 写像  $M_h \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$  の表現行列の行列式の零点を調べることで得られる. この行列式の零点は, 命題 2.34 で与えた Fock 空間上の特異ベクトルの存在によって分かる. さらにその表現行列と Kac 行列との関係から, Kac 行列式の零点を与える命題 2.16 も証明できるという流れになっている.

まずは命題 2.29 で与えた写像  $M_h \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$  の表現行列と Kac 行列との関係を先に示しておく. 最高ウェイト表現  $M_h$  の  $k$  次の空間  $M_h(k)$  のベクトルは, Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  上でも,  $k$  次の空間に移る. よって  $k$  次の空間に制限した表現行列  $A_k$  を定めることができる [38, 公式 4.38-4.41]. 例えば 2 次の空間なら

$$\left( \begin{array}{cc} L_{-2}|\alpha\rangle & L_{-1}^2|\alpha\rangle \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} a_{-2}|\alpha\rangle & a_{-1}^2|\alpha\rangle \end{array} \right) A_2 \quad (2.107)$$

となる. また,  $M^*(h)$  から  $\mathcal{F}_\alpha^*$  への  $k$  次の空間同士の対応を表す行列を  $B_k$  とする. 例えば 2 次の空間なら

$$\left( \begin{array}{c} \langle\alpha|L_2 \\ \langle\alpha|L_1^2 \end{array} \right) = B_2 \left( \begin{array}{c} \langle\alpha|a_2 \\ \langle\alpha|a_1^2 \end{array} \right) \quad (2.108)$$



とする. この表現行列は

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} \langle \alpha | a_2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | a_1^2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_1^2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \alpha | a_2 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_2 L_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | a_1^2 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_1^2 L_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \alpha | a_2 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_2 L_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | a_1^2 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_1^2 L_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \begin{pmatrix} \langle \alpha | L_2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | L_1^2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_1^2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha | a_2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | a_1^2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | a_1^2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \alpha | L_2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | L_1^2 a_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_1^2 a_{-1}^2 | \alpha \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (2.110)$$

となって,  $\mathcal{F}_\alpha^*$  のベクトルと  $|\alpha\rangle$  に  $L_{-n}$  を作用させて得られるベクトルとのペアリングでできる行列と, 対角行列の積になる. これは 2 次の場合を例にとって説明したが, 一般に対角行列  $(\langle \alpha | a_J a_{-K} | \alpha \rangle)_{J,K}^{-1}$  と行列  $(\langle \alpha | a_J L_{-K} | \alpha \rangle)_{J,K}$  との積になることが分かる.

このとき 2 次の Kac 行列式は,  $h = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\rho)$  の下で, 自由場表示して考えれば,

$$\begin{aligned} \det[B_{c,h}^2] &= \begin{vmatrix} \langle \alpha | L_2 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_2 L_{-1} L_{-1} | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | L_1 L_1 L_{-2} | \alpha \rangle & \langle \alpha | L_1 L_1 L_{-1} L_{-1} | \alpha \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B_2 \begin{pmatrix} \langle \alpha | a_2 \\ \langle \alpha | a_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} | \alpha & a_{-1}^2 | \alpha \end{pmatrix} A_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.111)$$

となるので  $\det[B_{c,h}^2] = (\text{定数}) \det A_2 \det B_2$  となる. 一般にも同じように, 自由場の交換関係から

$$\det[B_{c,h}^k] = (\text{定数}) \det A_k \det B_k \quad (2.112)$$

となることが分かる. よって Kac 行列式の零点を変換行列  $A_k, B_k$  の行列式の零点に置き換えて考えることができる.

このとき次のことが分かる.

**補題 2.36.** 行列  $A_k, B_k$  の行列式は

$$\det A_k = (\text{定数}) \prod_{r,s \geq 1} (\alpha - \alpha_{-r,-s})^{P(k-rs)}, \quad (2.113)$$

$$\det B_k = (\text{定数}) \prod_{r,s \geq 1} (\alpha - \alpha_{r,s})^{P(k-rs)} \quad (2.114)$$

と因子化することができる.

**証明.** まず行列式  $d_k$  を  $k$  次のベクトル同士のペアリングでできる行列式

$$d_k = \det (\langle \alpha | a_J L_{-K} | \alpha \rangle)_{J,K(|J|=|K|=k)} \quad (2.115)$$

として定める. また  $d_k^*$  をその双対

$$d_k^* = \det (\langle \alpha | L_J a_{-K} | \alpha \rangle)_{J,K(|J|=|K|=k)} \quad (2.116)$$

として定義する. これらは

$$\det A_k = (\text{定数})d_k, \quad \det B_k = (\text{定数})d_k^* \quad (2.117)$$

を満たす. まず  $d_k, d_k^*$  の  $\alpha$  についての次数を考える. 次数  $k$  のベクトル

$$L_{-p}^{m_p} \cdots L_{-1}^{m_1} | \alpha \rangle, \quad \sum_j j m_j = k \quad (2.118)$$

は  $\alpha$  に関して  $\sum_r m_r$  次となることが分かる. これは自由場表示したときに,  $n \neq 0$  ならば  $L_n = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} : a_{n-k} a_k : -\rho(n+1)a_n$  が,  $a_0$  に関して 1 次式であることから従う. よって  $d_n$  の次数は

$$\deg(d_k) = \sum_{(\sum_j j m_j = k)} \sum_{r \geq 1} m_r \quad (2.119)$$

となり, この母関数を考えると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \deg(d_k) q^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sum_j j m_j = k} \sum_{r \geq 1} m_r q^{\sum_j j m_j} \\ &= \sum_{\sum_j j m_j \geq 0} \sum_{r \geq 1} m_r q^{\sum_j j m_j} \\ &= \sum_{r \geq 1} \frac{q^r}{(1-q^r)^2} \prod_{r \neq j \geq 1} \frac{1}{1-q^j} \\ &= \sum_{r \geq 1} \frac{q^r}{1-q^r} \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1-q^j} \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{s \geq 1} q^{rs} \sum_k P(k) q^k \\ &= \sum_k \sum_{r,s \geq 1} P(k-rs) q^k \end{aligned} \quad (2.120)$$

となる. したがって,

$$\deg(d_k) = \sum_{r,s \geq 1} P(k-rs) \quad (2.121)$$

となる. これは  $d_k^*$  についても同様に計算でき,  $\deg(d_k^*) = \sum_{r,s \geq 1} P(k-rs)$  となる. したがって  $d_k^*, d_k$  の零点は重複も含めて  $\sum_{r,s \geq 1} P(k-rs)$  個である.

ここで, 命題 2.13 より得られる次数  $rs$  の特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  に  $L_{-n}$  を作用させた  $k$  次のベクトル

$$L_{-p}^{m_p} L_{-(p-1)}^{m_{p-1}} \cdots L_{-1}^{m_1} |\chi_{r,s}\rangle, \quad m_1 + 2m_2 + \cdots + pm_p = k - rs \quad (2.122)$$

は  $d_k^*$  の零点に寄与する<sup>7</sup> . さらにその組み合わせは  $P(k - rs)$  個であるから, これによつて全ての零点が  $\alpha_{r,s}$  で尽くされる.  $d_k$  についても同様のことが言える. 以上よりこの補題が成立する.  $\square$

この補題により, あとは

$$(\alpha - \alpha_{r,s})(\alpha - \alpha_{-r,-s}) = 2(h - h_{r,s}) \quad (2.123)$$

であることと, (2.112) により Kac 行列式の公式を与えた命題 2.16 が従う.

---

<sup>7</sup> 「零点に寄与する」とは以下のような意味である. まず (2.122) の形のベクトルにそれと独立なベクトルを付け加えてできる基底を考える. その基底への行列  $(\langle \alpha | L_J a_{-K} | \alpha \rangle)_{J,K(|J|=|K|=k)}$  の基底変換を考えると, (2.122) の形のベクトルとの内積で計算される成分は必ず因子  $(\alpha - \alpha_{r,s})$  を含んでいるので,  $d_k^*$  に現れる零点  $(\alpha - \alpha_{r,s})$  は少なくとも (2.122) の形のベクトルの数だけ重複度を持っていることが分かるという意味である.

### 3 Nekrasov 公式

この章で 4 次元ゲージ理論のインスタントン分配関数を計算できる Nekrasov 公式について説明する。AGT 予想ではこの Nekrasov 公式と共形ブロックの一致を主張している。共形ブロックと一致するものはゲージ群が  $SU(2)$  のものであるが、まずそれを与える為に 4 次元  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式を以下のように定義する。

**定義 3.1** ([39, 3.2 節], [13, 3 節]). パラメータ  $q, \vec{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4), \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$  に対して、物質場の数が  $N_f = 0, 1, 2, 3, 4$  の 4 次元  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式  $Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon})$  を

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{|\vec{Y}|=N} Z_{\vec{Y}}^{N_f}(\vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}), \quad (3.1)$$

$$Z_{\vec{Y}}^{N_f}(\vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}) = Z_{\vec{Y}}^{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{\epsilon}) \prod_{k=1}^{N_f} Z_{\vec{Y}}^{\text{hyper}}(m_k, \vec{a}, \vec{\epsilon}) \quad (3.2)$$

と定義する。ここに (3.1) の二つ目の  $\sum$  は大きさが  $N$  のあらゆるパーティションの組  $\vec{Y} = (Y^{(1)}, Y^{(2)})$  について足し上げることの意味する<sup>8</sup>。また  $Z_{\vec{Y}}^{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{\epsilon})$  及び  $Z_{\vec{Y}}^{\text{hyper}}(m, \vec{a}, \vec{\epsilon})$  は、それぞれベクトル多重項、ハイパー多重項 (物質場) からの寄与を表す重み因子と呼び、

$$Z_{\vec{Y}}^{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{\epsilon}) = \prod_{\alpha, \beta=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y^{(\alpha)}} (a_{\alpha} - a_{\beta} + (A_{Y^{(\alpha)}}(i, j) + 1)\epsilon_2 - L_{Y^{(\beta)}}(i, j)\epsilon_1)^{-1} \quad (3.3)$$

$$\times \prod_{(i,j) \in Y^{(\beta)}} (a_{\alpha} - a_{\beta} - A_{Y^{(\beta)}}(i, j)\epsilon_2 + (L_{Y^{(\alpha)}}(i, j) + 1)\epsilon_1)^{-1},$$

$$Z_{\vec{Y}}^{\text{hyper}}(m, \vec{a}, \vec{\epsilon}) = \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y^{(\alpha)}} (m + a_{\alpha} + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2) \quad (3.4)$$

と定める<sup>9</sup>。特にハイパー多重項からの寄与がない  $N_f = 0$  の場合をピュアゲージ理論と呼び、その Nekrasov 公式は  $Z_{\text{Nek}}^{\text{pure } U(2)}(q, \vec{a}, \vec{\epsilon})$  や、 $Z_{\vec{Y}}^{\text{pure}}(\vec{a}, \vec{\epsilon})$  と書く。このとき  $q$  はインスタントンの化学ポテンシャル、 $m_1, m_2, m_3, m_4$  は質量、 $a_1, a_2$  及び  $\epsilon_1, \epsilon_2$  はそれぞれゲージ対称性、 $\Omega$  背景のパラメータと呼ぶ。

**例 3.2.** この公式は  $q$  による形式的な冪級数展開を表しており、低次の項は

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4 U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}) = 1 + \left( Z_{[1],[0]}^{N_f=4} + Z_{[0],[1]}^{N_f=4} \right) q \quad (3.5)$$

$$+ \left( Z_{[2],[0]}^{N_f=4} + Z_{[1,1],[0]}^{N_f=4} + Z_{[1],[1]}^{N_f=4} + Z_{[0],[1,1]}^{N_f=4} + Z_{[0],[2]}^{N_f=4} \right) q^2$$

$$+ \dots$$

<sup>8</sup>パーティションの記号については第 1 章を参照せよ。またパーティションの組  $\vec{Y} = (Y^{(1)}, Y^{(2)})$  は片方のパーティションが 0 のみから成るものでも良い。0 のみから成るパーティションは  $[0]$  と表し、箱が一つもない空のヤング図に対応する。

<sup>9</sup> $\prod_{(i,j) \in Y}$  は  $Y$  に対応するヤング図の中にある全ての箱について掛け合わせることを意味し、 $(i, j)$  はそのときの各箱の座標を表す。また  $Y = [0]$  のときは何も掛けない、つまり  $\prod_{(i,j) \in Y}$  の表す因子は 1 とする。

のように展開され、各次数の係数は

$$Z_{[1],[0]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_1)}{\epsilon_1 \epsilon_2 (a_{12} + \epsilon) a_{21}}, \quad Z_{[0],[1]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2 a_{12} (a_{21} + \epsilon)}, \quad (3.6)$$

$$Z_{[2],[0]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_1)(m_k + a_1 + \epsilon_2)}{2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)(a_{12} + \epsilon_1 + 2\epsilon_2)(a_{12} + \epsilon)(a_{21} - \epsilon_2)a_{21}}, \quad (3.7)$$

$$Z_{[1,1],[0]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_1)(m_k + a_1 + \epsilon_1)}{2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)(a_{12} + \epsilon)(a_{12} + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)a_{21}(a_{21} - \epsilon_1)}, \quad (3.8)$$

$$Z_{[1],[1]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_1)(m_k + a_2)}{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (a_{12} + \epsilon_1)(a_{12} + \epsilon_2)(a_{21} + \epsilon_1)(a_{21} + \epsilon_2)}, \quad (3.9)$$

$$Z_{[0],[1,1]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_2)(m_k + a_2 + \epsilon_1)}{a_{12}(a_{12} - \epsilon_1)(a_{21} + \epsilon)(a_{21} + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)(2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1))}, \quad (3.10)$$

$$Z_{[0],[2]}^{N_f=4} = \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a_2)(m_k + a_2 + \epsilon_2)}{(a_{12} - \epsilon_2)a_{12}(a_{21} + \epsilon_1 + 2\epsilon_2)(a_{21} + \epsilon)(2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2))} \quad (3.11)$$

となる. ここに  $a_{12} = a_1 - a_2$ ,  $a_{21} = a_2 - a_1$ ,  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$  とした. またピュアゲージ理論の場合は各項の分子が取れて

$$Z_{[1],[0]}^{\text{pure}} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 (a_{12} + \epsilon) a_{21}}, \quad Z_{[0],[1]}^{\text{pure}} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 a_{12} (a_{21} + \epsilon)} \quad (3.12)$$

$$Z_{[2],[0]}^{\text{pure}} = \frac{1}{2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)(a_{12} + \epsilon_1 + 2\epsilon_2)(a_{12} + \epsilon)(a_{21} - \epsilon_2)a_{21}}, \quad (3.13)$$

$$Z_{[1,1],[0]}^{\text{pure}} = \frac{1}{2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)(a_{12} + \epsilon)(a_{12} + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)a_{21}(a_{21} - \epsilon_1)}, \quad (3.14)$$

$$Z_{[1],[1]}^{\text{pure}} = \frac{1}{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (a_{12} + \epsilon_1)(a_{12} + \epsilon_2)(a_{21} + \epsilon_1)(a_{21} + \epsilon_2)}, \quad (3.15)$$

$$Z_{[0],[1,1]}^{\text{pure}} = \frac{1}{a_{12}(a_{12} - \epsilon_1)(a_{21} + \epsilon)(a_{21} + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)(2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1))}, \quad (3.16)$$

$$Z_{[0],[2]}^{\text{pure}} = \frac{1}{(a_{12} - \epsilon_2)a_{12}(a_{21} + \epsilon_1 + 2\epsilon_2)(a_{21} + \epsilon)(2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2))} \quad (3.17)$$

などとなる.

これは  $U(2)$  ゲージ理論に対応するもので、共形ブロックと一致する  $SU(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式を得るには、次の  $U(1)$  因子を除去する必要がある.

**定義 3.3** ([39, (4.41)]).  $N_f = 4$ ,  $U(2)$  ゲージ理論の  $U(1)$  因子を

$$Z^{U(1)} = (1 - q)^{\frac{1}{2\epsilon_1 \epsilon_2} (m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \quad (3.18)$$

と定義する.

**定義 3.4** ([39, (4.46)]).  $N_f = 4$ ,  $SU(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式を  $a = a_1 = -a_2$  とおいて

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4, SU(2)}(q, \vec{m}, a, \vec{\epsilon}) = \frac{Z_{\text{Nek}}^{N_f=4, U(2)}(q, \vec{m}, (a, -a), \vec{\epsilon})}{Z^{U(1)}} \quad (3.19)$$

と定義する.

例 3.5. この  $U(1)$  因子を除去した  $SU(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式の  $q$  展開の形は

$$\begin{aligned} Z_{\text{Nek}}^{N_f=4 SU(2)} &= 1 + \left( \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k + a)}{-\epsilon_1 \epsilon_2 2a(2a + \epsilon)} + \frac{\prod_{k=1}^4 (m_k - a)}{\epsilon_1 \epsilon_2 2a(-2a + \epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\epsilon_1 \epsilon_2} (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) \right) q + \dots \\ &= 1 - \frac{(2a^2 - \epsilon(m_1 + m_2) + 2m_1 m_2)(2a^2 - \epsilon(m_3 + m_4) + 2m_3 m_4)}{2\epsilon_1 \epsilon_2 (2a - \epsilon)(2a + \epsilon)} q + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

となって 1 次の項が綺麗に因子化される。

この  $Z_{\text{Nek}}^{N_f=4 SU(2)}(q, \vec{m}, a, \vec{\epsilon})$  があるパラメータの読み替えの下で, 共形ブロック (2.78) と一致する. ここで共形ブロックとの一致をみる前に, Nekrasov 公式に現れるパラメータをリスケールしたものを考える.

定義 3.6. パラメータ  $\hbar, b, p_1, p_2, \mu_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) を

$$\hbar b = \epsilon_1, \quad \hbar b^{-1} = \epsilon_2, \quad (3.21)$$

$$\hbar p_1 = a_1, \quad \hbar p_2 = a_2, \quad (3.22)$$

$$\hbar \left( \mu_k + \frac{Q}{2} \right) = m_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (3.23)$$

によって定義する. ここに  $Q = b + b^{-1}$  とした.

注意 3.7. このパラメータを用いると  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式は

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}) = Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q \hbar^{N_f-4}, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \quad (3.24)$$

となる. ただし  $\vec{\mu} = (\mu_1 + \frac{Q}{2}, \mu_2 + \frac{Q}{2}, \mu_3 + \frac{Q}{2}, \mu_4 + \frac{Q}{2})$ ,  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\vec{b} = (b, b^{-1})$  とした. そこで以下簡単の為, リスケールしたパラメータ  $\mu, p, b$  を用いるときは  $\hbar = 1$  と規格化して考えることとする:

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q \hbar^{N_f-4}, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \rightarrow Z_{\text{Nek}}^{N_f U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}). \quad (3.25)$$

このとき  $\Omega$  背景  $\epsilon_1, \epsilon_2$  は互いに逆関数の関係

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \quad (3.26)$$

になっており,  $U(1)$  因子は

$$Z^{U(1)} = (1 - q)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)(\mu_3 + \mu_4 + Q)} \quad (3.27)$$

となる. さらに  $SU(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式の  $q$  展開の形は

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4 SU(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = 1 - \frac{(2p^2 + 2\mu_1 \mu_2 - \frac{Q^2}{2})(2p^2 + 2\mu_3 \mu_4 - \frac{Q^2}{2})}{2(2p - Q)(2p + Q)} q + \dots \quad (3.28)$$

となる. ただし  $p = p_1 = -p_2$  である.

このような規格化を施すと共形ブロックとのパラメータの読み替えが多少楽になる. この Nekrasov 公式を用いて次章で AGT 予想の主張を述べる.

## 4 AGT 予想

この章で AGT 予想の主張を述べる。また元々の AGT 予想からの退化極限を取った変種の AGT 予想についても説明する。

まず [2] で与えられた予想は以下の通りである。ただしパラメータの変換は [13] に従った。

予想 4.1 ([2], [39, (4.48)]). パラメータの変換

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1}, \quad (4.1)$$

$$h = \frac{Q^2}{4} - p^2, \quad (4.2)$$

$$h_i = \frac{1}{4}(Q^2 - \lambda_i^2) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.3)$$

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2, \quad \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2, \quad (4.4)$$

$$\lambda_3 = \mu_3 + \mu_4, \quad \lambda_4 = -\mu_3 + \mu_4 \quad (4.5)$$

の下で、球面上の 4 点共形ブロック (2.78) と  $N_f = 4$  の 4 次元  $SU(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式が一致する。つまり、

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4 SU(2)}(q, \vec{\mu}, p, \vec{b}) \quad (4.6)$$

となる。

これは実際、例 2.25 と (3.28) を比較すれば、まず  $q$  展開の 1 次の係数同士が

$$\frac{(h - h_1 + h_2)(h + h_3 - h_4)}{2h} = -\frac{(2p^2 + 2\mu_1\mu_2 - \frac{Q^2}{2})(2p^2 + 2\mu_3\mu_4 - \frac{Q^2}{2})}{2(2p - Q)(2p + Q)} \quad (4.7)$$

となっていることが確認できる。2 次以降に関しても、計算機を用いれば同じ次数の係数同士がそれぞれ一致していることが確認できる。またここではリスケールされたパラメータで考えたが、 $\hbar = \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}$  を用いて  $Q = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/\hbar$  と置き直し、 $p, \mu_k$  を (3.22), (3.23) で  $a, m_k$  に変換し直せば、リスケールする前の Nekrasov 公式 (3.20) も復元することができる。

さらにこの予想 4.1 を変形させて、 $N_f = 0, 1, 2, 3$  に対応させた AGT 予想もある。これは  $N_f = 4$  の場合において質量  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  の極限を取れば物質場の少ない Nekrasov 公式が得られることに注意すれば良い。そこで本論文では次の 5 つの極限を考える：

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \longrightarrow \infty, \quad q \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = \Lambda^4 : \text{fixed}; \quad (\text{A})$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_4 \longrightarrow \infty, \quad q \mu_1 \mu_2 \mu_4 = \Lambda^3 : \text{fixed}; \quad (\text{B})$$

$$\mu_1, \mu_4 \longrightarrow \infty, \quad q \mu_1 \mu_4 = \Lambda^2 : \text{fixed}; \quad (\text{C})$$

$$\mu_3, \mu_4 \longrightarrow \infty, \quad q \mu_3 \mu_4 = \Lambda^2 : \text{fixed}; \quad (\text{D})$$

$$\mu_4 \longrightarrow \infty, \quad q \mu_4 = \Lambda : \text{fixed}. \quad (\text{E})$$

例えば (E) は  $\mu_4$  の極限を考えるが、固定された値  $\Lambda$  を用いて  $q \mu_4 = \Lambda$  の関係を満たしながら  $q \rightarrow 0$  の極限も同時に取るという意味である。これらの極限を  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式、及びその  $U(1)$  因子に施したものは簡単に分かる。

命題 4.2.  $N_f = 4, U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式の極限は

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \xrightarrow[\text{(A)}]{} Z_{\text{Nek}}^{\text{pure}U(2)}(\Lambda^4, \vec{p}, \vec{b}), \quad (4.8)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \xrightarrow[\text{(B)}]{} Z_{\text{Nek}}^{N_f=1U(2)}(\Lambda^3, \vec{\mu}_B, \vec{p}, \vec{b}), \quad (4.9)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \xrightarrow[\text{(C)}]{} Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(\Lambda^2, \vec{\mu}_C, \vec{p}, \vec{b}), \quad (4.10)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \xrightarrow[\text{(D)}]{} Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(\Lambda^2, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}), \quad (4.11)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \xrightarrow[\text{(E)}]{} Z_{\text{Nek}}^{N_f=3U(2)}(\Lambda, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \quad (4.12)$$

となる. ここに  $\vec{\mu}_B = (\mu_3 + Q/2)$ ,  $\vec{\mu}_C = (\mu_2 + Q/2, \mu_3 + Q/2)$  とした.

証明. 定義 3.1 より直ちに従う. □

命題 4.3.  $N_f = 4, U(2)$  ゲージ理論の  $U(1)$  因子の極限は

$$Z^{U(1)} \xrightarrow[\text{(A)}]{} 1, \quad Z^{U(1)} \xrightarrow[\text{(B)}]{} 1,$$

$$Z^{U(1)} \xrightarrow[\text{(C)}]{} \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right), \quad Z^{U(1)} \xrightarrow[\text{(D)}]{} 1,$$

$$Z^{U(1)} \xrightarrow[\text{(E)}]{} \exp\left(-\frac{\Lambda}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)\right)$$

となる.

証明. まず (E) を証明する.  $U(1)$  因子の指数部分を極限に寄与する項としない項に分ければ,

$$Z^{U(1)} = (1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_4(\mu_1 + \mu_2 + Q)} (1 - q)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)(\mu_3 + Q)} \quad (4.13)$$

となる. このとき

$$(1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_4(\mu_1 + \mu_2 + Q)} \xrightarrow[\text{(E)}]{} \exp\left(-\frac{\Lambda}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)\right), \quad (4.14)$$

$$(1 - q)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)(\mu_3 + Q)} \xrightarrow[\text{(E)}]{} 1 \quad (4.15)$$

となるので  $U(1)$  因子の (E) による極限は  $\exp\left(-\frac{\Lambda}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)\right)$  となる.

次に (C) を証明する.  $U(1)$  因子の指数部分を, 極限に関係する  $\mu_1$  と  $\mu_4$  の式で分けると

$$Z^{U(1)} = (1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_1\mu_4} (1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_1(\mu_3 + Q)} (1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_4(\mu_2 + Q)} (1 - q)^{\frac{1}{2}(\mu_2 + Q)(\mu_3 + Q)} \quad (4.16)$$

と変形できる. このとき

$$(1 - q)^{\frac{1}{2}\mu_1\mu_4} \xrightarrow[\text{(C)}]{} \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right), \quad (4.17)$$

$$(1 - q)^{\frac{1}{2}(\mu_2 + Q)(\mu_3 + Q)} \xrightarrow[\text{(C)}]{} 1 \quad (4.18)$$



となることが分かる. また残りの因子  $(1-q)^{\frac{1}{2}\mu_1(\mu_3+Q)}$  と  $(1-q)^{\frac{1}{2}\mu_4(\mu_2+Q)}$  は, 指数部分の収束が  $q$  よりも遅いので, その極限は 1 になってしまう. 従って  $U(1)$  因子の (C) による極限は,  $\exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right)$  となる.

極限 (A), (B), (D) も指数部分を変形して考えることができる. しかしこれらの極限では, どの指数部分の項も  $q$  に比べて収束が遅いので, 全て 1 に収束する.  $\square$

注意 4.4. これらの命題から少なくとも  $N_f = 0, 1$  の場合では  $U(1)$  因子の寄与が無いことが分かる.

このように Nekrasov 公式の極限を取ることで物質場の少ない Nekrasov 公式を得ることができるので, これと同じ極限を共形ブロックに施せば,  $N_f = 0, 1, 2, 3$  に対応した変種の AGT 予想を得ることができる. この共形ブロックの極限を考える為に, まず Verma 加群  $M_h$  上での Gaiotto 状態というベクトルを定義する.

定義 4.5. パラメータ  $\Lambda, \mu \in \mathbb{C}$  に対して, Gaiotto 状態  $|h, \Lambda^2\rangle, |h, \mu, \Lambda\rangle \in M_h$  を条件

$$L_1 |h, \Lambda^2\rangle = -\Lambda^2 |h, \Lambda^2\rangle, \quad (4.19)$$

$$L_n |h, \Lambda^2\rangle = 0, \quad n \geq 2, \quad (4.20)$$

及び

$$L_2 |h, \mu, \Lambda\rangle = -\Lambda^2 |h, \mu, \Lambda\rangle, \quad (4.21)$$

$$L_1 |h, \mu, \Lambda\rangle = -2\mu\Lambda |h, \mu, \Lambda\rangle, \quad (4.22)$$

$$L_n |h, \mu, \Lambda\rangle = 0, \quad n \geq 3 \quad (4.23)$$

を満たすものとして定義する.

命題 4.6 ([18]). Gaiotto 状態の具体形は

$$|h, \Lambda^2\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2n} (-1)^n \sum_{|J|=n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], J} L_{-J} |h\rangle, \quad (4.24)$$

$$|h, \mu, \Lambda\rangle = C \sum_n \Lambda^n \sum_{|J|=n} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{n-p} (2\mu)^{n-2p} [B_{c,h}^n]^{[2^p, 1^{n-2p}], J} L_{-J} |h\rangle \quad (4.25)$$

となっている. ここに  $C$  は任意定数である.

補題 4.7.  $|v\rangle \in M_h$  とする.  $c, h$  が generic なとき, 任意のパーティション  $J$  に対して  $\langle h | L_J |v\rangle = 0$  ならば  $|v\rangle = 0$  である. つまり  $M_h$  上のペアリングは非退化である.

証明. まず  $|v\rangle \in M_h$  は  $|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n\rangle$ ,  $|v_n\rangle = \sum_{|K|=n} C_K L_{-K} |h\rangle$  ( $C_K \in \mathbb{C}$ ) と各次数のベクトルの和で書ける. このとき

$$\langle h | L_J |v\rangle = \langle h | L_J |v_{|J}\rangle = \sum_{\substack{K \\ (|K|=|J|)}} C_K [B_{c,h}^{|J|}]_{J,K} = 0 \quad (4.26)$$

となる. よって任意のパーティション  $I$  に対して

$$\sum_{\substack{J \\ (|J|=|I|)}} \left[ B_{c,h}^{|I|} \right]^{I,J} \sum_{\substack{K \\ (|K|=|I|)}} C_K \left[ B_{c,h}^{|I|} \right]_{J,K} = 0 \quad (4.27)$$

であるから

$$\sum_K C_K \delta_{I,K} = C_I = 0 \quad (\forall I) \quad (4.28)$$

となる. 従って補題が従う.  $\square$

注意 4.8. この補題は  $h$  が特殊な値を持つとき, 逆行列  $\left[ B_{c,h}^{|K|} \right]^{K,J}$  が存在しないので成立しない. 命題 4.6 は  $c, h$  が generic なときを考えている.

命題 4.6 の証明. まず Gaiotto 状態  $|h, \mu, \Lambda\rangle$  が (4.25) の形をしていることを示す. 任意のパーティション  $K$  に対して, 定義から  $K$  に値が 3 以上の成分があるときは  $L_K$  の作用が 0 になるから

$$\begin{aligned} \langle h | L_K |h, \mu, \Lambda\rangle &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor} \delta_{K, [1^{|K|-2p}, 2^p]} \langle h | L_K |h, \mu, \Lambda\rangle \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor} \delta_{K, [1^{|K|-2p}, 2^p]} (-\Lambda^2)^p (-2\mu\Lambda)^{|K|-2p} \langle h |h, \mu, \Lambda\rangle \\ &= C \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor} \sum_{|I|=|K|} \left[ B_{c,h}^{|K|} \right]^{I, [1^{|K|-2p}, 2^p]} \left[ B_{c,h}^{|K|} \right]_{K,I} (-\Lambda^2)^p (-2\mu\Lambda)^{|K|-2p} \\ &= \langle h | L_K C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{|I|=n} \left[ B_{c,h}^{|K|} \right]^{I, [1^{n-2p}, 2^p]} (-\Lambda^2)^p (-2\mu\Lambda)^{n-2p} L_{-I} |h\rangle \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる. ここに  $C = \langle h |h, \mu, \Lambda\rangle$  とした. よって補題 4.7 より  $|h, \mu, \Lambda\rangle$  は (4.25) の形をしている.

また逆に  $|h, \mu, \Lambda\rangle$  が (4.25) の形をしたベクトルであるとき, 定義 4.5 を満たすことを示さなければならない. これは自然数  $m$  に対して,

$$\langle h | L_J L_m |h, \mu, \Lambda\rangle \quad (4.30)$$

の値を調べれば良い ( $J$  はパーティション). まず  $J$  に 3 以上の成分があるときは  $L_J L_m$  をパーティションによる和  $\sum_I c_I L_I$  ( $c_I \neq 0$ ) に書き直したとき, Virasoro 代数の交換関係から各  $I$  は必ず値が 3 以上の成分をもつ. このとき (4.29) の 2 行目から 4 行目は単に式変形したものであることに注意すれば, この式変形を逆にたどり

$$\langle h | L_J L_m |h, \mu, \Lambda\rangle = \sum_I c_I \langle h | L_I |h, \mu, \Lambda\rangle = 0 \quad (4.31)$$

となることが分かる. よって一般に

$$\langle h | L_J L_m | h, \mu, \Lambda \rangle = \sum_{p \geq 0} \delta_{J, [1^{|J|-2p, 2p}]} \langle h | L_J L_m | h, \mu, \Lambda \rangle \quad (4.32)$$

となる. また同じ議論により  $m \geq 3$  のときは  $\langle h | L_J L_m | h, \mu, \Lambda \rangle = 0$  となる.  $m = 2$  のときは, (4.29) の式変形を 2 度用いて,

$$\begin{aligned} \langle h | L_J L_m | h, \mu, \Lambda \rangle &= \sum_{p \geq 0} \delta_{J, [1^{|J|-2p, 2p}]} \langle h | L_1^{|J|-2p} L_2^{p+1} | h, \mu, \Lambda \rangle \\ &= \sum_{p \geq 0} \delta_{J, [1^{|J|-2p, 2p}]} (-\Lambda^2)^{(p+1)} (-2\mu\Lambda)^{|J|-2p} \langle h | h, \mu, \Lambda \rangle \\ &= -\Lambda^2 \langle h | L_J | h, \mu, \Lambda \rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる. 従って補題 4.7 より

$$L_2 | h, \mu, \Lambda \rangle = -\Lambda^2 | h, \mu, \Lambda \rangle \quad (4.34)$$

となる.  $m = 1$  のときも同様に (4.29) の式変形を 2 度用いれば,

$$L_1 | h, \mu, \Lambda \rangle = -2\mu\Lambda | h, \mu, \Lambda \rangle \quad (4.35)$$

となることが分かる. 以上より (4.25) の形をしたベクトルが Gaiotto 状態の定義を満たすことが分かった.

$| h, \Lambda^2 \rangle$  についても同様に証明できるが, 極限

$$| h, \mu, \Lambda \rangle \xrightarrow[2\mu\Lambda = \Lambda^2: \text{fixed}]{\mu \rightarrow \infty} | h, \Lambda^2 \rangle \quad (4.36)$$

を考えれば  $| h, \Lambda^2 \rangle$  の具体形 (4.24) を得ることができる.  $\square$

注意 4.9. 以下簡単の為  $| h, \Lambda^2 \rangle, | h, \mu, \Lambda \rangle$  と書いたら, (4.24), (4.25) の定数  $C$  は 1 とする.

$| h, \Lambda^2 \rangle, | h, \mu, \Lambda \rangle$  の具体形 (4.24), (4.25) は  $\Lambda^2$  及び  $\Lambda$  の形式的な冪級数展開の形になっており,  $\Lambda^{2n}$  及び  $\Lambda^n$  の各係数は  $M_h$  のレベル  $n$  の部分空間に入っている. そこでその係数を  $| h, n \rangle, | h, \mu, n \rangle$  と書く. つまり

$$| h, \Lambda^2 \rangle = \sum_n \Lambda^{2n} | h, n \rangle, \quad (4.37)$$

$$| h, \mu, \Lambda \rangle = \sum_n \Lambda^n | h, \mu, n \rangle \quad (4.38)$$

とする. この Gaiotto 状態の内積やプライマリー場の相関関数をとったものをイレギュラーブロックとして定義する.

定義 4.10. 以下の関数

$$\langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle = \sum_n \Lambda^{4n} \langle h, n | h, n \rangle, \quad (4.39)$$

$$\langle h, \mu, \frac{\Lambda}{2} | h, \Lambda^2 \rangle = \sum_n \Lambda^{3n} 2^{-n} \langle h, \mu, n | h, n \rangle, \quad (4.40)$$

$$\langle h, \mu_1, \frac{\Lambda}{2} | h, \mu_2, \frac{\Lambda}{2} \rangle = \sum_n \Lambda^{2n} 2^{-2n} \langle h, \mu_1, n | h, \mu_2, n \rangle, \quad (4.41)$$

$$\langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h \rangle = \sum_n \Lambda^{2n} \langle h, n | \Phi_2(1) | h \rangle, \quad (4.42)$$

$$\langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | \Phi_2(1) | h \rangle = \sum_n \Lambda^{n} 2^{-n} \langle h, \mu_3, n | \Phi_2(1) | h \rangle \quad (4.43)$$

をイレギュラーブロックと呼ぶ。ここに  $\Phi_2$  は共形次元  $h_2$  のプライマリー場である。

このイレギュラーブロックが共形ブロックの退化極限になっており、物質場の少ない Nekrasov 公式に対応させることができる。

定理 4.11 ([18]). パラメータ  $c, h, h_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を (4.1)-(4.5) によって変換する。このとき共形ブロックの極限は

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \xrightarrow{\text{(A)}} \langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle, \quad (4.44)$$

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \xrightarrow{\text{(B)}} \langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | h, \Lambda^2 \rangle, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \xrightarrow{\text{(C)}} \langle h, \mu_2, \frac{\Lambda}{2} | h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} \rangle, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \xrightarrow{\text{(D)}} \langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h \rangle, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \xrightarrow{\text{(E)}} \langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | \Phi_2(1) | h_1 \rangle \quad (4.48)$$

となる。

証明. まず (A) の極限について証明する。Kac 行列の逆行列要素  $[B_{c,h}^n]^{J,K}$  は極限には影響しないから、共形ブロックの構成要素

$$q^n \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \quad (4.49)$$

の極限を考える。(2.75) と (2.76) から

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \sim \prod_{i=1}^{\ell(J)} (-h_4 + J_{\ell(J)+1-i} h_3), \quad (4.50)$$

$$\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \sim \prod_{i=1}^{\ell(K)} (-h_1 + K_{\ell(K)+1-i} h_2) \quad (4.51)$$

であるので  $\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle$  は、 $h_i$  を  $\mu_k$  に変換すれば、全ての  $\mu_k$  に関して合計  $2(\ell(J) + \ell(K))$  次であることが分かる。ここに  $\sim$  は極限をとる際に寄与の無い項

を無視することを表す. 極限 (A) では  $q^n$  は  $\mu_k$  と比べて  $4n$  乗の速さで 0 に収束するから, (4.49) は  $J = [1^n]$  かつ  $K = [1^n]$  のときのみ極限に寄与する. よって

$$\begin{aligned}
q^n \langle h_4 | \Phi_3(1)L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle &\sim q^n \langle h_4 | \Phi_3(1)L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \delta_{J, [1^n]} \delta_{K, [1^n]} \\
&\sim q^n (h_3 - h_4)^n (-h_1 + h_2)^n \delta_{J, [1^n]} \delta_{K, [1^n]} \\
&= q^n (-\mu_3 \mu_4)^n (-\mu_1 \mu_2)^n \delta_{J, [1^n]} \delta_{K, [1^n]} \\
&\xrightarrow{(A)} \Lambda^{4n} \delta_{J, [1^n]} \delta_{K, [1^n]} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) &\xrightarrow{(A)} \sum_n \sum_{|J|=|K|=n} \Lambda^{4n} [B_{c,h}^n]^{J,K} \delta_{J, [1^n]} \delta_{K, [1^n]} \tag{4.53} \\
&= \sum_n \Lambda^{4n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], [1^n]} \\
&= \sum_n \Lambda^{4n} \sum_{|J|=|K|=n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], J} [B_{c,h}^n]_{J,K} [B_{c,h}^n]^{K, [1^n]} \\
&= \sum_n \Lambda^{4n} \sum_{|J|=|K|=n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], J} \langle h | L_J L_{-K} | h \rangle [B_{c,h}^n]^{K, [1^n]} \\
&= \sum_n \Lambda^{4n} \langle h, n | h, n \rangle
\end{aligned}$$

となる. 従って (A) の極限が証明できた.

次に (B) の極限を証明する.  $\mu_1, \mu_2$  は (A) と同じように極限を取っているので,  $\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle$  からの寄与は変わらない. (B) では  $\mu_3$  を固定しているので

$$\langle h_4 | \Phi_3(1)L_{-J} | h \rangle \sim \prod_{i=1}^{\ell(J)} (J_{\ell(J)+1-i} h_3 - h_4) \tag{4.54}$$

からの寄与が変わる. この因子から  $\mu_4$  の  $n$  次の項を取りだす必要がある. まず  $h_3 - h_4 = -\mu_3 \mu_4$  と  $2h_3 - h_4 = -\frac{1}{4}\mu_4^2 + \mathcal{O}(\mu_4)$  であることから  $J = [2^p, 1^{n-2p}]$  の形をしているときは  $\mu_4^n$  の項が現れることが分かる. また  $J_i \geq 3$  となる  $J_i$  が存在するときは, 次数が足りず (4.54) に  $\mu_4^n$  の項が現れない. 従って

$$\begin{aligned}
q^n \langle h_4 | \Phi_3(1)L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle &\tag{4.55} \\
&\sim \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} q^n (-\mu_3 \mu_4)^{n-2p} \left(-\frac{1}{4}\mu_4^2\right)^p \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]} (-\mu_1 \mu_2)^n \delta_{K, [1^n]} \\
&= \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^p (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{q\mu_1 \mu_2 \mu_4}{2}\right)^n \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]} \delta_{K, [1^n]} \\
&\xrightarrow{(B)} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^p (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{\Lambda^3}{2}\right)^n \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]} \delta_{K, [1^n]} \tag{4.56}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) &\stackrel{(B)}{\rightarrow} \sum_n \sum_{|J|=|K|=n} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^p (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{\Lambda^3}{2}\right)^n [B_{c,h}^n]^{J,K} \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]} \delta_{K, [1^n]} \\
&= \sum_n \sum_{|J|=|K|=n} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^p (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{\Lambda^3}{2}\right)^n [B_{c,h}^n]^{[2^p, 1^{n-2p}], [1^n]} \\
&= \sum_n \Lambda^{3n} 2^{-n} \sum_{|J|=|K|=n} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{n-p} (2\mu_3)^{n-2p} [B_{c,h}^n]^{[2^p, 1^{n-2p}], J} \\
&\quad \times \langle h | L_J L_{-K} | h \rangle (-1)^n [B_{c,h}^n]^{K, [1^n]} \\
&= \sum_n \Lambda^{3n} 2^{-n} \langle h, \mu_3, n | h, n \rangle \tag{4.57}
\end{aligned}$$

となる. よって (B) の極限が証明できた.

(C) の極限は  $\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle$  からの寄与に対しても (B) の場合と同じ考察を行えばよく,

$$\begin{aligned}
q^n \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle &\tag{4.58} \\
\stackrel{(C)}{\rightarrow} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{p+t} (2\mu_3)^{n-2p} (2\mu_2)^{n-2t} \left(\frac{\Lambda^2}{4}\right)^n \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]} \delta_{K, [2^t, 1^{n-2t}]}
\end{aligned}$$

より

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \stackrel{(C)}{\rightarrow} \sum_n \Lambda^{2n} 2^{-2n} \langle h, \mu_1, n | h, \mu_2, n \rangle \tag{4.59}$$

となる.

(D) の極限は,  $\mu_1, \mu_2$  が極限に無関係であるから, 因子  $\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle$  がそのまま残り

$$q^n \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \stackrel{(D)}{\rightarrow} (-1)^n \Lambda^{2n} \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \delta_{J, [1^n]} \tag{4.60}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) &\stackrel{(D)}{\rightarrow} \sum_n \sum_{|K|=n} (-1)^n \Lambda^{2n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], K} \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \\
&= \langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h_1 \rangle \tag{4.61}
\end{aligned}$$

と計算できる.

(E) の極限も

$$\begin{aligned}
q^n \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle &\tag{4.62} \\
\stackrel{(E)}{\rightarrow} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{n-p} (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^n \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \delta_{J, [2^p, 1^{n-2p}]}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) &\xrightarrow{(\mathbf{E})} \sum_n \sum_{|K|=n} (-1)^{n-p} (2\mu_3)^{n-2p} \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^n [B_{c,h}^n]^{[2^p, 1^{n-2p}], K} \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle \\ &= \langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | \Phi_2(1) | h_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

となる. □

この定理と予想 4.1, 命題 4.2 及び命題 4.3 より, 以下の変種の AGT 予想が得られる.

**予想 4.12.**  $N_f = 0, 1, 2, 3$  の  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式と, イレギュラーブロックにその  $U(1)$  因子を掛けたものが, パラメータの読み替え (4.1)-(4.5) 及び,  $p = p_1 = -p_2$  の下で一致する:

$$Z_{\text{Nek}}^{\text{pure } U(2)}(\Lambda^4, \vec{p}, \vec{b}) = \langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle, \quad (4.64)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=1 U(2)}(\Lambda^3, \mu, \vec{p}, \vec{b}) = \langle h, \mu, \frac{\Lambda}{2} | h, \Lambda^2 \rangle, \quad (4.65)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=2 U(2)}(\Lambda^2, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}} \langle h, \mu_1, \frac{\Lambda}{2} | h, \mu_2, \frac{\Lambda}{2} \rangle, \quad (4.66)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=2 U(2)}(\Lambda^2, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = \langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h_1 \rangle, \quad (4.67)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=3 U(2)}(\Lambda, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = e^{-\frac{\Lambda}{2}(\mu_1 + \mu_2 + Q)} \langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | \Phi_2(1) | h_1 \rangle. \quad (4.68)$$

これを Gaiotto 予想という.  $N_f = 0, 1, 2$  の Gaiotto 予想はすでに証明が与えられている. この場合の証明を次章で述べる.

**例 4.13.** 最も簡単な場合のイレギュラーブロック  $\langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle$  は, (4.53) と (2.71)-(2.73) より

$$\begin{aligned} \langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle &= \sum_n \Lambda^{4n} [B_{c,h}^n]^{[1^n], [1^n]} \\ &= 1 + \frac{1}{2h} \Lambda^4 + \frac{8h+c}{4h(16h^2+2ch-10h+c)} \Lambda^8 \\ &\quad + \frac{8c+c^2-26h+11ch+24h^2}{24h(2+c-7h+ch+3h^2)(c-10h+2ch+16h^2)} \Lambda^{12} + \dots \end{aligned} \quad (4.69)$$

と展開できる. これと例 3.2 のピュアゲージ理論の場合を比較すれば一致していることが確認できる.

この例の  $\Lambda^{12}$  の項を見ると, 分子が因子化されておらず, あまり綺麗な形ではない. ここではピュアゲージ理論の場合を考えているが, これは共形ブロック (2.78) のヤング図による展開の仕方が悪く, その展開がいかに汚い形になっているかが表れている. これが AGT 予想によって改善され, Nekrasov 公式のようなヤング図の展開を用いれば, 綺麗で明示的な表示が共形ブロックに与えられるという期待が持たれている.

## 5 Zamolodchikov 漸化式を用いた証明

この章で  $N_f = 0, 1, 2$  の Gaiotto 予想 (予想 4.12) を Zamolodchikov 漸化式を用いて証明する. この漸化式は共形ブロックを変形した楕円の共形ブロックに関する漸化式であり, 共形ブロックを低次の項から決定することができる. これを用いてまずはイレギュラーブロックの満たす漸化式を求める. そして Nekrasov 公式も同じ漸化式を満たすから一致するという論法で証明する.

### 5.1 イレギュラーブロックの満たす漸化式

まず楕円の共形ブロックを以下のように定義する. またこの節では常にパラメトライズ (4.1)-(4.5) を適用する.

定義 5.1. 楕円の共形ブロック  $\mathcal{H}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}$  を

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) = \left(\frac{q}{16\Omega}\right)^{p^2} (1-q)^{\frac{Q^2}{4} - h_1 - h_3} \theta_3(\Omega)^{3Q^2 - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} \mathcal{H}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Omega) \quad (5.1)$$

によって定義する. ここに楕円関数を用いて

$$\Omega(q) = \exp\left[-\pi \frac{K(1-q)}{K(q)}\right], \quad K(q) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-qt^2)}} \quad (5.2)$$

とし,  $\theta_3(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega^{(n^2)} = 1 + 2\Omega + 2\Omega^4 + \dots$  と定めた. さらに楕円の共形ブロックの  $16\Omega$  によるレベル展開の係数を  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  と書く. つまり

$$\mathcal{H}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Omega) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (16\Omega)^n H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n \quad (5.3)$$

とする.

この  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  の次数  $n$  に関する漸化式 (Zamolodchikov 漸化式) が知られている.

事実 5.2 ([13, (13)], [34, 33]). 楕円の共形ブロックの  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  は漸化式

$$H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n = \delta_{n,0} + \sum_{\substack{1 \leq r, s \leq n \\ (r, s) \geq 0}} \frac{A_{rs} \prod_{k=1}^4 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^{n-rs} \quad (5.4)$$

を満たす. ここに整数  $r, s$  に対して

$$h_{r,s} = \frac{Q^2}{4} - \frac{1}{4}(rb + sb^{-1})^2, \quad (5.5)$$

$$A_{rs} = \frac{1}{2} \prod_{p=1-r}^r \prod_{q=1-s}^s \frac{1}{pb + qb^{-1}}, \quad (p, q) \neq (0, 0), (r, s) \quad (5.6)$$

$$Y_{rs}(\mu) = \prod_{\substack{p=1-r \\ p+r=1 \pmod{2}}}^{r-1} \prod_{\substack{q=1-s \\ q+s=1 \pmod{2}}}^{s-1} \left( \mu - \frac{pb + qb^{-1}}{2} \right) \quad (5.7)$$

とした.



注意 5.3.  $h_{r,s}$  はパラメトライズが異なるだけで, 命題 2.13 の  $h_{r,s}$  と同じものである. 実際  $-b^2 = \beta$  とすれば一致する.

この楕円的共形ブロックに関する漸化式の極限を取って, イレギュラーブロックの漸化式を導くことができる. そこでまず  $Y_{rs}(\mu)$  が  $\mu$  の  $rs$  次式であることに注意する. すると  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  は  $\mu_k$  の  $n$  次式であることが分かるので, 極限を取ったときに影響する  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  中の  $\mu_4^n$  の係数を  $H_n(h, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  と書くことにする. また  $H_n(h, \mu_1, \mu_2)$  を  $\mu_3^n \mu_4^n$  の係数として定める. このとき (5.4) より漸化式

$$H_n(h, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{A_{rs} \prod_{k=1}^3 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} H_{n-rs}(h_{r,s} + rs, \mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad (5.8)$$

$$H_n(h, \mu_1, \mu_2) = \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} H_{n-rs}(h_{r,s} + rs, \mu_1, \mu_2) \quad (5.9)$$

を満たすことが分かる. この  $H_n(h, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  と  $H_n(h, \mu_1, \mu_2)$  を用いてまず先に極限 (D) と (E) を表せる.

命題 5.4 ([13, 2 節]). 極限 (E) と (D) に対応したイレギュラーブロックは

$$\langle h, \mu_3, \frac{\Lambda}{2} | \Phi_2(1) | h \rangle = \exp\left(-\frac{1}{64}\Lambda^2 - \frac{1}{2}\mu_3\Lambda\right) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} H_n(h, \mu_1, \mu_2, \mu_3)\Lambda^n\right), \quad (5.10)$$

$$\langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h \rangle = \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} H_n(h, \mu_1, \mu_2)\Lambda^{2n}\right) \quad (5.11)$$

を満たす.

証明. 楕円的共形ブロックの定義 (5.1) の極限を考えれば良い. まず  $\Omega(q)$  を  $q$  で展開すると

$$16\Omega(q) = q + \frac{q^2}{2} + \frac{21q^3}{64} + \frac{31q^4}{128} + \dots \quad (5.12)$$

となるので (5.1) の右辺の 1 つ目の因子は  $q \rightarrow 0$  に対して

$$\left(\frac{q}{16\Omega}\right)^{p^2} \rightarrow 1 \quad (5.13)$$

となる. これは (A)-(E) の極限すべてにおいて成立つ.

ここから極限 (E) について考える. (5.1) の残りの因子は

$$(1-q)^{\frac{Q^2}{4} - h_1 - h_3} \theta_3(\Omega)^{3Q^2 - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} = (1-q)^{-h_1 + \frac{\mu_3^2}{4}} \theta_3(\Omega)^{Q^2 - 4(h_1 + h_2) + 2\mu_3^2} \times (1-q)^{\frac{1}{2}\mu_3\mu_4} (1-q)^{\frac{1}{4}\mu_4^2} \theta_3(\Omega)^{2\mu_4^2} \quad (5.14)$$

と変形すると, (E) の場合は  $\mu_4$  以外の質量の極限はとらないので,

$$(1-q)^{-h_1 + \frac{\mu_3^2}{4}} \theta_3(\Omega)^{Q^2 - 4(h_1 + h_2) + 2\mu_3^2} \xrightarrow{(E)} 1 \quad (5.15)$$

となる. さらに,

$$(1-q)^{\frac{1}{2}\mu_3\mu_4} = \left\{ \left(1 - \frac{\Lambda}{\mu_4}\right)^{-\frac{\mu_4}{\Lambda}} \right\}^{-\frac{1}{2}\mu_3\Lambda} \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\mu_3\Lambda\right) \quad (5.16)$$

また (5.12) より

$$\begin{aligned} (1-q)^{\frac{1}{4}\mu_4^2}\theta_3(\Omega)^{2\mu_4^2} &= (1-q)^{\frac{1}{4}\mu_4^2} \left(1 + \frac{1}{8}q + \frac{1}{16}q^2 + \dots\right)^{2\mu_4^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}q - \frac{3}{32}q^2 + \dots\right)^{\mu_4^2} \left(1 + \frac{1}{4}q + \frac{9}{64}q^2 + \dots\right)^{\mu_4^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots\right)^{\mu_4^2} \\ &\xrightarrow{\text{(E)}} \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{64}\right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる. また  $H_{h_4h_3;h_2h_1;h}^n$  は  $\mu_k$  の  $n$  次式であることに注意し,  $H_{h_4h_3;h_2h_1;h}^n$  の中の  $\mu_4^n$  の係数を見れば,

$$\mathcal{H}_{h_4h_3;h_2h_1;h}(\Omega) \xrightarrow{\text{(E)}} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} H_n(h, \mu_1, \mu_2, \mu_3)\Lambda^n\right) \quad (5.18)$$

となることが分かる. 以上より (5.10) が成立する.

次に極限 (D) を考える. (D) では  $\mu_3, \mu_4$  以外の質量は極限に寄与しないから

$$(1-q)^{\frac{Q^2}{4}-h_1-h_3}\theta_3(\Omega)^{3Q^2-4(h_1+h_2+h_3+h_4)} = (1-q)^{-h_1}\theta_3(\Omega)^{Q^2-4(h_1+h_2)} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} &\times (1-q)^{\frac{1}{4}(\mu_3+\mu_4)^2}\theta_3(\Omega)^{2\mu_3^2+2\mu_4^2} \\ &= (1-q)^{-h_1}\theta_3(\Omega)^{Q^2-4(h_1+h_2)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\times (1-q)^{\frac{1}{2}\mu_3\mu_4} \left\{ (1-q)^{\frac{1}{4}}\theta_3(\Omega)^2 \right\}^{\mu_3^2+\mu_4^2} \quad (5.21)$$

と変形すれば,

$$(1-q)^{-h_1}\theta_3(\Omega)^{Q^2-4(h_1+h_2)} \xrightarrow{\text{(D)}} 1 \quad (5.22)$$

となる. また  $q\mu_3 \rightarrow 0, q\mu_4 \rightarrow 0$  のように  $q$  の方が  $\mu_3, \mu_4$  より速く収束するから,

$$\left\{ (1-q)^{\frac{1}{4}}\theta_3(\Omega)^2 \right\}^{\mu_3^2+\mu_4^2} = \left(1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots\right)^{\mu_3^2} \left(1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots\right)^{\mu_4^2} \xrightarrow{\text{(D)}} 1 \quad (5.23)$$

となる. さらに

$$(1-q)^{\frac{1}{2}\mu_3\mu_4} \xrightarrow{\text{(D)}} \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right) \quad (5.24)$$

であるとともに,  $H_{h_4h_3;h_2h_1;h}^n$  の中の  $\mu_3^n\mu_4^n$  の係数に注意すれば (5.11) が成立する.  $\square$

この命題によって (D) と (E) の場合のイレギュラーブロックの漸化式が求まる. タイプ (A) と (B), (C) のイレギュラーブロックに関しても同じように漸化式が求まる.

命題 5.5 ([13, (18)-(20)]). 極限 (A) と (B), (C) に対応したイレギュラーブロックは, 漸化式

$$2^{-2n} \langle h, \mu_1, n | h, \mu_2, n \rangle \quad (5.25)$$

$$= \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} 2^{-2(n-rs)} \langle h_{r,s} + rs, \mu_1, n - rs | h_{r,s} + rs, \mu_2, n - rs \rangle,$$

$$2^{-n} \langle h, \mu, n | h, n \rangle = \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{A_{rs} Y_{rs}(\mu)}{h - h_{r,s}} 2^{-(n-rs)} \langle h_{r,s} + rs, \mu, n - rs | h_{r,s} + rs, n - rs \rangle, \quad (5.26)$$

$$\langle h, n | h, n \rangle = \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{A_{rs}}{h - h_{r,s}} \langle h_{r,s} + rs, n - rs | h_{r,s} + rs, n - rs \rangle \quad (5.27)$$

を満たす.

証明. 前の命題と同様に因子  $(1-q)^{\frac{Q^2}{4} - h_1 - h_3} \theta_3(\Omega)^{3Q^2 - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)}$  の極限を考えればよいが, タイプ (A)-(C) では全て 1 に収束する. 実際, (C) の極限を考えると

$$(1-q)^{\frac{Q^2}{4} - h_1 - h_3} \theta_3(\Omega)^{3Q^2 - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} = (1-q)^{-\frac{Q^2}{4} + \frac{1}{4}(\mu_2^2 + \mu_3^2)} \theta_3(\Omega)^{-Q^2 + 2\mu_2^2 + \mu_3^2} \\ \times (1-q)^{-\frac{1}{2}\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\mu_4} \left\{ (1-q)^{\frac{1}{4}} \theta_3(\Omega)^2 \right\}^{\mu_2^2 + \mu_3^2} \quad (5.28)$$

となり, それぞれの因子は

$$(1-q)^{-\frac{Q^2}{4} + \frac{1}{4}(\mu_2^2 + \mu_3^2)} \theta_3(\Omega)^{-Q^2 + 2\mu_2^2 + \mu_3^2} \xrightarrow{(C)} 1, \quad (5.29)$$

$$(1-q)^{-\frac{1}{2}\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\mu_4} \xrightarrow{(C)} 1, \quad (5.30)$$

$$\left\{ (1-q)^{\frac{1}{4}} \theta_3(\Omega)^2 \right\}^{\mu_2^2 + \mu_3^2} = \left( 1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots \right)^{\mu_1^2} \left( 1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots \right)^{\mu_4^2} \xrightarrow{(C)} 1 \quad (5.31)$$

と 1 に収束する. タイプ (B) と (A) の極限においても基本的に,  $(1-q)$  と  $(1 - \frac{1}{64}q^2 + \dots)$  の積の形になり, その指数部分に  $\mu_1\mu_2\mu_4$  や  $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$  が無いと 1 以外の値に収束しないが, このような項が指数部分に現れないので皆 1 に収束してしまう.

このことと,  $H_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}^n$  中の  $\mu_1^n \mu_4^n$  と  $\mu_1^n \mu_2^n \mu_4^n$  と  $\mu_1^n \mu_2^n \mu_3^n \mu_4^n$  の係数に注意すれば, 漸化式 (5.4) より命題が従う.  $\square$

注意 5.6. (5.11) と (5.25) から,

$$\langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h \rangle = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}} \langle h, \mu_1, \frac{\Lambda}{2} | h, \mu_2, \frac{\Lambda}{2} \rangle \quad (5.32)$$

が得られる. これは予想 4.12 から, どちらも同じ Nekrasov 公式に一致するということから読み取れる.

以上のようにイレギュラーブロックの満たす漸化式が求まった. 次節でこれと同じ漸化式を Nekrasov 公式が満たすことを証明する.

## 5.2 Nekrasov 公式の満たす漸化式

この節で Nekrasov 公式の満たす漸化式を導き,  $N_f = 0, 1, 2$  の Gaiotto 予想の証明を一通り終える. まずこの節では Nekrasov 公式の  $q^N$  の係数を  $Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  とおく. つまり

$$Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = \sum_{|\vec{Y}|=N} Z_{\vec{Y}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \quad (5.33)$$

とする. またこの  $Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  をインスタントン数  $N$  の分配関数と呼ぶ. これには次の積分表示が知られている.

事実 5.7 ([13, (28)], [26]). インスタントン数  $N$  の分配関数は

$$Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) = \frac{Q^N}{N!} \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{2\pi i} \left( \prod_{k=1}^N \frac{\mathcal{Q}_f(\phi_k)}{\mathcal{P}(\phi_k - i0)\mathcal{P}(\phi_k + Q + i0)} \right. \quad (5.34)$$

$$\left. \times \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\phi_{ij}(\phi_{ij} - Q)}{(\phi_{ij} - b - i0)(\phi_{ij} - b^{-1} - i0)} \right)$$

という積分表示を持つ. ここに  $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$  とし

$$\mathcal{P}(\phi) = (\phi - p_1)(\phi - p_2), \quad \mathcal{Q}_f(\phi) = \prod_{k=1}^{N_f} \left( \phi + \mu_k + \frac{Q}{2} \right) \quad (5.35)$$

と定めた.

注意 5.8. ここに述べた積分表示に現れる積分  $\oint_{\mathbb{R}}$  は, 実軸上の積分路を十分大きい上半平面で閉じて留数積分することを意味する. その際, 例えば積分変数を  $x$  とし被積分関数の分母に因子  $(x - a - i0)$  がある場合は,  $a$  を実数だと考え, 極  $a + i0$  は実軸上から虚軸方向に少しだけずれた場所にあるとみて, 積分路の内側に入っているものとする. 逆に因子  $(x - b + i0)$  の与える極  $b - i0$  は積分路の外にあるものとする. 例えば

$$\oint_{\mathbb{R}} \frac{dx}{2\pi i} \prod_{\alpha=1}^n \prod_{\beta=1}^m \frac{f(x)}{(x - a_{\alpha} - i0)(x - b_{\beta} + i0)} = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\beta=1}^m \frac{f(a_{\alpha})}{(a_{\alpha} - b_{\beta})} \quad (5.36)$$

となる. ここに  $f(x)$  は積分が十分収束するような正則関数とし,  $a_{\alpha}, b_{\beta}$  は全て相異なるものとした. また  $a_{\alpha}, b_{\beta}$  は一般に複素数を考えるので, 実際は実軸上の積分ではなく,  $+i0$  のついた極が内側に,  $-i0$  のついた極は外側にくるような閉曲線上で積分することを表している.

ではこの積分がヤング図の組  $\vec{Y} = (Y^{(1)}, Y^{(2)})$  の和で書けるということを説明する [10, 2 節]. 初めは空のヤング図  $(\emptyset, \emptyset)$  を用意する.  $\phi_1$  から順に積分していくたびに, この中に次の手順で箱を入れていく. まず  $\phi_1$  は極  $p_1, p_2, \phi_j + b, \phi_j + b^{-1}$  を積分路の内側に持っているが, 今は他の積分変数が入った極  $\phi_j + b, \phi_j + b^{-1}$  からくる項は考えず,  $p_1$  もしくは  $p_2$  周りでの積分を考える.  $p_1$  周りで積分した項には左側のヤング図に箱を入れ,  $p_2$  周りで積分した項には右側のヤング図に箱を入れる.

$$\begin{array}{ccc} p_1 & & p_2 \\ (\square, ) & & (, \square) \end{array}$$

ここで、例えば  $p_1$  周りで積分した項は

$$\begin{aligned} \frac{Q^N}{N!} \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_2}{2\pi i} & \left( \frac{\mathcal{Q}_f(p_1)}{(p_1 - p_2 - i0)\mathcal{P}(p_1 + Q + i0)} \right. \\ & \times \prod_{k=2}^N \frac{\mathcal{Q}_f(\phi_k)}{(\phi_k - p_1 - i0)(\phi_k - p_2 - i0)\mathcal{P}(\phi_k + Q + i0)} \\ & \times \prod_{j=2}^N \frac{(p_1 - \phi_j)(p_1 - \phi_j - Q)}{(p_1 - \phi_j - b - i0)(p_1 - \phi_j - b^{-1} - i0)} \\ & \times \prod_{i=2}^N \frac{(\phi_i - p_1)(\phi_i - p_1 - Q)}{(\phi_i - p_1 - b - i0)(\phi_i - p_1 - b^{-1} - i0)} \\ & \left. \times \prod_{i,j=2}^N \frac{\phi_{ij}(\phi_{ij} - Q)}{(\phi_{ij} - b - i0)(\phi_{ij} - b^{-1} - i0)} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

となる。このとき被積分関数の分子にあった因子  $\phi_{ij}$  によって、積分変数  $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$  の極  $p_1$  は消えることが分かる。また新たに極  $p_1 + b, p_1 + b^{-1}$  が現れている。

次に  $\phi_2$  で積分することを考える。 $\phi_2$  は極  $p_1 + b, p_1 + b^{-1}, p_2$  を持つ。 $p_1 + b$  周りで積分した項は、左側のヤング図の垂直方向、つまり元々あった箱の下に箱を置く。 $p_1 + b^{-1}$  周りで積分した項は、左側のヤング図の水平方向、つまり元々あった箱の右に箱を置く。 $p_2$  周りで積分した項は、右側のヤング図に箱を入れる。

$$\begin{array}{ccc} p_1 + b & p_1 + b^{-1} & p_2 \\ (\square, ) & (\square, ) & (\square, \square) \end{array}$$

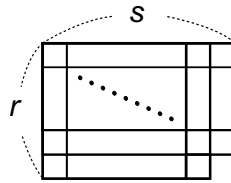
さらに  $p_1 + b$  周りで積分した項を考えると、積分変数  $\phi_3, \phi_4, \dots, \phi_N$  の極  $p_1 + b$  は分子の因子  $\phi_{ij}$  によって消えることが分かる。そして新たに極  $p_1 + 2b, p_1 + b + b^{-1}$  が現れる。しかし、ここで被積分関数の分子にあった因子  $\phi_{ij} - Q$  によって、(5.37) でいうと4行目の因子  $(\phi_i - p_1 - Q)$  によって極  $p_1 + b + b^{-1}$  は消えることが分かる。

次に  $\phi_3$  で積分することを考える。 $(\phi_2$  の積分を  $p_1 + b$  周りで行った後の)  $\phi_3$  は極  $p_1 + b^{-1}, p_1 + 2b, p_2$  を持つ。 $p_1 + b^{-1}$  周りで積分した項は左側のヤング図の水平方向に、 $p_1 + 2b$  周りで積分した項は左側のヤング図の垂直方向に、 $p_2$  周りで積分した項は右側のヤング図に箱を入れる。

このような操作を繰り返して、一般に  $p_1 + rb + sb^{-1}$  周りで積分したらヤング図の座標  $(r+1, s+1)$  に箱を置く。ここで分子の因子  $\phi_{ij}$  により、同じ場所に2重に箱を置くことはあり得ない。また因子  $\phi_{ij} - Q$  の役割によって、ヤング図として矛盾した図形は現れない。例えば、上で述べたように  $\phi_2 = p_1 + b$  周りで積分したときの  $\phi_3$  の極  $p_1 + b + b^{-1}$  は、きちんと消える。

$$\begin{array}{cccc}
p_1 + b^{-1} & p_1 + 2b & p_2 & p_1 + b + b^{-1} \\
\left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \right) & \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \right) & \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \right) & \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \right)
\end{array}$$

ちなみに, さらに  $\phi_3$  の積分を  $p_1 + b^{-1}$  周りで行った項では, 分子にあった因子  $(\phi_i - p_1 - Q)$  がすでに一度約分されているから, 新たに生じる極  $p_1 + b + b^{-1}$  が消えることはない. 一般に,  $rs - 1$  個の極  $p_1 + (m - 1)b + (n - 1)b^{-1}$  ( $0 \leq m \leq r, 0 \leq n \leq s, (m, n) \neq (r, s)$ ) を計算すると極  $p_1 + (r - 1)b + (s - 1)b^{-1}$  が現れる. ヤング図で説明すると, 座標  $(r, s)$  に対して, その座標より左上の部分 (下図) が箱で埋め尽くされているとき, 初めて座標  $(r, s)$  に箱を置くことができる.



極  $p_2 + (r - 1)b + (s - 1)b^{-1}$  に関しても, 右側のヤング図形において同じ議論ができる. 従って積分は  $N$  重であるから, この積分表示は大きさが  $N$  のヤング図の組でパラメトライズされた項の和で書くことができる. また, 他の積分変数が入った極からくる項も考慮すると, 同じヤング図の組を表す項が  $N!$  通り現れる.

この事実を用いて, Nekrasov 公式がイレギュラーブロックと同じ漸化式を満たすことを証明できる. 実はイレギュラーブロックの満たす漸化式は変数  $h$  に関する極の位置と, その留数を表す式になっていることが分かる. そこで Nekrasov 公式に関して, 積分表示 (5.34) を積分し終えた後の変数  $p_1, p_2$  の極の位置と, その留数について考える. その為に以下の補題を用意する.

補題 5.9 ([13, Appendix]). 正則関数  $f(\phi_1, \dots, \phi_N)$  を積分

$$\begin{aligned}
F_N^f(\{a_\alpha\}, \{\epsilon_k\}) &= \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} f(\phi_1, \dots, \phi_N) \\
&\times \prod_{\alpha} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\phi_i - a_\alpha - i0} \prod_k \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{\phi_{ij} - \epsilon_k - i0}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

が全ての議論の上で十分収束するものとする. このとき関数  $F_N^f(\{a_\alpha\}, \{\epsilon_k\})$  は全ての  $a_\alpha$  に関して正則である.

証明. まず  $\phi_N$  で積分する. 積分変数  $\phi_N$  は極  $a_\alpha, \phi_j + \epsilon_k$  と  $\phi_j - \epsilon_k$  を持っており, この補題の場合では極  $a_\alpha, \phi_j + \epsilon_k$  を含む閉曲線上で積分すればよい. そこで積分路  $C$  を  $a_\alpha, \phi_j + \epsilon_k$  と  $\phi_j - \epsilon_k$  の全ての極を含むものとし, 積分路  $C_{j,k}$  を極  $\phi_j - \epsilon_k$  だけを含むような経路とする. すると  $\phi_N$  の積分路は

$$C - \sum_{j,k} C_{j,k} \tag{5.39}$$

にとって計算すればよい。\$F\_N^f(\{a\_\alpha\}, \{\epsilon\_k\})\$ において、\$\phi\_N\$ を含んでいない因子と残りの積分を一旦無視したものを \$\mathcal{T}\$ と書くと、\$\mathcal{T}\$ は \$\mathcal{C}\_{j,k}\$ 上の積分の和に帰着できて

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \sum_{j,l} \oint_{-C_{j,l}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} f(\phi_1, \dots, \phi_N) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_N - a_\alpha - i0} \\
&\quad \times \prod_k \prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\phi_N - \phi_i - \epsilon_k - i0} \frac{-1}{\phi_N - \phi_i + \epsilon_k + i0} \\
&= - \sum_{j,l} f(\phi_1, \dots, \phi_j - \epsilon_l) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_j - \epsilon_l - a_\alpha - i0} \\
&\quad \times \prod_k \prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\phi_{ji} - \epsilon_l - \epsilon_k - i0} \prod_{\substack{k \\ (i,k) \neq (j,b)}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{-1}{\phi_{ji} - \epsilon_l + \epsilon_k + i0} \\
&= \sum_{j,l} f(\phi_1, \dots, \phi_j - \epsilon_l) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_j - \epsilon_l - a_\alpha - i0} \frac{1}{2\epsilon_l} \\
&\quad \times \prod_{\substack{k \\ (i,k) \neq (j,l)}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\phi_{ji} - \epsilon_l - \epsilon_k - i0} \frac{-1}{\phi_{ji} - \epsilon_l + \epsilon_k + i0} \\
&= \sum_{j,l} f(\phi_1, \dots, \phi_j - \epsilon_l) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_j - \epsilon_l - a_\alpha - i0} \frac{1}{2\epsilon_l} \\
&\quad \times \prod_{\substack{k \\ (i,k) \neq (j,l)}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{-1}{\phi_{ij} + \epsilon_k + \epsilon_l + i0} \frac{1}{\phi_{ij} - \epsilon_k + \epsilon_l - i0}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

と表すことができる。さらにこの式の4行目の文字を単に \$(i, k) \leftrightarrow (j, l)\$ と置き換えたものと、5行目の式を足したものは

$$\begin{aligned}
2\mathcal{T} &= \sum_{i,k} f(\phi_1, \dots, \phi_i - \epsilon_k) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_i - \epsilon_k - a_\alpha - i0} \frac{1}{2\epsilon_k} \\
&\quad \times \prod_{\substack{l \\ (i,k) \neq (j,l)}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\phi_{ij} - \epsilon_k - \epsilon_l - i0} \frac{-1}{\phi_{ij} - \epsilon_k + \epsilon_l + i0} \\
&+ \sum_{j,l} f(\phi_1, \dots, \phi_j - \epsilon_l) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_j - \epsilon_l - a_\alpha - i0} \frac{1}{2\epsilon_l} \\
&\quad \times \prod_{\substack{k \\ (i,k) \neq (j,l)}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{-1}{\phi_{ij} + \epsilon_k + \epsilon_l + i0} \frac{1}{\phi_{ij} - \epsilon_k + \epsilon_l - i0} \tag{5.41}
\end{aligned}$$

となる。この式を見ると \$\mathcal{T}\$ の中の \$\phi\_N\$ 以外の積分変数 \$\phi\_i\$ は、新たな極 \$a\_\alpha + \epsilon\_k + i0\$、\$\phi\_j + \epsilon\_k + \epsilon\_l + i0\$ と \$\phi\_j - \epsilon\_k - \epsilon\_l - i0\$ を持つことが分かる。よって \$\mathcal{T}\$ を残りの積分の中に戻せば、残りの積分は新たに生じた極 \$a\_\alpha + \epsilon\_k\$、\$\phi\_j + \epsilon\_k + \epsilon\_l\$ も含んだ閉曲線上で積分すればよい。ここで、さらに極 \$\phi\_j + \epsilon\_k - \epsilon\_l\$ も生じているように見えるが、これは見かけ上の極であり、こ

の点で  $\mathcal{T}$  は有限である. 実際,  $\phi_i \rightarrow \phi_j + \epsilon_k - \epsilon_l$  に対して

$$f(\phi_1, \dots, \phi_i - \epsilon_k) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_i - \epsilon_k - a_{\alpha}} \rightarrow f(\phi_1, \dots, \phi_j - \epsilon_l) \prod_{\alpha} \frac{1}{\phi_j - \epsilon_l - a_{\alpha}} \quad (5.42)$$

であり, また

$$\prod_{\substack{l' \\ (i,k) \neq (j',l')}} \prod_{j'=1}^{N-1} \frac{1}{\phi_{ij'} - \epsilon_k - \epsilon_{l'}} \frac{-1}{\phi_{ij'} - \epsilon_k + \epsilon_{l'}} \rightarrow \prod_{\substack{k' \\ (i',k') \neq (j,l)}} \prod_{i'=1}^{N-1} \frac{-1}{\phi_{i'j} + \epsilon_{k'} + \epsilon_l} \frac{1}{\phi_{i'j} - \epsilon_{k'} + \epsilon_l} \quad (5.43)$$

となっているので極  $\phi_i = \phi_j + \epsilon_k - \epsilon_l$  における留数は

$$\frac{1}{2\epsilon_k} \frac{1}{\phi_{ij} - \epsilon_k - \epsilon_l} + \frac{1}{2\epsilon_l} \frac{1}{\phi_{ij} + \epsilon_k + \epsilon_l} = \frac{(\epsilon_k + \epsilon_l)(\phi_{ij} - \epsilon_k + \epsilon_l)}{2\epsilon_k \epsilon_l (\phi_{ij} - (\epsilon_k + \epsilon_l)^2)} \quad (5.44)$$

という因子を含んでいる. 従って  $\mathcal{T}$  は  $\phi_i \rightarrow \phi_j + \epsilon_k - \epsilon_l$  で発散しない.

以上により,  $\mathcal{T}$  を残りの  $N - 1$  重の積分に戻して考えれば,  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  は再び  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  の定義と同じ構造をしている  $N - 1$  重積分の和になることが分かる. ただしパラメータの集合は

$$\{a_{\alpha}\} \rightarrow \{a_{\alpha}, a_{\alpha} + \epsilon_k\}, \quad \{\epsilon_k\} \rightarrow \{\epsilon_k, \epsilon_k + \epsilon_l\} \quad (5.45)$$

と拡大され, また正則関数  $f$  は別の  $N - 1$  変数の正則関数に置き換わる.

この議論を繰り返せば  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  は最終的に, 1 変数の正則関数  $\tilde{f}(\phi)$  と,  $N - 1$  個の和まで許したパラメータの集合

$$\{e_A\} = \{0, \epsilon_k, \epsilon_k + \epsilon_l, \dots\} \quad (5.46)$$

を用いて,

$$\oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{2\pi i} \tilde{f}(\phi_1) \prod_{\alpha} \prod_A \frac{1}{\phi_1 - a_{\alpha} - e_A - i0} = \prod_{\alpha} \prod_A \tilde{f}(a_{\alpha} + e_A) \quad (5.47)$$

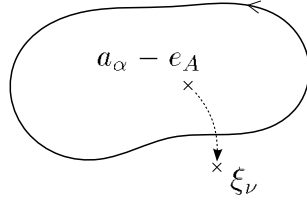
という正則関数の和になることが分かる. 以上により,  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  は全ての  $a_{\alpha}$  に関して正則であることが証明できた.  $\square$

注意 5.10. この補題において  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  の被積分関数に因子

$$\prod_{\nu} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\phi_i - \xi_{\nu} + i0} \quad (5.48)$$

が含まれているとき,  $F_N^f(\{a_{\alpha}\}, \{\epsilon_k\})$  は  $a_{\alpha} = \xi_{\nu} + e_A$  にだけ極を持つ可能性がある. ここに  $e_A \in \{0, \epsilon_k, \epsilon_k + \epsilon_l, \dots\}$  である. 状況だけ説明すると, 積分路の内側にある極  $a_{\alpha} - e_A$  がどのように動いても, 積分路変形の原理から積分が発散することはない. このことはこの補題により保障される. しかし今, 極  $\xi_{\nu}$  が積分路の外にあるので, この極に  $a_{\alpha} - e_A$  が衝突すると, 積分路の逃げ道がなくなり積分は発散してしまう可能性がある.





この注意を Nekrasov 公式の積分表示に置き換えると,  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p})$  の変数  $p_1$  の極の位置が分かる. 特に Nekrasov 公式の場合は, 被積分関数の分子にある因子  $\phi_{ij}$  と  $\phi_{ij} - Q$  の役割によって, 同じ場所で二重に積分することはない. 従って  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  では, 極  $p_1 = p_2 - (rb + sb^{-1})$  が現れ, パラメータ  $b$  が generic なとき, この極は単純極であることが分かる. また  $p_2 = -p_1 - (rb + sb^{-1})$  の極も同じように生じる. よって以下の命題が従う.

**命題 5.11** ([13, Appendix]).  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  は変数  $p_{12} \equiv p_1 - p_2$  に関して, パラメータ  $b$  が generic なとき, 単純極  $p_{12} = \mp(rb + sb^{-1})$  ( $1 \leq r, s \leq N, rs \leq N$ ) を持ち, この点以外では正則である.

この命題により Nekrasov 公式の極の位置が分かったので, さらにその留数を調べる.

**命題 5.12** ([13, (32)]).  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  の極  $p_{12} = -(rb + sb^{-1})$  における留数は

$$\text{Res}_{p_{12}=-(rb+sb^{-1})} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \times Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, p_1+rb, p_1+sb^{-1}, \vec{b}) \quad (5.49)$$

となる. ここにヤング図の組  $\vec{Y}_{rs}$  は, 左側に  $r \times s$  の長方形ヤング図形を入れ, 右側は空のもの ( $[r^s], [0]$ ) である.

**証明.** まずヤング図が長方形  $r \times s$  になる積分を先に行ったものを考える. そこで  $r, s$  ( $1 \leq r, s \leq N, rs \leq N$ ) に対して  $K_{rs}$  を

$$\begin{aligned} K_{rs} = & \text{Res}_{p_{12}=-(rb+sb^{-1})} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_{rs}}{2\pi i} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{2\pi i} \prod_{k=rs+1}^N \prod_{i=1}^{rs} \frac{\phi_{ki}^2 (\phi_{ki}^2 - Q^2)}{(\phi_{ki}^2 - (b-i0)^2) (\phi_{ki}^2 - (b-i0)^{-2})} \\ & \times \prod_{i=1}^{rs} \frac{Q_f(\phi_i)}{\mathcal{P}(\phi_i - i0) \mathcal{P}(\phi_i + Q + i0)} \prod_{i \neq j} \frac{\phi_{ij} (\phi_{ij} - Q)}{(\phi_{ij} - b - i0) (\phi_{ij} - b^{-1} - i0)} \end{aligned} \quad (5.50)$$

とする. このとき  $rs$  重の積分で  $p_{12} = -(rb + sb^{-1})$  における留数を取っているので, ヤング図が長方形  $r \times s$  になるもの以外の項は影響しない. よって

$$\frac{Q^{rs}}{(rs)!} K_{rs} = \text{Res}_{p_{12}=-(rb+sb^{-1})} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) \prod_{k=rs+1}^N \prod_{m=1}^r \prod_{n=1}^s \frac{(\phi_k - x_{mn})^2 ((\phi_k - x_{mn})^2 - Q^2)}{((\phi_k - x_{mn})^2 - b^2) ((\phi_k - x_{mn})^2 - b^{-2})} \quad (5.51)$$

となる. ここに  $x_{mn} = p_1 + (m-1)b + (n-1)b^{-1}$  とした. 残りの  $N - rs$  重の積分からは極  $p_{12} = -(rb + sb^{-1})$  はもう生じないから,  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}$  の  $p_{12} = -(rb + sb^{-1})$  における留数は

$K_{rs}$  を用いて,

$$\begin{aligned} \text{Res } Z_{N \text{ inst}}^{N_f} &= \frac{Q^{N-rs}}{(N-rs)!} \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_{rs+1}}{2\pi i} \prod_{\substack{k,l=rs+1 \\ k \neq l}}^N \frac{\phi_{kl}(\phi_{kl} - Q)}{(\phi_{kl} - b - i0)(\phi_{kl} - b^{-1} - i0)} \\ &\quad \times \prod_{k=rs+1}^N \frac{\mathcal{Q}_f(\phi_k)}{\mathcal{P}(\phi_k - i0)\mathcal{P}(\phi_k + Q + i0)} \frac{Q^{rs}}{(rs)!} K_{rs} \Big|_{\mathbf{p}_{12} = -(rb+sb^{-1})} \end{aligned} \quad (5.52)$$

と表せる. この積分の中身を計算していくと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{P}(\phi_k)\mathcal{P}(\phi_k + Q)} \times \prod_{m=1}^r \prod_{n=1}^s \frac{(\phi_k - x_{mn})^2((\phi_k - x_{mn})^2 - Q^2)}{((\phi_k - x_{mn})^2 - b^2)((\phi_k - x_{mn})^2 - b^{-2})} \quad (5.53) \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}(\phi_k)\mathcal{P}(\phi_k + Q)} \times \frac{(\phi_k - x_{rs})(\phi_k - x_{11})(\phi_k - x_{00})(\phi_k - x_{r+1s+1})}{(\phi_k - x_{0s})(\phi_k - x_{r+11})(\phi_k - x_{r0})(\phi_k - x_{1s+1})} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k)\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k + Q)} \times \frac{(\phi_k - \mathbf{p}_1 - rb - sb^{-1} + Q)(\phi_k - \mathbf{p}_1 - rb - sb^{-1})}{(\phi_k - \mathbf{p}_2)(\phi_k + Q - \mathbf{p}_2)} \\ &\xrightarrow{\mathbf{p}_{12} \rightarrow -(rb+sb^{-1})} \frac{1}{\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k)\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k + Q)} \Big|_{\mathbf{p}_{12} = -(rb+sb^{-1})} \end{aligned}$$

となる. ここに

$$\tilde{\mathcal{P}}(\phi) = (\phi - \mathbf{p}_1 - rb)(\phi - \mathbf{p}_1 - sb) = (\phi - x_{r+11})(\phi - x_{1s+1}) \quad (5.54)$$

とした. 従って,

$$\begin{aligned} \text{Res } Z_{N \text{ inst}}^{N_f} &= \frac{Q^{N-rs}}{(N-rs)!} \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_{rs+1}}{2\pi i} \prod_{\substack{k,l=rs+1 \\ k \neq l}}^N \frac{\phi_{kl}(\phi_{kl} - Q)}{(\phi_{kl} - b - i0)(\phi_{kl} - b^{-1} - i0)} \\ &\quad \times \prod_{k=rs+1}^N \frac{\mathcal{Q}_f(\phi_k)}{\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k - i0)\tilde{\mathcal{P}}(\phi_k + Q + i0)} \Big|_{\mathbf{p}_{12} = -(rb+sb^{-1})} \text{Res } Z_{\tilde{Y}_{rs}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{b}}) \\ &= \text{Res } Z_{\tilde{Y}_{rs}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{b}}) \times Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}_1 + rb, \mathbf{p}_1 + sb^{-1}, \vec{\mathbf{b}}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

となるので命題が成立する.  $\square$

この命題によって, 各極の留数が  $N$  より低いインスタントン数の分配関数で書けることが分かる. ここからさらに  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  において留数計算を進めると, 次の命題を得る.

**命題 5.13** ([13, (34)]).  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  とする. このとき, 整数  $r, s$  ( $1 \leq r, s \leq N, rs \leq N$ ) に対して,

$$\begin{aligned} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{\mathbf{b}}) &= -\frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{4\mathbf{p}^2 - (rb + sb^{-1})^2} Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{\mathbf{b}}) \quad (5.56) \\ &\quad + \mathcal{O}(1)(\mathbf{p} \rightarrow \pm \frac{1}{2}(rb + sb^{-1})) \end{aligned}$$

となる. ここに  $Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) = Z_{N\text{inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}, \vec{b})$  とした. また  $A_{rs}$  と  $Y_{rs}$  は (5.6), (5.7) と同じものである.

証明. 前の命題を用いて留数  $\text{Res}_{\mathbf{p}_{12} = -(rb+sb^{-1})} Z_{\vec{Y}_{rs}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b})$  を計算すればよい. まずヤング図の組  $\vec{Y}_{rs}$  に対するベクトル多重項は

$$\begin{aligned}
Z_{\vec{Y}_{rs}}^{\text{vect}}(\vec{p}, \vec{b}) &= \prod_{(i,j) \in [s^r]} ((A_{[s^r]}(i,j) + 1)b^{-1} - L_{[s^r]}(i,j)b)^{-1} \\
&\times \prod_{(i,j) \in [s^r]} (-A_{[s^r]}(i,j)b^{-1} + (L_{[s^r]}(i,j) + 1)b)^{-1} \\
&\times \prod_{(i,j) \in [s^r]} (\mathbf{p}_{12} + (A_{[s^r]}(i,j) + 1)b^{-1} - L_{[0]}(i,j)b)^{-1} \\
&\times \prod_{(i,j) \in [s^r]} (-\mathbf{p}_{12} - A_{[0]}(i,j)b^{-1} + (L_{[s^r]}(i,j) + 1)b)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s ((s-j+1)b^{-1} - (r-i)b)^{-1} (-(s-j)b^{-1} + (r-i+1)b)^{-1} \\
&\quad \times (\mathbf{p}_{12} + (s-j+1)b^{-1} + ib)^{-1} (-\mathbf{p}_{12} + jb^{-1} + (r-i+1)b)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

となるので, この  $\mathbf{p}_{12} = -(rb + sb^{-1})$  における留数は

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{\vec{Y}_{rs}} Z_{\vec{Y}_{rs}}^{\text{vect}}(\vec{p}, \vec{b}) &= \prod_{i=1-r}^0 \prod_{j=1}^s (ib + jb^{-1})^{-1} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1-s}^0 (ib + jb^{-1})^{-1} \\
&\times \prod_{i=1-r}^0 \prod_{j=1-s}^0 (ib + jb^{-1})^{-1} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s (ib + jb^{-1})^{-1} \\
&\quad (i,j) \neq (0,0) \\
&= \frac{2A_{rs}}{rb + sb^{-1}}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

となる. 次に物質場からくる留数への寄与を考える. ここで  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  であることを考慮すると  $\mathbf{p}_{12} = -(rb + sb^{-1})$  における留数は

$$\mathbf{p} = -\frac{rb + sb^{-1}}{2} \tag{5.59}$$

における留数に置き換わるので, 物質場からの寄与は

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{N_f} Z_{\vec{Y}}^{\text{hyper}}\left(\mu_k + \frac{Q}{2}, \mathbf{p}, \vec{b}\right) \Bigg|_{\mathbf{p} = -\frac{rb+sb^{-1}}{2}} \\
&= \prod_{k=1}^{N_f} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \left( -\frac{rb + sb^{-1}}{2} + (i-1)b + (j-1)b^{-1} + \mu_k + \frac{Q}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^{N_f} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \left( \mu_k - \frac{(r+1-2i)b + (s+1-2j)b^{-1}}{2} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

となる. また

$$\begin{aligned}
Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p} + rb, \mathbf{p} + sb^{-1}, \vec{b}) \Big|_{\mathbf{p} = -\frac{rb+sb^{-1}}{2}} &= Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \frac{rb-sb^{-1}}{2}, -\frac{rb-sb^{-1}}{2}, \vec{b}) \\
&= Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \frac{rb-sb^{-1}}{2}, \vec{b})
\end{aligned} \tag{5.61}$$

であるので, 以上の計算と命題 5.12 より,

$$\begin{aligned}
Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) &= \frac{2A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{(2\mathbf{p} + rb + sb^{-1})(rb + sb^{-1})} Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{b}) \\
&\quad + \mathcal{O}(1)(\mathbf{p} \rightarrow -\frac{1}{2}(rb + sb^{-1}))
\end{aligned} \tag{5.62}$$

となる. ヤング図の組  $([0], [s^r])$  を考えれば  $\mathbf{p}_{21}$  の極も同様に計算できるので,

$$\begin{aligned}
Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) &= \frac{2A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{(-2\mathbf{p} + rb + sb^{-1})(rb + sb^{-1})} Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{b}) \\
&\quad + \mathcal{O}(1)(\mathbf{p} \rightarrow \frac{1}{2}(rb + sb^{-1}))
\end{aligned} \tag{5.63}$$

となることも分かる.

ここで,  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b})$  は  $\mathbf{p}$  の有理式であるから, 部分分数分解した形を考えれば  $\mathcal{O}(1)$  の中に他の極が (5.62) や (5.63) のような形でそのまま隠れていることが分かる. そこで極  $\mathbf{p} = -\frac{1}{2}(rb + sb^{-1})$  の項と極  $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(rb + sb^{-1})$  の項とを足し合わせれば,

$$\frac{2A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{(2\mathbf{p} + rb + sb^{-1})(rb + sb^{-1})} + \frac{2A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{(-2\mathbf{p} + rb + sb^{-1})(rb + sb^{-1})} = -\frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^{N_f} Y_{rs}(\mu_k)}{4\mathbf{p}^2 - (rb + sb^{-1})^2} \tag{5.64}$$

となるので命題が成立する.  $\square$

この命題の (5.56) は  $\mathcal{O}(1)$  の中に隠れている他の極も考慮すれば, ほぼイレギュラーブロックの満たす漸化式である. あとは物質場の数に応じて, この  $\mathcal{O}(1)$  の中の  $\mathbf{p}$  に関して特異性を持たない項を調べればよい.

$Z_{\vec{Y}}^{N_f}(\vec{\mu}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{b})$  の  $\mathbf{p}$  に関する次数を考えると, 分子は  $N_f |Y^{(1)}| + N_f |Y^{(2)}| = N_f N$  次, 分母は  $2|Y^{(1)}| + 2|Y^{(2)}| = 2N$  次であるから

$$Z_{\vec{Y}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) = \mathcal{O}(\mathbf{p}^{N(N_f-2)})(\mathbf{p} \rightarrow \infty) \tag{5.65}$$

となる. よって  $N_f = 0, 1$  のときは

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \infty} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) = \delta_{0,N} \tag{5.66}$$

となって  $Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b})$  の定数項が分かる. 従って漸化式

$$Z_{N \text{ inst}}^{\text{pure}}(\mathbf{p}, \vec{b}) = \delta_{0,N} - \sum_{1 \leq rs \leq N} \frac{4A_{rs}}{4\mathbf{p}^2 - (rb + sb^{-1})^2} Z_{N-rs \text{ inst}}^{\text{pure}}\left(\frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{b}\right), \quad (5.67)$$

$$Z_{N \text{ inst}}^{N_f=1}(\mu, \mathbf{p}, \vec{b}) = \delta_{0,N} - \sum_{1 \leq rs \leq N} \frac{4A_{rs}Y_{rs}(\mu)}{4\mathbf{p}^2 - (rb + sb^{-1})^2} Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f=1}\left(\mu, \frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{b}\right) \quad (5.68)$$

を得ることができる. これはパラメータの変換 (4.1)-(4.5) の下で, イレギュラーブロックの満たす漸化式 (5.27), (5.26) と一致することが分かる. 以上により

$$Z_{N \text{ inst}}^{\text{pure}}(\mathbf{p}, \vec{b}) = \langle h, N | h, N \rangle, \quad (5.69)$$

$$Z_{N \text{ inst}}^{N_f=1}(\mu, \mathbf{p}, \vec{b}) = 2^{-N} \langle h, \mu, N | h, N \rangle \quad (5.70)$$

となるから  $N_f = 0, 1$  の AGT 予想

$$Z_{\text{Nek}}^{\text{pure}U(2)}(\Lambda^4, \mathbf{p}, \vec{b}) = \langle h, \Lambda^2 | h, \Lambda^2 \rangle, \quad (5.71)$$

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=1U(2)}(\Lambda^3, \mu, \mathbf{p}, \vec{b}) = \langle h, \mu, \frac{\Lambda}{2} | h, \Lambda^2 \rangle \quad (5.72)$$

が証明できた.

次に  $N_f = 2$  の場合を考える. この場合の定数項は非自明な値を持つ.

命題 5.14 ([13, 3 節]).  $N_f = 2$  におけるインスタントン数  $N$  の分配関数の極限は

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \infty} Z_{N \text{ inst}}^{N_f=2}(\vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) = \frac{1}{N!} \left(\frac{-1}{2}\right)^N \quad (5.73)$$

となる.

証明. この極限は一旦  $N_f = 2$  の Nekrasov 公式全体  $Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{b})$  の極限を計算することで得ることができる. まずベクトル多重項の中にある因子を

$$\begin{aligned} F_{\vec{Y}}^{\alpha\beta} &= \prod_{(i,j) \in Y^{(\alpha)}} (\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta + (A_{Y^{(\alpha)}}(i,j) + 1)b^{-1} - L_{Y^{(\beta)}}(i,j)b) \\ &\times \prod_{(i,j) \in Y^{(\beta)}} (\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta - A_{Y^{(\beta)}}(i,j)b^{-1} + (L_{Y^{(\alpha)}}(i,j) + 1)b) \end{aligned} \quad (5.74)$$

とおく. つまり

$$Z_{\vec{Y}}^{\text{vect}}(\vec{\mathbf{p}}, \vec{b}) = \prod_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{1}{F_{\vec{Y}}^{\alpha\beta}} \quad (5.75)$$

とする. この中の  $\mathbf{p}$  に依存する部分と物質場を組み合わせると

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{k=1}^2 Z_{\vec{Y}}^{\text{hyper}}}{F_{\vec{Y}12} F_{\vec{Y}21}} &\sim \frac{\mathbf{p}^{2|\vec{Y}|}}{(2\mathbf{p})^{|Y^{(1)}}| (-2\mathbf{p})^{|Y^{(2)}}| (2\mathbf{p})^{|Y^{(2)}}| (-2\mathbf{p})^{|Y^{(1)}}|}} \\ &\xrightarrow{\mathbf{p} \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{|\vec{Y}|} \end{aligned} \quad (5.76)$$

であるので, Nekrasov 公式全体の極限は

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{\rho}, \vec{b}) &= \sum_{N=0}^{\infty} q^N \sum_{|\vec{Y}|=N} \left(-\frac{1}{4}\right)^N F_{\vec{Y}11}^{-1} F_{\vec{Y}22}^{-1} \\
&= \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{|Y^{(1)}|=M} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{|Y^{(2)}|=L} \left(-\frac{q}{4}\right)^{M+L} F_{\vec{Y}11}^{-1} F_{\vec{Y}22}^{-1} \\
&= \left( \sum_{N=0}^{\infty} \left(-\frac{q}{4}\right)^N \sum_{|Y|=N} \prod_{(i,j) \in Y} G_Y(i,j)^{-1} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.77}$$

となる. ここに

$$\begin{aligned}
G_Y(i,j) &= ((A_Y(i,j) + 1)b^{-1} - L_Y(i,j)b) \\
&\quad \times (-A_Y(i,j)b^{-1} + (L_Y(i,j) + 1)b)
\end{aligned} \tag{5.78}$$

とした. さらに

$$Z_N(b) = \sum_{|Y|=N} \prod_{(i,j) \in Y} G_Y(i,j)^{-1} \tag{5.79}$$

とすれば, この分配関数  $Z_N(b)$  には積分表示

$$\begin{aligned}
Z_N(b) &= \frac{Q^N}{N!} \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_N}{2\pi i} \cdots \oint_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{2\pi i} \prod_{k=1}^N \frac{1}{(\phi_k - i0)(\phi_k + Q + i0)} \\
&\quad \times \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\phi_{ij}(\phi_{ij} - Q)}{(\phi_{ij} - b - i0)(\phi_{ij} - b^{-1} - i0)}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

が知られている [13, (38)].

この分配関数の値がどのようにになっているかを考える. まず変数  $b$  に関する極の位置を調べることができる. 積分表示が分かっているので注意 5.10 で述べたことを用いれば,  $Z_N(b)$  は

$$rb + sb^{-1} = 0, \quad r, s \in \mathbb{N} \tag{5.81}$$

のとき特異性を持つ可能性がある. しかし, このとき  $b$  は純虚数であるので,  $b = \sqrt{-1}\mathfrak{b}$  ( $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}$ ) と書くことができ,

$$G_Y(i,j) = \left( (A_Y(i,j) + 1) \frac{1}{\sqrt{-1}\mathfrak{b}} - L_Y(i,j)\sqrt{-1}\mathfrak{b} \right) \tag{5.82}$$

$$\times \left( -A_Y(i,j) \frac{1}{\sqrt{-1}\mathfrak{b}} + (L_Y(i,j) + 1)\sqrt{-1}\mathfrak{b} \right) \tag{5.83}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{b}^2} ((A_Y(i,j) + 1) + L_Y(i,j)\mathfrak{b}^2) \tag{5.84}$$

$$\times (A_Y(i,j) + (L_Y(i,j) + 1)\mathfrak{b}^2) \tag{5.85}$$

$$> 0$$

となることが分かる. よって  $rb + sb^{-1} = 0$  のとき  $\mathcal{Z}_N(b)$  は特異性を持たない. 従って  $\mathcal{Z}_N(b)$  は  $b$  に関して整関数である.

また  $\mathcal{Z}_N(b)$  は有界である. 実際,  $L_Y(i, j) \neq 0$  であるとき

$$G_Y(i, j)^{-1} \rightarrow 0 \quad (b \rightarrow \infty) \quad (5.86)$$

となるので,  $\mathcal{Z}_N(b)$  の  $b \rightarrow \infty$  による極限は, ヤング図が  $[N]$  となる項のみが残って

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_N(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \prod_{(i,j) \in [N]} \frac{1}{(A_Y(i, j) + 1)b^{-1}(-A_Y(i, j)b^{-1} + b)} = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{1+j} = \frac{1}{N!} \quad (5.87)$$

となり, 発散しないので  $\mathcal{Z}_N(b)$  は有界である.

ここで有界な整関数は定数関数に限るので,  $\mathcal{Z}_N(b)$  は実は  $b$  に依存しておらず,

$$\mathcal{Z}_N(b) = \frac{1}{N!} \quad (5.88)$$

となっていることが分かる. 従って

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(q, \vec{\mu}, \vec{p}, \vec{b}) &= \left( \sum_{N=0}^{\infty} \left(-\frac{q}{4}\right)^N \frac{1}{N!} \right)^2 \\ &= \left( \exp\left(-\frac{q}{4}\right) \right)^2 \\ &= \exp\left(-\frac{q}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.89)$$

と Nekrasov 公式全体の極限が分かる.

ここからインスタントン数が  $N$  の分配関数の極限も

$$\exp\left(-\frac{q}{2}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{-q}{2}\right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} q^N \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, p, \vec{b}) \quad (5.90)$$

において  $q^N$  の係数を比較すれば

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Z_{N \text{ inst}}^{N_f}(\vec{\mu}, p, \vec{b}) = \frac{1}{N!} \left(\frac{-1}{2}\right)^N \quad (5.91)$$

となることが分かる. 以上により命題が証明できた.  $\square$

この命題と命題 5.13 から  $N_f = 2$  の Nekrasov 公式の満たす漸化式

$$Z_{N \text{ inst}}^{N_f=2}(\vec{\mu}, p, \vec{b}) = \frac{1}{N!} \left(\frac{-1}{2}\right)^N + \sum_{1 \leq rs \leq N} \frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{4p^2 - (rb + sb^{-1})^2} Z_{N-rs \text{ inst}}^{N_f=2}(\mu, \frac{1}{2}(rb - sb^{-1}), \vec{b}) \quad (5.92)$$

を得ることができる. 後はイレギュラーブロックの満たす漸化式との一致を確認すればよいが,  $N_f = 2$  の場合は  $U(1)$  因子の寄与がある分, この確認が多少複雑になる.

イレギュラーブロックの満たす漸化式 (5.11) を,  $\Lambda$  で展開し直すと,

$$\begin{aligned} \langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h \rangle &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-1}{2} \right)^m H_n(h, \mu_1, \mu_2) \Lambda^{2(n+m)} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left( \frac{-1}{2} \right)^m H_{N-m}(h, \mu_1, \mu_2) \Lambda^{2N} \end{aligned} \quad (5.93)$$

となる. ここで,  $\Lambda^{2N}$  の係数を  $\hat{H}_N(h, \mu_1, \mu_2)$  とおく. つまり

$$\hat{H}_N(h, \mu_1, \mu_2) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left( \frac{-1}{2} \right)^m H_{N-m}(h, \mu_1, \mu_2) \quad (5.94)$$

としてこれの満たす漸化式を調べる. すると, 漸化式 (5.9) より

$$\begin{aligned} \hat{H}_N(h) &= \frac{1}{N!} \left( \frac{-1}{2} \right)^N + \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{1 \leq r_s \leq N-m} \frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} \frac{1}{m!} \left( \frac{-1}{2} \right)^m H_{N-m-rs}(h_{r,s} + rs) \\ &= \frac{1}{N!} \left( \frac{-1}{2} \right)^N + \sum_{1 \leq r_s \leq N} \sum_{m=0}^{N-rs} \frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} \frac{1}{m!} \left( \frac{-1}{2} \right)^m H_{N-m-rs}(h_{r,s} + rs) \\ &= \frac{1}{N!} \left( \frac{-1}{2} \right)^N + \sum_{1 \leq r_s \leq N} \frac{4A_{rs} \prod_{k=1}^2 Y_{rs}(\mu_k)}{h - h_{r,s}} \hat{H}_{N-rs}(h_{r,s} + rs) \end{aligned} \quad (5.95)$$

となることが分かる. ここに引数  $\mu_1, \mu_2$  は省略した. これは  $N_f = 2$  の Nekrasov 公式と, パラメータの読み替え (4.2) の下で一致していることが分かる. 以上より  $N_f = 2$  の場合の AGT 予想

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=2U(2)}(\Lambda^2, \vec{\mu}, \mathbf{p}, \vec{b}) = \langle h, \Lambda^2 | \Phi_2(1) | h_1 \rangle = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}} \langle h, \mu_1, \frac{\Lambda}{2} | h, \mu_2, \frac{\Lambda}{2} \rangle \quad (5.96)$$

が証明できた.

この証明を  $N_f = 3$  の場合に拡張しようとする, (5.65) から分かるように Nekrasov 公式の  $\mathbf{p}$  のオーダーが 1 以上になるので, 極限を取って特異性を持たない項を調べることが困難になる. このことが原因で Zamolodchikov 漸化式を用いた AGT 予想の証明は, 現在  $N_f \leq 2$  の場合しか与えられていない.



## 6 Jack 多項式と Macdonald 多項式

この章では7章で用いる一般化された Jack 多項式を考える為の準備として, Jack 対称多項式の基本的な内容についてまとめる. さらに Jack 対称多項式を拡張した Macdonald 対称多項式という重要な多項式についても説明する.

これらを記述する為に, まずいくつかの基本的な対称多項式を説明しておく.

定義 6.1.  $\ell(\lambda) \leq n$  となるパーティション  $\lambda$  に対して

$$m_\lambda = \sum_{\substack{(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ : \lambda \text{ の異なる置換}}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \quad (6.1)$$

によって  $n$  変数のモノミアル対称多項式  $m_\lambda$  を定義する. また  $\ell(\lambda) > n$  のときは  $m_\lambda = 0$  とする.

このとき  $n$  変数のモノミアル多項式全体は, 整数係数の対称多項式の空間

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} \quad (6.2)$$

の  $\mathbb{Z}$ -基底となる.

例 6.2. 例えば3変数のモノミアル多項式は

$$m_{(3,3,0)} = x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_1^3 x_3^3, \quad (6.3)$$

$$m_{(3,2,1)} = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 x_3 \\ + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^3, \quad (6.4)$$

$$m_{(2,2,2)} = x_1^2 x_2^2 x_3^2 \quad (6.5)$$

となる. このときドミナンス半順序で低いパーティションに対応するものは, 次数が平均化されていることに注意する.

定義 6.3. 非負整数  $i$  に対して  $p_i = \sum_{k=1}^n x_k^i$  とおき, パーティション  $\lambda$  に対して

$$p_\lambda = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i} \quad (6.6)$$

によって  $n$  変数の冪和対称多項式  $p_\lambda$  を定義する.

例 6.4. 例えば3変数の冪和多項式は

$$p_{(2,1)} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) \quad (6.7)$$

などとなる.

次に対称多項式を無限変数に拡張した対称関数を定義する. 制限準同型  $\rho_{n,m} : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_m$  ( $n \geq m$ ) を  $f(x) \in \Lambda_n$  に対して

$$\rho_{n,m}(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \quad (6.8)$$

と定めれば  $(\Lambda_n, \rho_{n,m})$  は射影系となる. よってその射影極限を定義できる.

定義 6.5.  $(\Lambda_n, \rho_{n,m})$  の射影極限

$$\Lambda = \varprojlim \Lambda_n \quad (6.9)$$

を対称関数環といい, その元を対称関数という.

モノミアル多項式や冪和多項式は任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\rho_{n,n-1}(m_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) = m_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (6.10)$$

$$\rho_{n,n-1}(p_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) = p_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (6.11)$$

を満たすので無限変数に拡張したものを対称関数環上の元と見れる. それらをモノミアル対称関数, 冪和対称関数という.

注意 6.6. 冪和対称関数は有理数係数の対称関数環  $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  上で  $\mathbb{Q}$ -基底を成す.

また, モノミアル対称関数と冪和対称関数の間の変換は次のように行うことができる.

例 6.7. 1次, 2次, 3次のモノミアル対称関数は

$$m_{(1)} = p_{(1)}, \quad (6.12)$$

$$\begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(2)} \\ p_{(1,1)} \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(3)} \\ p_{(2,1)} \\ p_{(1,1,1)} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

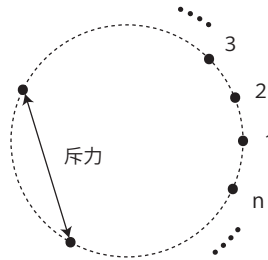
と冪和対称関数に変換することができる.

## 6.1 Calogero-Sutherland 模型と Jack 多項式

Jack 多項式は Calogero-Sutherland 模型 (CS 模型) という物理模型から得ることができる. CS 模型とはハミルトニアン

$$H_{CS} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \beta(\beta - 1) \sum_{i < j} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}(q_i - q_j)}, \quad p_i \equiv -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (6.15)$$

によって定められる量子力学模型である. ここに  $q_i$  は  $i$  番目の粒子の座標であり  $\beta$  は結合定数である. 幾何学的には単位円周上に  $n$  個の粒子を乗せ, それぞれの粒子間に弦距離の二乗に反比例する斥力ポテンシャルがあるとみなせる.



この模型の問題を解くということは、数学的にはハミルトニアン固有値問題を解くということの意味する。なぜならハミルトニアン固有値問題が解ければ Schrödinger 方程式が解けて、系の時間発展が分かるからである。この模型の基底状態  $\psi_0$  (最低固有値の固有関数) とそのエネルギー  $E_0$  (固有値) は

$$\psi_0(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (2\sqrt{-1})^{\beta \frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i < j} \sin^\beta \frac{1}{2}(q_i - q_j), \quad (6.16)$$

$$E_0 = \beta^2 \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \quad (6.17)$$

となる [38, 命題 2.19]. また任意の励起状態 (基底状態以外の固有関数) は  $x_i = e^{\sqrt{-1}q_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の対称多項式  $P(x)$  を用いて  $P(x)\psi_0$  と書ける。これにハミルトニアン  $H_{CS}$  の作用を考えると

$$H_{CS}P(x)\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0\tilde{H}_{\beta,n}P(x) + E_0P(x)\psi_0, \quad (6.18)$$

$$\tilde{H}_{\beta,n} \equiv \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (6.19)$$

となるので  $H_{CS}$  の固有値問題は  $x_i$  の対称多項式の空間に作用するハミルトニアン  $\tilde{H}_{\beta,n}$  の固有値問題に置き換えることができる [38, 2.2.4 節]. さらに本論文では、この  $\tilde{H}_{\beta,n}$  を少しずらして、

$$\begin{aligned} H_{\beta,n} &= \tilde{H}_{\beta,n} - \beta n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (6.20)$$

というハミルトニアンを考える。このとき、ハミルトニアン  $\tilde{H}_{\beta,n}$  は斉次対称多項式を同じ次数の斉次対称多項式に移し、ここから取り除いた演算子  $\beta n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  も、同じ次数の斉次多項式を同じ固有空間に持つので、 $\tilde{H}_{\beta,n}$  と  $H_{\beta,n}$  の固有多項式は全く同じである。従って、 $\tilde{H}_{\beta,n}$  に関する問題を  $H_{\beta,n}$  の問題と捉えても差し支えない。さらに、 $H_{\beta,n}$  は対称関数環上の作用素として拡張できるので、それを

$$H_\beta = \varprojlim H_{\beta,n} \quad (6.21)$$

と書くことにする<sup>10</sup>。

この  $H_\beta$  に関する問題は以下のように解かれており、よって  $H_{CS}$  に関する問題もすぐに解かれる。

**定理 6.8** ([38, 定理 2.36]).  $\beta$  の有理関数体  $\mathbb{Q}(\beta)$  を係数に持つ対称関数環  $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\beta)$  の空間上の作用素  $H_\beta$  の固有関数  $P_\lambda(x)$  は、パーティション  $\lambda$  によってパラメトライズされ、以下の二条件を満たすものとして一意的に存在する：

<sup>10</sup>実は  $\tilde{H}_{\beta,n}$  は対称関数環上の作用素として拡張できない。 $\tilde{H}_{\beta,n}$  と  $H_{\beta,n}$  の違いを 8 章で述べた。

1.  $P_\lambda(x) = \sum_{\mu \leq \lambda} u_{\lambda,\mu}(\beta) m_\mu(x)$ ,  $u_{\lambda,\lambda}(\beta) = 1$ ,  $u_{\lambda,\mu}(\beta) \in \mathbb{Q}(\beta)$  ;
2.  $H_\beta P_\lambda(x) = \epsilon_\lambda P_\lambda(x)$ ,  $\epsilon_\lambda \in \mathbb{Q}(\beta)$ .

このとき固有値  $\epsilon_\lambda$  は

$$\epsilon_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (\lambda_i^2 + \beta(1-2i)\lambda_i) \quad (6.22)$$

となる.

この対称関数  $P_\lambda(x)$  を Jack 対称関数と呼び, これを  $n$  変数に制限したものを  $n$  変数の Jack 対称多項式という.

注意 6.9. ここで固有値  $\epsilon_\lambda$  は  $\beta \geq 0$  のとき,  $\lambda < \mu$  に対して  $\epsilon_\lambda < \epsilon_\mu$  という性質を持つが, ドミナンス半順序で比べられないパーティションに関しては固有値が縮退することがあるということに注意しなければならない. 実際  $\epsilon_{(3,3)} = \epsilon_{(4,1,1)} = 18 - 12\beta$  となる.

例 6.10. 定理 6.8 の具体例として 3 次の場合の Jack 対称関数を調べる. 例えば, 3 変数のモノミアル対称多項式  $m_\lambda$  に  $H_{\beta,3}$  を作用させると, ドミナンス半順序で  $\lambda$  とそれより低い順序のものだけが出てくることが計算で確かめられる<sup>11</sup>. 基本的に変数の数が, 多項式の次数以上であれば全く同じ結果が得られる. 無限変数で考えても, モノミアル対称関数で表示しておけば同じ式が成立する. 従って, ドミナンス半順序に矛盾しない順序でモノミアル対称関数を基底に取れば,  $H_\beta$  の表現行列は

$$H_\beta \begin{pmatrix} m_{(3)} & m_{(2,1)} & m_{(1,1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{(3)} & m_{(2,1)} & m_{(1,1,1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9-3\beta & 0 & 0 \\ 6\beta & 5-5\beta & 0 \\ 0 & 12\beta & -6 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

と三角化できる. よって固有方程式を解かなくても固有値が求まり, ジャック対称関数  $P_\lambda(x)$  は

$$\begin{pmatrix} P_{(3)}(x) \\ P_{(2,1)}(x) \\ P_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\beta}{2+\beta} & \frac{6\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)} \\ 0 & 1 & \frac{6\beta}{1+2\beta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

などと求まる. またこれを冪和対称関数で表すと

$$\begin{pmatrix} P_{(3)}(x) \\ P_{(2,1)}(x) \\ P_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+\beta)(2+\beta)} & \frac{3\beta}{(1+\beta)(2+\beta)} & \frac{\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)} \\ \frac{-1}{1+2\beta} & \frac{1-\beta}{1+2\beta} & \frac{\beta}{1+2\beta} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(3)} \\ p_{(2,1)} \\ p_{(1,1,1)} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

となる.

<sup>11</sup>一般的な次元でも同じことが成立する. このことは次章の一般化された Jack 多項式の存在定理を示す為の補題 7.15 の中で証明される. さらにこの表現行列が三角化されるという事実によって Jack 対称関数の存在定理 6.8 も証明される.

例 6.11. 1 次と 2 次の場合も同じように計算できて, Jack 対称関数は

$$P_{(1)}(x) = m_{(1)} = p_{(1)}, \quad (6.26)$$

$$\begin{pmatrix} P_{(2)}(x) \\ P_{(1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\beta}{1+\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\beta} & \frac{\beta}{1+\beta} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(2)} \\ p_{(1,1)} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

となっている.

ここではハミルトニアン固有関数という条件によって Jack 対称関数を定義した. この方法以外にも, 対称関数環  $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$  上での内積  $\langle -, - \rangle_{\beta}$  を

$$\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle_{\beta} = \delta_{\lambda, \mu} z_{\lambda} \beta^{-\ell(\lambda)}, \quad z_{\lambda} \equiv \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i! \quad (6.28)$$

と定め ( $m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$ ), この内積に対する直交関数系としての条件:

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle P_{\lambda}, P_{\mu} \rangle_{\beta} = 0 \quad (6.29)$$

とモノミアル対称関数による展開を持つという条件:

$$P_{\lambda}(x) = \sum_{\mu \leq \lambda} u_{\lambda, \mu}(\beta) m_{\mu}(x), \quad u_{\lambda, \lambda}(\beta) = 1, u_{\lambda, \mu}(\beta) \in \mathbb{Q}(\beta) \quad (6.30)$$

の 2 条件を持つ関数として一意的に Jack 対称関数  $P_{\lambda}(x)$  を定義することもできる. ハミルトニアン  $H_{\beta}$  はこの内積に関して自己共役であり, 直交関数系として定義された Jack 対称関数は,  $H_{\beta}$  の固有関数として定義されたものと全く同じものになる [38, 3.1.2 節]. これは次節の Macdonald 多項式を用いることで証明できる.

またこの内積に関する Jack 対称関数のノルムは, 以下の命題のようになることが知られている.

命題 6.12 ([38, 命題 3.5]). Jack 対称関数のノルムは

$$\langle P_{\lambda}, P_{\lambda} \rangle_{\beta} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{A_{\lambda}(i,j) + \beta L_{\lambda}(i,j) + 1}{A_{\lambda}(i,j) + \beta L_{\lambda}(i,j) + \beta} \quad (6.31)$$

となる.

例 6.13. 例えば 1 次, 2 次の Jack 対称関数のノルムは

$$\langle P_{(1)}, P_{(1)} \rangle_{\beta} = \frac{1}{\beta}, \quad (6.32)$$

$$\langle P_{(2)}, P_{(2)} \rangle_{\beta} = \frac{2}{(1+\beta)\beta}, \quad \langle P_{(1^2)}, P_{(1^2)} \rangle_{\beta} = \frac{1+\beta}{2\beta^2}, \quad (6.33)$$

となっている.

## 6.2 Macdonald 多項式

この節では Jack 多項式を一般化した Macdonald 多項式について概説する. Jack 多項式で現れる  $\beta$  というパラメータの代わりに, Macdonald は新たに  $q, t$  というパラメータを付けることで見通し良く理論を作り上げた. 従ってこの理論では, 係数を  $q, t$  の有理関数体  $F = \mathbb{Q}(q, t)$  とみるので,  $F$  への係数拡大  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} F$  や  $\Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} F$  をそれぞれ以下  $\Lambda_F, \Lambda_{n,F}$  と書くことにする.

定義 6.14.  $\Lambda_{n,F}$  上の演算子  $D_n(q, t)$  を

$$D_n(q, t) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i} \quad (6.34)$$

と定義する. ここに  $T_{q, x_i}$  は  $f(x) \in \Lambda_{n,F}$  に対して

$$T_{q, x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) \quad (6.35)$$

と定められる差分作用素とする.

さらに  $D_n(q, t)$  は以下のように対称関数環上の演算子に拡張できる.

定義 6.15.  $D_n(q, t)$  を調整して演算子  $E_n : \Lambda_{n,F} \rightarrow \Lambda_{n,F}$  を

$$E_n = t^{-n} D_n(q, t) - \sum_{i=1}^n t^{-i} \quad (6.36)$$

と定め, 演算子  $E : \Lambda_F \rightarrow \Lambda_F$  を

$$E = \lim_{\leftarrow} E_n \quad (6.37)$$

と定義する.

注意 6.16. 調整されたことによって  $E_n$  は制限準同型との関係  $\rho_{n,n-1} \circ E_n = E_{n-1} \circ \rho_{n,n-1}$  を持つので, 上の定義は well-defined である.

Macdonald 対称関数はこの作用素  $E$  の固有関数として定義できる.

定義 6.17. 以下の2条件をみたすパーティション  $\lambda$  によってパラメトライズされる対称関数  $P_\lambda \in \Lambda_F$  を Macdonald 対称関数という:

1.  $P_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} s_{\lambda, \mu} m_\mu$ ,  $s_{\lambda, \lambda} = 1$ ,  $s_{\lambda, \mu} \in F$ ;
2.  $EP_\lambda(x) = e_\lambda P_\lambda$ ,  $e_\lambda \in F$ .

またこれを  $n$  変数に制限したものを  $n$  変数の Macdonald 多項式という.

このとき固有値  $e_\lambda$  は

$$e_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (q^{\lambda_i} - 1)t^{-i} \quad (6.38)$$

となる [38, 3.2.6 節]. また注意 6.9 に述べたような Jack 対称関数のときとは異なり,  $(q, t)$  が generic なときには)

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow e_\lambda \neq e_\mu, \quad (6.39)$$

という性質を持つ. この性質から Macdonald 対称関数では固有値が縮退しないということが示される.

なお, 各パーティション  $\lambda$  に対して Macdonald 対称関数  $P_\lambda$  は一意に決まる. これは内積を導入することで証明される.  $\Lambda_F$  上の内積  $\langle -, - \rangle_{q,t}$  を冪和対称関数を基底とみて

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}, \quad z_\lambda \equiv \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i! \quad (6.40)$$

と定めると, この内積に対して演算子  $E$  は自己共役になる [38, (3.161)]. ( $m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$  とした.) このことから, 固有値が異なれば固有関数は直交するから, 固有値の性質 (6.39) より  $P_\lambda$  は直交関数系となることが分かる:

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0. \quad (6.41)$$

したがって直交関数系の性質から, 各  $\lambda$  に対して  $P_\lambda$  は一意に決まることが証明される [38, 定理 3.28].

逆に, 内積  $\langle -, - \rangle_{q,t}$  に関して直交関数系になるという条件と, 定義 6.17 の 1 つ目の条件 (モノミアル対称関数による展開を持つという条件) の 2 条件で Macdonald 対称関数を定義しても全く同じものが得られる.

Macdonald 対称関数では (6.39) から固有値が縮退しない為, この流れで綺麗に直交関数系であることや一意性が示せる. 一方 Jack 対称関数の場合は,  $H_\beta$  が自己共役になるような内積を定義できてはいるが, 固有値が縮退している為, 直交性の証明が非常に困難である. この点において, Macdonald の理論は Jack 対称関数のそれより整った構造をしていると言える.

また Macdonald 対称関数は Jack 対称関数の一般化であると述べたが, Macdonald 対称関数において極限

$$t = q^\beta, \quad q \rightarrow 1 \quad (6.42)$$

を取れば Jack 対称関数への退化が得られる. これは (6.28), (6.40) より任意の対称関数  $f, g$  に対して

$$\lim_{\substack{t=q^\beta \\ q \rightarrow 1}} \langle f, g \rangle_{q,t} = \langle f, g \rangle_\beta \quad (6.43)$$

が成立することから理解できる [38, 3.1.3 節].

例 6.18. 1 次, 2 次, 3 次の Macdonad 対称関数は

$$P_{(1)}(x) = m_{(1)}, \quad (6.44)$$

$$\begin{pmatrix} P_{(2)}(x) \\ P_{(1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(1+q)(1-t)}{1-qt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

$$\begin{pmatrix} P_{(3)}(x) \\ P_{(2,1)}(x) \\ P_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-q^3}{1-q} \frac{1-t}{1-q^2 t} & \frac{1-q^2}{1-q} \frac{1-q^3}{1-q} \frac{(1-t)^2}{(1-qt)(1-q^2 t)} \\ 0 & 1 & (2+q+t+2qt) \frac{1-t}{1-q^2 t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

となっている. また, これらの極限 (6.42) をとると, Jack 対称関数に一致している.

### 6.3 Cauchy の公式

この節では 7 章で用いる Cauchy の公式について説明する. まず, 2 種類の独立な変数  $\{x_i\}, \{y_i\}$  に対して

$$\Pi(x, y, q, t) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y) \right) \quad (6.47)$$

と定める. この  $\Pi(x, y, q, t)$  は対称関数の理論を構築する上で役に立つ重要なもので, まず 冪和対称関数によって展開することができる.

**命題 6.19** ([38, (3.97)]).  $\Pi(x, y, q, t)$  は冪和対称関数によって

$$\Pi(x, y, q, t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}(q, t)} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y) \quad (6.48)$$

と展開できる. ここに,

$$z_{\lambda}(q, t) = \langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle_{q, t} = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i! \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}} \quad (6.49)$$

とした.

この命題は (6.47) をそのままテイラー展開し, 和をパーティションによって取り直せば従うことが分かる. 他にも, 互いに双対な基底で上手く展開することができる.

**命題 6.20** ([38, 命題 3.12]).  $u_{\lambda}, v_{\lambda}$  を  $|\lambda|$  次の斉次対称関数で,  $\{u_{\lambda}\}, \{v_{\lambda}\}$  がそれぞれ  $\Lambda_F$  上の  $F$ -基底となっているものとする. このとき,  $\{u_{\lambda}\}$  が  $\{v_{\lambda}\}$  の双対基底である, つまり

$$\langle u_{\lambda}, v_{\mu} \rangle_{q, t} = \delta_{\lambda, \mu}, \quad \forall \lambda, \forall \mu \quad (6.50)$$

となることと,

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y) = \Pi(x, y, q, t) \quad (6.51)$$

となることは同値である.

この展開公式 (6.51) を Cauchy の公式という.



例 6.21. パラメータ  $q, t$  の極限をとって Jack 多項式のパラメータ  $\beta$  に変えても, Cauchy の公式は成立する.  $\Pi(x, y, q, t)$  の極限は

$$\Pi(x, y, q, t) \xrightarrow[\substack{t=q^\beta \\ q \rightarrow 1}]{} \exp \left( \beta \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) \quad (6.52)$$

となるから, 規格化された Jack 多項式を

$$j_\lambda(x) = \frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{\langle P_\lambda(x), P_\lambda(x) \rangle_\beta}} \quad (6.53)$$

と定めると

$$\exp \left( \beta \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} j_\lambda(x) j_\lambda(y) \quad (6.54)$$

となる.

注意 6.22. 定数  $w$  を用いて, 冪和対称関数を  $p_n \rightarrow p_n + w$  とシフトして考えることもできる. Jack 対称関数は (6.25) のように冪和対称関数で展開すれば, 変数  $\{p_n\}$  の関数  $j_\lambda = j_\lambda(p_n)$  とみることができる. よって,

$$\exp \left( \beta \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (p_n(x) + w) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} j_\lambda(p_n(x) + w) j_\lambda(p_n(y)) \quad (6.55)$$

も成立する.

## 6.4 Virasoro 代数の特異ベクトルとの対応

この節の内容は次章とは無関係であるが, Jack 対称関数の重要な応用例として, Virasoro 代数の特異ベクトルが Jack 対称関数によって表示できることを説明する.

まずは Fock 空間から対称関数環への写像を定める.

定義 6.23. Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  から対称関数環  $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$  への写像  $\iota$  を  $|u\rangle \in \mathcal{F}_\alpha$  に対して

$$\iota(|u\rangle) = \langle \alpha | \exp \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n a_n \right) |u\rangle \quad (6.56)$$

と定義する. ここに  $p_n$  は冪和対称関数である.

命題 6.24 ([38, (4.228)-(4.230)]).  $\iota: \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$  はパーティション  $\lambda$  に対する  $\mathcal{F}_\alpha$  の元  $a_{-\lambda}|\alpha\rangle$  を

$$\iota(a_{-\lambda}|\alpha\rangle) = \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} \right)^{\ell(\lambda)} p_\lambda \quad (6.57)$$

と  $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$  に移す. ここに,  $\lambda$  に対して  $a_{-\lambda} = a_{-\lambda_1} a_{-\lambda_2} \cdots a_{-\lambda_{\ell(\lambda)}}$  とした. よって  $\mathcal{F}_\alpha$  の基底を  $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$  上の基底に移すので,  $\iota$  は線形同型写像である.

さらに Jack 対称関数を定めるハミルトニアン

$$H_\beta = \sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6.58)$$

を自由場表示できる。(これを 8 章で示す。)

命題 6.25 ([38, 命題 4.47]).  $\mathcal{F}_\alpha$  上のハミルトニアン  $H_\beta^{\text{boson}}$  を

$$H_\beta^{\text{boson}} = \sum_{n, m \geq 1} \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} a_{-n-m} a_n a_m + \sqrt{2\beta} a_{-n} a_{-m} a_{n+m} \right) + \sum_{n \geq 1} (1 - \beta) n a_{-n} a_n \quad (6.59)$$

$$= \sqrt{2\beta} \sum_{n \geq 1} a_{-n} L_n + \sum_{n \geq 1} a_{-n} a_n (\beta - 1 - \sqrt{2\beta} a_0) \quad (6.60)$$

と定めれば,  $H_\beta^{\text{boson}}$  は  $H_\beta$  の自由場表示になっている。つまり, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\alpha & \xrightarrow{H_\beta^{\text{boson}}} & \mathcal{F}_\alpha \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)} & \xrightarrow{H_\beta} & \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)} \end{array}$$

が可換になる。

このように  $H_\beta$  を自由場表示でき, さらに (6.60) のように Virasoro 代数の正モードの生成元でまとめることができる。よって  $\alpha = \alpha_{r,s}$  (ただし  $r \geq 1, s \geq 1$ ) のときの特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  に,  $H_\beta^{\text{boson}}$  を作用させると,

$$H_\beta^{\text{boson}} |\chi_{r,s}\rangle = rs(-r\beta + s) |\chi_{r,s}\rangle \quad (6.61)$$

とつまり, 特異ベクトルが固有ベクトルになっていることが分かる。このとき固有値  $rs(-r\beta + s)$  は定理 6.8 よりパーティションが  $(s^r)$  の固有値と一致していることも分かる。したがって固有値が縮退しないところでは,  $\iota(|\chi_{r,s}\rangle)$  は Jack 対称関数  $P_{(s^r)}$  と比例している。(実は縮退している場合でも比例することが, Macdonald 多項式を用いた議論から分かる。) しかも, このパーティションはヤング図形で表すと, 全体の形が長方形になっている。

以上の議論が次の定理の確認になっている。

定理 6.26 ([38, 定理 4.46]).  $r \geq 1, s \geq 1$  に対して  $\alpha = \alpha_{r,s}$  のとき, Fock 空間  $\mathcal{F}_\alpha$  上の次数  $rs$  の特異ベクトル  $|\chi_{r,s}\rangle$  は, 対称関数の空間に移すと, 長方形パーティションの Jack 対称関数  $P_{(s^r)}$  に比例する:

$$\iota(|\chi_{r,s}\rangle) \propto P_{(s^r)}. \quad (6.62)$$

注意 6.27.  $1 \leq rs \leq N$  を満たしていれば, Jack 対称関数の変数を  $x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 0$  とおいて, 有限変数に射影しても同じことが従う。

この定理を利用し、特異ベクトルの Jack 多項式による明示的な表示公式を与えることができる。命題 6.24 の  $\iota$  の逆をたどって考えれば、冪和多項式  $p_n$  が自由場の生成元  $a_{-n}$  を作り出すことが分かる。この対応と、さらに定数倍ずれることに注意して、

$$\tau : \Lambda_{N, \mathbb{Q}(\beta)} \rightarrow \mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-N}] \quad (6.63)$$

を、 $1 \leq n \leq N$  に対して

$$\tau(p_n) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} a_{-n} \quad (6.64)$$

を満たす代数準同型と定義する。

このとき定理 6.26 より以下の特異ベクトルの表示公式が成立つ。

系 6.28 ([20, Theorem1]). 正整数  $r, s$  ( $1 \leq rs \leq N$ ) に対して

$$|\chi_{r,s}\rangle = \tau(P_{(sr)}(x)) |\alpha_{r,s}\rangle \quad (6.65)$$

は次数  $rs$  の特異ベクトルである。ここに  $P_{(sr)}$  は  $N$  変数の Jack 多項式である。ただし、命題 2.34 で与えた  $|\chi_{r,s}\rangle$  との定数倍の違いは無視する。

この表示は命題 2.34 で述べた、遮蔽作用素を用いて構成した特異ベクトルの公式と比べ、積分を使わない、多項式の言葉を用いた、よりシンプルな表示公式であるといえる。

例 6.29. この系を例 6.10 の (6.25) に適応すれば、3 次の自由場表示された特異ベクトル

$$|\chi_{1,3}\rangle = \frac{2\sqrt{2\beta}}{(1+\beta)(2+\beta)} \left( \frac{1}{\beta} a_{-3} + \frac{3}{\sqrt{2\beta}} a_{-2} a_{-1} + a_{-1}^3 \right) |\alpha_{1,3}\rangle, \quad (6.66)$$

$$|\chi_{3,1}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3\beta\sqrt{\beta}} \left( \beta a_{-3} - 3\sqrt{\frac{\beta}{2}} a_{-2} a_{-1} + a_{-1}^3 \right) |\alpha_{3,1}\rangle \quad (6.67)$$

が得られる。

また定理 6.26 の対応から、特異ベクトルの積分表示 (2.104) を用いて、逆に Jack 多項式の積分表示を得ることもできる。

系 6.30 ([5, Section 4]). パーティション  $\lambda = (s^r)$  に対する  $N$  変数の Jack 多項式  $P_{(sr)}(x)$  は

$$\begin{aligned} P_{(sr)}(x) &= C_{r,s} \langle \alpha_{r,s} | \exp \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n a_n \right) | \chi_{r,s} \rangle \quad (6.68) \\ &= C_{r,s} \oint \cdots \oint dz_1 \cdots dz_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{2\beta} \prod_{i=1}^r z_i^{\sqrt{2\beta} \alpha_{-r,s}} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^r (1 - x_i z_j)^{-\beta} \end{aligned}$$

となる。ここに、 $p_n$  は  $N$  変数の冪和多項式である。また  $C_{r,s}$  は規格化定数であり、その値も分かっている。

## 7 一般化された Jack 多項式を用いた“証明”

この章では第 5 章とは異なる AGT 予想の証明を与える。第 5 章では  $N_f = 0, 1, 2$  の場合の証明を与えたが、この章では  $N_f = 4$  の場合を証明する。この証明は未完成であるが、これが完成すれば極限をとった  $N_f = 0, 1, 2, 3$  の場合も証明されたことになる。

### 7.1 相関関数の自由場表示

まずこの証明では、相関関数を一旦自由場表示した上で Nekrasov 公式との一致を考える。相関関数の自由場表示は未だ完全な証明が与えられていないが、この表示を仮定した上で AGT 予想を証明する。この節では相関関数、特に共形ブロックを自由場表示することについて説明する。またここから先は Virasoro 代数の中心  $c$  のパラメトライズを少し変えて、

$$c = 1 - 6\tilde{Q}^2, \quad (7.1)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{b} - \tilde{b}^{-1} \quad (7.2)$$

とする。この  $\tilde{Q}, \tilde{b}$  は、4 章で用いたパラメータ  $Q, b$  と

$$\tilde{Q} = iQ, \quad \tilde{b} = ib \quad (7.3)$$

の関係にあり、また 2 章で用いた  $\rho, \beta$  と

$$\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}} = \rho, \quad \tilde{b}^2 = \beta \quad (7.4)$$

の関係にある。

まず相関関数  $\langle \Phi_4(\infty)\Phi_3(1)\Phi_2(z_2)\Phi_1(0) \rangle$  ( $\Phi_i(z_i)$  は共形次元  $h_i$  のプライマリー場とする。) を自由場の言葉で表現しようとする。単純に考えれば、共形次元が  $h_i = \alpha_i(\alpha_i - \sqrt{2}\tilde{Q})/2$  となる頂点作用素  $V_{\alpha_i}(z_i)$  を用いて、

$$\langle V_{\alpha_4}(\infty)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_1}(0) \rangle \quad (7.5)$$

とするのが自然だが素直には一致しない。これはプライマリー場の OPE(2.56) と頂点作用素の OPE(2.99) とを比較すれば原因が分かる。一般にプライマリー場の OPE には様々な共形次元を持ったプライマリー場が存在できるが、頂点作用素  $V_{\alpha_1}$  と  $V_{\alpha_2}$  の OPE に現れるプライマリー場は、 $V_{\alpha_1+\alpha_2}$  だけに決定されてしまっている。このことが原因で、簡単には相関関数を自由場表示できない。共形ブロック (2.78) でも、中間状態  $|h\rangle$  は様々な値の共形次元で考えられるが、命題 2.32 より自由場でこれを考えると中間状態のチャージが

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \quad (7.6)$$

となっていないと共形ブロックが非自明な値を持たない。ここに中間状態をウエイトが  $\alpha(\alpha - \sqrt{2}\tilde{Q})/2$  の  $|\alpha\rangle$  と考えた。

そこで、任意の共形ブロックの中間状態に合わせるために、遮蔽作用素を用いて OPE に現れる頂点作用素のチャージをシフトする必要がある。遮蔽作用素 (2.102) は、2 つの頂点作用素の積に掛けて積分路を Pochhammer の積分路にとれば、相関関数中で

$$\oint dz V_{\sqrt{2\beta}}(z) V_{\alpha_2}(q) V_{\alpha_1}(0) = (\text{定数}) \int_0^q dz V_{\sqrt{2\beta}}(z) V_{\alpha_2}(q) V_{\alpha_1}(0) \quad (7.7)$$

と定数を伴って、区間  $[0, q]$  上の積分に帰着できる [37, (5.209)]. このような区間上で積分したのも遮蔽作用素と呼び、

$$S_{[a,b]} = \int_a^b dz V_{\sqrt{2\beta}}(z) \quad (7.8)$$

と書く。この遮蔽作用素を  $n$  個入れた頂点作用素の OPE は

$$\begin{aligned} (S_{[0,q]})^n V_{\alpha_2}(q) V_{\alpha_1}(0) &= \prod_{i=1}^n \int_0^q dz_i q^{\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_1 \sqrt{2\beta}} (z_i - q)^{\alpha_2 \sqrt{2\beta}} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{4\beta} \quad (7.9) \\ &\quad \times : e^{\alpha_2 \phi(q) + \alpha_1 \phi(0) + \sum_{i=1}^n \sqrt{2\beta} \phi(z_i)} : \\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^q dz_i q^{\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_1 \sqrt{2\beta}} (z_i - q)^{\alpha_2 \sqrt{2\beta}} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{4\beta} \\ &\quad \times \left( : e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + n\sqrt{2\beta}) \phi(0)} : + \dots \right) \end{aligned}$$

となつて、遮蔽作用素を入れない OPE から現れる頂点作用素のチャージを

$$\alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + n\sqrt{2\beta} \quad (7.10)$$

のようにシフトする [39, (6.10)]. ここに (7.9) の最後の式は  $q$  と  $z_i$  でテイラー展開したもので、 $+\dots$  はより高次の項を表す。この方法によって、一般のプライマリー場の OPE を自由場で再現し、任意の中間状態をとった共形ブロックに対して、自由場の相関関数を対応させることができると予想されている。

この予想を与える為に、次のような自由場による相関関数

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= \lim_{z_4 \rightarrow \infty} z_4^{\frac{\alpha_4^2}{2}} \langle 0 | V_{\frac{\alpha_4}{\sqrt{2}}}(z_4) (S_{[z_4,1]})^{n_-} V_{\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}}}(1) V_{\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}}(q) (S_{[q,0]})^{n_+} V_{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}}(0) | 0 \rangle \quad (7.11) \\ &= \lim_{z_4 \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^{n_-} \int_1^{z_4} dy_j \right) \left( \prod_{i=1}^{n_+} \int_0^q dx_i \right) z_4^{\frac{\alpha_4^2}{2}} \langle 0 | : e^{\frac{\alpha_4}{\sqrt{2}} \phi(z_4)} : \left( \prod_{j=1}^{n_-} : e^{\sqrt{2\beta} \phi(y_j)} : \right) : e^{\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}} \phi(1)} : \\ &\quad : e^{\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \phi(q)} : \left( \prod_{i=1}^{n_+} : e^{\sqrt{2\beta} \phi(x_i)} : \right) : e^{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} \phi(0)} : | 0 \rangle \end{aligned}$$

を考える。次節以降の為に、共形次元が  $\frac{1}{4}\alpha_i(\alpha_i - 2\tilde{Q})$  となる、チャージを少しずらした頂点作用素  $V_{\frac{\alpha_i}{\sqrt{2}}}(z)$  を用いた。このとき、中間状態のウェイトを  $\frac{1}{4}\alpha(\alpha - 2\tilde{Q})$  と表すと、相関関数  $\Psi(q)$  が非自明である為には、中間状態のチャージが

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} + n_+ \sqrt{2\beta} = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha_4}{\sqrt{2}} - n_- \sqrt{2\beta} \quad (7.12)$$

でなければならず,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2n_+ \sqrt{\beta} = -\alpha_3 - \alpha_4 - 2n_- \sqrt{\beta} \quad (7.13)$$

と決定される.

この  $\Psi(q)$  を計算する. まず命題 2.32 から

$$\begin{aligned} \Psi(q) = & q^{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{2}} (1-q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}} \left( \prod_{j=1}^{n_-} \int_1^\infty dy_j \right) \left( \prod_{i=1}^{n_+} \int_0^q dx_i \right) \\ & \times \prod_{i=1}^{n_+} x_i^{\sqrt{\beta} \alpha_1} (q-x_i)^{\sqrt{\beta} \alpha_2} (1-x_i)^{\sqrt{\beta} \alpha_3} \prod_{1 \leq i < j \leq n_+} (x_i - x_j)^{2\beta} \\ & \times \prod_{j=1}^{n_-} y_j^{\sqrt{\beta} \alpha_1} (y_j - q)^{\sqrt{\beta} \alpha_2} (y_j - 1)^{\sqrt{\beta} \alpha_3} \prod_{1 \leq i < j \leq n_-} (y_i - y_j)^{2\beta} \\ & \times \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (y_j - x_i)^{2\beta} \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる<sup>12</sup> [14, (2.4)]. ここに, 極限  $z_4 \rightarrow \infty$  をとる前の  $z_4$  に依存していた因子

$$z_4^{\alpha_4^2} \left( \prod_{j=1}^{n_-} (z_4 - y_j)^{\sqrt{\beta} \alpha_4} \right) (z_4 - 1)^{\frac{\alpha_3 \alpha_4}{2}} \left( \prod_{i=1}^{n_+} (z_4 - x_i)^{\sqrt{\beta} \alpha_4} \right) (z_4 - q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_4}{2}} z_4^{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{2}} \quad (7.15)$$

は  $z_4 \rightarrow \infty$  において 1 に収束するというこをういた. 実際,  $z_4$  のべきを (7.13) を用いて計算すると

$$\frac{1}{2} \alpha_4 (\alpha_4 + 2n_- \sqrt{\beta} + \alpha_3 + 2n_+ \sqrt{\beta} + \alpha_2 + \alpha_1) = 0 \quad (7.16)$$

となる. さらに (7.14) の積分で

$$x_i \rightarrow q x_i, \quad y_i \rightarrow \frac{1}{y_i} \quad (7.17)$$

と変数変換すると,

$$\begin{aligned} \Psi(q) = & q^\sigma (1-q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}} \left( \prod_{j=1}^{n_-} \int_0^1 dy_j \right) \left( \prod_{i=1}^{n_+} \int_0^1 dx_i \right) \\ & \times \prod_{i=1}^{n_+} x_i^{\sqrt{\beta} \alpha_1} (1-x_i)^{\sqrt{\beta} \alpha_2} (1-q x_i)^{\sqrt{\beta} \alpha_3} \prod_{1 \leq i < j \leq n_+} (x_i - x_j)^{2\beta} \\ & \times \prod_{j=1}^{n_-} y_i^{-\sqrt{\beta} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2n_+ \sqrt{\beta} + 2n_- \sqrt{\beta})} (1-q y_j)^{\sqrt{\beta} \alpha_2} (1-y_j)^{\sqrt{\beta} \alpha_3} \prod_{1 \leq i < j \leq n_-} (y_i - y_j)^{2\beta} \\ & \times \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1-q x_i y_j)^{2\beta} \end{aligned} \quad (7.18)$$

<sup>12</sup>後に説明するが, (7.14) の中の  $V_{\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}}}(1)$  と  $V_{\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}}(q)$  の寄与から現れる因子  $(1-q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}}$  は, 実は重要なもので, Nekrasov 公式の  $U(1)$  因子の逆数に対応している.

となる [14, (2.8)]. ここに

$$\sigma = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} + n_+ \sqrt{\beta} \alpha_1 + n_+ \sqrt{\beta} \alpha_2 + n_+(n_+ - 1)\beta + n_+ \quad (7.19)$$

とした. さらに 3 行目の因子  $y_j$  の指数部分は (7.13) より

$$-\sqrt{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2n_+ \sqrt{\beta} + 2n_- \sqrt{\beta}) = \sqrt{\beta} \alpha_4 \quad (7.20)$$

となる.

このように相関関数  $\Psi(q)$  を計算して得られた積分表示 (7.18) は, 2 種類の独立な変数を持つ 2 重の Selberg 型積分になっていることがわかる. それを上手く書き直す為に, 新しいパラメータ

$$u_+ = \sqrt{\beta} \alpha_1, \quad u_- = \sqrt{\beta} \alpha_4, \quad (7.21)$$

$$v_+ = \sqrt{\beta} \alpha_2, \quad v_- = \sqrt{\beta} \alpha_3 \quad (7.22)$$

を導入し, 次の Selberg アベレージという積分記号を定義する.

**定義 7.1.** 関数  $f = f(x_1, \dots, x_{n_+})$ ,  $g = g(y_1, \dots, y_{n_-})$  に対して, Selberg アベレージ  $\langle - \rangle_+$ ,  $\langle - \rangle_-$  を

$$\langle f \rangle_+ = \frac{1}{S_+} \left( \prod_{i=1}^{n_+} \int_0^1 dx_i \right) \prod_{i=1}^{n_+} x_i^{u_+} (1-x_i)^{v_+} \prod_{1 \leq i < j \leq n_+} (x_i - x_j)^{2\beta} f(x), \quad (7.23)$$

$$\langle g \rangle_- = \frac{1}{S_-} \left( \prod_{j=1}^{n_-} \int_0^1 dy_j \right) \prod_{j=1}^{n_-} y_j^{u_-} (1-y_j)^{v_-} \prod_{1 \leq i < j \leq n_-} (y_i - y_j)^{2\beta} g(y) \quad (7.24)$$

と定義する. ここに  $S_{\pm}$  は  $\langle 1 \rangle_{\pm} = 1$  とする為の規格化定数であり,

$$S_{\pm} = \left( \prod_{i=1}^{n_{\pm}} \int_0^1 dz_i \right) \prod_{i=1}^{n_{\pm}} z_i^{u_{\pm}} (1-z_i)^{v_{\pm}} \prod_{1 \leq i < j \leq n_{\pm}} (z_i - z_j)^{2\beta} \quad (7.25)$$

とする.

この記号を用いると, 遮蔽作用素を入れた自由場の相関関数は

$$\Psi(q) = q^{\sigma} (1-q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}} S_+ S_- \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+} (1-q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1-q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1-q x_i y_j)^{2\beta} \right\rangle \right\rangle_{+ -} \quad (7.26)$$

と書ける.

**注意 7.2.** 上で定めた  $S_{\pm}$  は通常の Selberg 積分と同じもので,  $n_{\pm} \in \mathbb{N}$  かつ

$$\operatorname{Re} u_{\pm} + 1 > 0, \quad \operatorname{Re} v_{\pm} + 1 > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > -\min \left\{ \frac{1}{n_{\pm}}, \frac{\operatorname{Re} n_{\pm} + 1}{n_{\pm} - 1}, \frac{\operatorname{Re} v_{\pm} + 1}{n_{\pm} - 1} \right\} \quad (7.27)$$

となっているとき,

$$S_{\pm} = \prod_{i=1}^{n_{\pm}} \frac{\Gamma(1+i\beta) \Gamma(u_{\pm} + 1 + (i-1)\beta) \Gamma(v_{\pm} + 1 + (i-1)\beta)}{\Gamma(1+\beta) \Gamma(u_{\pm} + v_{\pm} + 2 + (n_{\pm} + i - 2)\beta)} \quad (7.28)$$

となることが知られている [14, (2.21)].

また (7.26) の Selberg アベレージは  $|q| < 1$  かつ

$$\operatorname{Re} u_{\pm} > -1, \quad \operatorname{Re} v_{\pm} > -1, \quad (7.29)$$

$$\operatorname{Re} \beta > -\min \left\{ \frac{1}{n_{\pm}}, \frac{\operatorname{Re} u_{\pm} + 1}{n_{\pm} - 1}, \frac{\operatorname{Re} v_{\pm} + 1}{n_{\pm} - 1} \right\} \quad (7.30)$$

のとき well-defined になる ([14, (2.22)-(2.23)]). ただし, 積分した後の値は複素平面上の正則な領域全体に解析接続できるので, 本論文では以後, パラメータの値の範囲は気にしないことにする.

この Selberg アベレージで書いた自由場の相関関数から, 因子  $q^{\sigma}$  と  $S_+$ ,  $S_-$  を除いたものが共形ブロックと一致しているということが予想されている. この予想に関する厳密な証明は未だ与えられていない.

予想 7.3 ([14, (2.33)]). 自由場の相関関数  $\Psi(q)$  の構成要素

$$\mathcal{B}^{\text{boson}}(q) \equiv (1-q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}} \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+} (1-q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1-q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1-q x_i y_j)^{2\beta} \right\rangle \right\rangle_{+ -} \quad (7.31)$$

はパラメータの変換

$$h = \frac{1}{4} \alpha (\alpha - 2\tilde{Q}) \quad (7.32)$$

$$h_i = \frac{1}{4} \alpha_i (\alpha_i - 2\tilde{Q}), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.33)$$

の下で共形ブロック (2.78) と一致している. つまり,

$$\mathcal{B}^{\text{boson}}(q) = \mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(q) \quad (7.34)$$

となる. ただし, チャージ保存則

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2n_+ \sqrt{\beta} = -\alpha_3 - \alpha_4 - 2n_- \sqrt{\beta} \quad (7.35)$$

を満たしているものとする.

この予想は, 次節で行う Selberg アベレージの被積分関数の  $q$  によるレベル展開を用いて確認することができる.

注意 7.4. 積分する前は  $n_+, n_-$  は自然数でなければならないが, 積分し終えた後の  $n_+, n_-$  は式の中に現れる単なるパラメータと見ることができるので, この予想は積分し終えた後に  $n_+, n_-$  が複素数全体で成立つことを主張している.

またパラメータの変換 (7.32) を行くと,  $\Psi(q)$  の中の因子  $q^{\sigma}$  は

$$q^{\sigma} = q^{h-h_1-h_2} \quad (7.36)$$

となって (2.77) の中の因子  $z^{h-h_1-h_2}$  と一致する.



この自由場で与えた共形ブロックを橋渡しにして, AGT 予想の証明を考えることができる. 今まで行ってきたパラメータの変換をたどれば, 次のパラメータの変換

$$\beta = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad n_+ = \frac{a - m_2}{\epsilon_1}, \quad n_- = \frac{-a - m_4}{\epsilon_1} \quad (7.37)$$

$$u_+ = \frac{m_1 - m_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}, \quad u_- = \frac{m_3 - m_4 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \quad (7.38)$$

$$v_+ = \frac{-m_1 - m_2}{\epsilon_2}, \quad v_- = \frac{-m_3 - m_4}{\epsilon_2} \quad (7.39)$$

によって Nekrasov 公式との一致をみることができる. ただしこの章では, リスケールする前の Nekrasov 公式のパラメータを用いる. ここで注意すべきなのが, 自由場表示した共形ブロック  $B^{\text{boson}}(q)$  の中の因子  $(1 - q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}}$  が, パラメータの変換 (7.37)-(7.39) の下で

$$(1 - q)^{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2}} = (1 - q)^{-\frac{1}{2\epsilon_1 \epsilon_2} (m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \quad (7.40)$$

となり,  $U(1)$  因子の逆数  $1/Z^{U(1)}$  に一致しているということである. 従って自由場表示した共形ブロックを用いた AGT 予想は,  $U(1)$  因子を除去する前の Nekrasov 公式と一致することを示せばよい.

予想 7.5 ([14, 4 節]).  $U(1)$  因子の逆数を除いた自由場の共形ブロックを

$$B(q) = \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+} (1 - q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q x_i y_j)^{2\beta} \right\rangle \right\rangle_{+ -} \quad (7.41)$$

とする. このときパラメータの変換 (7.37)-(7.39) の下で,

$$B(q) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{e}) \quad (7.42)$$

となつて,  $U(2)$  ゲージ理論の Nekrasov 公式と一致する. ただし  $a = a_1 = -a_2$  とする.

## 7.2 $\beta = 1$ の場合 (予想 7.5 の証明)

次節以降で一般的な証明を行うが, その前に  $\beta = 1$ , つまり Virasoro 代数の中心が  $c = 1$  の場合で, Jack 多項式を用いた証明の流れを簡単に説明する.

まず  $B(q)$  における Selberg アベレージの被積分関数を, Jack 多項式で展開することを考える. まず被積分関数の対数をとると

$$\begin{aligned} & \log \left( \prod_{i=1}^{n_+} (1 - q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q x_i y_j)^{2\beta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_+} v_- \log(1 - q x_i) + \sum_{j=1}^{n_-} v_+ \log(1 - q y_j) + \sum_{i=1}^{n_+} \sum_{j=1}^{n_-} 2\beta \log(1 - q x_i y_j) \\ &= -v_- \sum_{i=1}^{n_+} \sum_{k \geq 1} \frac{(q x_i)^k}{k} - v_+ \sum_{j=1}^{n_-} \sum_{k \geq 1} \frac{(q y_j)^k}{k} - 2\beta \sum_{i=1}^{n_+} \sum_{j=1}^{n_-} \sum_{k \geq 1} \frac{(q x_i y_j)^k}{k} \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned}
&= -v_- \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(x) - v_+ \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(y) - 2\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(x) p_k(y) \\
&= -\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(x) \left( p_k(y) + \frac{v_-}{\beta} \right) - \beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(y) \left( p_k(x) + \frac{v_+}{\beta} \right)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n_+} (1 - q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q x_i y_j)^{2\beta} \\
&= \exp \left( -\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(x) \left( p_k(y) + \frac{v_-}{\beta} \right) \right) \exp \left( -\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(y) \left( p_k(x) + \frac{v_+}{\beta} \right) \right)
\end{aligned} \tag{7.44}$$

と変形できる. これは Cauchy の公式が適応できる形になっている. 例 6.21 の規格化された Jack 多項式を用いて被積分関数を展開すると

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n_+} (1 - q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q x_i y_j)^{2\beta} \\
&= \sum_{\lambda, \mu} q^{|\lambda| + |\mu|} j_\lambda(p_k(y)) j_\lambda(-p_k(x) - \frac{v_+}{\beta}) j_\mu(p_k(x)) j_\mu(-p_k(y) - \frac{v_-}{\beta})
\end{aligned} \tag{7.45}$$

となり,  $q$  のレベル展開の形にできる. ここに, Jack 多項式は冪和対称多項式  $\{p_k\}$  を変数にもつ関数とみなして計算した. さらに, この式は独立な変数  $\{x_i\}$  と  $\{y_i\}$  を完全に分離している. 従って, 2重に重なった Selberg アベレージを

$$\begin{aligned}
B(q) &= \sum_{\lambda, \mu} q^{|\lambda| + |\mu|} \left\langle j_\lambda(-p_k(x) - \frac{v_+}{\beta}) j_\mu(p_k(x)) \right\rangle_+ \\
&\quad \times \left\langle j_\lambda(p_k(y)) j_\mu(-p_k(y) - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_-
\end{aligned} \tag{7.46}$$

と2つに分けて書き直すことができる. 後は2つの Jack 多項式が入った Selberg アベレージを計算すればよい.

ここでまず1つの Jack 多項式を入れた Selberg アベレージの値は, 次のような Kadell 公式と呼ばれる公式が知られている.

**事実 7.6** ([24, (30)], [16, Theorem 1]).  $P_\lambda(p_k(x))$  を  $n$  変数の Jack 多項式とする. このとき  $P_\lambda(p_k)$  の Selberg アベレージは

$$\langle P_\lambda(p_k) \rangle = \frac{\tau_\lambda(u + n\beta + 1 - \beta) \tau_\lambda(n\beta)}{\tau_\lambda(u + v + 2n\beta + 2 - 2\beta)} P_\lambda(\delta_{k,1}) \tag{7.47}$$

となる. ここに

$$\tau_\lambda(u) = \frac{1}{\beta^{|\lambda|}} \prod_{(i,j) \in \lambda} (u - \beta(i-1) + (j-1)) \tag{7.48}$$

とし,  $P_\lambda(\delta_{k,1})$  は, Jack 多項式を冪和多項式で展開したときの  $p_{(1^n)}$  の係数を表す. また Selberg アベレージ  $\langle - \rangle$  は  $\langle - \rangle_+$  の  $n_+$ ,  $u_+$ ,  $v_+$  を  $n$ ,  $u$ ,  $v$  に置き換えたものとする.

例 7.7. 例えば規格化された Jack 多項式  $j_\lambda(p_k)$  を入れたものを考える. 例 6.13 より, 1 次  
の場合は

$$j_{(1)}(p_k) = \sqrt{\beta} p_{(1)} \quad (7.49)$$

であるので, この Selberg アベレージは

$$\langle j_{(1)}(p_k) \rangle_+ = \sqrt{\beta} \frac{(u_+ + n_+ \beta + 1 - \beta)n_+}{u_+ + v_+ + 2n_+ \beta + 2 - 2\beta} \quad (7.50)$$

となる. さらにパラメータの変換 (7.37)-(7.39) を使うと

$$\langle j_{(1)}(p_k) \rangle_+ = \frac{\sqrt{\beta} (a - m_1)(a - m_2)}{\epsilon_1 \epsilon - 2a} \quad (7.51)$$

となる. ここに,  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$  とした.

さらに 2 つの Jack 多項式を入れた場合の値は, 次のように予想されている.

予想 7.8 ([24, (32)], [22, Appendix]). 2 つの Jack 多項式の Selberg アベレージは

$$\begin{aligned} \langle P_\lambda(p_k + w)P_\mu(p_k) \rangle &= \frac{1}{\text{Norm}_\beta(u, v, n)} \frac{\tau_\lambda(u + n\beta + 1 - \beta)\tau_\mu(u + n\beta + 1 - \beta)}{\tau_\lambda(n\beta)\tau_\mu(u + v + n\beta + 2 - 2\beta)} \\ &\times \frac{\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j + (j - i)\beta)_\beta \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j + (j - i)\beta)_\beta}{\prod_{i, j=1}^n (u + v + 2n\beta + 2 + \lambda_i + \mu_j - (1 + i + j)\beta)_\beta} \\ &\times P_\lambda(\delta_{k,1})P_\mu(\delta_{k,1}) \end{aligned} \quad (7.52)$$

となる. ここに,  $w = \frac{v+1-\beta}{\beta}$  で冪和多項式をシフトし, Pochhammer の記号

$$(x)_\beta = \frac{\Gamma(x + \beta)}{\Gamma(x)} \quad (7.53)$$

を用いた. また  $\text{Norm}_\beta(u, v, n)$  はパーティションに依存しない定数で,  $\langle 1 \rangle = 1$  により定め, 具体的には

$$\text{Norm}_\beta(u, v, n) = \frac{\prod_{i, j=1}^n (u + v + 2n\beta + 2 - (1 + i + j)\beta)_\beta}{\left( \prod_{i < j} ((j - i)\beta)_\beta \right)^2} \quad (7.54)$$

となる.

注意 7.9. この積分は  $w = 0$  つまり  $v = \beta - 1$  という制限がかかった場合には証明が与えられている [16, Theorem 2].

この公式を用いると  $\beta = 1$  のとき

$$\left\langle j_\lambda(-p_k(x) - \frac{v_+}{\beta})j_\mu(p_k(x)) \right\rangle_+ \left\langle j_\lambda(p_k(y))j_\mu(-p_k(y) - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_- = Z_{\lambda, \mu}^{N_f=4}(\vec{m}, a, \vec{\epsilon}) \quad (7.55)$$

となっていることが分かる [22]. 従ってヤング図で展開したときの Nekrasov 公式の各項と, 共形ブロックの各項が一致しているので,

$$B(q) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{m}, \vec{a}, \vec{\epsilon}) \quad (7.56)$$

となっていることが分かる. ただし, この証明が上手く機能するのは  $\beta = 1$  のときのみで, 一般の場合では (7.55) は成立しないことが分かっている. 次節以降で一般的な証明を与えるが, アイディアはこのときと同じで, Selberg アベレージの被積分関数を特殊な多項式で展開し, ヤング図の展開の意味で各項が各項に一致するものを考える.

例 7.10. 1 次の場合において (7.55) が成立することを確認する. 例 7.7 を用いて  $(\lambda, \mu) = ([1], [0])$  の項を計算すると,

$$\begin{aligned} & \left\langle j_{(1)}\left(-p_k(x) - \frac{v_+}{\beta}\right) \right\rangle_+ \left\langle j_{(1)}(p_k(y)) \right\rangle_- \\ &= \frac{-1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left\{ \frac{(a - m_1)(a - m_2)}{2a - \epsilon} + (m_1 + m_2) \right\} \left\{ \frac{(a + m_3)(a + m_4)}{2a + \epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (7.57)$$

となる. また  $(\lambda, \mu) = ([0], [1])$  の場合は

$$\begin{aligned} & \left\langle j_{(1)}(p_k(x)) \right\rangle_+ \left\langle j_{(1)}\left(-p_k(y) - \frac{v_-}{\beta}\right) \right\rangle_- \\ &= \frac{-1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left\{ \frac{(a - m_1)(a - m_2)}{2a - \epsilon} \right\} \left\{ \frac{(a + m_3)(a + m_4)}{2a + \epsilon} - (m_3 + m_4) \right\} \end{aligned} \quad (7.58)$$

となる.  $\beta = 1$  のとき  $\epsilon = 0$  となるから, これらはそれぞれ  $Z_{[1],[0]}^{N_f=4}$ ,  $Z_{[0],[1]}^{N_f=4}$  と一致している (例 3.2 参照). しかし,  $\beta \neq 1$  のときは

$$\begin{aligned} & \left\langle j_{(1)}\left(-p_k(x) - \frac{v_+}{\beta}\right) \right\rangle_+ \left\langle j_{(1)}(p_k(y)) \right\rangle_- + \left\langle j_{(1)}(p_k(x)) \right\rangle_+ \left\langle j_{(1)}\left(-p_k(y) - \frac{v_-}{\beta}\right) \right\rangle_- \\ &= Z_{[1],[0]}^{N_f=4}(\vec{m}, a, \epsilon) + Z_{[0],[1]}^{N_f=4}(\vec{m}, a, \epsilon) \end{aligned} \quad (7.59)$$

とはなっているが, 各項は一致していない.

### 7.3 一般化された Jack 多項式

この節で  $\beta \neq 1$  の場合でも, Nekrasov 公式と上手く一致するような一般化された Jack 多項式を定義する. まずその為に, Jack 対称関数などを与えるハミルトニアンを, 冪和対称関数を用いて記述する為の公式を用意する.

命題 7.11. 対称関数環上の作用素として

$$\sum_{i \geq 1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k \geq 1} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad (7.60)$$

$$\sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{k,l} k l p_{k+l} \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} + \sum_k k(k-1) p_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad (7.61)$$

$$\sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k,l} (k+l) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} - \sum_{k \geq 1} k(k-1) p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (7.62)$$

となる.

証明. 6.3 節で用いた  $\Pi(x, y, q, t)$  の  $q = t$  としたものは, 冪和対称関数の母関数の形

$$\Pi(x, y, t, t) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y) \quad (7.63)$$

になっており, 冪和対称関数は対称関数環上で基底を成すので, この  $\Pi(x, y) \equiv \Pi(x, y, t, t)$  への作用が同じであることを確認すればよい. 尚, この証明では  $p_n = p_n(x)$ ,  $q_n = p_n(y)$  と書くことにする.

まず (7.60) を証明する. 左辺の作用素を  $\Pi(x, y)$  に作用させると

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi(x, y) &= \sum_{i \geq 1} x_i \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} x_i^{n-1} q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 1} x_i^n q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} p_n q_n \\ &= \sum_{k \geq 1} k p_k \Pi(x, y) \frac{1}{k} q_k \\ &= \sum_{k \geq 1} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \Pi(x, y) \end{aligned} \quad (7.64)$$

となつて右辺の作用素を作用させた形になっている. 従つて (7.60) が成立する.

次に (7.61) を証明する. 左辺の作用素を  $\Pi(x, y)$  に作用させると

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Pi(x, y) &= \sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi(x, y) \left( \sum_{n \geq 1} x_i^{n-1} q_n \right) \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i^2 \Pi(x, y) \left\{ \left( \sum_{n \geq 1} x_i^{n-1} q_n \right)^2 + \left( \sum_{n \geq 1} (n-1) x_i^{n-2} q_n \right) \right\} \\ &= \Pi(x, y) \left\{ \sum_i \left( \sum_{n \geq 1} x_i^n q_n \right)^2 + \sum_i \left( \sum_{n \geq 1} (n-1) x_i^n q_n \right) \right\} \\ &= \Pi(x, y) \left\{ \sum_i \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} x_i^{n+m} q_n q_m + \sum_{n \geq 1} (n-1) p_n q_n \right\} \\ &= \Pi(x, y) \left\{ \sum_{n, m} p_{n+m} q_n q_m + \sum_{n \geq 1} (n-1) p_n q_n \right\} \end{aligned} \quad (7.65)$$

となる. 一方, 右辺の作用素を作用させたものは

$$\sum_{k, l} k l p_{k+l} \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} \Pi(x, y) = \sum_{k, l} k l p_{k+l} \frac{\partial}{\partial p_k} \Pi(x, y) \frac{1}{l} q_l \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l} k l p_{k+l} \Pi(x, y) \frac{1}{k} q_k \frac{1}{l} q_l \\
&= \Pi(x, y) \sum_{k,l} p_{k+l} q_k q_l
\end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned}
\sum_k k(k-1) p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \Pi(x, y) &= \sum_k k(k-1) p_k \Pi(x, y) \frac{1}{k} q_k \\
&= \Pi(x, y) \sum_k (k-1) p_k q_k
\end{aligned} \tag{7.67}$$

となるので, 左辺を作用させたものと一致する. よって (7.61) が成立する.

最後に (7.62) を示す. (7.62) の左辺を作用させたものは

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Pi(x, y) &= \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \Pi(x, y) \left\{ \sum_{n \geq 1} \left( x_i^{n-1} - x_j^{n-1} \right) q_n \right\} \\
&= \Pi(x, y) \sum_{i \neq j} x_i x_j \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} x_i^{n-1-k} x_j^{-1+k} q_n \\
&= \Pi(x, y) \sum_{i \neq j} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} x_i^{n-k} x_j^k q_n \\
&= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} (p_{n-k} p_k - p_n) q_n \\
&= \Pi(x, y) \left( \sum_{n,m} p_n p_m q_{n+m} - \sum_n (n-1) p_n q_n \right)
\end{aligned} \tag{7.68}$$

となる. また

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l} (k+l) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \Pi(x, y) &= \sum_{k,l} (k+l) p_k p_l \Pi(x, y) \frac{1}{k+l} q_{k+l} \\
&= \Pi(x, y) \sum_{k,l} p_k p_l q_{k+l}
\end{aligned} \tag{7.69}$$

となることと (7.67) から, 右辺を作用させたものも同じ値になることが分かる. よって (7.62) が証明できた.  $\square$

この演算子の記号を用いて, まず Jack 対称関数を与えるハミルトニアンを冪和対称関数で表示すると

$$H_\beta = \sum_{n,m \geq 1} n m p_{n+m} \frac{\partial^2}{\partial p_n \partial p_m} + \beta \sum_{n,m \geq 1} (n+m) p_n p_m \frac{\partial}{\partial p_{n+m}} + (1-\beta) \sum_n n^2 p_n \frac{\partial}{\partial p_n} \tag{7.70}$$

となる. この演算子を元にして一般化された Jack 多項式を定義する. 前節で行った  $\beta = 1$  の証明では, 最終的に 2 つの Jack 多項式の積を Selberg アベレージに入れた形に帰着した

が、一般化された Jack 多項式はこの 2 つの Jack 多項式の積を混ぜたような形をしている。よって一般化された Jack 多項式は 2 つのパーティションの組でパラメトライズされるので、パーティションの組に対してドミナンス半順序  $\geq$  を拡張した半順序  $\geq^L, \geq^R$  を定義する。

定義 7.12. 2 つのパーティションの組  $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ ,  $\vec{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$  に対して,  $\vec{\lambda} \geq^R \vec{\mu}$  を  $|\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|$  でありかつ,

$$|\lambda^{(1)}| > |\mu^{(1)}| \quad \text{or} \quad (7.71)$$

$$”\lambda^{(1)} \geq \mu^{(1)} \quad \text{and} \quad \lambda^{(2)} \geq \mu^{(2)}” \quad (7.72)$$

と定義する。また  $\vec{\lambda} \geq^L \vec{\mu}$  を  $|\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|$  でありかつ,

$$|\lambda^{(2)}| > |\mu^{(2)}| \quad \text{or} \quad (7.73)$$

$$”\lambda^{(1)} \geq \mu^{(1)} \quad \text{and} \quad \lambda^{(2)} \geq \mu^{(2)}” \quad (7.74)$$

と定義する。

例 7.13. 例えば 1 次と 2 次の場合は

$$([1], [0]) \geq^R ([0], [1]), \quad (7.75)$$

$$([2], [0]) \geq^R ([1^2], [0]) \geq^R ([1], [1]) \geq^R ([0], [2]) \geq^R ([0], [1^2]) \quad (7.76)$$

となる。また  $([3^2], [1])$  と  $([4, 1, 1], [1])$  や,  $([2], [1^2])$  と  $([1^2], [2])$  のように比べられないパーティションの組もある。

さらに一般化された Jack 多項式は 2 種類の独立な変数を持つ多項式である。つまり変数  $\{x_i\}$  を持つ対称関数環を  $\Lambda$ , またこれと独立な変数  $\{y_i\}$  を持つ対称関数環を  $\Lambda'$  と書くと, 一般化された Jack 対称関数は  $\Lambda \otimes \Lambda'$  上の元である<sup>13</sup>。そこでまずこの空間上の対称関数を記述する為の記号を説明する。  $p_n, \bar{p}_n$  をそれぞれ  $\{x_i\}, \{y_i\}$  を変数に持つ冪和対称関数とし,  $m_\lambda, \bar{m}_\lambda$  をそれぞれ  $\{x_i\}, \{y_i\}$  を変数に持つモノミアル対称関数とする。またパーティションの組  $\vec{\lambda}$  に対して,

$$p_{\vec{\lambda}} = p_{\lambda^{(1)}} \bar{p}_{\lambda^{(2)}}, \quad m_{\vec{\lambda}} = m_{\lambda^{(1)}} \bar{m}_{\lambda^{(2)}} \quad (7.77)$$

と定める。さらにこの空間上の内積  $\langle -, - \rangle_\beta^{\otimes 2}$  は

$$\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}} \rangle_\beta^{\otimes 2} = \left\langle p_{\lambda^{(1)}}, p_{\mu^{(1)}} \right\rangle_\beta \left\langle \bar{p}_{\lambda^{(2)}}, \bar{p}_{\mu^{(2)}} \right\rangle_\beta \quad (7.78)$$

と定義する。

一般化された Jack 多項式はこの空間上の,  $H_\beta$  を変形させた演算子の一意的に定まる固有関数として, 以下の存在定理により定義できる。

定理 7.14 ([24, 5 節]). 任意のパーティションの組  $\vec{\lambda}$  に対して, 次の 2 条件を満たす対称関数  $J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k)$  が一意に存在する:

<sup>13</sup>一般化された Jack 多項式は  $\beta$  以外にもパラメータを含むので, 係数の記号は伏せた。

$$1. J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k) = \sum_{\vec{\mu} \leq \mathbb{R}\vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad s_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} = 1, \quad s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} : \text{定数};$$

$$2. \hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k) = \Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k), \quad \Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) : \text{定数}.$$

ここに、ハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  は

$$\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} = \mathcal{H}_x^{(\beta)} + \mathcal{H}_y^{(\beta)} + (1 - \beta) \sum_{n \geq 1} n^2 \bar{p}_n \frac{\partial}{\partial p_n} \quad (7.79)$$

である。ただし  $\mathcal{H}_x^{(\beta)}$  と  $\mathcal{H}_y^{(\beta)}$  は、パラメータ  $u_1, u_2$  を持つハミルトニアンであり、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x^{(\beta)} = & \frac{1}{2} \sum_{n,m} n m p_{n+m} \frac{\partial^2}{\partial p_n \partial p_m} + \frac{\beta}{2} \sum_{n,m} (n+m) p_n p_m \frac{\partial}{\partial p_{n+m}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_n (2u_1 - (\beta-1)(n-1)) n p_n \frac{\partial}{\partial p_n}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_y^{(\beta)} = & \frac{1}{2} \sum_{n,m} n m \bar{p}_{n+m} \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_n \partial \bar{p}_m} + \frac{\beta}{2} \sum_{n,m} (n+m) \bar{p}_n \bar{p}_m \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n+m}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_n (2u_2 - (\beta-1)(n-1)) n \bar{p}_n \frac{\partial}{\partial \bar{p}_n} \end{aligned} \quad (7.81)$$

とした。このとき固有値  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  は

$$\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) = \sum_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (u_1 + (j-1) - (i-1)\beta) + \sum_{(i,j) \in \lambda^{(2)}} (u_2 + (j-1) - (i-1)\beta) \quad (7.82)$$

となる。

この固有関数  $J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k)$  を一般化された Jack 対称関数と呼び、これを有限変数に制限したものを一般化された Jack 多項式という。

補題 7.15. まず  $\mathcal{H}_x^{(\beta)}$  のモノミアル対称関数への作用は下三角になる。つまり

$$\mathcal{H}_x^{(\beta)} m_{\lambda} = \sum_{\mu \leq \lambda} C_{\lambda\mu} m_{\mu}, \quad C_{\lambda\mu} : \text{定数} \quad (7.83)$$

となる。このとき対角成分は固有値であり、その値は

$$C_{\lambda\lambda} = \sum_{(i,j) \in \lambda} ((j-1) - (i-1)\beta + u_1) \quad (7.84)$$

となる。

証明。まず命題 7.11 を使って、冪対称関数を用いた表示から変数  $x_i$  を用いた表示に書き換えると、

$$\mathcal{H}_x^{(\beta)} = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + u_1 \sum_{i \geq 1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (7.85)$$



となる. また各項の作用素を

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (7.86)$$

$$B = \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (7.87)$$

$$D = u_1 \sum_{i \geq 1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (7.88)$$

とおく.

このとき,  $A$  のモノミアル対称関数  $m_\lambda$  への作用は,

$$\begin{aligned} A m_\lambda &= A \sum_{\substack{a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \\ : \lambda \text{ の異なる置換}}} \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \quad (7.89) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \sum_a a_i (a_i - 1) \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_a \sum_{i \geq 1} \lambda_i (\lambda_i - 1) \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \lambda_i (\lambda_i - 1) m_\lambda \end{aligned}$$

となり, その固有値は

$$\frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \lambda_i (\lambda_i - 1) = \sum_{i \geq 1} (0 + 1 + \dots + (\lambda_i - 1)) = \sum_{(i,j) \in \lambda} (j - 1) \quad (7.90)$$

と表せる.

次に  $B$  のモノミアル対称関数への作用は

$$\begin{aligned} B m_\lambda &= \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \sum_{\substack{a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \\ : \lambda \text{ の異なる置換}}} \left( a_i \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i} - a_j \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_j} \right) \quad (7.91) \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \sum_a \frac{1}{x_i - x_j} (a_i x_j - a_j x_i) \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \\ &= -\beta \sum_{i < j} \sum_a \frac{1}{x_i - x_j} (a_j x_i - a_i x_j) \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \end{aligned}$$

となる. ここで  $a$  に関する和の中の1つの項  $\frac{1}{x_i - x_j} (a_j x_i - a_i x_j) \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}$  に対して,  $a_i = a_j$  のとき, この項は

$$a_j \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \quad (7.92)$$

となる. また  $a_i \neq a_j$  のときは,  $\lambda$  の置換の中で  $a$  の  $a_i$  と  $a_j$  だけを入れ替えたもの

$$a' = (a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots) \quad (7.93)$$

が存在し、このようなもの同士が  $\sum_a$  の中でそれぞれペアになる。このペアの和を考える。次数が平均化されている項はドミナンス半順序で低いパーティションのモノミアル対称関数しか現れないので、そのような項を無視する（それを“ $\sim$ ”と書く）と  $a_i > a_j$  のとき

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x_i - x_j} \left\{ \left( a_j x_i^{a_i+1} x_j^{a_j} - a_i x_i^{a_i} x_j^{a_j+1} \right) + \left( a_i x_i^{a_j+1} x_j^{a_i} - a_j x_i^{a_j} x_j^{a_i+1} \right) \right\} \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}} \quad (7.94) \\
& \sim \frac{1}{x_i - x_j} \left( a_j x_i^{a_i+1} x_j^{a_j} - a_j x_i^{a_j} x_j^{a_i+1} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}} \\
& = a_j x_i^{a_j} x_j^{a_j} \left( x_i^{a_i-a_j} + x_i^{a_i-a_j-1} x_j + \cdots + x_i x_j^{a_i-a_j-1} + x_j^{a_i-a_j} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}} \\
& \sim a_j x_i^{a_j} x_j^{a_j} \left( x_i^{a_i-a_j} + x_j^{a_i-a_j} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}} \\
& = a_j \left( x_i^{a_i} x_j^{a_j} + x_i^{a_j} x_j^{a_i} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}}
\end{aligned}$$

となる。  $a_i < a_j$  のときも同様に次数の差が最も大きい項は  $a_i \left( x_i^{a_i} x_j^{a_j} + x_i^{a_j} x_j^{a_i} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}}$  となる。従って  $\lambda$  よりもドミナンス半順序で低いパーティションで表される項を  $\mathcal{O}(\lambda)$  と書くと、

$$\begin{aligned}
B m_\lambda &= -\beta \sum_{i < j} \frac{1}{2} \sum_a \min\{a_i, a_j\} \left( x_i^{a_i} x_j^{a_j} + x_i^{a_j} x_j^{a_i} \right) \frac{\prod_{k \geq 1} x_k^{a_k}}{x_i^{a_i} x_j^{a_j}} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (7.95) \\
&= -\beta \sum_{i < j} \sum_a \min\{a_i, a_j\} \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= -\beta \sum_{i < j} \min\{\lambda_i, \lambda_j\} m_\lambda + \mathcal{O}(\lambda)
\end{aligned}$$

となる。さらにこの固有値は

$$-\beta \sum_{i < j} \min\{\lambda_i, \lambda_j\} = -\beta \sum_{j \geq 1} (j-1) \lambda_j = -\beta \sum_{(i,j) \in \lambda} (i-1) \quad (7.96)$$

と表すことができる。

最後に  $D$  のモノミアル対称関数への作用は

$$\begin{aligned}
D m_\lambda &= u_1 \sum_{i \geq 1} \sum_a a_i \prod_{k \geq 1} x_k^{a_k} \quad (7.97) \\
&= u_1 \sum_{i \geq 1} \lambda_i m_\lambda \\
&= u_1 |\lambda| m_\lambda
\end{aligned}$$

となり、固有値は

$$u_1 |\lambda| = \sum_{(i,j) \in \lambda} u_1 \quad (7.98)$$

と表せる.

以上により, ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_x^{(\beta)} = A + B + D \quad (7.99)$$

はモノミアル対称関数に対して下三角に作用し, その固有値はパーティションでパラメトライズされ

$$\sum_{(i,j) \in \lambda} ((j-1) - (i-1)\beta + u_1) \quad (7.100)$$

となる. □

補題 7.16. さらにパラメータ  $u_1, u_2, \beta$  が generic なとき, ハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の固有値  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  は, パーティションの組が比べられる所では縮退しない:

$$\vec{\lambda} >^R \vec{\mu} \Rightarrow \Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) \neq \Phi_{\vec{\mu}}^{(\beta)}(u_1, u_2). \quad (7.101)$$

証明. まず  $|\lambda^{(1)}| > |\mu^{(1)}|$  のときは, 固有値  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  と  $\Phi_{\vec{\mu}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  の  $u_1$  の係数が異なる為,  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) \neq \Phi_{\vec{\mu}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  となる.

$|\lambda^{(1)}| = |\mu^{(1)}|$  のときを考える. このとき  $\lambda^{(1)} > \mu^{(1)}$  ならば,

$$\sum_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (j-1) > \sum_{(i,j) \in \mu^{(1)}} (j-1) \quad (7.102)$$

となる. 実際,

$$S = \sum_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (j-1) - \sum_{(i,j) \in \mu^{(1)}} (j-1) \quad (7.103)$$

とすると, まず不等式

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i \geq 1} \left\{ \left( 0 + 1 + \cdots + (\lambda_i^{(1)} - 1) \right) - \left( 0 + 1 + \cdots + (\mu_i^{(1)} - 1) \right) \right\} \\ &> \sum_{i \geq 1} \left( \lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)} \right) \left( \mu_i^{(1)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.104)$$

が成立つ. これは  $\lambda_i^{(1)} > \mu_i^{(1)}$  のとき

$$\begin{aligned} &\left( 0 + 1 + \cdots + (\lambda_i^{(1)} - 1) \right) - \left( 0 + 1 + \cdots + (\mu_i^{(1)} - 1) \right) \\ &= \mu_i^{(1)} + (\mu_i^{(1)} + 1) + \cdots + (\lambda_i^{(1)} - 1) \\ &> \left( \mu_i^{(1)} - 1 \right) \left( \lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (7.105)$$

であることと,  $\lambda_i^{(1)} < \mu_i^{(1)}$  のときも

$$\begin{aligned} &\left( 0 + 1 + \cdots + (\lambda_i^{(1)} - 1) \right) - \left( 0 + 1 + \cdots + (\mu_i^{(1)} - 1) \right) \\ &= -\lambda_i^{(1)} - (\lambda_i^{(1)} + 1) - \cdots - (\mu_i^{(1)} - 1) \\ &\geq -\left( \mu_i^{(1)} - 1 \right) \left( \mu_i^{(1)} - \lambda_i^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (7.106)$$

となること, また  $\lambda^{(1)} > \mu^{(1)}$  であるので  $\lambda_i^{(1)} > \mu_i^{(1)}$  となる  $i$  が少なくとも1つ存在することから成立つ.  $S$  をさらに評価する為に, 番号  $i$  の部分列  $k(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を次のように取る. まず  $k(1)$  を

$$\lambda_{k(1)}^{(1)} \geq \mu_{k(1)}^{(1)} \quad \text{and} \quad \lambda_{k(1)+1}^{(1)} < \mu_{k(1)+1}^{(1)} \quad (7.107)$$

となる最小の番号とする. 次に  $k(2)$  を

$$\begin{aligned} \lambda_{k(1)+1}^{(1)} &< \mu_{k(1)+1}^{(1)}, \\ \lambda_{k(1)+2}^{(1)} &< \mu_{k(1)+2}^{(1)}, \\ &\dots \\ \lambda_{k(2)}^{(1)} &< \mu_{k(2)}^{(1)}, \\ \lambda_{k(2)+1}^{(1)} &\geq \mu_{k(2)+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (7.108)$$

となるように  $\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}$  が負から正に変わる直前の番号として定める. さらに  $k(3)$  を

$$\begin{aligned} \lambda_{k(2)+1}^{(1)} &\geq \mu_{k(2)+1}^{(1)}, \\ \lambda_{k(2)+2}^{(1)} &\geq \mu_{k(2)+2}^{(1)}, \\ &\dots \\ \lambda_{k(3)}^{(1)} &\geq \mu_{k(3)}^{(1)}, \\ \lambda_{k(3)+1}^{(1)} &< \mu_{k(3)+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (7.109)$$

となるように定める. これを繰り返して  $k(n)$  を  $\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}$  の正負が入れ替わる直前の番号として定める. この部分列を用いれば  $n$  の偶奇で  $\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}$  の正負を分けることができ,

$$\begin{aligned} S &> \sum_{n \geq 0} \left\{ \sum_{i=k(2n)+1}^{k(2n+1)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) (\mu_i^{(1)} - 1) + \sum_{i=k(2n+1)+1}^{k(2n+2)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) (\mu_i^{(1)} - 1) \right\} \\ &\geq \sum_{n \geq 0} \left\{ \sum_{i=k(2n)+1}^{k(2n+1)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) (\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k(2n+1)+1}^{k(2n+2)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) (\mu_{k(2n+1)+1}^{(1)} - 1) \right\} \\ &\geq \sum_{n \geq 0} \left\{ \sum_{i=k(2n)+1}^{k(2n+1)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) + \sum_{i=k(2n+1)+1}^{k(2n+2)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) \right\} (\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1) \quad (7.110) \end{aligned}$$

と評価することができる. ここに  $k(0) = 0$  とした. また  $(\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1) = 0$  となる最小の  $n$  を  $N_0$  とする.  $N_0 = 0$  のときは明らかに  $S > 0$  となるから  $N_0 \geq 1$  のときを考えると,

$$\mu_{k(2N_0)}^{(1)} > \lambda_{k(2N_0)}^{(1)} \geq \lambda_{k(2N_0)+1}^{(1)} \geq \mu_{k(2N_0)+1}^{(1)} \geq 1 \quad (7.111)$$

であるので,  $k(2N_0)$  以下の番号  $i$  では  $(\mu_i^{(1)} - 1) > 0$  となる. さらに,

$$T_n = \sum_{i=k(2n)+1}^{k(2n+2)} (\lambda_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}) \quad (7.112)$$

とおくと, ドミナンス半順序の定義より任意の  $n$  に対して  $T_0 + \cdots + T_n \geq 0$  であるから,

$$S > \sum_{n=0}^{N_0-1} T_n (\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1) \quad (7.113)$$

$$\geq (T_0 + T_1) (\mu_{k(3)}^{(1)} - 1) + \sum_{n=2}^{N_0-1} T_n (\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1) \quad (7.114)$$

$$\geq (T_0 + T_1 + T_2) (\mu_{k(5)}^{(1)} - 1) + \sum_{n=3}^{N_0-1} T_n (\mu_{k(2n+1)}^{(1)} - 1)$$

$$\geq \left( \sum_{n=0}^{N_0-1} T_n \right) (\mu_{k(2N_0-1)}^{(1)} - 1)$$

$$\geq 0$$

となる.

以上により,  $\lambda^{(2)}$  と  $\mu^{(2)}$  に関しても同じことが成立するので,  $\lambda^{(1)} > \mu^{(1)}$  または  $\lambda^{(2)} > \mu^{(2)}$  ならば

$$\sum_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (j-1) + \sum_{(i,j) \in \lambda^{(2)}} (j-1) > \sum_{(i,j) \in \mu^{(1)}} (j-1) + \sum_{(i,j) \in \mu^{(2)}} (j-1) \quad (7.115)$$

となる. よって  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  と  $\Phi_{\vec{\mu}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  の定数項が異なるので固有値が縮退しない, つまり

$$\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) \neq \Phi_{\vec{\mu}}^{(\beta)}(u_1, u_2) \quad (7.116)$$

となることが証明できた.  $\square$

これら 2 つの補題を用いて, 一般化された Jack 対称関数の存在定理を証明することができる.

定理 7.14 の証明. まず 2 種類の変数を持ったモノミアル対称関数  $m_{\vec{\lambda}}$  を基底にとると, ハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  は拡張されたドミナンス半順序  $>^R$  に関して, 下三角になる. 実際,  $\mathcal{H}_x^{(\beta)}$  の  $m_{\vec{\lambda}}$  への作用は補題 7.15 から,  $\lambda^{(1)} \geq \mu^{(1)}$  かつ  $\lambda^{(2)} = \mu^{(2)}$  となるパーティションの組  $\vec{\mu}$  に対するモノミアル対称関数  $m_{\vec{\mu}}$  の和で書くことができる. 同じように  $\mathcal{H}_y^{(\beta)}$  に関しても  $\lambda^{(1)} = \mu^{(1)}$  かつ  $\lambda^{(2)} \geq \mu^{(2)}$  となるものの和で書くことができる. さらに作用素

$$(1 - \beta) \sum_{n \geq 1} n^2 \bar{p}_n \frac{\partial}{\partial p_n} \quad (7.117)$$

の  $m_{\vec{\lambda}}$  への作用は,  $|\lambda^{(1)}| \neq 0$  であれば必ず

$$|\lambda^{(1)}| > |\mu^{(1)}| \quad \text{and} \quad |\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}| \quad (7.118)$$

となるパーティションの組  $\vec{\mu}$  に対するモノミアル対称関数が現れる. 従ってハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  を  $m_{\vec{\lambda}}$  に作用させると,  $\vec{\lambda} \geq^R \vec{\mu}$  となるパーティションの組  $\vec{\mu}$  に対するモノミアル対称関数  $m_{\vec{\mu}}$  だけが現れる. つまり

$$\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} m_{\vec{\lambda}} = \sum_{\vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}} e_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad e_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} : \text{定数} \quad (7.119)$$

となる. 従って固有値が, 補題 7.15 から

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2) &= e_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} \\ &= \sum_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (u_1 + (j-1) - (i-1)\beta) + \sum_{(i,j) \in \lambda^{(2)}} (u_2 + (j-1) - (i-1)\beta) \end{aligned} \quad (7.120)$$

となることも分かる.

この下三角性から, 1つ目の条件を満たす対称関数に  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  を作用させると

$$\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k) = \hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} \sum_{\vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}} = \sum_{\vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \sum_{\vec{\nu} \leq^R \vec{\mu}} e_{\vec{\mu}\vec{\nu}} m_{\vec{\nu}} \quad (7.121)$$

となる. また2つ目の条件を満たすことを用いると,

$$\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k) = e_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} \sum_{\vec{\nu} \leq^R \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\nu}} m_{\vec{\nu}} \quad (7.122)$$

となるので, 2つの条件を満たす対称関数を考えると

$$\sum_{\vec{\nu} \leq^R \vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} e_{\vec{\mu}\vec{\nu}} = e_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\nu}} \quad (7.123)$$

つまり

$$(e_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} - e_{\vec{\nu}\vec{\nu}}) s_{\vec{\lambda}\vec{\nu}} = \sum_{\vec{\nu} <^R \vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} e_{\vec{\mu}\vec{\nu}} \quad (7.124)$$

となる係数  $s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}}$  を持つものを考えるということになる. ここで補題 7.16 より, パーティションの組が比べられる所では固有値が縮退しない, つまり  $e_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}} \neq e_{\vec{\nu}\vec{\nu}}$  であるので, 上式は係数  $s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}}$  を  $\vec{\nu} <^R \vec{\mu} \leq^R \vec{\lambda}$  となる  $s_{\vec{\lambda}\vec{\mu}}$  から一意的に決める漸化式になっている. 従って2つの条件を満たす対称関数  $J_{\vec{\lambda}}(p_k, \bar{p}_k)$  が一意的に存在する.  $\square$

以上の証明により, 一般化された Jack 対称関数をきちんと定義できた. また, この存在定理により一般化された Jack 対称関数が  $\Lambda \otimes \Lambda'$  上の基底を成していることも分かる.

しかし, 実はハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  は, 内積  $\langle -, - \rangle_{\beta}^{\otimes 2}$  に関して自己共役でない. したがってその固有ベクトルである一般化された Jack 対称関数は直交関数系にはならない. よって Cauchy の公式を用いて共形ブロックの被積分関数を展開することを考えると, その双対も議論しなければならない.  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の共役演算子は  $\mathcal{H}_x^{(\beta)}, \mathcal{H}_y^{(\beta)}$  が自己共役なので

$$\bar{\mathcal{H}}^{(\beta)} = \mathcal{H}_x^{(\beta)} + \mathcal{H}_y^{(\beta)} + (1 - \beta) \sum_{n \geq 1} n^2 p_n \frac{\partial}{\partial p_n} \quad (7.125)$$

と3項目の  $p$  と  $\bar{p}$  を入れ替えれるだけで得られる. この双対の場合も基本的には同じ議論で, 半順序  $\geq^L$  を用いて同じ定理が得られる. またその固有値も同じになる.

例 7.17.  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  のモノミアル多項式への作用を計算すると, 1 次に制限したものは

$$\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} \begin{pmatrix} m_{[1],[0]} & m_{[0],[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{[1],[0]} & m_{[0],[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 1-\beta & u_2 \end{pmatrix} \quad (7.126)$$

と求めることができ, 表現行列を下三角にできる. 一般化された Jack 多項式はこれの固有ベクトルであるから

$$\begin{pmatrix} J_{[1],[0]} \\ J_{[0],[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\beta}{u_1-u_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{[1],[0]} \\ m_{[0],[1]} \end{pmatrix} \quad (7.127)$$

と計算することができる.

双対も同じように計算でき, 1 次の表現行列は

$$\bar{\mathcal{H}}^{(\beta)} \begin{pmatrix} m_{[0],[1]} & m_{[1],[0]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{[0],[1]} & m_{[1],[0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 1-\beta & u_1 \end{pmatrix} \quad (7.128)$$

となる. また一般化された Jack 多項式の双対は

$$\begin{pmatrix} J_{[0],[1]}^* \\ J_{[1],[0]}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\beta}{u_2-u_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{[0],[1]} \\ m_{[1],[0]} \end{pmatrix} \quad (7.129)$$

となる.

例 7.18. 2 次の場合は  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の表現行列が

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{(\beta)} \begin{pmatrix} m_{[2],[0]} & m_{[1,1],[0]} & m_{[1],[1]} & m_{[0],[2]} & m_{[0],[1,1]} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} m_{[2],[0]} & m_{[1,1],[0]} & m_{[1],[1]} & m_{[0],[2]} & m_{[0],[1,1]} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 2u_1+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & 2u_1-\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & u_1+u_2 & 0 & 0 \\ 4(1-\beta) & -2(1-\beta) & 1-\beta & 2u_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\beta) & 2\beta & 2u_2-\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.130)$$

となり, この固有関数である一般化された Jack 対称関数は

$$\begin{pmatrix} J_{[2],[0]} \\ J_{[1,1],[0]} \\ J_{[1],[1]} \\ J_{[0],[2]} \\ J_{[0],[1,1]} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} m_{[2],[0]} \\ m_{[1,1],[0]} \\ m_{[1],[1]} \\ m_{[0],[2]} \\ m_{[0],[1,1]} \end{pmatrix}, \quad (7.131)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\beta}{1+\beta} & \frac{2\beta(1-\beta)}{(1+\beta)(1+u_1-u_2)} & \frac{(1-\beta)(2+\beta-\beta^2+2u_1-2u_2)}{(1+\beta)(u_1-u_2)(1+u_1-u_2)} & \frac{2\beta(2-3\beta+\beta^2)}{(1+\beta)(u_1-u_2)(1+u_1-u_2)} \\ 0 & 1 & \frac{1-\beta}{-\beta+u_1-u_2} & \frac{1-\beta}{\beta-u_1+u_2} & \frac{-1+3\beta-2\beta^2}{(u_1-u_2)(\beta-u_1+u_2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\beta}{-1+u_1-u_2} & \frac{2(1-\beta)(-1+\beta+u_1-u_2)}{(-1+u_1-u_2)(\beta+u_1-u_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2\beta}{1+\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.132)$$

となる. また双対の  $\bar{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の表現行列は

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{H}}^{(\beta)} \begin{pmatrix} m_{[0],[2]} & m_{[0],[1,1]} & m_{[1],[1]} & m_{[2],[0]} & m_{[1,1],[0]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{[0],[2]} & m_{[0],[1,1]} & m_{[1],[1]} & m_{[2],[0]} & m_{[1,1],[0]} \end{pmatrix} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} 2u_2 + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & 2u_2 - \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \beta & u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 4(1 - \beta) & -2(1 - \beta) & 1 - \beta & 2u_1 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \beta) & 2\beta & 2u_1 - \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.133)$$

となる. 固有関数を計算して, 双対の一般化された Jack 対称関数を求めると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} J_{[0],[2]}^* \\ J_{[0],[1,1]}^* \\ J_{[1],[1]}^* \\ J_{[2],[0]}^* \\ J_{[1,1],[0]}^* \end{pmatrix} = M^* \begin{pmatrix} m_{[0],[2]} \\ m_{[0],[1,1]} \\ m_{[1],[1]} \\ m_{[2],[0]} \\ m_{[1,1],[0]} \end{pmatrix}, \quad (7.134) \\ & M^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\beta}{1+\beta} & \frac{2\beta(1-\beta)}{(1+\beta)(1+u_2-u_1)} & \frac{(1-\beta)(2+\beta-\beta^2+2u_2-2u_1)}{(1+\beta)(u_2-u_1)(1+u_2-u_1)} & \frac{2\beta(2-3\beta+\beta^2)}{(1+\beta)(u_2-u_1)(1+u_2-u_1)} \\ 0 & 1 & \frac{1-\beta}{-\beta+u_2-u_1} & \frac{1-\beta}{\beta-u_2+u_1} & \frac{-1+3\beta-2\beta^2}{(u_2-u_1)(\beta-u_2+u_1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\beta}{-1+u_2-u_1} & \frac{2(1-\beta)(-1+\beta+u_2-u_1)}{(-1+u_2-u_1)(\beta+u_2-u_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2\beta}{1+\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.135) \end{aligned}$$

となる. これは (7.132) の  $M$  の  $u_1$  と  $u_2$  を入れ替えたものとなっている.

ここまでは一般化された Jack 多項式の規格化を, モノミアル多項式で展開したときに最も順序の高い部分の係数が 1 となるように定めた. この規格化は具体的に多項式を構成するには便利だが, Nekrasov 公式と比較するにはあまり良くない. そこで今後は, 次のような Nekrasov 公式に合わせた規格化を採用する. またここからは  $a = u_1 = -u_2$  として, 一般化された Jack 多項式とその双対を,  $J_{\bar{\lambda}}(a, p_k, \bar{p}_k)$ ,  $J_{\lambda}^*(a, p_k, \bar{p}_k)$  と書く.

まずハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  とその双対  $\bar{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の形から,

$$J_{\lambda\mu}(a, p_k, \bar{p}_k) = J_{\mu\lambda}^*(a, \bar{p}_k, p_k) \quad (7.136)$$

という制限を加えることができる. さらに

$$\langle J_{\bar{\lambda}}(a, p_k, \bar{p}_k), J_{\bar{\mu}}^*(a, p_k, \bar{p}_k) \rangle_{\beta}^{\otimes 2} = \delta_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}} \delta_{\lambda^{(2)}\mu^{(2)}} \prod_{i,j=1}^2 e_{\lambda^{(i)}\mu^{(j)}}(u_i - u_j) \quad (7.137)$$

という条件によって  $J_{\lambda\mu}(a, p_k, \bar{p}_k)$  と  $J_{\mu\lambda}^*(a, p_k, \bar{p}_k)$  の規格化を定める. ここに,

$$e_{\lambda\mu}(u) = \frac{(-1)^{|\lambda|}}{\beta^{|\lambda|+|\mu|}} \prod_{(i,j) \in \lambda} (u + A_{\lambda}(i,j) + 1 + \beta L_{\mu}(i,j)) \prod_{(i,j) \in \mu} (u - A_{\mu}(i,j) - \beta L_{\lambda}(i,j) - \beta) \quad (7.138)$$



とした. 今後  $J_{\vec{\lambda}}(a, p_k, \bar{p}_k)$ ,  $J_{\vec{\lambda}}^*(a, p_k, \bar{p}_k)$  と書いたらこの規格化を適応しているものとする.

例 7.19 ([24, (91)-(92)]). 例 7.17 で計算したものを, 冪和多項式に直して上述した規格化を行うと

$$\begin{pmatrix} J_{[1],[0]}(a, p_k, \bar{p}_k) \\ J_{[0],[1]}(a, p_k, \bar{p}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{\beta} & \frac{-1+\beta}{\beta} \\ 0 & \frac{2a-1+\beta}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{[1],[0]} \\ p_{[0],[1]} \end{pmatrix} \quad (7.139)$$

となる. またこの双対は

$$\begin{pmatrix} J_{[0],[1]}^*(a, p_k, \bar{p}_k) \\ J_{[1],[0]}^*(a, p_k, \bar{p}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{\beta} & \frac{-1+\beta}{\beta} \\ 0 & \frac{-2a-1+\beta}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{[0],[1]} \\ p_{[1],[0]} \end{pmatrix} \quad (7.140)$$

となる.

注意 7.20. ここで (7.137) において, 一般化された Jack 多項式とその双対が直交している, つまり

$$\vec{\lambda} \neq \vec{\mu} \Rightarrow \langle J_{\vec{\lambda}}, J_{\vec{\mu}}^* \rangle_{\beta}^{\otimes 2} = 0 \quad (7.141)$$

となっているという仮定を用いた. 厳密には  $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta)}$  の固有値  $\Phi_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(u_1, u_2)$  は, パーティションが比べられないところで縮退していることがあるので, 直交性は証明できていない<sup>14</sup>. [24] ではこのことを議論しておらず, 直交性は暗黙のうちに仮定しているように思われる. 従って次節で使う一般化された Jack 多項式の Cauchy の公式も厳密には予想である. またこの直交性を証明するには通常の Jack 多項式と同じように, 一旦 Macdonald 多項式などの  $q$  変形した多項式に拡張し, 縮退を取り除く必要があると考えられる<sup>15</sup>.

ではこの節の最後に一般化された Jack 多項式の Selberg アベレージの公式をみる.

予想 7.21 ([24, 6 節]). パラメータ  $a$  を

$$a = -\beta n - \frac{1}{2}(u + v + 1 - \beta) \quad (7.142)$$

とパラメトライズする. このとき,  $n$  変数の一般化された Jack 多項式の Selberg アベレージは

$$\begin{aligned} \left\langle J_{\vec{\lambda}}(a, -p_k - \frac{v}{\beta}, p_k) \right\rangle &= (-1)^{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|} \tau_{\lambda}(-v - \beta n) \tau_{\lambda}(-u - v - \beta n - 1 + \beta) \\ &\quad \times \tau_{\mu}(\beta n) \tau_{\mu}(u + \beta n + 1 - \beta), \end{aligned} \quad (7.143)$$

$$\begin{aligned} \left\langle J_{\vec{\lambda}}^*(a, p_k, -p_k - \frac{v}{\beta}) \right\rangle &= (-1)^{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|} \tau_{\lambda}(\beta n) \tau_{\lambda}(u + \beta n + 1 - \beta) \\ &\quad \times \tau_{\mu}(-v - \beta n) \tau_{\mu}(-u - v - \beta n - 1 + \beta) \end{aligned} \quad (7.144)$$

となる.

<sup>14</sup> 4 次の場合にパーティションの組が  $([2], [1^2])$ ,  $([1^2], [2])$  となると初めて縮退が起きるので, 3 次以下の場合には直交性が保証されている.

<sup>15</sup> その後 [3] で与えられているベクトルを多項式に直したものが, 一般化 Jack 多項式の  $q$  変形版であり,  $q \rightarrow 1$  極限できちんと一致していることが分かった. この極限から直交性 (7.141) も保証された [27].

次節ではこの予想 7.21 を用いて AGT 予想の証明を行うが, 例えば,  $\tau$  中の引数をパラメータの変換 (7.37)-(7.39) によって変換すると,

$$-v_+ - \beta n_+ = \frac{m_1 + a}{\epsilon_2}, \quad -u_+ - v_+ - \beta n_+ - 1 + \beta = \frac{m_2 + a}{\epsilon_2}, \quad (7.145)$$

$$\beta n_+ = \frac{m_2 - a}{\epsilon_2}, \quad u_+ + \beta n_+ + 1 - \beta = \frac{m_1 - a}{\epsilon_2}, \quad (7.146)$$

$$\beta n_- = \frac{m_4 + a}{\epsilon_2}, \quad u_- + \beta n_- + 1 - \beta = \frac{m_3 + a}{\epsilon_2}, \quad (7.147)$$

$$-v_- - \beta n_- = \frac{m_3 - a}{\epsilon_2}, \quad -u_- - v_- - \beta n_- - 1 + \beta = \frac{m_4 - a}{\epsilon_2} \quad (7.148)$$

となるので, この公式はパラメータを読み替えるとほとんど Nekrasov 公式の  $Z^{\text{hyper}}$  になっている. 従って, この予想は次節の証明において非常に重要な公式となっている. しかし, この予想の証明は未だ与えられていない.

#### 7.4 一般化された Jack 多項式を用いた“ 証明 ”( 予想 7.5 の“ 証明 ” )

この節で AGT 予想の証明を終える. 7.2 節と同様に, Selberg アベレージの被積分関数を一般化された Jack 多項式で展開する. 一般化された Jack 多項式は通常の Jack 多項式よりも変数の種類が多い. よって Cauchy の公式も次のように述べ直す必要がある.

**命題 7.22.**  $u_{\vec{\lambda}}$  と  $v_{\vec{\lambda}}$  を  $|\vec{\lambda}|$  次斉次対称関数とし,  $\Lambda_F \otimes \Lambda_F$  上の  $F$ -基底を成すとする. このとき  $\{u_{\vec{\lambda}}\}$  と  $\{v_{\vec{\mu}}\}$  が互いに直交している, つまり

$$\langle u_{\vec{\lambda}}, v_{\vec{\mu}} \rangle_{q,t}^{\otimes 2} = \delta_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} c_{\vec{\lambda}}, \quad 0 \neq c_{\vec{\lambda}} \in F \quad (7.149)$$

となることと,

$$\sum_{\vec{\lambda}} \frac{u_{\vec{\lambda}}(x, w) v_{\vec{\lambda}}(y, z)}{c_{\vec{\lambda}}} = \Pi(x, y, q, t) \Pi(z, w, q, t) \quad (7.150)$$

となることは同値である.

**証明.** まず冪和対称関数の双対を

$$p_{\vec{\lambda}}^* = \frac{p_{\vec{\lambda}}}{\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\lambda}} \rangle_{q,t}^{\otimes 2}} = \frac{p_{\vec{\lambda}}}{z_{\lambda(1)}(q, t) z_{\lambda(2)}(q, t)} \quad (7.151)$$

とする. つまり

$$\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}}^* \rangle_{q,t}^{\otimes 2} = \delta_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \quad (7.152)$$

となる. また  $u_{\vec{\lambda}}$  と  $v_{\vec{\mu}}$  を冪和対称関数とその双対で展開した係数を  $a_{\vec{\lambda}\vec{\rho}}$ ,  $b_{\vec{\mu}\vec{\rho}}$  とする. つまり

$$u_{\vec{\lambda}} = \sum_{\vec{\rho}} a_{\vec{\lambda}\vec{\rho}} p_{\vec{\rho}}, \quad v_{\vec{\mu}} = \sum_{\vec{\rho}} b_{\vec{\mu}\vec{\rho}} p_{\vec{\rho}}^* \quad (7.153)$$

とする. このとき

$$\langle u_{\vec{\lambda}}, v_{\vec{\mu}} \rangle_{q,t}^{\otimes 2} = \sum_{\vec{\rho}} a_{\vec{\lambda}\vec{\rho}} b_{\vec{\mu}\vec{\rho}} \quad (7.154)$$

となるので, 条件 (7.149) は

$$\sum_{\bar{\rho}} a_{\bar{\lambda}\bar{\rho}} b_{\bar{\mu}\bar{\rho}} = \delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} c_{\bar{\lambda}} \quad (7.155)$$

となることと同値である.

一方, 条件式 (7.150) の両辺を冪和対称関数で展開すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\rho}, \bar{\sigma}} \sum_{\bar{\lambda}} \frac{a_{\bar{\lambda}\bar{\rho}} b_{\bar{\lambda}\bar{\sigma}}}{c_{\bar{\lambda}}} p_{\bar{\rho}}(x, w) p_{\bar{\sigma}}^*(y, z) &= \sum_{\bar{\rho}} \frac{1}{z_{\rho(1)}(q, t) z_{\rho(2)}(q, t)} p_{\rho(1)}(x) p_{\rho(1)}(y) p_{\rho(2)}(z) p_{\rho(2)}(w) \\ &= \sum_{\bar{\rho}} p_{\bar{\rho}}(x, w) p_{\bar{\rho}}^*(y, z) \end{aligned} \quad (7.156)$$

となるので, 条件 (7.150) は

$$\sum_{\bar{\lambda}} \frac{a_{\bar{\lambda}\bar{\rho}} b_{\bar{\lambda}\bar{\sigma}}}{c_{\bar{\lambda}}} = \delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \quad (7.157)$$

と同値である.

したがって, 正方行列  $A, B$  と対角行列  $C$  に対して  $AB = C$  と  $BA = C$  は同値だから, (7.155) と (7.157) は同値である. よって命題が証明できた.  $\square$

この公式の極限をとって, パラメータ  $q, t$  を  $\beta$  に直したものをを用いる. Selberg アベレージの被積分関数を一般化された Jack 多項式で展開すると, 規格化 (7.137) から

$$\begin{aligned} B(q) &= \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+} (1 - q x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1 - q x_i y_j)^{2\beta} \right\rangle \right\rangle_{+ -} \\ &= \left\langle \left\langle \exp \left( -\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(x) \left( p_k(y) + \frac{v_-}{\beta} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp \left( -\beta \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} p_k(y) \left( p_k(x) + \frac{v_+}{\beta} \right) \right) \right\rangle \right\rangle_{+ -} \\ &= \sum_{\bar{\lambda}} q^{|\bar{\lambda}|} \frac{\left\langle J_{\bar{\lambda}}(a, -p_k - \frac{v_+}{\beta}, p_k) \right\rangle_+ \left\langle J_{\bar{\lambda}}^*(a, \bar{p}_k, -\bar{p}_k - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_-}{\prod_{i,j=1}^2 e_{\lambda^{(i)} \lambda^{(j)}}(u_i - u_j)} \end{aligned} \quad (7.158)$$

となる. これにパラメータの変換 (7.37)-(7.39) を適応して考えれば良いのだが, 予想 7.21 の一般化された Jack 多項式の中の  $a$  のパラメトライズ (7.142) は変換 (7.37)-(7.39) とは多少ずれていることに注意する. そこで変換 (7.37) を少しずらして,

$$n_+ = \frac{\epsilon_2 a - m_2}{\epsilon_1}, \quad n_- = \frac{-\epsilon_2 a - m_4}{\epsilon_1} \quad (7.159)$$

としておくと, 予想 7.21 が使えて, (7.158) の分子の部分が

$$\left\langle J_{\bar{\lambda}}(a, -p_k - \frac{v_+}{\beta}, p_k) \right\rangle_+ \left\langle J_{\bar{\lambda}}^*(a, \bar{p}_k, -\bar{p}_k - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_- = \frac{1}{(-\epsilon_1)^{4|\bar{\lambda}|}} \prod_{k=1}^4 Z_{\bar{\lambda}}^{\text{hyper}}(m_k, \epsilon_2 a, \bar{\epsilon}) \quad (7.160)$$

となり, ハイパー多重項の因子を再現している. また (7.158) の分母にある因子は, 例えば

$$e_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}(2a) = \frac{(-1)^{|\lambda^{(1)}|}}{(-\epsilon_1)^{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|}} \prod_{(i,j) \in \lambda^{(1)}} (\epsilon_2 a + (A_{\lambda^{(1)}}(i,j) + 1)\epsilon_2 - L_{\lambda^{(2)}}(i,j)\epsilon_1) \quad (7.161)$$

$$\times \prod_{(i,j) \in \lambda^{(2)}} (\epsilon_2 a - A_{\lambda^{(2)}}(i,j)\epsilon_2 + (L_{\lambda^{(1)}}(i,j) + 1)\epsilon_1)$$

となるから

$$\frac{1}{\prod_{i,j=1}^2 e_{\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}}(u_i - u_j)} = (-\epsilon_1)^{4|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}^{\text{vect}}(\epsilon_2 a, \vec{\epsilon}) \quad (7.162)$$

となり, これはそのままベクトル多重項の因子に一致している. 最後に変換 (7.37) に戻す為に,  $\epsilon_2 a \rightarrow a$  と置き換えれば,

$$\frac{\left\langle J_{\vec{\lambda}}(a, -p_k - \frac{v_+}{\beta}, p_k) \right\rangle_+ \left\langle J_{\vec{\lambda}}^*(a, \bar{p}_k, -\bar{p}_k - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_-}{\prod_{i,j=1}^2 e_{\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}}(u_i - u_j)} = Z_{\vec{\lambda}}^{N_f=4}(\vec{m}, a, \vec{\epsilon}) \quad (7.163)$$

となりヤング図の展開の意味での Nekrasov 公式の各項にそのまま一致するようになる [24, 7 節]. 以上により AGT 予想

$$B(q) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4U(2)}(q, \vec{m}, a, \vec{\epsilon}) \quad (7.164)$$

が証明できた.

この章では, 相関関数を一旦自由場表示して考えた AGT 予想 7.5 の“証明”を行った. 元々の AGT 予想 4.1 の証明を与えるには, 自由場表示に関する予想 7.3 と合わせて考える必要がある.

また, この章で行った証明では 2 つの予想を用いた. 1 つは, 一般化された Jack 多項式の Selberg アベレージに関する予想 7.21 と, もう 1 つは一般化された Jack 多項式の直交性に関する予想 (注意 7.20) である. 特に Selberg アベレージの方は, 予想の値がほぼ Nekrasov 公式であるので, 一般化された Jack 多項式を用いた証明の核となっている. AGT 予想の証明を完全なものにする為には, 今後これらの問題を解決しなければならない.

## 8 補遺： $\tilde{H}_{\beta,N}$ と $H_{\beta,N}$ の違い

この章では第6章において、CS 模型から現れるハミルトニアン

$$\tilde{H}_{\beta,N} = \sum_{i=1}^N \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (8.1)$$

を少しずらして

$$H_{\beta,N} = \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.2)$$

を使った訳を説明する.

まず  $\tilde{H}_{\beta,N}$  から  $H_{\beta,N}$  を得るには、演算子

$$\beta N \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.3)$$

を差し引けば良かった. これは実際、 $\tilde{H}_{\beta,N}$  の第2項目との差を計算すると、

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \beta N \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)} \left\{ -2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} - \beta \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)} \left\{ \frac{3x_i x_j - x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i x_j + x_j^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} - \beta \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \left\{ \frac{2x_i x_j}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{2x_i x_j}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} - \beta \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \beta \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \beta \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (8.4)$$

となり、第一項目も

$$\sum_{i=1}^N \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.5)$$

であるから

$$\tilde{H}_{\beta,N} - \beta N \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = H_{\beta,N} \quad (8.6)$$

となる. ここで多少、天下り的に演算子 (8.3) を差し引いて  $H_{\beta}$  を定義したが、それには以下のような訳がある.

まずハミルトニアン  $\tilde{H}_{\beta,N}$  は、実はこのままでは無限変数へ拡張、つまり対称関数環上の演算子に拡張することができない. 実際、7章で行った命題 7.11 の証明と同じ手順で  $\tilde{H}_{\beta,N}$  の第2項目を無理やり冪和多項式で表示すると、変数の数  $N$  に依存する部分が露になる.

“ 命題 ” 8.1.  $N$  変数の対称多項式環上の作用素として

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = N \sum_k k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} - \sum_k k^2 p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_{k,l} (k+l) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \quad (8.7)$$

となる.

証明. 冪和多項式の母関数

$$\Pi(x, y) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n q_n \right) \quad (8.8)$$

への作用を考える. ただし変数  $\{x_i\}$  の数は有限である. つまり,  $x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0$  とおいて冪和多項式は  $p_n = x_1^n + \dots + x_N^n$  とする. まず左辺の作用は

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Pi(x, y) \\ &= \Pi(x, y) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \sum_{n \geq 1} (x_i^n - x_j^n) q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i + x_j) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} x_i^{n-1-k} x_j^k q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( x_i^{n-k} x_j^k + x_i^{n-1-k} x_j^{k+1} \right) q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (p_{n-k} p_k + p_{n-1-k} p_{k+1} - 2p_n) q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (p_{n-k} p_k + p_{n-1-k} p_{k+1}) q_n - \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} n p_n q_n \end{aligned} \quad (8.9)$$

となる. さらに, 冪和多項式を  $N$  変数に制限しているから

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (p_{n-k} p_k + p_{n-1-k} p_{k+1}) q_n &= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \left\{ \left( \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k} p_k \right) + p_0 p_n \right\} q_n \\ &= \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \left\{ \left( \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k} p_k \right) + N p_n \right\} q_n \end{aligned}$$

となる. このことと

$$\sum_k k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \Pi(x, y) = \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} p_n q_n, \quad (8.10)$$

$$\sum_k k^2 p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \Pi(x, y) = \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} n p_n q_n, \quad (8.11)$$

$$\sum_{k,l} (k+l) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \Pi(x, y) = \Pi(x, y) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k} p_k q_n \quad (8.12)$$

となることから, この“命題”が従う. □

この“命題”により  $\tilde{H}_{\beta, N}$  に潜んでいる, 変数の数に依存した部分が

$$N \sum_k k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (8.13)$$

であると分かった. しかし, “命題”8.1 は実はきちんとした主張にはなっていない. なぜなら冪和多項式は有限変数に制限すると独立ではなくなるので, 多項式環上で基底を成さなくなり, (8.7) の右辺が well-defined でなくなるからである. 例えば, 変数の数が  $N = 2$  のとき

$$p_{(3)} = \frac{3}{2} p_{(2,1)} - \frac{1}{2} p_{(1^3)} \quad (8.14)$$

という関係式が成立ち,  $N \sum_k k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}$  をこの式の両辺に作用させると, 両者の値が異なる. このように有限変数の冪和多項式を考えると様々な困難が生じる. そこで本論文では,  $N$  に依存した演算子 (8.13) の変数  $\{x_i\}$  による表示 (8.3) を,  $\tilde{H}_{\beta, N}$  から取り除き,  $H_{\beta, N}$  を用いて議論を進めた.

注意 8.2. 演算子 (8.3) を取り除いた  $H_{\beta, N}$  は, 実際に冪和対称関数による表示

$$H_\beta = \lim_{\leftarrow} H_{\beta, N} = \sum_{k, l \geq 1} \left( k l p_{k+l} \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} + \beta(k+l) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) + \sum_k (1-\beta) k^2 p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (8.15)$$

が存在するので, 無限変数へ拡張できる. またこの表示と, 自由場の代数が

$$a_{-n} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} p_n, \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{\beta}} n \frac{\partial}{\partial p_n} \quad (n \geq 1) \quad (8.16)$$

によって表現できることを用いれば,  $H_\beta$  の自由場表示  $H_\beta^{\text{boson}}$  を与える命題 6.25 の証明が得られる.

## 9 あとがき

第7章の一般化 Jack 多項式を用いた証明のアイディアは、共形ブロックを展開する際の良い性質をもった基底 (AFLT 基底と呼ばれる基底 [1, 8, 11]) に端を発する。4章の最後にも多少触れたが、従来型の標準的な基底を用いて共形ブロックを展開すると、その形は非常に複雑で綺麗な形にはならない。AFLT 基底とは AGT 予想により示唆される基底でありその基底で共形ブロックを展開すると、そのときに現れる各項が Nekrasov 公式のような綺麗な因子化を見せるように作られた基底のことである。しかし Virasoro 代数の表現空間上にはこのような良い基底は存在せず、AGT 予想を複雑化させている  $U(1)$  因子の寄与がある分、Virasoro 代数に Heisenberg 代数をテンソル積した代数の表現空間上でこの基底を取ることができる。実は本論文で説明した一般化 Jack 多項式と、自由場表示された場合の AFLT 基底は同じものであることが確認できる。共形ブロックを自由場表示すると自然に  $U(1)$  因子の逆数が表れ、AGT 予想を  $U(1)$  因子の寄与を省いて考えることができる ((7.40) 式を参照)。従って、AFLT 基底に対応する一般化された Jack 多項式を用いて Selberg アベレージの被積分関数を展開することで、ヤング図の組による展開式の各項がそのまま Nekrasov 公式の各項に一致すると考えられた。ちなみに本論文では  $SU(2)$  ゲージ理論に対応するように作られた一般化 Jack 多項式だけを説明したが、一般に  $SU(N)$  ゲージ理論に対応するように作られた一般化 Jack 多項式も定義されている。これを用いて [23] では  $N = 3$  の場合における Selberg アベレージの展開も議論している。

一般化 Jack 多項式の直交性に関する予想は、注意 7.20 の脚注にも追記したが後に [27] により解決されている。実は一般化 Macdonald 多項式は [3] により既に与えられており、([3] では一般化 Macdonald 多項式という言葉は用いられていない。) [27] では単にその極限が一般化 Jack 多項式に一致しているということを証明している。またこの一般化 Macdonald 多項式を用いて、 $q$  変形版 (5次元版) の AGT 予想でも7章の証明と類似の研究が行われている [35, 25]。  $q$  変形版では Selberg 積分は Jackson 積分という級数で表される特殊な積分に置き換わるが、その被積分関数を一般化 Macdonald 多項式で展開することによって、5次元ゲージ理論の Nekrasov 公式 (K 理論的分配関数) に一致することを確認することができる。

[24] では、一般化 Jack 多項式を固有関数に持つハミルトニアン  $\hat{H}^{(\beta)}$  の定義を、Hilbert スキームを用いたいわゆる幾何学的表現論による手法で与えている。それに対して  $q$  変形版 AGT 予想での AFLT 基底 (つまり一般化 Macdonald 多項式) は、Ding-Iohara-Miki 代数という Hopf 代数 (量子トロイダル  $\mathfrak{gl}_1$  代数や楕円 Hall 代数とも呼ばれる) の表現空間上で取ることができ、一般化 Macdonald 多項式は Ding-Iohara-Miki 代数の余積の構造を用いて構築することができる。この余積の構造が5次元ゲージ理論の分配関数の情報を知っているのは驚くべき現象である<sup>16</sup>。近年その余積の構造が数学の可積分系などの分野でも重要視されており、今後益々注目を集めることになると思われている。

<sup>16</sup>さらに [4] では Ding-Iohara-Miki 代数の表現を通して Iqbal-Kozcaz-Vafa ないし粟田-菅野のリファインドトポロジカルバーテックスを再現している。



## 謝辞

アドバイザーである粟田英資先生には、大変多くの、貴重で、熱心なご指導を賜りました。勉強不足で分からないことの多い私の質問にも根気よく付き合ってください、深く感謝しております。また、同じ少人数クラスで指導していただいた菅野浩明先生にも大変お世話になりました。2人の先生の温かいご指導のおかげで、修士課程の2年間を無事に終えることができました。また日々の学習を絶えず支援してくれた両親や、何度も何度も議論の相手となってくれた友人、その他関係者の方々にも深く感謝致します。

## 参考文献

- [1] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolskiy, On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture, *Lett. Math. Phys.* **98** 33–64 (2011).
- [2] L.F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197.
- [3] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture, *RIMS kōkyūroku* **1765** (2011) 12–32; arXiv:1106.4088v3 [math-ph].
- [4] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, Quantum algebraic approach to refined topological vertex, *JHEP* **1203** (2012) 041.
- [5] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, Excited states of Calogero-Sutherland model and singular vectors of the  $W_N$  algebra, *Nucl. Phys. B* **449** (1995) 347–374.
- [6] H. Awata and Y. Yamada, Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra, *JHEP* **1001**, 125 (2010)
- [7] H. Awata and Y. Yamada, Five-dimensional AGT Relation and the Deformed beta-ensemble, *Prog. Theor. Phys.* **124**, 227 (2010)
- [8] A. Belavin and V. Belavin, AGT conjecture and Integrable structure of Conformal field theory for  $c=1$ , *Nucl. Phys. B* **850**, 199 (2011)
- [9] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 333–380.
- [10] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, On AGT conjecture, *JHEP* **1002**, 014 (2010)

- [11] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, Integrable structure, W-symmetry and AGT relation, *JHEP* **1201**, 051 (2012).
- [12] D. Gaiotto, Asymptotically free  $\mathcal{N} = 2$  theories and irregular conformal blocks, *J. Phys. Conf. Ser.* **462**, no. 1, 012014 (2013).
- [13] L. Hadasz, Z. Jaskolski and P. Suchanek, Proving the AGT relation for  $N_f = 0, 1, 2$  antifundamentals, *JHEP* **1006**, 046 (2010)
- [14] H. Itoyama and T. Oota, Method of Generating q-Expansion Coefficients for Conformal Block and N=2 Nekrasov Function by beta-Deformed Matrix Model, *Nucl. Phys. B* **838**, 298 (2010)
- [15] V.G. Kac and A.K. Raina, Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, World Scientific (1987).
- [16] K. W. J. Kadell, An integral for the product of two Selberg-Jack polynomials, *Compositio Math.* 87 (1993) 5-43.
- [17] I.G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford University Press (1995).
- [18] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, On non-conformal limit of the AGT relations, *Phys. Lett. B* **682**, 125 (2009)
- [19] D. Maulik and A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287 [math.AG].
- [20] K. Mimachi and Y. Yamada, Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, *Commun. Math. Phys.* 174 (1995) 447-455.
- [21] K. Mimachi and Y. Yamada, Singular vectors of Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, *数理解析研究所講究録* 919 (1995) 68-78.
- [22] A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, A direct proof of AGT conjecture at  $\beta = 1$ , *JHEP* **1102**, 067 (2011)
- [23] S. Mironov, A. Morozov and Y. Zenkevich, Generalized Jack polynomials and the AGT relations for the  $SU(3)$  group, *JETP Lett.* **99** (2014) 109-113.
- [24] A. Morozov and A. Smirnov, Towards the Proof of AGT Relations with the Help of the Generalized Jack Polynomials, *Lett. Math. Phys.* **104**, no. 5, 585 (2014)
- [25] A. Morozov and Y. Zenkevich, Decomposing Nekrasov Decomposition, arXiv:1510.01896 [hep-th].
- [26] N. A. Nekrasov, Seiberg-Witten prepotential from instanton counting, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 (2004) 831-864.

- [27] Y. Ohkubo, Existence and Orthogonality of Generalized Jack Polynomials and Its  $q$ -Deformation, arXiv:1404.5401 [math-ph].
- [28] O. Schiffmann and E. Vasserot, Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on  $A_2$ , Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 118 (2013), 213342.
- [29] M. Schottenloher, A mathematical introduction to conformal field theory, 2nd edition, Springer-Verlag (2008).
- [30] Y. Tachikawa, A strange relationship between 2d CFT and 4d gauge theory, arXiv:1108.5632 [hep-th].
- [31] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Fock space representations of the Virasoro algebra-intertwining operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. 22 (1986) 259-327
- [32] N. Wyllard,  $A(N-1)$  conformal Toda field theory correlation functions from conformal  $N = 2$   $SU(N)$  quiver gauge theories, JHEP **0911**, 002 (2009).
- [33] S. Yanagida, Norms of logarithmic primaries of Virasoro algebra, Lett. Math. Phys. **98**, 133 (2011)
- [34] Al. Zamolodchikov, Conformal symmetry in two-dimensions: an explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude, Commun. Math. Phys. 96 (1984) 419-422.
- [35] Y. Zenkevich, Generalized Macdonald polynomials, spectral duality for conformal blocks and AGT coorespondence in five dimesions, JHEP **1505** (2015) 131.
- [36] 栗田英資, 頂点作用素の物理, 数理物理への誘い 6, 11-36, 遊星社.
- [37] 伊藤克司, 共形場理論, サイエンス社 (2011).
- [38] 白石潤一, 量子可積分系入門, サイエンス社 (2003).
- [39] 瀧雅人, Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想とその発展, 素粒子論研究・電子版 Vol 11 (2011) No 3.
- [40] 山田泰彦, 共形場理論入門, 培風館 (2006).
- [41] 日本数学会編集, 岩波 数学辞典 第4版, 岩波書店 (2007).