

弦の場の理論における厳密解と
タキオン凝縮

(Exact Solutions and Tachyon Condensation
in String Field Theory)

平成 15 年度

瀬々将吏
(Syoji Zeze)

Abstract

In recent years, the physics of unstable D-branes is extensively investigated as non-perturbative phenomena in string theory. Since string theory (SFT) is defined perturbatively, we need an non-perturbative formulation of string theory. String field theory is one of such formulations of string theory.

In this thesis, we explore the physics of unstable D-branes using exact solutions in Chern-Simons SFT (CSFT), called “universal solutions”. These solutions well describes the nature of unstable D-branes in a geometrical way.

First, we expand CSFT around universal solutions, and gauge fix it using BRST procedure. On the singularity of the moduli space of solutions, we find that physical states have ghost number 0 or -1 , therefore they cannot contribute physical scattering amplitudes. This result implies that open strings disappear with unstable D-branes.

Next, we derive closed string scattering amplitude emitted from D-branes, using gauge invariant closed string operators in CSFT. We can calculate this amplitude with no approximations, since we find the conformal map from flat open string world sheet (ρ -plane) to upper half complex plane (z -plane).

These results show that CSFT and universal solutions correctly describe the dynamics of unstable D-branes.

目次

謝辞	6
第 1 章 序論	9
第 2 章 弦の場の理論	13
2.1 Chern-Simons 型弦の場の理論 (CSFT)	13
2.2 CSFT と非可換代数	14
2.3 CSFT のゲージ固定	17
第 3 章 弦の場の理論の厳密解	19
3.1 ピュアゲージ解	19
3.2 ユニバーサル解	21
3.3 ユニバーサル解のまわりで展開された理論	24
3.4 高橋-谷本解	25
3.5 場の変換の特異性	26
第 4 章 古典解のまわりで展開された理論におけるゲージ固定と物理的状態	29
4.1 ゲージ固定	29
4.2 ピュアゲージ解のまわりの理論のスペクトル	30
4.3 散乱振幅の同等性	36
4.4 非自明解のまわりで展開された理論	38
4.5 no open string theorem	39
第 5 章 開弦の場の理論における閉弦	43
5.1 タキオン凝縮と閉弦	43
5.2 ゲージ不変な閉弦演算子	44
5.3 閉弦オペレーターの 2 点相関関数	46
第 6 章 Quadratic differentials と世界面の幾何学	55
6.1 Quadratic Differentials	55
6.2 プロパゲーター QD	58
第 7 章 結論	63
付録 A コンフォーマル変換の作用	67
A.1 $v(w) \rightarrow f(w)$	67

A.2	$f(w) \rightarrow v(w)$	69
付録 B	ツイスト CFT とレベル k シフト	71
B.1	ツイスト CFT	71
B.2	レベル k シフト	73
B.3	ツイストとレベル k シフトの関係	73
付録 C	ゲージ不変な閉弦演算子の性質	75
C.1	線形ゲージ不変性	75
C.2	非線型ゲージ不変性	75
C.3	古典解のまわりの理論に対するゲージ不変性	76
C.4	reality	76
参考文献		78
参考文献		79

謝辞

指導教員の糸山浩司先生には、様々な議論に応じてくださり、この研究のきっかけを与えてくださいましたことを感謝します。また、奈良女子大学の高橋智彦先生には、本論文の内容に関して実質的な指導をしていただきました。先生との議論と計算を重ねることにより、重要な結果を論文として形に残すことができたことに心から感謝します。大阪市立大学 数物系専攻の教員・学生のみなさんからは、同僚として様々なサポートをしていただきました。最後に、弦理論の勉強の初期の段階において、長年指導してくださった内藤清一先生に感謝します。

第 1 章

序論

超弦理論 (Superstring theory) の性質を理解することは、現代の理論物理学における重要な課題である。なぜなら、この理論は、量子重力理論の有力候補とである一方、素粒子の相互作用の起原をも説明する「万物の理論」(Theory of Everything, TOE) であると考えられているからである。われわれがこの理論を完成させれば、「なぜわれわれの世界がこのようになっているのか」という問—つまり、なぜわれわれは 4 次元アインシュタイン時空に住み、なぜ 3 世代のクォークとレプトンが存在し、なぜ $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ相互作用が存在するのかという問—toに答えることができるはずである。

しかしながら、超弦理論の標準的な理論的枠組—共形場の理論—は摂動論的な弦理論の記述であり、特定の真空のまわりの「揺らぎ」を記述することしかできない。冒頭のような問に答えるためには、超弦理論の非摂動論的性質を明らかにし、真空の構造を知る必要がある。

そのような非摂動論的性質が顕著に現れる現象のひとつに、不安定 D-brane とタキオン凝縮の物理がある。本論文の目標は、この系の古典的真空の性質を「弦の場の理論」を用いて理解することである。そこで、まず、不安定 D-brane の研究において、弦の場の理論が登場した経緯を述べることにする。

1990 年代中期以降、超弦理論の発展において D-brane が重要な役割を果たした。Dp-brane は時空中に存在する p 次元の部分多様体であり、開弦の端点が張り付くことができ(図 1.1)、弦理論の「ソリトン解」として理解することができる。

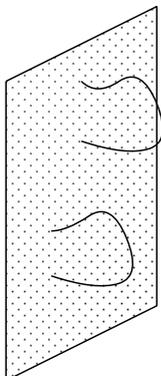


図 1.1 D-brane

D-brane に関する初期の研究は、部分的に時空の超対称性を保つ BPS D-brane を対象として行われた。BPS D-brane は超対称性のために安定であり、超対称代数で特徴づけられることから、超弦理論のさまざまな真空の間を調べる際には有用である。しかしながら、BPS D-brane は、その安定性ゆえに D-brane の生成・消滅などのダイナミクスを論じる目的には適さない。

一方、弦理論には Non-BPS D-brane が多数存在する。IIA (IIB) 型理論における D- $(2p+1)$ brane (D- $2p$ brane) や brane-反 brane 系、ボゾンの開弦理論における D-brane などがある。これらの D-brane は特別な事情がないかぎり不安定であり、その不安定性のために、brane 上にタキオンモードが現れる。1998 年ごろから、Ashoke Sen はそのような非 BPS D-brane 系を精力的に研究し、次のような予想を立てた：

Sen 予想

予想 1 タキオン場が安定な真空に凝縮すると、不安定 D-brane は消滅する。タキオン凝縮が起こった後の物理的自由度は閉弦のみである。

予想 2 安定な真空に対応するポテンシャルの深さは、不安定 D-brane の張力と一致する。

予想 3 元の不安定 D-brane より低い次元の D-brane は、もとの D-brane 上の位相欠陥として存在する。

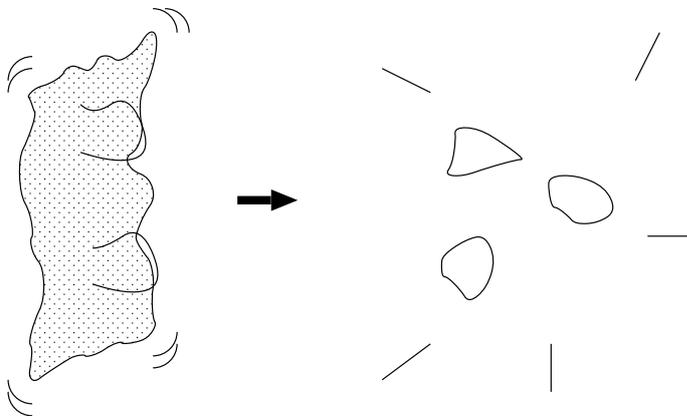


図 1.2 不安定 D-brane の崩壊

特に、予想 1、予想 2 は、不安定 D-brane と開弦が「運命を共にする」—すなわち、開弦が D-brane の揺らぎである—ことを示している。

Sen 予想を検証するには、D-brane 上のタキオン場のポテンシャルを知る必要がある。このポテンシャルは摂動的弦理論からは直接得ることができないので、非摂動的手法が必要である。そのような手法にはいくつかの種類が存在するが、本論文で扱うものは Witten の Chern-Simons 型弦の場の理論 (CSFT) ^{*1}[1] である。この理論は、26 次元のボゾンの弦を座標とし、その生成・消滅を記述する「場の理論」である。

Sen と Zwiebach は、CSFT を用いてタキオン場のポテンシャルと安定な真空解 \mathcal{T} を

^{*1} CSFT は Cubic SFT の略でもある。本論文では呼び名を“CSFT”で統一する。

求めた [2]. *2 この解はローレンツ不変で、かつ時空の座標（弦の重心座標）に依存しない。したがって、CSFT の作用 S_{CSFT} にこの解を代入したものがエネルギー（の逆符号のもの）を表す。Sen 予想 2 は、このエネルギーが D-25 brane の張力 T_{25} と等しいこと—すなわち、

$$S_{\text{CSFT}}[\mathcal{T}] = -T_{25} \quad (1.1)$$

が成り立つことを意味する*3。

彼らは、 \mathcal{T} に含まれる無限個の振動モードを有限個で打ち切る「レベル切断」近似 [3] を用いて $S_{\text{CFST}}[\mathcal{T}]$ を計算した。レベル n の近似解 \mathcal{T}_n に対して、期待される値と近似値との誤差を

$$\epsilon(n) = \left| \frac{T_{25} - S_{\text{CFST}}[\mathcal{T}_n]}{T_{25}} \right| \quad (1.2)$$

で定義すると、彼らが得た結果は $\epsilon(4) = \mathcal{O}(10^{-2})$ と表される。真の解 \mathcal{T} のレベルが無限大であることを考えると、レベル 4 でのこの結果は優れたものであると言ってよい。その後の研究によりレベルが上げられ、 $\epsilon(10) = \mathcal{O}(10^{-3})$ [4]、 $\epsilon(18) = \mathcal{O}(10^{-4})$ [5] 等の結果が得られた。これらの結果は Sen 予想の正しさを裏付けている。

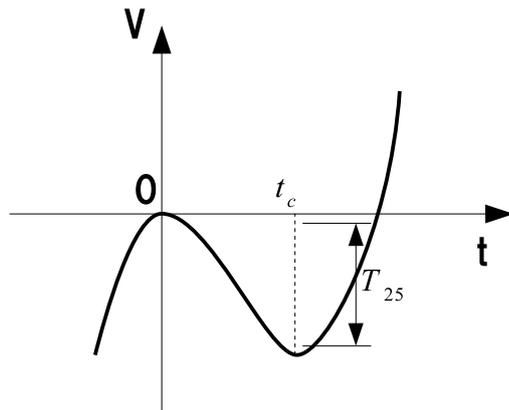


図 1.3 タキオン場のポテンシャル : $t = 0$ は不安定 D-brane に対応する真空を表す。タキオンの場が安定な真空 $t = t_c$ に期待値をとることをタキオン凝縮と呼ぶ。2 つの真空でのポテンシャルの値の差は T_{25} に等しい。

*2 それ以前に論文 [3] において同じ計算が行われていたが、この論文が書かれた当時、D-brane はまだ発見されていなかった。

*3 厳密には D-brane の体積で割った量を考える。

しかしながら，レベル切断の方法には以下のような欠点がある：

- レベル切断近似がなぜうまくいくのか，その根拠が明らかでない．通常の摂動論における結合定数のような微小パラメーターが理論に存在しないことがその原因である．従って，レベルを上げていくにつれ誤差 $\epsilon(n)$ が大きくなるという可能性を否定できない．
- CSFT の代数的性質が議論できない．Sen 予想 1 によれば，タキオン凝縮後は開弦がいなくなり，閉弦のみの世界になる．その様子はタキオン凝縮後の作用で記述されるが，この理論もゲージ不変な CSFT として意味を持つことが知られている．CSFT の代数は無限次元であるから，レベル切断解ではこの理論の代数的性質を調べることは難しい．
- 解の幾何学的意味がわからない．特に，世界面のコンフォーマル対称性は無限次元だから，レベル切断解ではせいぜいその一部分しか理解できない．

これらの欠点の唯一の解決策は，理論の厳密解を求めることである．本論文では，古典的 CSFT の厳密解であるユニバーサル解 [6] を用いて，タキオン凝縮後の理論の性質と閉弦の物理を調べる．

ユニバーサル解は，弦の生成する世界面の形状を記述する関数 $h(w)$ を与えることにより決定される．解のモジュライ空間の特異点においては，この世界面は閉じたリーマン面—すなわち，閉弦の世界面—になる．このときユニバーサル解は非自明な解になり，タキオン凝縮における安定な真空になると考えられている．

以下に本論文の構成を述べる．第 2 章では LPP 形式により CSFT を定義し，運動方程式，ゲージ対称性などの代数的性質を述べる．第 3 章では CSFT の古典解である「ユニバーサル解」を定義する．その最も簡単な例として「高橋–谷本解」と呼ばれる解のモジュライ空間の性質を調べ，非自明な解になる場合があることを示す．第 4 章では高橋–谷本解のまわりで展開された理論を Siegel ゲージに固定し，物理的状態を求める．特に，非自明解の場合には開弦が物理的状態から消えることを示す．第 5 章では CSFT と閉弦の関係について調べる．不安定 D-brane 上に閉弦演算子を導入し，その期待値をとることにより閉弦の 2 点散乱振幅を求める．第 6 章では，quadratic differential を用いて弦の世界面を記述する方法を紹介する．この手法を用いることにより，第 4 章及び第 5 章で得られた結果が効率的に理解できる．

第 4 章と第 5 章は，それぞれ奈良女子大学の高橋智彦氏との共著論文 [7], [8] に基づく内容である．

第 2 章

弦の場の理論

2.1 Chern-Simons 型弦の場の理論 (CSFT)

開弦の場の理論にはいくつかの種類が存在するが [9], 本論文で扱うものは, Witten による 3 弦相互作用を持つ開弦の理論 (CSFT) [1] である. 本節では A. Leclair, M. Peskin, C. R. Preitscheopf らによる「LPP 形式」[10] を用いて CSFT を定義する. この形式は開弦の共形対称性があらわな形で定式化されており, 弦の世界面に関係のある現象を扱う場合には非常に有用である.

弦の場の理論における力学変数は開弦場 Ψ である. この場は開弦の座標 (と世界面上の共形ゴースト) を座標に持つ汎関数であるが, LPP 形式においては, この汎関数は CFT の状態和で表される:

$$\Psi = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} |\alpha\rangle. \quad (2.1)$$

ψ_r は第 2 量子化されるべき弦の場のオペレーター, $|\alpha_r\rangle$ は開弦を記述する共形場理論 ($c = 26$ matter CFT $\oplus c = -26$ ghost CFT) における状態空間の基底である. この状態と上半平面上の共形場 $\alpha_r(w)$ との対応は,

$$|\alpha_r\rangle = \alpha_r(0) |0\rangle \quad (2.2)$$

と表される. $|0\rangle$ は $SL(2, \mathbb{C})$ 真空である.

ウエイト h のプライマリー場 $\phi(w)$ には, 共形変換 $f(w)$ が次のように作用する:

$$f[\phi(w)] = \left(\frac{df}{dw} \right)^h \phi(f(w)). \quad (2.3)$$

ウエイト h のプライマリー場は, リーマン面上の holomorphic h -form (もしくは h -vector) の成分だから, 式 (2.3) の意味は次のように書くとわかりやすい.

$$f[\phi(w)](dw)^h = \phi(z)(dz)^h. \quad (2.4)$$

ただし $z = f(w)$ とおいた. また, 非プライマリー場への f の作用はプライマリー場への作用から導ける.

これらの定義を用いて, CSFT の作用は, 上半平面上の CFT における期待値

$$-g_o^2 S[\Psi] = \frac{1}{2} \langle I[\Psi] Q \Psi \rangle_{\text{UHP}} + \frac{1}{3} \left\langle f^{(1)}[\Psi] f^{(2)}[\Psi] f^{(3)}[\Psi] \right\rangle_{\text{UHP}} \quad (2.5)$$

で定義される．ここで $I(w) = -1/w$, Q は BRST 電荷, g_o は開弦の結合定数であり, $f^{(r)}(w)$ ($r = 1, 2, 3$) は単位円の上半分から上半平面のある領域への写像である．すなわち, $U = \{w \mid |w| \leq 1, \Im w \geq 0\}$ とし, V_r ($r = 1, 2, 3$) を上半閉面内のある領域としたとき, $f^{(r)} : U \rightarrow V_r$ は次式で与えられる．

$$f^{(r)}(w) = h^{-1} \circ g^{(r)}(w), \quad (2.6)$$

$$h(w) = \frac{1 - iw}{1 + iw}, \quad (2.7)$$

$$g^{(r)}(w) = e^{\frac{2\pi(1-r)i}{3}} h(w)^{\frac{2}{3}} \quad (2.8)$$

で与えられる．(図 2.1, 図 2.2 参照)

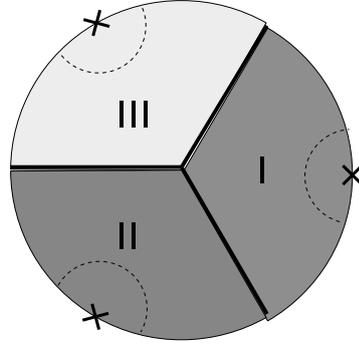


図 2.1 単位円内の 3 弦相互作用 : I, II, III はそれぞれ g_1, g_2, g_3 により U が写像される領域を表す．

作用 (2.5) は図 2.2 の上半平面の CFT における期待値として表されている．さらに, “gluing theorem” [10] を用いれば, 摂動論的散乱振幅もこのような期待値として計算できる．

2.2 CSFT と非可換代数

CSFT の作用は式 (2.5) を用いて定義できるが, 理論の代数的性質を調べるには Witten による非可換積表示 [1] が便利である．

まず, LPP 表示において, 弦の N 点相互作用項を考える．このとき用いられる写像は単位円を N 等分するものである :

$$\begin{aligned} f_N^{(r)}(w) &= h^{-1} \circ g_N^{(r)}(w), \\ g_N^{(r)}(w) &= e^{\frac{2\pi(1-r)i}{N}} h(w)^{\frac{2}{N}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

期待値

$$\left\langle f_N^{(1)}[\Psi_1] \cdots f_N^{(N)}[\Psi_N] \right\rangle_{\text{UHP}} \quad (2.10)$$

は, N ケの弦場 Ψ_1, \dots, Ψ_N を与えたときに 1 つの複素数を与える．この弦場に関する

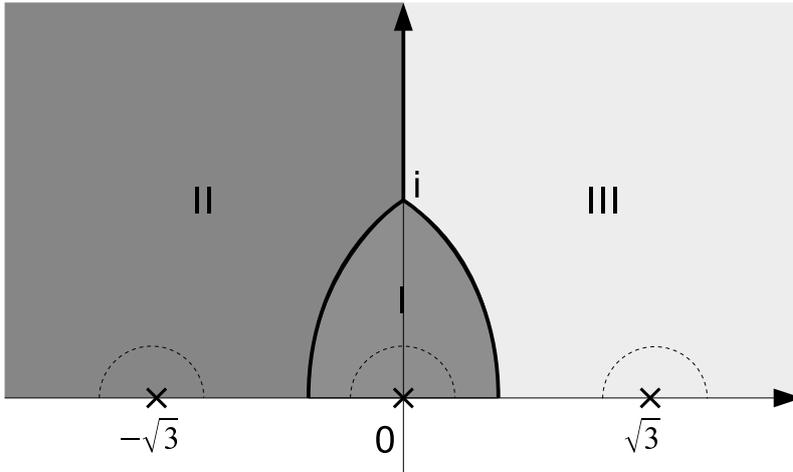


図 2.2 上半平面内の 3 弦相互作用 : 図 2.1 を h^{-1} で上半平面に写像したもの. $z = i$ は 3 つの弦の中心に対応する. それぞれの弦の U 平面での原点は, $z = 0, \pm\sqrt{3}$ に移される.

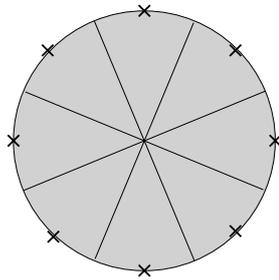


図 2.3 $g_8^{(r)}(w)$ による単位円

N 次形式を, 非可換積 $*$ により生成される状態の“積分”とみなす; すなわち

$$\langle f_N^{(1)}[\Psi_1] \cdots f_N^{(N)}[\Psi_N] \rangle_{\text{UHP}} = \int \Psi_1 * \Psi_2 \cdots * \Psi_N \quad (2.11)$$

で弦場の積 $*$ と積分を定義する. この定義を用いれば, CSFT 作用 (2.5) は次の形に書き直せる.

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g_o^2} \int \left(\frac{1}{2} \Psi * Q\Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right). \quad (2.12)$$

この定義のもとで、任意の弦場 A, B, C について、以下の等式が成り立つ。

$$A * B \neq B * A, \quad (2.13)$$

$$A * (B * C) = (A * B) * C, \quad (2.14)$$

$$Q(A * B) = QA * B + (-1)^A A * QB, \quad (2.15)$$

$$Q^2 A = 0, \quad (2.16)$$

$$\int A * B * C = \int C * A * B, \quad (2.17)$$

$$\int QA = 0. \quad (2.18)$$

これらの定義は、 $*$ 積が結合則を保つ非可換積であり、さらに弦場の空間に「外微分」 Q と積分が作用することを示している。 Ψ がグラスマン奇な場とすれば、作用(2.12)から得られる運動方程式は、式(2.13)~(2.17)を用いて

$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0 \quad (2.19)$$

となる。

作用(2.12)はスカラー場の作用と似た形をしているが、非可換積と演算子 Q の存在により局所的ゲージ対称性をもつ。有限ゲージ変換は

$$\Psi_g = U_g^{-1} * QU_g + U_g^{-1} * \Psi * U_g, \quad (2.20)$$

$$U_g = e^g|_* = 1 + g + \frac{1}{2!}g * g + \dots$$

で与えられる。式(2.20)と(2.12)より、作用は

$$S[\Psi_g] = S[\Psi] + \frac{1}{6g_0^2} \int (U_g^{-1} * QU_g) * (U_g^{-1} * QU_g) * (U_g^{-1} * QU_g) \quad (2.21)$$

と変換し、第2項を除けばゲージ不変である。式(2.20)を g について展開すれば、無限小ゲージ変換と作用の不変性

$$\delta\Psi = Qg + \Psi * g - g * \Psi, \quad (2.22)$$

$$\delta S = 0 \quad (2.23)$$

が得られる。

さらに、運動方程式(2.19)の解 Ψ_0 のまわりで作用を展開すると、

$$S[\Psi + \Psi_0] = -\frac{1}{g_0^2} \int \left(\frac{1}{2} \Psi * Q'\Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right) + S[\Psi_0], \quad (2.24)$$

$$Q'\Psi = Q\Psi + \Psi_0 * \Psi - (-1)^\Psi \Psi * \Psi_0 \quad (2.25)$$

となり、作用は Q' と定数項 $S[\Psi_0]$ を除いてもとの理論と同じ形になる。この新しいオペレーター Q' は Q と同じ性質を持つだろうか。式(2.19)を使えば、ただちに

$$Q'(A * B) = Q'A * B + (-1)^A A * Q'B, \quad (2.26)$$

$$Q^2 A = 0, \quad (2.27)$$

$$\int Q'A = 0 \quad (2.28)$$

が示せるので、新しいオペレーター Q' は Q と同じ代数を満たすことがわかる。

最後に、この節で述べた CSFT の代数的性質は、Chern–Simons ゲージ理論

$$S_{CS}[A] = \frac{4\pi}{k} \int_M \text{Tr} \left(\frac{1}{2} A \wedge dA + \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (2.29)$$

の代数のものと、対応

$$\wedge \rightarrow *, \quad d \rightarrow Q, \quad \text{Tr} \int_M \rightarrow \int$$

により同じになっていることを述べておく。

2.3 CSFT のゲージ固定

CSFT は式 (2.23) で表される局所的対称性を持つゲージ理論であるから、量子論へ移行するにはゲージ固定が必要である。ゲージ固定を考える前に、まず弦場 Ψ に対するゴースト数の割り当てを行う。まず CFT 状態に対して、 c_n 、 b_n のゴースト数をそれぞれ 1、 -1 とする。この割り当てにより、CFT の状態空間は

$$|\alpha\rangle = \bigoplus_r |\alpha, r\rangle \quad (2.30)$$

とゴースト数 r に関して直和分解される。次に、弦場 Ψ 全体のゴースト数が 1 になるように弦場の成分 ψ のゴースト数を定める。すなわち；

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \sum_r \psi_{\alpha}^r |\alpha, r\rangle, \quad N_{gh}(\psi_{\alpha}^r) = 1 - r \quad (2.31)$$

と定義する。

よく知られているように、開弦理論における摂動計算で用いられるのはゴースト数 1 の状態空間だけである。このことを考慮して古典的作用を導入する。

定義 2.1 (古典的 CSFT) Ψ をゴースト数 1 の CFT 状態から作られる弦場、すなわち

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^0 |\alpha, 1\rangle \quad (2.32)$$

としたとき、古典的 CSFT の作用を

$$-g_o^2 S_{cl}[\Psi] = \frac{1}{2} \langle I[\Psi] Q \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle f^{(1)}[\Psi] f^{(2)}[\Psi] f^{(3)}[\Psi] \rangle \quad (2.33)$$

と定義する。

通常、古典的 CSFT のゲージ固定には、弦場に対して条件 $b_0 \Psi = 0$ を課す Siegel ゲージ [45] が用いられる。この拘束条件を課して CSFT を BRST 量子化すると、補助場に対しても次々と拘束条件が課されていき、無限個のゴースト場^{*1}、補助場が必要であることが知られている。このようなゲージ固定の過程を系統的に記述する方法が BV 形式 [11] であり、CSFT のゲージ固定もこの方法を用いて実行することができる。CSFT においてはその結果は極めて簡潔にまとめられる。

^{*1} この「ゴースト場」は世界面上のゴースト座標 $b(z)$ 、 $c(z)$ とはまったく別のものである。

定義 2.2 (Siegel ゲージに固定された CSFT) 弦場 Ψ は Siegel ゲージ条件 $b_0\Psi = 0$ を満たし, 全てのゴースト数を持つ CFT 状態で張られる場とする. この場に対して, ゲージ固定された CSFT 作用は

$$-g_o^2 S_{gf}[\Psi] = \frac{1}{2} \langle I[\Psi] Q \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle f^{(1)}[\Psi] f^{(2)}[\Psi] f^{(3)}[\Psi] \rangle \quad (2.34)$$

で与えられる.

上の定義は, Siegel ゲージ固定した作用は, ゲージ固定の際に出現するゴースト場や補助場を弦場の中に取り入れれば, 古典的作用と同じ形になることを示している.

通常の場合の理論の場合と同じく, 局所的ゲージ対称性は BRST 対称性に置き換わっているはずである. 実際, 作用 (2.34) は BRST 変換

$$\delta_B \Psi = \epsilon (Q\Psi + \Psi * \Psi) \quad (2.35)$$

で不変である.

第 3 章

弦の場の理論の厳密解

本章では，CSFT の形式的なピュアゲージ解のうち，CFT の振動子による表示が容易である「左積分型」の解をとりあげる．この解は非可換な $*$ 積の代数を CFT のオペレーター積に書き換えることにより得られる．この解の一例として，本論文の主役となる「ユニバーサル解」を導入する．

3.1 ピュアゲージ解

2.1 節で述べたとおり，CSFT の代数的構造は Chern-Simons 理論のものと同様である．Chern-Simons 理論の古典解は平坦な曲率をもつものだけであり，局所的にはピュアゲージの形に書けるので，CSFT の古典解についても同じことが言えるはずである．実際， G をゴースト数 0 の弦場とすれば，

$$\Psi_0 = e^{-G} * Q e^G \quad (3.1)$$

の形の解が，運動方程式 (2.19) を満たすことが確かめられる．式 (3.1) が解になることを示すには， Q の分配法則 (2.15) と，恒等式

$$e^{-G} * e^G = \mathcal{I}, \quad (3.2)$$

$$\Psi * \mathcal{I} = \Psi \quad \text{for } \forall \Psi, \quad (3.3)$$

$$Q\mathcal{I} = 0 \quad (3.4)$$

を使って，Chern-Simons 理論と全く同様な計算を行えばよい． \mathcal{I} は identity state [14, 15, 16] と呼ばれる状態で， $*$ 積の単位元を表している．本論文では開弦を中点でおりたたむ写像

$$f_{\mathcal{I}}(w) = \frac{2w}{1-w^2} \quad (3.5)$$

を用いて，“surface state” として identity state を定義する [50]．すなわち， $|\phi\rangle = \phi(0)|0\rangle$ で与えられる状態に対して，

$$\langle \mathcal{I} | \phi \rangle = \langle f_{\mathcal{I}}[\phi(0)] \rangle_{\text{UHP}} \quad (3.6)$$

が成り立つ状態として \mathcal{I} を定義する．

実は，式 (3.3) は全ての状態に対して成り立たないことが知られている [17, 15, 16]．この事実は CSFT の非可換代数のアノマリーとして解釈される．ここでは，このことを気にせずに \mathcal{I} が単位元として振る舞うものとし，式 (3.2)~(3.4) が成り立つような状態のみを扱っていると了解して議論を進める．

解 (3.1) は無限個の * 積を含んでいるので, Ψ_0 のフォック表示を求めることは一般的に困難である. ところが, G が「左積分型」 [12, 13]

$$G = \left(\int_{C_L} dw K(w) \right) \mathcal{I} = K_L \mathcal{I} \quad (3.7)$$

の場合には, 具体的に Ψ_0 のフォック表示が求められる. 積分路 C_L は開弦の左半分にわたる積分で, 図 3.1 で与えられる. $K(w)$ はゴースト数 0, ウェイト 1 のカレントであり, CSFT の N 点相互作用演算子 $\langle V_N |$ に対して,

$$\langle V_N | \left(K_L^{(r+1)} + K_R^{(r)} \right) = c, \quad (r = 1, \dots, N) \quad (3.8)$$

を満たすものとする*1. c は一般にカレントのアノマリーによって決まる定数である. (r) 等の添字は, 演算子が r 番目の弦に作用することを示す.

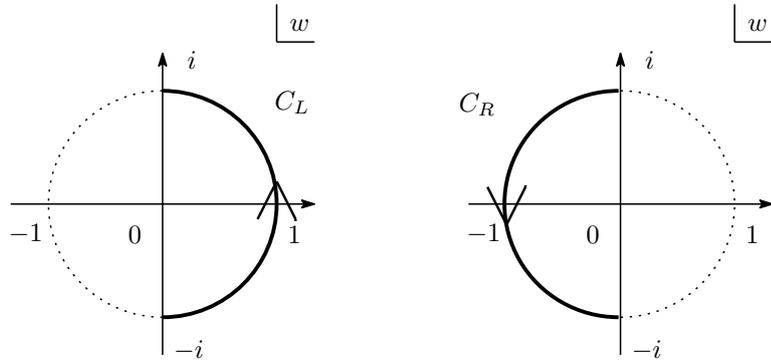


図 3.1 積分路 C_L, C_R

以上の仮定のもとで, ピュアゲージ解

$$\Psi_0 = e^{-K_L \mathcal{I}} * Q e^{K_L \mathcal{I}} \quad (3.9)$$

のフォック表示を計算する. まず, 式 (3.8) で $N = 1$ とおけば,

$$(K_L + K_R) \mathcal{I} = c \quad (3.10)$$

である. 式 (3.10) と式 (3.8) を用いて式 (3.9) を計算すれば,

$$\Psi_0 = (e^{-K_L} Q e^{K_L}) |\mathcal{I}\rangle \quad (3.11)$$

を得る. 式 (3.11) の表式において,

$$e^{K_L} = 1 + K_L + \frac{1}{2!} K_L^2 + \dots \quad (3.12)$$

である. したがって, 式 (3.11) にもはや * 積は含まれておらず, 振動子表示が可能である. \mathcal{I} の Virasoro 生成子による表示は既に知られている [15].

$$|\mathcal{I}\rangle = \exp \left(L_{-2} - \frac{1}{2} L_{-4} + \dots \right) |0\rangle. \quad (3.13)$$

*1 $\langle V_1 | = \langle \mathcal{I} |$ とする.

この式と,

$$e^{-K_L} Q e^{K_L} = Q - [K_L, Q] + \frac{1}{2!} [K_L, [K_L, Q]] + \dots \quad (3.14)$$

を式 (3.11) に適用すれば, この解のフォック表示を得ることができる.

3.2 ユニバーサル解

本節では, 論文 [6] によって与えられたユニバーサル解の定義を与える. この解は, 関数 $h(w)$ を与えることにより決まる「形式的」ピュアゲージ解である.

ユニバーサル解は, 前節の「左積分型」の解のカレントとして, ゴースト数カレントを用いたものである. 式 (3.9) の K_L として

$$K_L = -q_L(h) = \int_{C_L} dw h(w) J_{gh}(w) \quad (3.15)$$

を用いた左積分解

$$\Psi_0 = e^{q_L(h)\mathcal{I}} * Q e^{-q_L(h)\mathcal{I}} \quad (3.16)$$

を考える. ここで, J_{gh} はゴースト数カレント

$$J_{gh}(w) =: c(w)b(w) : \quad (3.17)$$

であり, $h(w)$ は単位円領域 $U = \{w \mid |w| \leq 1\}$ 上で定義された関数で, 次の性質を満たす.

$$h\left(-\frac{1}{w}\right) = h(w) \quad (3.18)$$

$$h(\pm i) = 0 \quad (3.19)$$

式 (3.16) のフォック表示を求めるために, 以下では, $q_L(h)$, $q_R(h)$ が式 (3.8) を満たすことを確かめる.

まず, 式 (3.8) において $N \geq 2$ の場合を考える. J_{gh} の変換則が

$$f[J_{gh}(w)] = \left(\frac{df}{dw}\right) J_{gh}(f(w)) - \frac{3}{2} \frac{f''(w)}{f'(w)} \quad (3.20)$$

で与えられることと, N 点頂点における局所座標の関係式が

$$w_{r+1} = -\frac{1}{w_r}, \text{ for } w_r \in C_R, w_{r+1} \in C_L \quad (3.21)$$

で与えられること, および (3.18) を用いれば,

$$\langle V_N | \left(q_L^{(r+1)}(h) + q_R^{(r)}(h) \right) = \kappa, \quad (3.22)$$

$$\kappa = 3 \int_{C_L} dw \frac{h(w)}{w} \quad (3.23)$$

が示せる. 次に, $N = 1$ の場合の関係式 (3.10) を考えてみる. 単位円から大局的な座標への写像が $f_{\mathcal{I}}(w) = 2w/(1-w^2)$ であることを使えば,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I} | (q_L(h) + q_R(h)) \dots &= \langle \mathcal{I} | \oint_C dw h(w) J_{gh}(w) \dots \\ &= \left\langle \oint_C dw h(w) \left(f'_{\mathcal{I}}(w) J_{gh}(w) - \frac{3}{2} \frac{f''_{\mathcal{I}}}{f'_{\mathcal{I}}} \right) \dots \right. \\ &= \left\langle -\frac{3}{2} \oint_C dw h(w) \frac{f''_{\mathcal{I}}}{f'_{\mathcal{I}}} \dots \right. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで, $C = C_L + C_R$ である. 式 (3.24) の 2 行目では, 式 (3.19) から, カレントの無限速での積分の寄与が消えることを用いた. さらに, 式 (3.24) の最後の行において, 積分路を C_L と C_R に分割すれば,

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \oint_C dwh(w) \frac{f''_{\mathcal{I}}}{f'_{\mathcal{I}}} &= -\frac{3}{2} \int_{C_L} dwh(w) \frac{f''_{\mathcal{I}}}{f'_{\mathcal{I}}} - \frac{3}{2} \int_{C_R} dwh(w) \frac{f''_{\mathcal{I}}}{f'_{\mathcal{I}}} \\ &= -\frac{3}{2} \int_{C_L} dwh(w) \left(\frac{f''_{\mathcal{I}}(w)}{f'_{\mathcal{I}}(w)} - \frac{1}{w^2} \frac{f''_{\mathcal{I}}(-\frac{1}{w})}{f'_{\mathcal{I}}(-\frac{1}{w})} \right) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

となり, 結局

$$\langle \mathcal{I} | (q_L(h) + q_R(h)) = \kappa \quad (3.25)$$

を得る. 式 (3.22) と式 (3.25) の結果をまとめれば, $q_L(h)$, $q_R(h)$ に関する以下の公式となる.

$$\langle V_N | \left(q_L^{(r+1)}(h) + q_R^{(r)}(h) \right) = \kappa, \quad (r = 1, \dots, N) \quad (3.26)$$

式 (3.26) を用いれば, 式 (3.16) は, 前節の式 (3.11) と同様に, * 積を含まない表示

$$\Psi_0 = \left(e^{q_L(h)} Q e^{-q_L(h)} \right) \mathcal{I} \quad (3.27)$$

に書きかえることができる.

次に, 式 (3.27) の \mathcal{I} の前にかかる部分

$$e^{q_L(h)} Q e^{-q_L(h)} \quad (3.28)$$

を計算し, フォック表示を求める.

$$\begin{aligned} Q_L(f) &= \int_{C_L} \frac{dw}{2\pi i} f(w) j_B(w), \\ C_L(g) &= \int_{C_L} \frac{dw}{2\pi i} g(w) c(w) \end{aligned}$$

と定義し, 論文 [6] で導出された関係式

$$[q_L(f), Q_L(g)] = Q_L(fg) - 2C_L(\partial f \partial g), \quad (3.29)$$

$$[q_L(f), C_L(g)] = C_L(fg), \quad (3.30)$$

$$[Q_L(f), C_L(g)] = \{Q, C_L(fg)\}, \quad (3.31)$$

$$[Q_R(f), Q_R(g)] = 2\{Q, C_R(\partial f \partial g)\} \quad (3.32)$$

を用いれば,

$$\Psi_0 = Q_L(e^h - 1) \mathcal{I} - C_L((\partial h)^2 e^h) \mathcal{I} \quad (3.33)$$

を得る.

最後に, 式 (3.33) の表式が運動方程式の解になっていることを確認しておく.

$$F(w) = e^{h(w)} - 1 \quad (3.34)$$

$$G(w) = (\partial h)^2 e^{h(w)} \quad (3.35)$$

とおくと, (3.18) から, これらの関数は

$$F\left(-\frac{1}{w}\right) = F(w), \quad (3.36)$$

$$G\left(-\frac{1}{w}\right) = w^{-4}G(w), \quad (3.37)$$

$$F(\pm i) = 0, \quad (3.38)$$

$$G(\pm i) = 0 \quad (3.39)$$

を満たす.

さらに $J_B(w)$, $c(w)$ がプライマリーカレントなので, 式 (3.22) を得たときと同様な計算をすれば, $r = 1, \dots, N$ に対して,

$$\langle V_N | \left(Q_L^{(r+1)}(F) + Q_R^{(r)}(F) \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$\langle V_N | \left(C_L^{(r+1)}(G) + C_R^{(r)}(G) \right) = 0 \quad (3.41)$$

が成り立つ.

式 (3.36)~(3.41) の保存則と, 交換関係 (3.29)~(3.32) を用いれば, 式 (3.33) に対して

$$Q\Psi_0 = \{Q, C_L(G)\}\mathcal{I}, \quad (3.42)$$

$$\Psi_0 * \Psi_0 = \{Q, C_L((\partial F)^2 + FG)\}\mathcal{I} \quad (3.43)$$

が成り立つ. 式 (3.34) と式 (3.35) を代入することにより, 上の 2 つの式の右辺は異符号であることがわかるので, 運動方程式

$$Q\Psi_0 + \Psi_0 * \Psi_0 = 0 \quad (3.44)$$

を示すことができた.

ピュアゲージ形 (3.11) の表式と表式 (3.33) は形式的に等価であるが, $h(w)$ の取り方によっては, ゲージ変換 $\exp(q_L(h))$ が well-defined なオペレーターでない場合があることが知られているが, そのような場合にも式 (3.33) は運動方程式の解として無矛盾に定義できる. そのため, 表式 (3.33) をユニバーサル解の定義として採用する. なお, この解のような

$$\mathcal{O}|\mathcal{I}\rangle \quad (3.45)$$

の形の配位に対しては, \mathcal{I} の中点アノマリーを気にする必要はなく, \mathcal{I} を * 積の単位元として計算してよいことが知られている [16]. 運動方程式を導く過程で現れるのは全てこの形をした状態だから, この定義を用いているかぎり \mathcal{I} のアノマリーを気にしなくてよい. このことから, 式 (3.33) は都合のよい定義であることがわかる.

定義 3.1 (ユニバーサル解) 単位円領域において, $h(-1/w) = h(w)$, $h(\pm i) = 0$ を満たし, 原点を中心としてローラン展開可能な関数 $h(w)$ が与えられたとき,

$$\Psi(h) = Q_L(e^h - 1)\mathcal{I} - C_L((\partial h)^2 e^h)\mathcal{I}$$

は CSFT の運動方程式の解になる. この解をユニバーサル解と呼ぶ.

3.3 ユニバーサル解のまわりで展開された理論

ここでは、前節で与えたユニバーサル解のまわりで展開された CSFT の作用を求める。前章の式 (2.25) でみたように、古典解のまわりでは BRST 電荷が

$$Q'\Psi = Q\Psi + \Psi_0 * \Psi + \Psi * \Psi_0 \quad (3.46)$$

のように変化するので、ユニバーサル解に対してこの電荷を求めればよい。

Q' を計算するために、 $C_L + C_R = C$ として、閉経路で積分されたカレント

$$Q(f) = \oint_C dw f(w) J_B(w), \quad (3.47)$$

$$C(g) = \oint_C dw g(w) c(w), \quad (3.48)$$

$$q(h) = \oint_C dw h(w) J_{gh}(w) \quad (3.49)$$

を定義する。これらの量が満たす保存則は、式 (3.40), (3.41), (3.26) を r について足しあげて得られる。

$$\langle V_N | \left(Q^{(1)}(F) + \cdots + Q^{(N)}(F) \right) = 0, \quad (3.50)$$

$$\langle V_N | \left(Q^{(1)}(G) + \cdots + Q^{(N)}(G) \right) = 0, \quad (3.51)$$

$$\langle V_N | \left(q^{(1)}(h) + \cdots + q^{(N)}(h) \right) = N\kappa. \quad (3.52)$$

ユニバーサル解 (3.33) に対して式 (3.46) を計算すれば、新しい BRST 電荷は

$$Q' = Q(e^h) - C((\partial h)^2 e^h) \quad (3.53)$$

と求まる。このオペレーターは、 $e^{h(w)}$ が原点のまわりでローラン展開可能であれば Q_n ($J_B(w)$ のローラン展開の係数) と c_n を用いて書き下すことができる。

ユニバーサル解がピユアゲージ変換であれば、新しい理論の物理的内容は元の理論と同じになるはずだから、 Q' と Q は同値変換により結ばれているはずである。式 (3.29)~(3.32) と同様にして

$$[q(f), Q(g)] = Q(fg) - 2C(\partial f \partial g), \quad (3.54)$$

$$[q(f), C(g)] = C(fg) \quad (3.55)$$

が示せる。これらの交換関係を用いれば、式 (3.53) は

$$Q' = e^{q(h)} Q e^{-q(h)} \quad (3.56)$$

と書けることがわかる。 $e^{q(h)}$ が求める同値変換である。

さらに変換 (3.56) を用いて、新しい理論の作用

$$S' = \int \left(\frac{1}{2} \Psi Q' \Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right) \quad (3.57)$$

を書きかえる。

式 (3.52) より, $q(h)$ はアノマリー項 κ があるために N 点 vertex の保存量にはならない. そこで, このアノマリー項をカレントにとりこんで, 新しい保存量

$$\begin{aligned}\tilde{q}(h) &= q(h) - \kappa \\ &= \oint dw h(w) \left(J_{gh(w)} - \frac{1}{w} \right)\end{aligned}\quad (3.58)$$

を定義すれば, 式 (3.52) の保存則は

$$\langle V_N | \left(\tilde{q}^{(1)}(h) + \cdots + \tilde{q}^{(N)}(h) \right) = 0 \quad (3.59)$$

と書くことができ, $\tilde{q}(h)$ はアノマリーを持たない保存量であることがわかる. 式 (3.59) を用いれば

$$\langle V_N | \prod_{r=1}^N e^{\tilde{q}^{(r)}(h)} = \langle V_N | \quad (3.60)$$

であり, この変換で N 点 vertex が不変であることがわかる. したがって, $\Psi = \exp(\tilde{q}(h)) \Psi'$ と場の再定義を行い, 式 (3.59) を用いると, 作用 (3.57) は

$$S' = \int \left(\frac{1}{2} \Psi' Q \Psi' + \frac{1}{3} \Psi' * \Psi' * \Psi' \right) \quad (3.61)$$

となり, 元の理論と同等であることがわかる.

以上の議論で, ユニバーサル解は形式的にピュアゲージ解であり, 解のまわりで展開した理論は元の理論と等価であることが示された. しかしながら, $h(w)$ を具体的に与えてみると, ゲージ変換 $e^{qL(h)I}$ 及び同値変換 $e^{q(h)}$ が well-defined にならない場合があることがわかる. そのような場合はユニバーサル解は非自明な配位を表しており, タキオン凝縮を表す解であることが期待される. 次節では具体的に $h(w)$ を与えて詳細な解析を行う.

3.4 高橋-谷本解

ユニバーサル解は, 前章の式 (3.34) で定義した関数 $F(w)$ (もしくは $h(w)$) を与えることにより決定される. ここでは $F(w)$ のローラン展開がどのように書けるか考えてみる. 式 (3.36) にあるように, $F(w)$ は変換 $w \rightarrow -1/w$ に対して不変な関数であり, $F(\pm i) = 0$ を満たす.

まず, 条件 $F(w) = F(-1/w)$ を満たす関数のローラン展開は以下のように書きくさせる.

$$F(w) = \sum_{n=0} F_n (w^n + (-1)^n w^{-n}). \quad (3.62)$$

次に, 式 (3.62) から, 条件 $F(\pm i) = 0$ は次のように表されることがわかる.

$$\sum_{m=0} F_{2m} (-1)^m = 0, \quad \sum_{m=0} F_{2m+1} (-1)^m = 0. \quad (3.63)$$

上の条件式から, 全ての m に対して $F_{2m+1} = 0$ を満たすような関数がとれることがわかる. そのような関数は

$$F(w) = \sum_{m=0} F_{2m} (w^{2m} + w^{-2m}), \quad F(\pm i) = 0 \quad (3.64)$$

で表される.

式 (3.64) の条件をみたすもので, 最も非自明かつ簡単なのは, $m = 1$ まで和をとった場合である. このとき, $F(w)$ はパラメーター a で表され, 次の形をとる.

$$F_a(w) = \frac{a}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)^2. \quad (3.65)$$

式 (3.65), (3.34) によって

$$e^{h_a(w)} = F_a(w) + 1 \quad (3.66)$$

が定義できる. $h_a(w)$ で与えられるユニバーサル解を「高橋-谷本解」[6] と呼ぶことにし, 以下ではこの解の性質について調べていく.

3.5 場の変換の特異性

今まで展開してきた議論によれば, 全てのユニバーサル解はピュアゲージ解として表され, 物理的内容を持たないことになってしまう. しかしながら, CSFT においてはゲージ対称性は無限次元であるから, 無限次元系に特有な特異性を持つ可能性がある. そのような場合にはユニバーサル解は物理的に非自明な解になっていることが期待される. 本節では高橋-谷本解を用いてゲージ変換の特異性を調べる.

高橋-谷本解に対応するゲージ変換の性質を調べるには, 式 (3.16) で与えられるゲージ変換オペレーター

$$\exp(q_L(h_a)I) \quad (3.67)$$

を用いてもよいが, 式 (3.56) で用いられた場の再定義オペレーター

$$\exp(q(h_a)) \quad (3.68)$$

を調べたほうがより簡単である. このオペレーターの特異性を調べるためには, 振動子に関して normal ordering を行い, 発散があるかどうかを見ればよい. 式 (3.65), (3.66) より

$$h_a(w) = \log \left(1 + \frac{a}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)^2 \right) \quad (3.69)$$

である. $a \geq -1/2$ のとき, $h_a(w)$ は単位円内の領域でローラン展開できて, その表式は

$$h_a(w) = -\log(1 - Z(a))^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} Z(a)^n \left(w^{2n} + \frac{1}{w^{2n}} \right),$$

$$Z(a) = \frac{1 + a - \sqrt{1 + 2a}}{a} \quad (3.70)$$

で与えられる [6]. $-Z(a)$ は 2 次方程式

$$x^2 + \frac{2(1+a)}{a}x + 1 = 0$$

の 1 つの解であり,

$$e^{h_a(w)} = \frac{a}{2} \frac{(w^2 + Z(a))(w^2 + Z(a)^{-1})}{w^2} \quad (3.71)$$

と書けることから、 $e^{h_a(w)}$ の零点を特徴づける量であることがわかる。式 (3.70) とゴーストカレントのモード展開

$$J_{gh}(w) = \sum_n q_n w^{-n-1} \quad (3.72)$$

$$[q_m, q_n] = \delta_{m+n,0} \quad (3.73)$$

より、normal order 公式

$$e^{q(h_a)} = (1 - Z(a)^2)^{-1} \exp(-q_0 \log(1 - Z(a))^2) e^{q^{(-)}(h_a)} e^{q^{(+)}(h_a)} \quad (3.74)$$

が示せる。ここで、通常の場合の理論と同様に $q^{(+)}(h_a)$, $q^{(-)}(h_a)$ はそれぞれ $q(h_a)$ の正振動数、負振動数部分を表す。

式 (3.74) は因子 $(1 - Z(a)^2)^{-1}$ のため、 $a = -1/2$ のとき発散する。このとき $e^{q(h_{-1/2})}$ は well-defined ではない。なお、ここでは省略するが、ゲージ変換 $e^{q_L(h_a)}$ についても同様な解析がされており、 $a = -1/2$ のときのみ特異な変換になることがわかっている [6].

では、 $a = -1/2$ のとき、解そのものは正しく定義されているのだろうか。ユニバーサル解の定義に戻って

$$\Psi(h_a) = Q_L (e^{h_a} - 1) \mathcal{I} - C_L ((\partial h_a)^2 e^{h_a}) \mathcal{I} \quad (3.75)$$

を考えれば、この表式は $a \geq -1/2$ においてモード展開可能であり、 $a = -1/2$ のときにも矛盾なく定義されることがわかる。特異性はこの解をゲージ変換の形に書き直すときに発生する。

最後に、この節の結果をまとめておく。

定義 3.2 (高橋-谷本解) $a \geq -1/2$ において、

$$F_a(w) = e^{h_a(w)} - 1 = \frac{a}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)^2$$

により定義されるユニバーサル解を高橋-谷本解といい、well-defined なフォック表示を持つ。 $a > -1/2$ においては自明なピュアゲージ解になり、 $a = -1/2$ のときには非自明な解になる。

第 4 章

古典解のまわりで展開された理論におけるゲージ固定と物理的状态

前章 3.5 節では、高橋-谷本解の特異性を調べ $a = -1/2$ のときに非自明な解になることがわかった。このことは何を意味するのであろうか。解を物理的に解釈するために、ユニバーサル解とタキオン凝縮との関係に目を向けてみることにする。

ユニバーサル解 Ψ_0 はタキオン凝縮解であるために必要な以下の条件 [20] を満たしている：

- ゴースト座標 b_n, c_n とマター部分のピラソロ演算子 L_n^X を用いて書き表せる (universality)[20]
- ゴースト数 1 を持つ
- ローレンツ不変なスカラー解である

実際に、Sen, Zweibach らのレベル切断解 [2] は上記の条件を満たすように構成された。従って、非自明なユニバーサル解である $a = -1/2$ の高橋-谷本解は、タキオン凝縮を表す解になっている可能性がある。この章では、1 章で紹介した Sen 予想のうちの 1 つ、「タキオン凝縮後は開弦が現れない」という事実を検証するため、高橋-谷本解のまわりで展開された理論を調べる。理論を Siegel ゲージに固定することにより、漸近的な物理的状态を求め、高橋-谷本解がタキオン凝縮を記述していることを確かめる。

4.1 ゲージ固定

高橋-谷本解 $\Psi(a)$ のまわりで展開された作用は次のようになる。

$$S[\Psi] = \int \left(\frac{1}{2} \Psi * Q(a) \Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right) + S[\Psi(a)]. \quad (4.1)$$

定数項 $S[\Psi(a)]$ を無視すれば、新しい理論は新しい BRST 電荷 $Q(a)$ によって特徴づけられる。前章の式 (3.53), (3.65) より、 $e^{h_a(w)} = g_a(w)$ と置き換えれば、

$$Q(a) = Q(g_a) - C \left(\frac{(\partial g_a)^2}{g_a} \right), \quad (4.2)$$

$$g_a(w) = 1 + \frac{a}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)^2 \quad (4.3)$$

となる。作用 (4.1) は 2.3 節で行った通常の理論の場合と同様に, Siegel ゲージに固定することができる。このゲージにおける運動項演算子 (プロパゲーターの逆演算子) は

$$L(a) = \{Q(a), b_0\} \quad (4.4)$$

で与えられ, 理論の漸近的な物理的状態は $L(a)$ の固有値により求まる。 $L(a)$ のモード展開された表式は, 演算子積

$$J_B(z)b(w) \sim \frac{3}{(z-w)^3} + \frac{J_{gh}(w)}{(z-w)^2} + \frac{T(w)}{z-w} \quad (4.5)$$

と式 (4.3) より

$$\begin{aligned} L(a) &= \oint dz \oint dw g_a(z) w J_B(z) b(w) + \oint dz \oint dw \frac{(\partial g_a(w))^2}{g_a(w)} w c(z) b(w) \\ &= (1+a)L'_0 + \frac{a}{2}(L'_2 + L'_{-2}) + 4aZ(a) - (1+a) \end{aligned} \quad (4.6)$$

と求めることができる。上記の $L(a)$ の表式は, ツイストされたビラソロ演算子

$$L'_n = L_n + nq_n + n\delta_{n,0} \quad (4.7)$$

の線型結合 (+ 定数) である。付録 B にあるように, L'_n はツイストされたエネルギー・運動量テンソル $T'(w)$ のモード係数であり, 次の性質をもつ:

- L'_n は中心電荷 (central charge) $c = 24$ のビラソロ代数を満たす
- $[L'_n, b_0] = 0$. すなわち, ツイストされたコンフォーマル変換は b_0 と可換である

これらから, L'_n で生成されるコンフォーマル変換は Siegel ゲージの中で閉じていることがわかる。中心電荷 24 は, 光円錐ゲージ理論の中心電荷と同じであるから, ツイストされたビラソロ代数は「物理的状態空間」に作用するコンフォーマル対称性であるといえる。以降の解析においても, このような L'_n の性質が決定的な役割を果たす。

4.2 ピュアゲージ解のまわりの理論のスペクトル

この節では, $a \geq -1/2$ の場合, すなわち高橋-谷本解がピュアゲージ解となる場合について, 解のまわりの理論の物理的状態を求める。前節の Siegel ゲージ固定を行えば, ゲージ固定された理論における物理的状態 Ψ_{phys} は任意のゴースト数を持つ状態で

$$Q(a) |\text{phys}\rangle = 0, \quad (4.8)$$

$$b_0 |\text{phys}\rangle = 0 \quad (4.9)$$

で与えられる。この条件は $\{Q(a), b_0\} = L(a)$ より

$$L(a) |\text{phys}\rangle = 0 \quad (4.10)$$

と等価であるから, $L(a)$ の 0 固有値をもつ固有状態を求めればよい。前章 3.3 節で $a > -1/2$ の理論は元の理論 (BRST 電荷が Q であるような理論) と等価であることが確かめられたのだから, (4.10) から求まるスペクトルは元の理論と同じはずである。従って $L(a)$ を L_0 に対角化できると考えるのが自然である。以下では, 実際にこの対角化を行う。

式 (4.6) から, $L(a)$ の積分型の表示は

$$L(a) = \oint dw w g_a(w) T'(w) + \dots \quad (4.11)$$

となる. “...” の部分は定数項を表す. ツイストされたピラソロ演算子で生成されるコンフォーマル変換 $U'(a)$ を用いて, $L(a)$ を

$$U'(a)L(a)U'(a)^{-1} = NL_0 \quad (4.12)$$

の形に対角化することを考える. ここで N は定数とする. 付録 A より, $U'(a)$ が生成するコンフォーマル変換を $z = f_a(w)$ とすれば, $U'(a)$ は次のように定義される:

$$U'(a) = \exp\left(\oint dw v_a(w) T'(w)\right), \quad (4.13)$$

$$f_a(w) = e^{v_a(w)\partial_w w}. \quad (4.14)$$

この $U'(a)$ で $L(a)$ を変換すれば,

$$\begin{aligned} U'(a)L(a)U'(a)^{-1} &= \oint_{\gamma} dw w g_a(w) \left(\frac{df_a}{dw}\right)^2 T'(f) + \dots \\ &= \oint_{\gamma'} df w g_a(w) \left(\frac{df_a}{dw}\right) T'(f) + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

と計算できる. γ, γ' はそれぞれ w 平面, f 平面での puncture 近傍の積分路である. 式 (4.15) の右辺が $L'_0 + (\text{const.})$ となるための「対角化条件」は

$$w g_a(w) f'_a(w) = N f_a(w) \quad (4.16)$$

で与えられる. 微分方程式 (4.16) は線形であるから容易に積分できる. 一般解は, 積分定数を C とすると

$$\begin{aligned} f_a(w) &= C \exp\left(N \int^w dw' \frac{1}{w' g_a(w')}\right) \\ &= C \left(\frac{w^2 + Z(a)}{Z(a)w^2 + 1}\right)^{\frac{N}{2\sqrt{1+2a}}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

と求まる. 式 (4.17) の 1 行目から 2 行目では積分定数 C を適当に再定義した. 定数 N, C は $a \rightarrow 0$ での f_a の関数型から次のようにして決定できる. $\lim_{a \rightarrow 0} Z(a) = 0$ なので, 式 (4.17) より

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(w) = C w^{\frac{N}{\sqrt{1+2a}}} \quad (4.18)$$

である. $Q(a=0) = Q$ だから, $f_0(w)$ は恒等変換でなくてはならない. このことから $N = \sqrt{1+2a}$, $C = 1$ と決まる. 以上のように定数を決定した結果,

$$\begin{aligned} f_a(w) &= \left(\frac{w^2 + Z(a)}{Z(a)w^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ U'(a)L(a)U'(a)^{-1} &= \sqrt{1+2a}L'_0 + \text{const.} \end{aligned} \quad (4.19)$$

を得る.

次に, 式 (4.19) の定数項を求めなくてはならないが, その前に f_a の性質を調べておく. 式 (4.15) では f_a で移された積分路 γ' が $f_a(0)$ の周りの積分路になり, 経路内の新たな

極や邪魔なカットが現れないとして形式的に議論したが、このことも確かめておかなければならない。

$z = f_a(w)$ としたとき、図 4.1 は $a > 0, 0 < Z(a) < 1$ の場合の z 平面の様子を描いたものである。 $z = \pm\sqrt{Z(a)}$, $z = \pm 1/\sqrt{Z(a)}$ が分岐点になり、太い線で描いた部分がカットを表している。 w 平面で経路 γ の半径を適当にとることにより、図 4.1 に示したように、 γ' がカットを通らないようにとれる。この場合、 $\oint_{\gamma'} dz z T'(z) = L'_0$ としてよいので、式 (4.19) の計算は正しいことが示された。なお、 a が他の値をとる場合も同様な解析が行えて、式 (4.15) の対角化が正しいことが確かめられる。

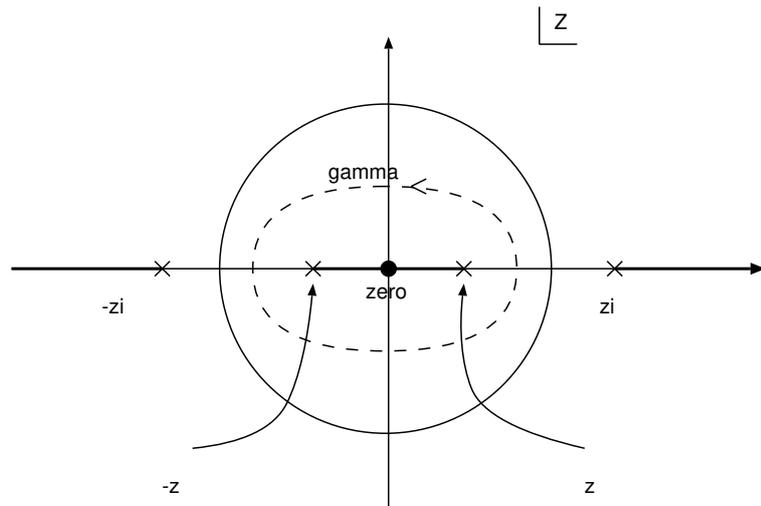


図 4.1 $z = f_a(w)$ のプロット。太い線の部分がカットを表す。

式 (4.19) で計算していない定数項は、次のような議論から決定できる： $T'(w)$ と $J_B(w)$ の演算子積が

$$T'(z)J_B(w) \sim \frac{9c(w)}{(z-w)^4} + \frac{6\partial c(w)}{(z-w)^3} + \frac{2J_B(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J_B(w)}{z-w} \quad (4.20)$$

となることから、ツイストされたコンフォーマル変換において、 J_B は (c_n に比例する項を除いて) ウェイト 2 のオペレーターとして振る舞う。すなわち、ツイストされた理論においては $J_B(w)$ と $T'(w)$ が同じ次元を持つことになる。従って、 $L(a)$ の対角化と全く同様な方法により、 $Q(a)$ は

$$U'(a)Q(a)U'(a)^{-1} = \sqrt{1+2a}Q + \sum_n a_n c_n \quad (4.21)$$

の形に変換されることがわかる。 $Q(a)^2 = 0$ であるから、 $U(a)$ が well-defined なオペレーターならば、式 (4.21) の左辺も nilpotent になる。右辺の 2 乗を計算すれば、

$$\left(\sqrt{1+2a}Q + \sum_n a_n c_n \right)^2 = 2\sqrt{1+2a} \sum_n a_n (c\partial c)_n \quad (4.22)$$

であるから、 $a_n = 0$ であることがわかり、 $Q(a)$ は

$$U'(a)Q(a)U'(a)^{-1} = \sqrt{1+2a}Q \quad (4.23)$$

と対角化できる. さらに, $U'(a)$ は b_0 と可換であるから, 式 (4.23) と b_0 との交換子をとれば,

$$U'(a)L(a)U'(a)^{-1} = \sqrt{1+2a}L_0 \quad (4.24)$$

が示される. すなわち, 式 (4.19) の定数項 (\dots の部分) が 0 になることが示せた*1.

以上の解析では $U'(a)$ が well-defined であることを仮定していたが, このことは自明ではない. $U'(a)$ の振動子表示に発散する係数が現れれば, $U'(a)$ は逆元を持たず, これまでの対角化や nilpotency の議論は成り立たなくなる.

変換 $U'(a)$ の特異性を調べるには, $f_a(w)$ に対応する無限小ベクトル場の成分 $v_a(w)$ を求めて,

$$U'(a) = e^{\sum_n v_{-n} L'_n} \quad (4.25)$$

と成分表示する必要がある. $v_a(w)$ と $f_a(w)$ の関係は付録 A に示してあるが, そこでも述べたとおり, 我々は $f_a(w)$ が与えられたとき $v_a(w)$ の閉じた表式を求める一般的解法を知らない. そこで, 式 (4.24) の対角化公式を振動子を用いて再び導出することにより, $v_a(w)$ の関数型を決定する.

まず, ツイストされたピラソロ演算子を用いて, $\{L'_0, L'_{\pm 2}\}$ で生成される代数の基底を

$$H = \frac{L'_0 + 3}{2}, \quad L_{\pm} = \frac{L'_{-2} \pm L'_2}{4} \quad (4.26)$$

と定義すれば, これらの演算子の満たす交換関係は,

$$[H, L_{\pm}] = L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = H \quad (4.27)$$

となる. 式 (4.26) の生成子を用いれば, $L(a)$ は次のように書き表される.

$$L(a) = 2(1+a)H + 2aL_+ + \text{const.} \quad (4.28)$$

式 (4.27) を用いれば, 「対角化公式」

$$e^{\lambda L_-} [(\cosh \lambda)H + (\sinh \lambda)L_+] e^{-\lambda L_-} = H \quad (4.29)$$

が示せる. $L(a)$ に含まれる基底の係数を (4.29) が適応できるように規格化すれば,

$$L(a) = 2\sqrt{1+2a} [(\cosh \lambda_a)H + (\sinh \lambda_a)L_+] + (\text{const.}),$$

$$\lambda_a = \tanh^{-1} \left(\frac{a}{1+a} \right) = \log(\sqrt{1+2a}) \quad (4.30)$$

と書ける. 上式で省略した定数部分を計算しつつ, 式 (4.29) を用いれば,

$$U'(a)L(a)U'(a)^{-1} = \sqrt{1+2a}L_0, \quad (4.31)$$

$$U'(a) = \exp \left\{ -\frac{1}{4}(L'_2 - L'_{-2}) \log(\sqrt{1+2a}) \right\} \quad (4.32)$$

となり, 式 (4.24) と同じ結果が示せた. 式 (4.32) から, $f_a(w)$ を生成するベクトル場の成分は

$$v_a(w) = -\frac{1}{4} \log(\sqrt{1+2a}) \left(w^3 - \frac{1}{w} \right) \quad (4.33)$$

*1 もちろん, 直接積分を実行して式 (4.24) を導出することもできる [7]

と読み取れる.

3.5節と同様に, $U'(a)$ を normal ordering することにより特異性を調べてみる. そのためには, $U'(a)$ を次のような形に書き換えればよい:

$$U'(a) = \exp(sL'_{-2}) \exp(tL'_0) \exp(uL'_2). \quad (4.34)$$

振動子を用いて直接計算を行ない, 式 (4.34) の係数 (s, t, u) を求めてもよいが [7], L'_n がリー代数の元であるため, その計算は簡単ではない. ここでは, 議論を簡潔に行うためにコンフォーマル変換を用いて計算を行う. 式 (4.34) をコンフォーマル写像の作用に読みかえれば, 式 (4.24) から

$$f_a^{-1}(w) = n_{-2,s} \circ n_{0,t} \circ n_{2,u}(w) \quad (4.35)$$

と書き表される. ここで $n_{-2,s}(w)$, $n_{0,t}(w)$, $n_{2,u}(w)$ はそれぞれ $\exp(sL'_{-2})$, $\exp(tL'_0)$, $\exp(uL'_2)$ に対応した写像であり, $f_a^{-1}(w)$ は $f_a(w)$ の逆写像である. これらの写像の表式は, 付録 A より

$$f_a^{-1}(w) = \left(\frac{Z(a) - w^2}{Z(a)w^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.36)$$

$$n_{-2,s}(w) = (2s + w^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.37)$$

$$n_{0,t}(w) = e^t w, \quad (4.38)$$

$$n_{2,u}(w) = \left(\frac{w^2}{1 - 2uw^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

と求まる. これらを使うと

$$n_{-2,s} \circ n_{0,t} \circ n_{2,u}(w) = \sqrt{\frac{-2s + (4su - e^{2t})w^2}{2uw^2 - 1}} \quad (4.40)$$

と計算できるから, 式 (4.35) の両辺を比較すれば,

$$\begin{aligned} -2s &= Z(a), \\ 2u &= Z(a), \\ 4su - e^{2t} &= -1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

が成り立つ必要があることがわかる. 式 (4.41) から s, u を消去すれば

$$1 - Z(a)^2 = e^{2t} \quad (4.42)$$

が得られる. $a > -1/2$ のとき, $Z(a)^2 < 1$ なので, 上式の t は常に存在するが, $a = -1/2$ のとき, 有限な t は存在しない. このことから, $a = -1/2$ のとき, $U'(a)$ は特異性を持つことがわかる.

以上の結果から, $a > -1/2$ の場合, well-defined なオペレーター $U'(a)$ によって, $L(a)$ は

$$L(a) \rightarrow L_0, \quad Q(a) \rightarrow Q_0$$

と対角化されることがわかった. この事実から, $a > -1/2$ 理論のスペクトラムは通常の BRST チャージ Q を持った CSFT と同じであることは容易に理解できる. さらに, われわれは式 (4.23) により BRST 電荷も対角化することができたので, BRST コホモロジーを用いた議論が可能である.

まず, 通常の開弦理論における物理的状態は, よく知られた次の結果で与えられる [18].

定理 4.1 (加藤-小川の BRST コホモロジー) Q が open bosonic string theory ($c = 26$ matter $\oplus c = -26$ ghost CFT) における BRST 電荷であるとき,

$$Q|\Psi\rangle = 0$$

を満たす状態は次式で与えられる.

$$|\Psi\rangle = |P\rangle \otimes c_1 |0\rangle + |P'\rangle \otimes c_0 c_1 |0\rangle + Q|\chi\rangle \quad (4.43)$$

$|P\rangle, |P'\rangle$ は, matter CFT においてウエイト 1 の vertex operator から生成される正ノルム状態である.

上記の加藤-小川状態に $U'(a)^{-1}$ を作用させれば, 次の定理を得る.

定理 4.2 (高橋-谷本理論 ($a > -1/2$) のコホモロジー) $Q(a)$ ($a > -1/2$) が高橋-谷本解のまわりで展開された理論における BRST 電荷であるとき,

$$Q(a)|\Psi\rangle = 0$$

を満たす状態は, 次式で与えられる.

$$|\Psi\rangle = U'(a)^{-1} (|P\rangle \otimes c_1 |0\rangle + |P'\rangle \otimes c_0 c_1 |0\rangle) + Q(a)|\chi'\rangle \quad (4.44)$$

$U'(a)$ が b_0 と可換であることから, 新しい理論の Siegel ゲージにおける物理的状态は,

$$|\text{phys}\rangle = U'(a)^{-1} (c_1 |0\rangle \otimes |P\rangle) \quad (4.45)$$

と, 元の理論の物理的状态をコンフォーマル変換したもので与えられることがわかる.

ここで, 状態

$$L'_{-n_1} L'_{-n_2} \cdots L'_{-n_k} |0\rangle' \otimes |P\rangle \quad (4.46)$$

を考えてみる. $|0\rangle' = c_1 |0\rangle$ はツイスト CFT における真空である. L'_n の中心電荷が 24 であり, さらに $|P\rangle$ は (flat background 上の理論の場合) 光円錐ゲージ理論の状態 $|P_{\text{LC}}\rangle$ と対応するから, 基底 (4.46) は光円錐ゲージ理論における状態

$$L_{-n_1}^{\text{LC}} L_{-n_2}^{\text{LC}} \cdots L_{-n_k}^{\text{LC}} |P_{\text{LC}}\rangle \quad (4.47)$$

と対応がつく. 従って, 基底 (4.46) は, 光円錐 CFT の全ての自由度を表している. 状態 $|\text{phys}\rangle$ はこの基底の (無限次元) 線型結合として表される. したがって, 物理的状态 (4.45) が有限なノルムを持つことを確かめなくてはならないが, 次節で物理的状态間の散乱振幅を計算することにより, 物理的状态が矛盾なく定義されていることを確かめる*2.

前章では, $U'(a)$ というコンフォーマル変換を用いて理論のスペクトルを求めたが, 3章においては, $e^{\tilde{q}(h_a)}$ というオペレーターを用いて場の再定義を行った. 式 (4.23) と式 (3.56) (を少し変更したもの) を改めて並べてみると,

$$U'(a)Q(a)U'(a)^{-1} = \sqrt{1+2a}Q, \quad (4.48)$$

$$e^{-\tilde{q}(h_a)}Q(a)e^{\tilde{q}(h_a)} = Q \quad (4.49)$$

*2 弦の場の理論における「良い」ノルムの決め方はよくわかっていない. 本論文ではノルムの議論に立ち入らずに, 散乱振幅を用いて議論を行う.

となり、どちらも同じオペレーター Q への対角化となっている。この事実から、 $U'(a)$ と $e^{\tilde{q}(h_a)}$ は同値な変換になっているはずである。ここではこれらの2つの変換の間の関係を求める。

素直に考えれば、 L'_n は L_n と q_n の線形和として表されるから

$$\exp(L + q) \sim \exp(L) \exp(q) \times \text{const.} \quad (4.50)$$

のような形の「分離」により、何らかの関係が導けそうである。そこで、付録 B において、ツイスト CFT とシフト CFT の関係を用いて分離公式 (B.26) を導いた。レベル 0 のシフトは通常のゴースト CFT に相当するので、式 (B.26) で $k = 0$ としたもの

$$U'_f = \text{const.} \times U_f \times \exp \tilde{q} \left(\log \frac{w \partial f}{f} \right) \quad (4.51)$$

が成立する。

さて、上式の $f(w)$ として式 (4.19) の $f_a(w)$ をとれば

$$\log \left(\frac{w \partial f_a(w)}{f_a(w)} \right) = -h_a(w) + \log \sqrt{1 + 2a} \quad (4.52)$$

が示せる。これを式 (4.51) に適用すれば

$$U'(a) = (\text{const.}) \times U(a) e^{-\tilde{q}(h_a)} e^{+\tilde{q}(\log \sqrt{1+2a})} \quad (4.53)$$

となる。式 (4.53) は、場の再定義に用いたオペレーター $e^{-\tilde{q}(h_a)}$ が、ツイストされたコンフォーマル変換と通常の変換の「商」として表されることを示している。 U および U' は、写像 f を通してプロパゲーターが生成する世界面の情報を持っているから、ゲージに依存した量である。しかしそれらの商で与えられる演算子 $e^{-\tilde{q}(h_a)}$ はゲージに依存しない。この事実には、ゲージ固定する前の理論の対角化が $e^{-\tilde{q}(h_a)}$ を用いて行われたことから納得できる。

4.3 散乱振幅の同等性

4.2 節ではピュアゲージ解のまわりの理論の物理的状態を求めた。Siegel ゲージでの物理的状態は、 b_0 と可換な変換 $U'(a)$ により元の理論の状態と結ばれていることがわかった：

$$|\text{phys}'\rangle = U'(a)^{-1} |\text{phys}\rangle. \quad (4.54)$$

この状態を用いて、実際に摂動的散乱振幅を求めてみる。これまでの結果が正しければ、散乱振幅は元の理論と同じになるはずである。

ピュアゲージ解のまわりの理論を Siegel ゲージに固定した場合、CSFT のファインマンルールから得られる振幅は一般に次のような形になる。

$$\mathcal{A} = \left(\prod \langle V_3 | \right) \left(\prod \frac{b_0}{L(a)} |R\rangle \right) \left(\prod |\text{phys}'\rangle \right) \quad (4.55)$$

各要素をかける個数はファインマン図から定るが、これは通常の ϕ^3 理論のファインマンルールから得られるものと同じであるため、ここでは明示しない。式 (4.24) から、プロパゲーターは

$$\frac{b_0}{L(a)} = \frac{1}{\sqrt{1+2a}} U'(a)^{-1} \frac{b_0}{L_0} U'(a) \quad (4.56)$$

と書き直せる．式 (4.56), 式 (4.54) を (4.55) に代入すれば,

$$\mathcal{A} = \left(\prod \langle V_3' | \right) \left(\prod \frac{1}{\sqrt{1+2a}} \frac{b_0}{L_0} |R'\rangle \right) \left(\prod |\text{phys}\rangle \right) \quad (4.57)$$

を得る．ここで

$$\langle V_3' | = \langle V_3 | U(a)^{(1)-1} U(a)^{(2)-1} U(a)^{(3)-1} \quad (4.58)$$

$$|R'\rangle = U(a)^{(1)} U(a)^{(2)} |R\rangle \quad (4.59)$$

である．これらの新しいバーテックスを計算するには, $U'(a)$ を生成する量

$$\oint dw v_a(w) T'(w)$$

の保存則がわかればよい．この保存則を直接計算することもできるが, アノマリーの計算が多少面倒であるため, ここでは分解公式 (4.53) を用いることにする．まず,

$$\tilde{q}(\log(\sqrt{1+2a})) = q_0 \log(\sqrt{1+2a}) - \frac{3}{2} \log(\sqrt{1+2a}) \quad (4.60)$$

より, N 点 vertex に対して

$$\langle V_N | \sum_{r=1}^N \tilde{q}^{(r)}(\log(\sqrt{1+2a})) = \left(3 - \frac{3N}{2} \right) \log(\sqrt{1+2a}) \quad (4.61)$$

が示せる．ただしゴースト数 q_0 の保存則 $q_0^{(1)} + \dots + q_0^{(N)} = 3$ を用いた．式 (4.53) に現れる残りの部分に関しては次の事実を用いばよい．

- 式 (3.59) より, $\tilde{q}(h_a)$ はアノマリーのない保存量である
- よく知られているように, $\oint dw v_a(w) T(w) \sim (L_2 - L_{-2})$ はアノマリーのない保存量である [10, 14]

従ってバーテックスの評価をする際には (4.61) の部分以外は自明に作用し,

$$\langle V_N | \prod_r U(a)^{(r)} e^{\tilde{q}^{(r)}(-h_a)} = \langle V_N | \quad (4.62)$$

であるから, 式 (4.61) の部分のみを評価すればよいことがわかる． $N = 2, 3$ の場合に式 (4.61) を使えば

$$\langle V_3' | = \langle V_3 | (\sqrt{1+2a})^{\frac{3}{2}} \quad (4.63)$$

$$|R'\rangle = |R\rangle \quad (4.64)$$

が示せる．これらの結果を用いば, 散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \left(\prod (\sqrt{1+2a})^{\frac{3}{2}} \langle V_3 | \right) \left(\prod \frac{b_0}{L_0} |R\rangle \right) \left(\prod |\text{phys}\rangle \right) \quad (4.65)$$

となるから, $|\text{phys}\rangle \rightarrow (\sqrt{1+2a})^{\frac{1}{2}} |\text{phys}\rangle$ と再定義すれば元の理論の振幅と同じであることがわかる．

4.4 非自明解のまわりで展開された理論

本節では非自明解な高橋-谷本解 ($a = -1/2$) のまわりで展開された理論の物理的状態を調べる. 4.2 節で調べたとおり, コンフォーマル変換 $U'(-1/2)$ が特異性をもつため $L(-1/2) \rightarrow L_0$ の対角化を行うことはできない. しかしながら, 別の変換によって, $Q(-1/2)$ を「シフトされた」演算子へと変形することができる [19].

この場合, BRST 電荷は次式で与えられる:

$$Q\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{4}(Q_2 + Q_{-2}) + 2c_0 + c_2 + c_{-2}. \quad (4.66)$$

Q_n は

$$J_B(w) = \sum_n Q_n w^{-n+1} \quad (4.67)$$

により定義されるオペレーターで, 特に $Q_0 = Q$ である.

ここで, 次のような同値変換により $Q(-1/2)$ を変換する.

$$e^{q(\rho)} Q\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-q(\rho)} = -\frac{1}{4}Q_2 + c_2 = -\frac{1}{4}Q^{(2)} \quad (4.68)$$

ここで, $\rho(w)$ と $q(\rho)$ は次式で与えられる.

$$\rho(w) = -2 \log(1 - w^{-2}), \quad (4.69)$$

$$q(\rho) = \oint dw \rho(w) J_{gh}(w) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q_{-2n} \quad (4.70)$$

$q(\rho)$ は負振動数モードのみで書かれているため, normal ordering による発散はなく, $e^{q(\rho)}$ は well-defined な変換である. さらに, 式 (4.68) の右辺の $Q^{(2)}$ は, 通常の BRST 電荷 Q に, 付録 B で導入した「レベル 2 のシフト変換」

$$c_n \rightarrow c_n^{(2)} = c_{n+2}, \quad (4.71)$$

$$b_n \rightarrow b_n^{(2)} = b_{n-2} \quad (4.72)$$

を施すことにより得られるオペレーターである [19]. この操作はゴースト座標の交換関係を変えない; すなわち

$$\{c_m^{(2)}, b_n^{(2)}\} = \delta_{m+n} \quad (4.73)$$

が成立するので, シフトされたオペレーターの代数は元のオペレーターの代数と同じである. ただし, $SL(2, \mathbb{R})$ 真空 $|0\rangle$ まで含めて置き換えを行うことを考えると, あわせて

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle^{(2)} = b_{-3} b_{-2} |0\rangle \quad (4.74)$$

の操作も行う必要がある. この真空の定義により, 真空へのゴースト座標の作用は

$$c_n^{(2)} |0\rangle^{(2)} = 0 \quad (n \geq 2), \quad (4.75)$$

$$b_n^{(2)} |0\rangle^{(2)} = 0 \quad (n \geq -1) \quad (4.76)$$

と表され, シフト前と同じ形になる. 以上から, $Q^{(2)}$ のコホモロジーは加藤-小川の定理 4.1 を用いて次のように求められる.

定理 4.3 ($Q^{(2)}$ の BRST コホモロジー)

$$Q^{(2)} = -\frac{1}{4}Q_2 + c_2$$

に対して

$$Q^{(2)} |\Psi\rangle = 0$$

を満たす状態は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |P\rangle \otimes c_1^{(2)} |0\rangle^{(2)} + |P'\rangle \otimes c_0^{(2)} c_1^{(2)} |0\rangle^{(2)} + Q^{(2)} |\chi\rangle \\ &= |P\rangle \otimes b_{-2} |0\rangle + |P'\rangle \otimes |0\rangle + Q^{(2)} |\chi\rangle \end{aligned} \quad (4.77)$$

式 (4.77) に $e^{-q(\rho)}$ を作用させれば、 $Q(-1/2)\Psi = 0$ を満たす状態は

$$|\Psi\rangle = |P\rangle \otimes e^{-q(\rho)} b_{-2} |0\rangle + |P'\rangle \otimes e^{-q(\rho)} |0\rangle + Q\left(-\frac{1}{2}\right) |\chi\rangle \quad (4.78)$$

と求まる。

4.5 no open string theorem

本節では、 $a = -1/2$ の高橋-谷本解のまわりの理論における Siegel ゲージの物理的状態を求める。この状態は正でないゴースト数を持ち、散乱振幅が 0 になるという結果が示される。

前節で $Q(-1/2)$ がシフトされた BRST 電荷 $Q^{(2)}$ と同値変換で結ばれることを示した。しかしながら、そこで用いられた変換 $e^{-q(\rho)}$ は b_0 と可換でないため、求めたコホモロジーは Siegel ゲージの状態とはならない。そこで、ピュアゲージ解の場合と同様に、シフト変換と同じ変換を実現するコンフォーマル変換を求める：すなわち

$$U'_F Q\left(-\frac{1}{2}\right) U'^{-1}_F = -\frac{1}{4}Q_2 + c_2 = -\frac{1}{4}Q^{(2)} \quad (4.79)$$

を満たす写像 $F(w)$ を求めることを考える。4.2 節の場合と同様、写像 F を決定するには BRST 電荷のピュアゴースト部分 (c_n の線型結合になっている部分) を無視して考えれば十分である。

$$g(w) = \exp h_{-\frac{1}{2}}(w) = -\frac{1}{4} \left(w - \frac{1}{w} \right)^2 \quad (4.80)$$

とおけば、

$$Q(-1/2) = Q(g) + (\text{pure ghost part}) \quad (4.81)$$

であるから、

$$U'_F Q(g) U'^{-1}_F = -\frac{1}{4}Q_2 + \dots \quad (4.82)$$

の条件を満たす $F(w)$ を求めておき、その後ピュアゴースト部分 (これ以降は"...”と

表す) を決定すればよい. 式 (4.82) の左辺は次のようにして計算できる:

$$\begin{aligned}
U'_F Q(g) U'_F{}^{-1} &= \oint dw g(w) U'_F J_B(w) U'_F{}^{-1} \\
&= \oint dw g(w) U'_F w J'_B(w) U'_F{}^{-1} \\
&= \oint dF g(w) w F'(w) J'_B(F) + \dots \\
&= \oint dF g(w) w F'(w) F(w)^{-1} J_B(F) + \dots
\end{aligned} \tag{4.83}$$

ただし, 上式ではツイスト CFT での BRST カレントに関する関係式

$$J'_B(w) = w^{-1} J_B(w) \tag{4.84}$$

$$T'(z) J'_B(w) \sim \frac{2J'_B(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J'_B(w)}{(z-w)} + \dots \tag{4.85}$$

を用いた. $Q_2 = \oint dz z^2 J_B(z)$ であるから, 式 (4.83) より, 式 (4.82) を実現するための $F(w)$ に対する条件式は以下ようになる.

$$wg(w) \frac{F'(w)}{F(w)} = -\frac{1}{4} (F(w))^2. \tag{4.86}$$

この微分方程式は

$$\frac{F'(w)}{(F(w))^3} = -\frac{1}{4wg(w)} \tag{4.87}$$

と書き直せば容易に積分できる. 式 (4.80) を代入して, 積分定数を 0 にとれば, 解

$$F(w) = \sqrt{w^2 - 1} \tag{4.88}$$

を得る. $F(w)$ に対応するオペレーターは, 付録 A で求めた公式 (A.26) から

$$U'_F = e^{-\frac{1}{2} L'_{-2}} \tag{4.89}$$

であることがわかる. 従って,

$$U'_F Q(g) U'_F{}^{-1} = -\frac{1}{4} Q_2 + (\text{pure ghost}) \tag{4.90}$$

$$U_F = \exp\left(-\frac{1}{2} L'_{-2}\right) \tag{4.91}$$

が示された. 残されたピュアゴースト部分に関しては, nilpotency から $Q(-1/2)$ と $Q^{(2)}$ の形を通して含まれることが明らかであるから, 結局, 式 (4.79) を得る.

U'_F は b_0 と可換な変換だから, 式 (4.79) を用いれば, $Q^{(2)}$ のコホモロジーから Siegel ゲージでの物理的状態を求めることができる. 従って, 定理 4.3 と式 (4.79) より, 次の事実が示される.

定理 4.4 (no open string theorem) $Q(-1/2)$ が非自明な高橋-谷本解 ($a = -1/2$) のまわりで展開された理論の BRST 電荷であるとき,

$$Q(-1/2) |\Psi\rangle = 0$$

を満たす状態は, 次式で与えられる.

$$|\Psi\rangle = U'_F (|P\rangle \otimes b_{-2} |0\rangle + |P'\rangle \otimes |0\rangle) + Q(-1/2) |\chi\rangle \tag{4.92}$$

ただし, $U'_F = e^{-1/2 L'_{-2}}$ である.

上記の定理 4.4 より, Siegel ゲージでの物理的状態は

$$|\text{phys}\rangle = U'_F (|P\rangle \otimes b_{-2}|0\rangle + |P'\rangle \otimes |0\rangle) \quad (4.93)$$

となり, ゴースト数 0 と -1 の状態の線型結合である. この状態を用いてファインマン図を計算すると, 散乱振幅に必要なゴースト数を満たすことができず, 振幅が 0 になることが次のようにしてわかる: 通常の CSFT において, ゴースト数 1 の物理的状態を用いて, ジーナス g の世界面をもつファインマン図を作った場合, 散乱振幅全体でのゴースト数は $3g - 3$ となることが知られている. この結果は

- (外線状態 $|\text{phys}\rangle$ のゴースト数) = 1
- (プロパゲーター b_0/L_0 のゴースト数) = -1

のルールを用いて, ファインマン図全体のゴースト数を計算することにより導出できる. 今問題にしている非自明解のまわりの理論の場合, 上記のルールは

- (外線状態 $|\text{phys}\rangle$ のゴースト数) = (0 または -1)
- (プロパゲーター $b_0/L(-1/2)$ のゴースト数) = -1

と変更されるから, 通常の CSFT と同じ形のダイアグラムを計算すれば, 必ず

$$(\text{ファインマン図のゴースト数}) < 3g - 3 \quad (4.94)$$

となる. ゴースト数 $3g - 3$ は, ジーナス g の世界面上の CFT でゼロでない散乱振幅を出すために必ず必要なものであるから, これを満たさない式 (4.94) のような場合, 散乱振幅は 0 になる.

以上の結果から, 非自明な高橋-谷本解のまわりで展開された理論では開弦の伝搬が起こらないことがわかった. この結果はレベル近似を全く用いない完全なものである. さらに, コホモロジーの構造は VSFT のように全く自明ではなく, ゴースト数の勘定により物理に現れないというメカニズムにより Sen 予想の内容を実現しており, 非常に興味深いものである. この事実は非自明なユニバーサル解がタキオン凝縮を表すという予想に対して有力な証拠となる.

第 5 章

開弦の場の理論における閉弦

序論で述べたタキオン凝縮に関する Sen 予想のうち、

「開弦理論における不安定な D-brane が崩壊した後、開弦が現れない」

という予想は、本論文の枠内においては完全に正しいことが、前章の「no open string theorem」により示された。しかしながら、もう 1 つの

「タキオン凝縮後の理論は閉弦の理論になる」

という内容に対しては、我々はまだなにも言及していない。タキオン過程に存在するはずの開弦を、開弦の理論を用いて理解することは弦理論の重要な課題であり、様々なアプローチで研究がされている。

本章では、いままで調べてきた CSFT の枠内で閉弦の物理を記述する方法について考える。特にタキオン凝縮後の理論での計算を行う準備として、不安定な D-brane 上での CSFT に閉弦の外場を導入し、その期待値を計算することにより、閉弦を含む散乱振幅を導出する。

5.1 タキオン凝縮と閉弦

「no open string theorem」がタキオン凝縮の物理を記述していると信じれば、凝縮後の CSFT の作用は、非自明な高橋-谷本解のまわりで展開されたものである。特にその BRST 電荷は、式 (4.3) において $a = -1/2$ を代入したもので、

$$Q' = Q(g) - C \left(\frac{(\partial g)^2}{g} \right), \quad (5.1)$$

$$g(w) = -\frac{1}{4} \left(w - \frac{1}{w} \right)^2 \quad (5.2)$$

となる。運動項演算子 L' は

$$L' = \frac{1}{2} L'_0 - \frac{1}{4} (L'_2 + L'_{-2}) + \frac{3}{2} \quad (5.3)$$

となる。このような、 L_n (L'_n) の線型結合で与えられるオペレーターは弦の伝搬の様子を記述していると考えられる。例えば、不安定 D-brane 上の BCFT におけるプロパゲーターを

$$\frac{1}{L_0} = \int_0^\infty dt e^{-tL_0} \quad (5.4)$$

と書きなおす。時刻 t における被積分項に対応 (A.26) を用いれば

$$e^{-tL_0} \leftrightarrow f(w) = e^{-tw} \quad (5.5)$$

となり、この演算子は座標 $\rho = \log w$ における長さ t の平坦な帯を表す。

では、式 (5.3) の L' はどのような弦の伝搬を表しているだろうか。前章の結果から、このとき ($a = -1/2$ のとき) 開弦は物理的空間から消えているので、もはや時空中を伝搬しないだろう。Drukker の議論 [22] によれば、 $e^{-tL'}$ が生成する世界面は、開弦の端点が 1 点に固定された曲面であり、図 5.1 の左のようなものになる*1。M, M' は開弦の中点、B は弦の両端を表している。左の図で開いた境界をつぶし、M, M' に閉弦の vertex operator V, V' を置けば、右側の図で表されるような、閉じた世界面から閉弦の放出を表す図になる。このようなファインマン図を計算できれば、開弦の理論において閉弦のみ

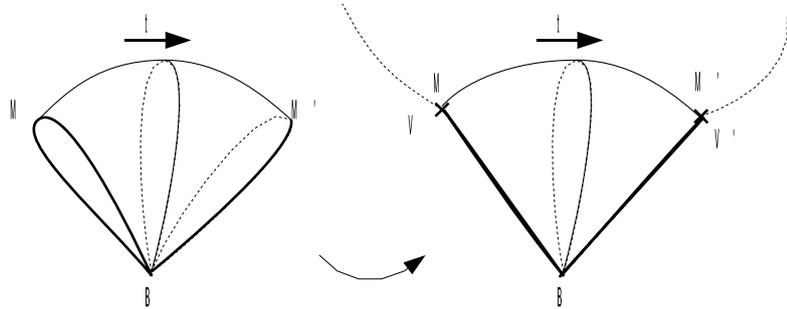


図 5.1 $e^{tL'}$ による弦の伝搬：開弦の両端は点 B に固定される

を含む散乱振幅が得られ、開弦 CSFT が閉弦の物理を記述できる理論であることが確かめられる。本章では、図 5.1 の散乱振幅を求める計算の予行演習として、プロパゲーターが $1/L_0$ の場合の計算を具体的に行う。この場合、図 5.1 に対応するのは図 5.2 である。始状態と終状態を「つぶす」操作を行うと、右側のように、開弦の両端を境界とする世界面ができあがる。上記の始状態と終状態をつぶす操作は、弦の境界状態を指定することにより可能になるから、プロパゲーターをある状態ではさむことを意味する。すなわち、図 5.2 の右図は、ある状態 $\langle \Sigma |$ による期待値

$$\langle \Sigma | b_0 e^{-tL_0} | \Sigma \rangle \quad (5.6)$$

に対応するファインマン図である。次節でこの状態 $\langle \Sigma |$ を定義する。

5.2 ゲージ不変な閉弦演算子

開弦 CSFT の自由度を用いて閉弦を表すひとつの方法として、ゲージ不変な閉弦の演算子を導入するものがある [23, 24]。ここではこの演算子を導入する。

まず、(BRST ゲージ固定する前の) 古典的 BSFT 作用 (2.12) に導入できる外場がどのようなものであるか調べてみる。この作用にソース項 Ω を加える。

$$S_{cl}[\Psi] \rightarrow S_{cl}[\Psi] + \int \Omega * \Psi. \quad (5.7)$$

*1 次章で実際に開弦の端が固定されることを確かめる。

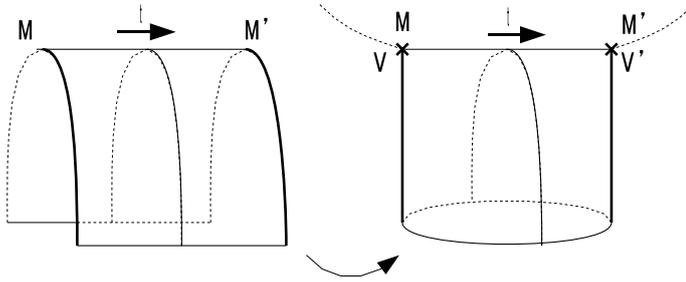


図 5.2 e^{tL_0} による弦の伝搬：弦の両端は時間 t に沿って移動する。

Ω が開弦場 Ψ と無矛盾に結合するためには、以下の性質を満たさなくてはならない。

性質 1 Ω はゴースト数 2 を持つ

性質 2 ソース項が開弦場の局所ゲージ変換に対して不変である。

性質 3 ソース項が実 (real) である。

これらの条件が必要なことは自明であろう。性質 1 は作用全体がゴースト数 3 を持たなくてはならないことからわかる。性質 2, 性質 3 はそれぞれソースを加えた作用全体のゲージ不変性, reality が成り立つために必要である。

上記の 3 条件を満たす閉弦のソースとして、次のような状態 Σ がある。

$$\begin{aligned} \langle \Sigma | \Psi \rangle &= -i \langle f_{\mathcal{I}} [c(i)c(-i)V_c(i,-i)\Psi(0)] \rangle \\ &= -i \langle c(i)c(-i)V_c(i,-i)f_{\mathcal{I}}[\Psi(0)] \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

ここで、 $f_{\mathcal{I}} = 2w/(1-w^2)$ は identity state に対応した写像であり、式 (5.8) の 2 行目では、性質

$$f_{\mathcal{I}}(\pm i) = \pm i, \quad f_{\mathcal{I}}(0) = 0 \quad (5.9)$$

を用いた。 $V_c(i,-i)$ は開弦 CFT のバルクにおけるウエイト (1,1) の vertex operator である。

式 (5.8) の右辺は、 $\langle \mathcal{I} | \Psi \rangle$ を計算したものにオペレーターが挿入された形をしている。したがって、閉弦の vertex operator 部分をまとめて \mathcal{V} と書けば、大雑把にいて

$$\langle \Sigma | \sim \langle \mathcal{I} | \mathcal{V} \quad (5.10)$$

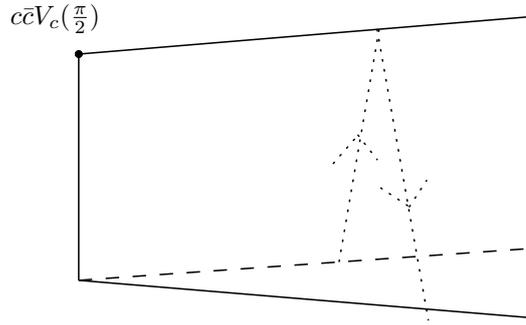
と考えるとよい*2。従って、この状態に対応する「 ρ 平面」ダイアグラムは、図 5.3 のように開弦を半分におり曲げて、中点に \mathcal{V} を置いたものである。

付録 C ではこの閉弦演算子のゲージ不変性を示した。そこでは、不安定 D-25brane 上の CSFT のみならず任意の古典解のまわりの理論における局所的ゲージ不変性

$$\int \Sigma * (Q' \Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi) = 0 \quad (5.11)$$

が成り立つという結果を示した。このことは、どのような CSFT の古典的真空においても閉弦が開弦にカップルできるということであり、重力相互作用の普遍性を示している。

*2 正確にはこのとおりにはならず、ゴースト部分が多少異なる。

図 5.3 ρ 平面での閉弦演算子

5.3 閉弦オペレーターの 2 点相関関数

この節では、閉弦演算子の具体的な例としてタキオン状態を考え、演算子の 2 点相関関数を計算する。

5.3.1 D-p brane 上の閉弦タキオン演算子

開弦の理論を不安定な D-25 brane 上の理論とした場合、タキオン vertex operator は次のように与えられる。

$$\mathcal{V} = c(i)c(-i)e^{ip \cdot X(i,-i)}. \quad (5.12)$$

ただし、 p は閉弦タキオン状態の on-shell 条件

$$p^2 = \frac{4}{\alpha'} \quad (5.13)$$

を満たす。 $X^\mu(z, \bar{z})$ は開弦の座標であり、 $X^\mu(z, \bar{z}) = (X^\mu(z) + X^\mu(\bar{z}))/2$ と定義したときに、相関関数が

$$\langle X^\mu(z)X^\mu(z') \rangle = -2\alpha' \eta^{\mu\nu} \log(z - z') \quad (5.14)$$

で与えられるものとする。以上から、式 (5.8) の一例として、D-25brane 上の閉弦状態 $\langle T; p |$ を

$$\langle T; p | \Psi \rangle = -i \left\langle c(i)c(-i)e^{ip \cdot X(i,-i)} f_{\mathcal{I}}[\Psi(0)] \right\rangle \quad (5.15)$$

と構成できる。

状態 (5.15) は D-25brane CFT 上で定義されているが、これを D-p brane の場合に拡張することは容易である。 $X^\mu(z, \bar{z})$ ($\mu = 0, \dots, p$) をノイマン方向の座標、 $X^i(z, \bar{z})$ ($i = p+1, \dots, 25$) をディリクレ方向の座標とし、 p^μ 、 k^i をそれぞれの方向の運動量とする。弦座標の正則、反正則部分への分解は

$$\begin{aligned} X^\mu(z, \bar{z}) &= \frac{X^\mu(z) + X^\mu(\bar{z})}{2} \\ X^i(z, \bar{z}) &= \frac{X^i(z) - X^i(\bar{z})}{2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

与えられ、閉弦タキオンの on-shell 条件は

$$p^2 + k^2 = \frac{4}{\alpha'} \quad (5.17)$$

となる。これらを用いて、D-p brane 上の閉弦演算子を

$$\langle T; p, k | \Psi \rangle = -i \left\langle c(i)c(-i)e^{ip \cdot X(i,-i)} e^{ik \cdot X(i,-i)} f_{\mathcal{I}}[\Psi(0)] \right\rangle \quad (5.18)$$

を満たす状態として定義できる。以降ではこの $\langle T; p, k |$ を用いて計算を行う。

5.3.2 2 点相関関数

前章で示したように、開弦理論の (tree-level での) 物理的スペクトラムには閉弦状態は存在しない。前節の閉弦状態 $\langle T; p, k |$ を用いて散乱振幅を計算するには、これをゲージ不変な演算子とみなして、CSFT の期待値を計算すればよい。いま、ソース項を

$$\mathcal{O}(\Psi) = \langle T; p, k | \Psi \rangle \quad (5.19)$$

と書けば、 $\mathcal{O}(\Psi)$ は開弦場 Ψ を与えることにより値が定まる演算子であり、 Ψ のゲージ変換に対して不変である。散乱振幅はこのオペレーターの期待値をとることにより求まる。すなわち、

$$\mathcal{A} = \langle\langle \mathcal{O}_1(\Psi)\mathcal{O}_2(\Psi)\cdots\mathcal{O}_N(\Psi) \rangle\rangle \quad (5.20)$$

を計算すればよい。ここで、 $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ は CSFT における期待値であり、(摂動論を用いた場合) CSFT のファインマン則から計算できる。

最も簡単な例として、タキオン演算子の 2 点相関関数を計算してする。D-p brane 上の CSFT から得られるプロパゲーターは

$$\langle\langle |\Psi\rangle_1 |\Psi\rangle_2 \rangle\rangle = \frac{b_0^{(1)}}{L_0^{(1)}} |R\rangle_{12} \quad (5.21)$$

である。ここで、 $|R\rangle_{12}$ はリフレクターである。式 (5.21) を用いてタキオン演算子の 2 点相関関数を計算できる：

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathcal{O}(\Psi)\mathcal{O}'(\Psi) \rangle\rangle &= \langle\langle \langle T; p, k | \Psi \rangle \langle T; p', k' | \Psi \rangle \rangle\rangle \\ &= {}_1 \langle T; p, k | {}_2 \langle T; p', k' | \frac{b_0^{(1)}}{L_0^{(1)}} |R\rangle_{12} \\ &= \int_0^\infty {}_1 \langle T; p, k | {}_2 \langle T; p', k' | b_0^{(1)} e^{-tL_0^{(1)}} |R\rangle_{12}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

式 (5.22) からノイマン方向の運動量デルタ関数部分を抜き出し、改めて書き直すと、われわれの求める振幅は

$$(2\pi)^{p+1} \delta^{p+1}(p+p') \mathcal{A} = \int_0^\infty {}_1 \langle T; p, k | {}_2 \langle T; p', k' | b_0^{(1)} e^{-tL_0^{(1)}} |R\rangle_{12} \quad (5.23)$$

と書き表される。式 (5.23) において、 $\langle T; p, k |$ は開弦を中点で折り畳んでつなげる境界条件を表し、 e^{-tL_0} は、「 ρ 平面」において長さ t の開弦の伝搬を表すから、式 (5.23) は ρ 平

面上の CFT の期待値として計算できる :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \int_0^\infty dt \int_{C_\rho} \langle b(\rho)c(M)c(-M)c(t+M)c(t-M) \rangle_\rho \\ & \times \left\langle e^{ip \cdot X(M,-M)} e^{ip' \cdot X(t+M,t-M)} \right\rangle_\rho \left\langle e^{ik \cdot X(M,-M)} e^{ik' \cdot X(t+M,t-M)} \right\rangle_\rho. \end{aligned} \quad (5.24)$$

ここで, $M = i\pi/2$ は弦の midpoint である. ρ 平面は, 実軸方向に長さ t , 開弦の長さを虚軸方向にとり, $\tau = 0, t$ において弦を midpoint でつなげるような同一視を行ったものである (図 5.4).

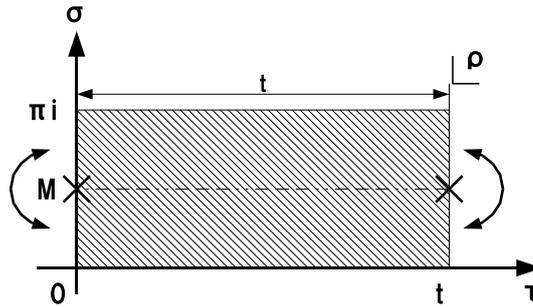


図 5.4 ρ 平面. 斜線部が世界面を表す. 曲がった矢印は, $\tau = 0, t$ において弦を midpoint で折り重ねるような同一視を表す.

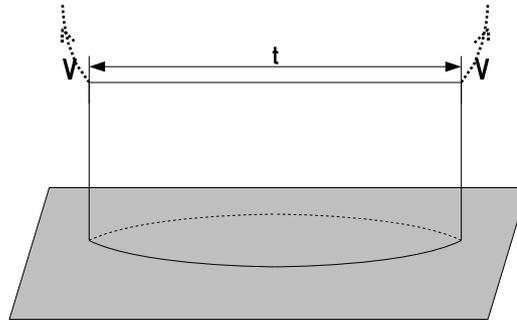


図 5.5 2点相関関数が生成する世界面: 図 5.4 を立体的に描いたものである. 弦の midpoint にあるオペレーター V から閉弦が放出される. 開弦の境界は D-p brane を表すので, この図は D-p brane からの閉弦の放出過程に対応している.

式 (5.24) が計算すべき散乱振幅の表式であるが, 通常, 開弦 CFT における期待値は, 実軸を境界を持つような「 z 平面」で行うのが普通であり, (5.24) の表式のまま計算を行うことは難しい. しかしながら, 図 5.4 の斜線領域を上半平面に移す写像 $z(\rho)$ が見つければ, その写像を用いて z 平面上で計算が行える.

この写像 $z(\rho)$ を見つける際に手がかりとなるのが, 共形写像の満たす微分方程式である. この微分方程式の形は z 面上の特異性から決定される.

二つの surface state を張り合わせて得られる散乱振幅 (5.24) を考える前に、状態 $\langle T; p, k |$ のみを考えてみる。この状態は、vertex operator が付随することを除けば、写像 $f_{\mathcal{I}}(w) = 2w/(1-w^2)$ によって定義される surface state (すなわち, identity state) であり、 z 面での構造は図 5.6 のようになる。図 5.6 の z 平面における特異性を調べるの

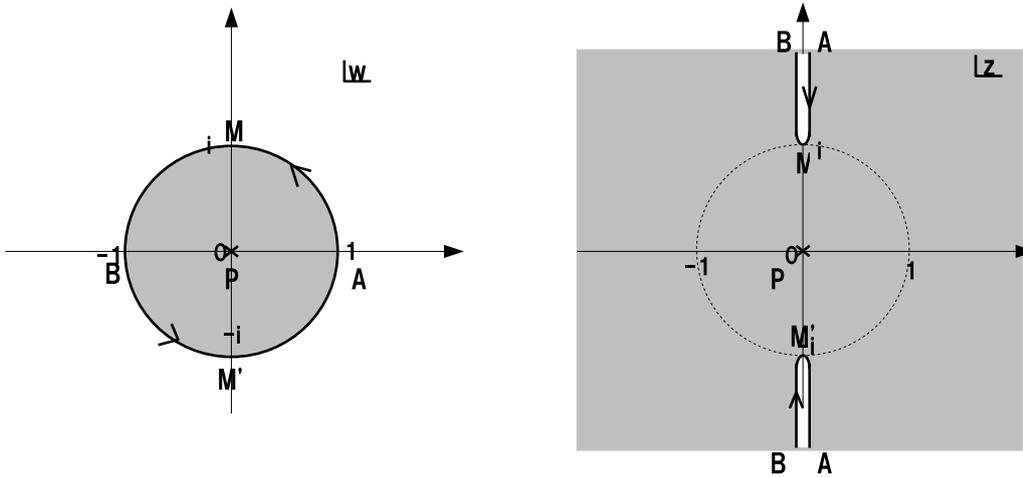


図 5.6 $z = \frac{2w}{1-w^2}$: 半径 1 の単位円を複素平面全体へ写像する。 z 平面には $z = \pm i$ を分岐点とするカットがある。

には、第 6 章で解説する quadratic differential を用いるのが便利である。 ρ 平面は局所的には平坦な帯をつないだものだから、パラメータ ρ を $w = e^\rho$ として導入できる。 $z = 2w/(1-w^2)$ を用いれば、

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \frac{1}{z^2(z^2+1)} \tag{5.25}$$

が成り立つことがわかる。

式 (5.25) は図 5.6 の z 平面に現れる特異性の情報をすべて含んでいる。 $z = 0$ の 2 次の極より、ここに puncture があることがわかり、 $z = \pm i$ の 1 次の極からはカットが存在することが読み取れる。

上記の例を参考にすれば、2点相関関数 \mathcal{A} に対応する z 平面の特異性は図 5.7 のように予想できる。 $x(t), y(t)$ は ρ 平面での帯の長さ t に依存し、実数値をとるパラメーターである。

図 5.7 に対応する quadratic differential は

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \frac{N(t)}{(z^2+x(t))(z^2+y(t))} \tag{5.26}$$

で与えられる。

以上の予想に基づいて、閉弦散乱振幅 \mathcal{A} に対応する z 平面への写像を求めることができる。便宜上、 ρ 平面を時計回りに 90 度回転させた座標 $u = i\rho$ を考える (図 5.8)。ここで、パラメーター τ を $it = \pi\tau/2$ として導入した。

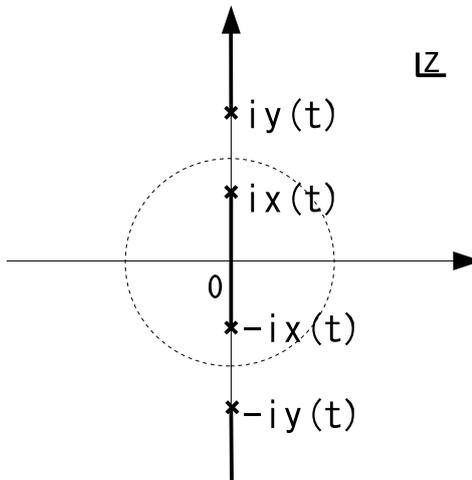


図 5.7 2点散乱振幅の z 平面

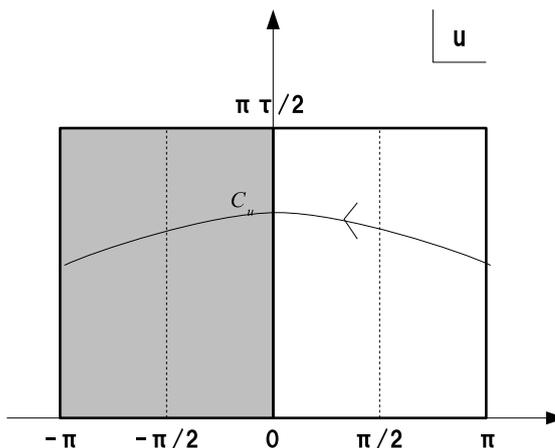


図 5.8 u 平面

u 平面から z 平面への写像は次式で与えられる.

$$z = -i \frac{\vartheta_1(u|\tau)}{\vartheta_4(u|\tau)}. \tag{5.27}$$

ここで、 $\vartheta_i(u|\tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) はテータ関数 [25] である. $z(u)$ は実軸方向に π , 虚軸方向に $\pi\tau/2$ の周期をもつ 2 重周期関数となり, 図 (5.8) で色の塗られている部分が u 平面の基本領域である.

$\vartheta_i(0|\tau) = \vartheta_i$ と略記すると, $z(u)$ に関する quadratic differential 方程式は

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = -\frac{1}{(\vartheta_2^2 + z^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2 + z^2\vartheta_2^2)} \tag{5.28}$$

となるので [25], この式からただちに z 平面での特異性がわかる. 今, 式 (5.28) から, 1

次の極が $z = \pm i\vartheta_2/\vartheta_3$, $z = \pm i\vartheta_3/\vartheta_2$ であるから,

$$x = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \quad (5.29)$$

とおくと, $z = \pm ix$, $z = \pm ix^{-1}$ に分岐点を持つことがわかる. この写像の様子を図 5.9 に示した.

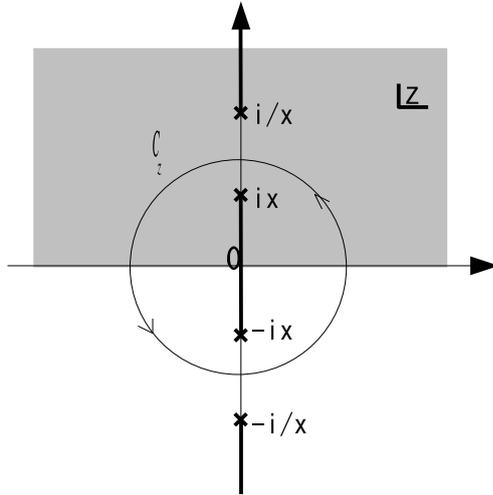


図 5.9 閉弦散乱振幅の z 平面

モジュライ x と t との対応は, 式 (5.29) から,

$$t = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad t = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \quad (5.30)$$

であることがわかる. x の値の範囲は $0 \leq x \leq 1$ であり, 図 5.9 おいて, プロパゲーターがつぶれるような値 ($t = 0$) から, 二つの閉弦演算子が無限に遠ざかる値 ($x = +\infty$) までを全てカバーしていることがわかる.

このモジュライ変数 x を用いて, z 平面上で散乱振幅を書き表せば以下のようなになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int_0^1 dx \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} \oint_{C_z} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{dz}{du} \right) \langle b(z)c(ix)c(-ix)c(ix^{-1})c(-ix^{-1}) \rangle_z \\ \langle e^{ip \cdot X(ix, -ix)} e^{ip' \cdot X(ix^{-1}, -ix^{-1})} \rangle_z \\ \langle e^{ik \cdot X(ix, -ix)} e^{ik' \cdot X(ix^{-1}, -ix^{-1})} \rangle_z. \end{aligned} \quad (5.31)$$

ここで, C_z は図 5.9 に描かれるような閉経路である.

式 (5.31) に現れる期待値は実軸に境界を持つ CFT のものであるから, よく知られた上半平面の相関関数

$$\langle X^M(z)X^N(z') \rangle = -2\alpha' \eta^{MN} \log(z - z'), \quad (5.32)$$

$$\langle b(z)c(z') \rangle = \frac{1}{z - z'} \quad (5.33)$$

を用いて計算すればよい。\$N, M\$ は \$\mu, i\$ いずれかの添字である。それぞれの期待値を計算すれば以下の結果が得られる。

$$\langle b(z)c(ix)c(-ix)c(ix^{-1})c(-ix^{-1}) \rangle = -\frac{4(1-x^4)^2}{x^4(z^2+x^2)(z^2+x^{-2})}, \quad (5.34)$$

$$\left\langle e^{ip \cdot X(ix, -ix)} e^{ip' \cdot X(ix^{-1}, -ix^{-1})} \right\rangle = 2^{-\alpha' s} \left(\frac{x^2}{1-x^4} \right)^{-\alpha' s}, \quad (5.35)$$

$$\left\langle e^{ik \cdot X(ix, -ix)} e^{ik' \cdot X(ix^{-1}, -ix^{-1})} \right\rangle = 2^{-4-\alpha' s} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{-\alpha'(s+t/2)-4}. \quad (5.36)$$

ここで、パラメーター \$s = -p^2 = -p'^2\$ と \$t = (k+k')^2\$ を導入し、ディリクレ方向の運動量保存則 \$p^\mu + p'^\mu = 0\$ を用いた。

次に、式 (5.31) の残りの部分の評価を行う。まず、\$b(z)\$ に関する積分を計算する際に、式 (5.34) が次のように変形できることに注目する。

$$\begin{aligned} \langle b(z)c(ix)c(-ix)c(ix^{-1})c(-ix^{-1}) \rangle &= -\frac{4(1-x^4)^2}{x^4(z^2+x^2)(z^2+x^{-2})} \\ &= 4\vartheta_3^4 \frac{(1-x^4)^2}{x^2} \left(\frac{dz}{du} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

ただし、2行目で方程式 (5.28) を用いた。これを用いれば、式 (5.31) の \$z\$ 積分は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \oint_{C_z} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{dz}{du} \right) \langle b(z)c(ix)c(-ix)c(ix^{-1})c(-ix^{-1}) \rangle &= \oint_{C_z} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{dz}{du} \right) 4\vartheta_3^4 \frac{(1-x^4)^2}{x^2} \left(\frac{dz}{du} \right)^{-2} \\ &= \oint_{C_u} \frac{du}{2\pi} 4\vartheta_3^4 \frac{(1-x^4)^2}{x^2} \\ &= -4\vartheta_3^4 \frac{(1-x^4)^2}{x^2}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

次に \$t\$ 積分を評価することを考える。テータ関数が満たす微分方程式 [25]

$$\frac{\partial \vartheta_i(u|\tau)}{\partial \tau} = -\frac{i\pi}{4} \frac{\partial^2 \vartheta_i(u|\tau)}{\partial u^2} \quad (5.39)$$

を用いれば、\$x = iz(\pi/2)\$ より

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\pi}{4} \frac{d^2 z}{du^2} \Big|_{u=\pi/2} \quad (5.40)$$

である。この式の右辺をを QD 方程式 (5.28) を用いて書きかえ、\$u = \pi/2\$ とおくことにより、次式が示せる。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\vartheta_3^4}{2} x(1-x^4). \quad (5.41)$$

以上で散乱振幅 \$\mathcal{A}\$ の全ての部分がモジュライ \$x\$ で書き変えられたことになる。式 (5.35), (5.36), (5.38), (5.41) を式 (5.31) に代入すれば、最終的な結果として \$x\$ で表された振幅を得ることができる。

$$\mathcal{A} = \int_0^1 dx \frac{1-x^4}{2x^3} \left\{ \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \right\}^{-\alpha' s} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{-\alpha' t/2-4}. \quad (5.42)$$

弦理論におけるツリーレベルの散乱振幅は、式 (5.42) よりも単純なモジュライ依存性を示すことが普通である。実は、 $SL(2, C)$ 変換を用いれば、式 (5.42) をよく知られた形に書き直せることがわかる。 z 平面において、

$$z' = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{z + i/x}{z - i/x} \quad (5.43)$$

という変換を考える。 $z = i/x$ はこの変換で

$$y = \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)^2 \quad (5.44)$$

へと移される。このモジュライ y を用いれば、振幅は

$$\mathcal{A} = \int_0^1 dy y^{\alpha' t/4 - 2} (1 - y)^{-\alpha' s - 2} = B(-\alpha' t/4 - 1, -\alpha' s - 1) \quad (5.45)$$

と、ベータ関数で表される。この表形は弦理論のツリーレベル散乱振幅として典型的なものであり、既知の結果 [27, 26, 28] と完全に一致する。

以上の散乱振幅の計算においては、QD 方程式 (5.28) が決定的な役割を果たした。すべての計算は、この方程式とモジュライの変換則を使って行われ、写像の具体的な形を用いる必要はなかった。この性質は CSFT における他のファインマン図についても一般的に成り立つ。すなわち、QD とそのモジュライ空間の構造がわかっているならば、共形写像の表式を用いずにファインマン図を計算できる。

5.3.3 振動子表示による計算

前節では閉弦オペレーターを、条件式 (5.18) のように定義して、CFT を用いて散乱振幅を求めた。ここでは、閉弦オペレーターの振動子表示を用いた計算によって同じ結果を導く。

閉弦オペレーターの振動子表示は、次の形で与えられる。

$$\langle T; p, k | = \langle 0 | c_{-1} c_0 \exp(E_{gh}) \otimes \langle -p | \exp(E_N) \otimes \langle -k | \exp(E_D), \quad (5.46)$$

$$E_{gh} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n b_n, \quad (5.47)$$

$$E_N = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{2n} \alpha_n \cdot \alpha_n - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{n} p \cdot \alpha_{2n} \right), \quad (5.48)$$

$$E_D = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{2n} \alpha_n \cdot \alpha_n - i \frac{2\sqrt{2\alpha'}}{2n-1} k \cdot \alpha_{2n-1} \right). \quad (5.49)$$

α_n の時空の添字 (μ, i) に関する和は、ディリクレ、ノイマンそれぞれの部分空間でとられているとして、必要なとき以外は明示しない。これらの表式を用いて、振幅

$$\mathcal{A} = \langle T; p, k | \frac{b_0}{L_0} | T; p', k' \rangle \quad (5.50)$$

を計算する。 $|T; p', k' \rangle$ は $\langle T; p', k' |$ をリフレクター $|R\rangle_{12}$ で反転させたものである。 $q = e^{-t}$ というモジュライ変数を使えば、プロパゲーター部分は

$$\frac{1}{L_0} = \int_0^{\infty} e^{-tL_0} = q^{L_0} \quad (5.51)$$

と書ける. e^{-tL_0} は世界面上で時間発展を記述するオペレーターであり, 各振動子に対して

$$\begin{aligned}\alpha_{-n} &\rightarrow q^n \alpha_{-n} \\ c_{-n} &\rightarrow q^n c_{-n} \\ b_{-n} &\rightarrow q^n b_{-n}\end{aligned}\tag{5.52}$$

のように作用する. 従って, 次の期待値を求めることにより散乱振幅が求まる.

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty dt \langle T; p, k : q | T; p', k' \rangle\tag{5.53}$$

ここで, $\langle T; p, k : q |$ は $\langle T; p, k |$ で式 (5.52) の置き換えを行ったものである. $\langle T; p, k |$ の表式は各振動子の 2 次の項に関して対角である. 従って, (5.53) の計算は面倒ではあるがそれほど難しいものではない. この計算を行った結果, 各振動子に対して次の表式を得る.

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty dt 4^{-2\alpha' s - 2} q^{-\alpha' s - 1} \mathcal{A}_{gh} \times \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_D,\tag{5.54}$$

$$\mathcal{A}_{gh} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),\tag{5.55}$$

$$\mathcal{A}_N = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-(p+1)/2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{4n}}{1 - q^{4n-2}} \right]^{-4\alpha' s},\tag{5.56}$$

$$\mathcal{A}_D = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-(25-p)/2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right]^{-4\alpha' s - 16} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}} \right]^{4\alpha' (s+t/2) + 16}\tag{5.57}$$

これらの表式を式 (5.54) に代入してまとめれば, 次の結果を得る.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^\infty dt \frac{1}{16q} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-12} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right\}^{16} \\ &\quad \times \left[16q \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - q^{4n})(1 + q^{2n})(1 - q^{2n-1})}{(1 - q^{4n-2})(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})} \right\}^4 \right]^{-\alpha' s} \\ &\quad \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right]^{-2\alpha' t - 16}.\end{aligned}\tag{5.58}$$

この表式はモジュライ q を含む無限積を含んでいるので, テータ関数の無限積表示を用いれば, CFT により導出した結果と比較できるはずである. 実際, [25] にある数々の公式を駆使すれば, 以下の公式が示せる.

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right]^4,\tag{5.59}$$

$$-\frac{dx}{dt} \frac{1 - x^4}{2x^3} = \frac{1}{16q} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-12} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right\}^{16},\tag{5.60}$$

$$\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2} = 16q \left\{ \frac{(1 - q^{4n})(1 + q^{2n})(1 - q^{2n-1})}{(1 - q^{4n-2})(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})} \right\}^4.\tag{5.61}$$

式 (5.59), (5.60), (5.61) を式 (5.58) に代入すれば, 式 (5.58) と一致することがわかる. 以上で, 振動子表示における計算と CFT による計算とが完全に一致することが示せた.

第 6 章

Quadratic differentials と世界面の幾何学

本論文において、これまでにさまざまな共形写像が現れた。例えば、第 4 章では写像 $f_a(w)$ によりゲージ固定を行った。第 5 章では二重周期関数 $z(u)$ を使って閉弦オペレーターの散乱振幅を計算した。しかしながら、その関数形は一般に複雑である。それゆえ、様々な世界面の性質を調べようとするとき、個々に共形写像を求めることは非現実的であり、効率が悪い。

しかしながら、上記のような写像の性質を系統的に調べることのできる強力な道具が存在する。それは **quadratic differentials (QD)** [29] と呼ばれるリーマン面上の 2 次形式である。様々な弦の場の理論において、摂動論的散乱振幅と QD は 1 対 1 に対応することが知られている [30, 24]。したがって、QD は弦の場の理論の「ファインマン図」そのものであると言ってよい。本章では、QD を用いて本論文で現れた様々な世界面の性質を調べる。

6.1 Quadratic Differentials

本節では、文献 [29] を参考にして QD を導入しその定義を簡単に述べる。おおまかに言えば、QD とは CFT のエネルギー・運動量テンソルの正則部分 $T_{zz}(z)$ と同じ変換則をもつテンソル場のことである。

定義 6.1 R を複素構造 (U_ν, h_ν) をもつリーマン面とする。 R 上の quadratic differential ϕ とは、局所座標表示 $z_\nu = h_\nu(P)$ ($P \in R$) における関数要素 ϕ_ν の集合で、変換則が

$$\phi_\nu(z_\nu)dz_\nu^2 = \phi_\mu(z_\mu)dz_\mu^2, \quad dz_\nu = \frac{dz_\nu}{dz_\mu}dz_\mu \quad (6.1)$$

で与えられるものである。

定義 6.2 R の部分集合 L で

$$\phi(z)dz^2 < 0, \quad (\phi(z)dz^2 > 0) \quad (6.2)$$

を満たす曲線群をそれぞれ 垂直 (水平) 軌道という。

例 6.1 $D = \{\rho \in \mathbb{C}, 0 \leq \Im \rho \leq 2\pi\}$ とする. $\phi(\rho) = 1$ として, D 上の QD を

$$d\rho^2 \quad (6.3)$$

で与える. $\rho = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とパラメトライズすれば, 垂直軌道は $d\rho = \pm idy$ となる (図 6.1).

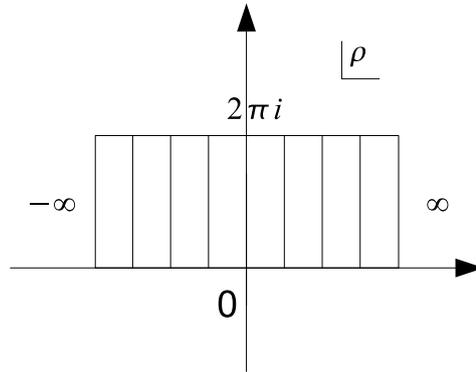


図 6.1 $\phi(\rho) = 1$ の垂直軌道

図 6.1 は, 横軸に弦の進行方向をとった場合, 平坦な世界面における弦の等時刻線を表す. 以降では主にこの等時刻線を考えるので, 垂直軌道を単に「軌道」と呼ぶことにする.

定義 6.3 リーマン面 R の座標系 (U, z) での QD が $\phi(z)dz^2$ と表示されるとき,

$$d\rho^2 = \phi(z)dz^2 \quad (6.4)$$

をみたす座標系 (U, ρ) を自然な座標系という.

式 (6.4) を微分方程式とみなして解くことにより, ρ と z の対応を求めることができる. 式 (6.4) のルートをとれば,

$$d\rho = \pm \sqrt{\phi(z)} dz \quad (6.5)$$

を得る. $\sqrt{\phi(z)}$ の一価な分岐を適当にとったのち, この式を積分すれば, U 上で

$$\rho = \int^z dz' \sqrt{\phi(z')} - t \quad (6.6)$$

を得る. t は積分定数である. この座標 ρ には符号と積分定数の任意性があるが, この自由度は単に弦の伝搬する時間の向きと原点をあらわしているだけだから, 勝手に固定できる.

$$\Phi(z) \equiv \int^z dz' \sqrt{\phi(z')} \quad (6.7)$$

と定義し, 式 (6.6) を z について解けば, 関係式

$$z = \Phi^{-1}(\rho + t) \quad (6.8)$$

を得る.

分岐点をもつ複素関数 $f(z)$ を考えたとき、この関数の住む空間としてリーマン面が自然に導入されることはよく知られている。同様に、複素平面上の QD $\phi(z)$ として零点や極を持つものを与えると、その特異性から ϕ の住むリーマン面が自然に定義できる。関数の場合と異なるのは、QD 自体は $1/n$ 乗のべきを持たないにもかかわらず、分岐点を持ったリーマン面が現れる場合があることである。

例 6.2 (自由弦の QD) リーマン球面 $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、局所座標系 $(U, z), (V, z')$ を考えたとき、座標変換は $z' = -1/z$ である。このとき、 S 上の QD を、 U 上の表示

$$\phi = \frac{1}{z^2} dz^2 \tag{6.9}$$

で定義する。 V での表示は座標変換を行えば

$$\phi = \frac{1}{z'^2} dz'^2 \tag{6.10}$$

である。すなわち、 ϕ は $z = 0, \infty$ で 2 次の極を持つ。次に ϕ の軌道を求める。 U 座標において $z = re^{i\theta}$ とパラメトライズし、式 (6.9) に代入して、

$$\phi = \frac{1}{r^2} (dr^2 - d\theta^2 + 2idr d\theta) < 0 \tag{6.11}$$

を解けば、軌道は $dz = \pm d\theta$ で与えられるから、原点を中心とする円環であることがわかる。さらに、この QD の自然な座標系を調べてみる。式 (6.6) を式 (6.9) に適用すれば、

$$\Phi(z) = \log z \tag{6.12}$$

と求まり、この式を z について解けばその解として $z(\rho) = e^\rho$ が得られる。この写像は閉弦のフラットな「 ρ 平面」と原点を puncture にもつ「 z 平面」との対応そのものであり、よく知られたものである。軌道は弦の等時刻の線に対応している (図 6.2)。

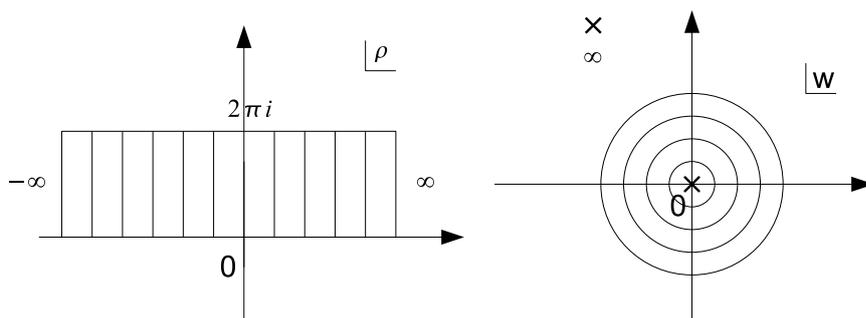


図 6.2 ρ 平面と z 平面の対応

最後に、もう少し非自明な例として CSFT の 3 弦相互作用を調べる。

例 6.3 $D = \{g|g \in \mathbb{C}, |g| \leq 1\}$ とする。このとき、 D 上の QD を

$$\phi = \frac{9g}{(g^3 - 1)^2} dg^2 \tag{6.13}$$

で定義する. この QD は $g = 0$ に 1 次の零点, $g = 1, \omega, \omega^2$ に 2 次の極を持っている. 自然な座標 ρ を考えたとき, $g(\rho)$ が満たす微分方程式は

$$\left(\frac{dg}{d\rho}\right)^2 = \frac{(g^3 - 1)^2}{9g} \quad (6.14)$$

である. この微分方程式の解のうち, 異なる軌道を与えるものはつぎの 3 つである.

$$g(\rho) = \left\{ \left(\frac{1 + ie^\rho}{1 - ie^\rho}\right)^{\frac{2}{3}}, \omega \times \left(\frac{1 + ie^\rho}{1 - ie^\rho}\right)^{\frac{2}{3}}, \omega^2 \times \left(\frac{1 + ie^\rho}{1 - ie^\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}. \quad (6.15)$$

この写像は, $w = e^\rho$ とすれば, 2 章の式 (2.8) で与えた 3 弦相互作用の写像 $g^{(1)}(w)$, $g^{(2)}(w)$, $g^{(3)}(w)$ にほかならない. 垂直軌道の様子は図 6.3 のようになる.

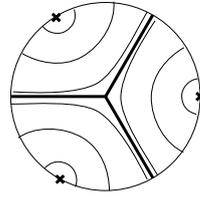


図 6.3 単位円上の 3 弦相互作用とその軌道

D を上半平面に移す写像 $g = (1 + iz)/(1 - iz)$ を式 (6.13) に適用すれば上半平面の QD が得られる.

$$d\rho^2 = \frac{9(z^2 + 1)}{z^2(z^2 - 3)^2} dz^2. \quad (6.16)$$

上式の右辺は, $z = 0, \pm\sqrt{3}$ に 2 次の極をもち, $z = \pm i$ に 1 次の零点をもつ. この表示に対して, ρ 座標との対応 $z(\rho)$ を求めれば, 2 章の $f^{(1)}(w)$, $f^{(2)}(w)$, $f^{(3)}(w)$ と同じ表式が得られる.

QD が与えられれば, その軌道の局所的な様子は簡単に求めることができ, 具体的な写像の表式は必要ない. 写像 $z(\rho)$ の形が複雑なのはそれが QD を積分して得られるものだからである.

6.2 プロパゲーター QD

CSFT のファインマン図のうち, 最も簡単なものは自由な弦の伝搬を表すプロパゲーターの世界面であろう. 通常不安定な真空におけるプロパゲーターは L_0 であるが, ユニバーサル解のまわりで展開された理論には様々なプロパゲーターが現れる. それらの性質を QD を用いて調べるのが本節の目的である.

一般に, 開弦の運動項演算子は単位円上の座標 w と無限小ベクトル場 $v(w)$ を用いて

$$L_v = \oint dw v(w) T(w) \quad (6.17)$$

の形に表される. プロパゲーターはこの逆演算子であるから, オペレーター

$$\frac{1}{L_v} = \int_0^\infty dt e^{-tL_v} \quad (6.18)$$

として表される。付録 A によれば、時刻 t におけるこの演算子の被積分項はプライマリー場に次のように作用する。

$$e^{tL_v} \phi(w) e^{-tL_v} = \left(\frac{dz_t(w)}{dw} \right)^h \phi(z_t(w)), \quad (6.19)$$

$$z_t(w) = e^{tv(w)\partial_w} w. \quad (6.20)$$

$z_t(w)$ は単位円を時刻 t における世界面に移す写像である。この写像に対応する QD は以下のようにして求められる。

付録 A の式 (A.14) と同様な計算をすれば、 $z_t(w)$ は次の微分方程式を満たすことがわかる。

$$v(w)\partial_w z_t(w) = v(z_t(w)). \quad (6.21)$$

この式を平方すれば、次式を得る。

$$\frac{dw^2}{v(w)^2} = \frac{dz_t^2}{v(z_t)^2} \quad (6.22)$$

自然な座標 ρ を

$$\rho = \int^w dw' \frac{1}{v(w')} = \Phi(w), \quad (\text{ただし, 積分定数を } 0 \text{ とする}) \quad (6.23)$$

と定義し、式 (6.22) に適用すれば、

$$d\rho^2 = \frac{1}{v(z_t)^2} dz^2 \quad (6.24)$$

を得る。この式から、 z_t 平面での軌道は v の関数形から完全に決定されることがわかる。軌道を求めるために z_t の関数形を求める必要はない。

式 (6.24) から得られる微分方程式は t に依存しないから、これを解いて得られる関数 $z_t(\eta)$ も t に依存しないことになってしまう。実は t は積分定数として導入されることが以下のようにしてわかる；式 (6.24) のルートをとれば、1 階の微分方程式

$$\frac{d\rho}{dz} = \pm \frac{1}{v(z)} \quad (6.25)$$

が得られる。± の不定性は η の向きを変えるだけであり、軌道を変えないので + に選ぶ。この式を積分すれば、解

$$\rho = \Phi(z) - t \quad (6.26)$$

を得る。 t は積分定数である。この式を z について解けば、

$$z(\rho) = \Phi^{-1}(\rho + t) \quad (6.27)$$

となり、積分定数が ρ 座標における「時間」に相当することがわかる。さらに、式 (6.27) を座標 w で書けば、

$$z(w) = \Phi^{-1}(\Phi(w) + t) \quad (6.28)$$

となり、付録の式 (A.18) の g が Φ と同じものであることがわかる。

以上のプロパゲーター QD の性質は以下のようにまとめられる。

定義 6.4 (プロパゲーター QD) コンフォーマル変換を生成する無限小ベクトル場 $v(w)$ に対し, プロパゲーター QD を

$$\frac{1}{v(z)^2} dz^2$$

で定義する. プロパゲーターの性質はこの QD の極と零点から決定される.

例 6.4 最も簡単な例として, プロパゲーター L_0 を考えてみる. このとき $v(w) = w$ であり, 式 (6.23) を用いれば,

$$\eta = \Phi(w) = \log w \quad (6.29)$$

と求まる. QD は

$$d\eta^2 = \frac{1}{z^2} dz^2 \quad (6.30)$$

であるから, η は例 6.2 で用いた ρ 座標そのものである. 式 (6.27) より,

$$z_t(\eta) = e^{\eta+t} = e^t e^\eta \quad (6.31)$$

と求まり, $w = e^\eta$ とパラメトライズすれば, 例 6.2 の結果と一致する.

例 6.5 高橋-谷本解のプロパゲーターは, 式 (4.6) から

$$v(z) = (1+a)z + \frac{a}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z}\right) = \frac{a(z^2 + Z(a))(z^2 + Z(a)^{-1})}{z} \quad (6.32)$$

で表される. したがって, 自然な座標 η を導入すれば, QD は

$$d\eta^2 = \frac{4}{a^2} \frac{z^2}{(z^2 + Z(a))^2 (z^2 + Z(a)^{-1})^2} dz^2 \quad (6.33)$$

で与えられる. $-1/2 < a < 0$ のときは $Z(a) < 0$ となるので, そのとき $Y(a) = -Z(a)$ とおけば, 式 (6.33) は実軸上に $\pm\sqrt{Y(a)}, \pm\sqrt{Y(a)^{-1}}$ の 4 つの 2 次の極を持つ. 2 次の極は弦の puncture にあたるから, その付近での軌道は極を囲む円周である. また, 式 (6.33) は $z = 0$ に 2 次の零点をもつ. $z = 0$ の近傍で, QD は

$$d\eta^2 \sim \frac{4}{a^2} z^2 dz^2 \quad (6.34)$$

のようになるから, $z \sim \pm\sqrt{\eta}$ とふるまうことがわかる. この零点近傍の軌道は図 6.4 のようになる. 特異点付近での軌道をうまくつながるようにつなぎあわせれば, z 面全体の軌道がどのようなかが把握できる. 例として, 図 6.5 に $a = -0.2$ のときの z 平面の軌道を描いた. この図の軌道は極と零点付近の局所的な trajectory をつなぎ合わせたものになっていることがわかる.

$a = -1/2$ においては, 物理的スペクトルが消えることから, プロパゲーターはもはや開弦の伝搬とみなせないはずである. このとき, QD は

$$d\eta^2 = 16 \frac{z^2}{(z^2 - 1)^4} dz^2 \quad (6.35)$$

となり, $z = \pm 1$ に 4 次の極を持つ. この 4 次の極はもともと 2 つにわかれていた 2 次の極が重なることにより生じたものである. $z = 1$ の近傍では, この QD は

$$d\eta^2 = \frac{1}{(z-1)^4} dz^2 \quad (6.36)$$

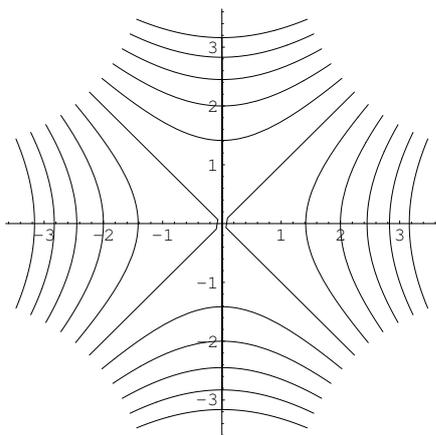
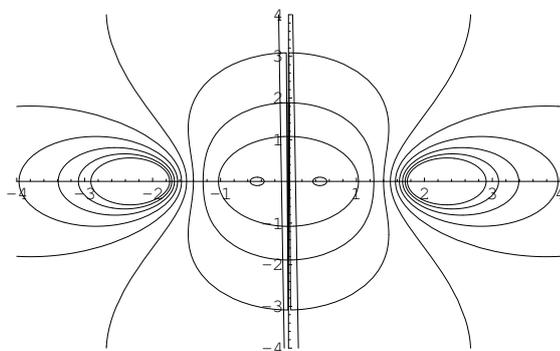


図 6.4 2 次の零点近傍の軌道

図 6.5 $a = -0.2$ のときの z 平面の軌道

の振る舞いを示す．4 次の極の付近での軌道は図 6.6 のようになる．極の位置で開弦の端点が固定されており，開弦の境界が存在しないことがわかる．このことから， $a = -1/2$ の高橋-谷本解のプロパゲーターにおいては，開弦の端点は 1 点に縮んでおり，開弦の伝搬はみられず，むしろ閉弦が伝搬していることがわかる．

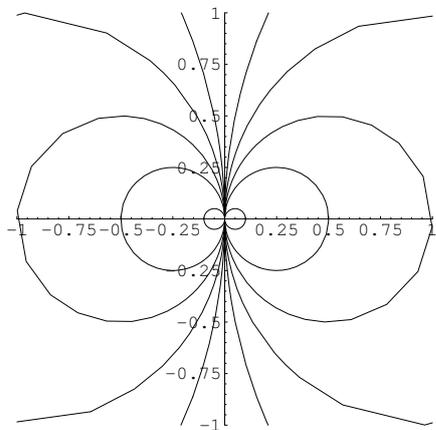


図 6.6 4 次の極近傍の軌道: 2 つの 2 次の極が互いに近づいて重なったものと解釈できる

上の例のように、QDの極の次数を調べることにより、対応するプロパゲーターが境界をもつかどうかを調べる事ができる。特にユニバーサル解が与えられたとき、このQDの構造から解が非自明であるかどうかを決定できる。

第 7 章

結論

本論文では、タキオン凝縮の解析を弦の場の理論 (CSFT) の厳密解を用いて行った。ここで用いた解は「ユニバーサル解」と呼ばれるもので、世界面上の関数 $\exp(h(w))$ を与えることにより定まる、背景時空の詳細な情報に依存しない解である。ユニバーサル解は形式的にはピュアゲージ解であるが、モジュライ空間に特異点が存在し、その点では非自明な解になっている。

この解がタキオン凝縮を表すものであることを確かめるため、第 4 章ではユニバーサル解を真空とした CSFT の物理的状態空間を調べた。その結果、非自明なユニバーサル解を真空とした場合、物理的状態に閉弦が現れないという結果を示すことができた。この結果は Sen 予想を正しく再現しており、ユニバーサル解がタキオン凝縮における安定な真空であるという有力な証拠になった。

第 5 章では、不安定 D-p brane 背景における CSFT にゲージ不変な閉弦演算子を導入して、閉弦の 2 点散乱振幅を計算した。局所的に平坦な世界面 (ρ 平面) から実軸に境界を持つ z 平面への共形写像を求めることができたため、完全な形で振幅を求めることができた。さらに、オペレーターの振動子表示を求めることによっても散乱振幅を導出することができた。

以下に今後の課題と展望を述べる。

これまでにユニバーサル解に関して行われた研究 [6, 19, 33, 7] から、ユニバーサル解がタキオン凝縮における安定な真空を記述することはほぼ確実である。しかしながら、ユニバーサル解に対する最も重要な検証は D-brane 張力の導出である。これに関しては、レベル切断を用いた有望な結果がいくつか得られている。

- 論文 [33] では、高橋-谷本解のまわりで展開した CSFT 作用 $S_a[\Psi]$ の安定な真空 Ψ_{\min} がレベル 6 までの近似で求められ、 $S_a[\Psi]_{\min}$ の a 依存性が調べられている。その結果、 $a = -1/2$ 付近で $S_a[\Psi]_{\min}$ の値に飛びが見られ、しかもその高さは D-brane 張力と高い精度で一致することがわかっている (図 7.1)。
- $S_{-1/2}[\Psi]$ の不安定な真空 Ψ_{\max} をレベル 6 までの近似で求め、作用に代入した結果、D-brane 張力の 120% に相当する値を得た [34]。図 7.2 はその値を図示したものである。

これらの結果、特に論文 [33] の結果から、高橋-谷本解が正しい D-brane 張力を与えることはほぼ確実である。しかしながら、レベル切断近似に根拠がない以上、この近似値が D-brane 張力と等しいと言い切ることはできない。

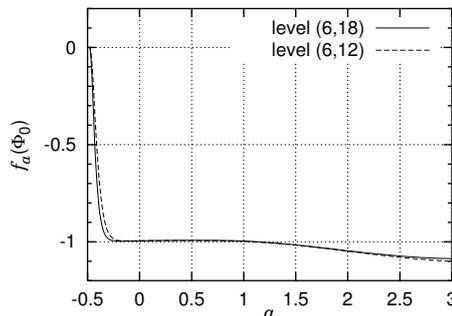


図 7.1 安定な真空におけるポテンシャルの値 (奈良女子大 高橋氏による)

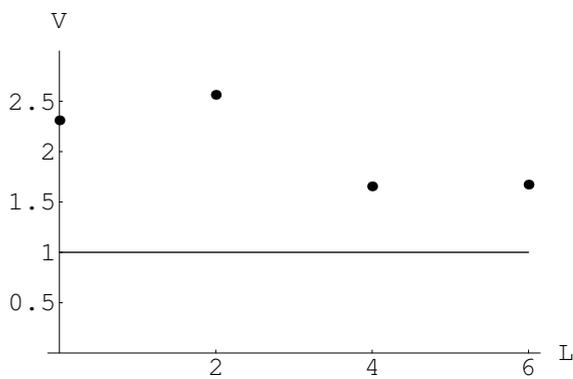


図 7.2 不安定な真空におけるポテンシャルの値：横軸はレベルを表す。

ユニバーサル解 Ψ_0 を用いれば，作用の値は

$$S[\Psi_0] \sim \langle \mathcal{I} | C_L(G) Q C_L(G) | \mathcal{I} \rangle \quad (7.1)$$

の形の真空期待値になる．この形は第5章で求めた閉弦の散乱振幅に似ているが，その場合と異なるのは \mathcal{I} にはさまれる部分は世界面上で「長さ」を持たないことである．つまり，上式は面積0の世界面上で相関関数を計算していることになり，このままでは計算できない．そこで，期待値の適当な場所に，運動項演算子

$$L = \oint v(z) T(z)$$

を用いた正則化因子 $e^{-\epsilon L}$ を挿入すれば，世界面は図7.3のように有限な幅をもつものになり，計算が行えるだろう．こうして求めた期待値に対して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることができればその極限值が求める答である．正則化因子により生成される微小な幅の帯の形は L の取り方に依存する．正則化する前の期待値が持つ（ゲージ及びコンフォーマル）対称性を破るような L をとれば， $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をうまくとれない可能性がある．

閉弦に関しては，第5章の計算をタキオン凝縮後のCSFTで行うことが考えられる．この場合，弦の伝搬は5.1節の図5.1のような閉じた世界面で記述されるから， ρ 平面からこの閉じた面への共形写像が求まれば計算できるはずである．しかしながら，いくつか解決すべき問題がある．

- 散乱振幅の計算は、非自明な高橋-谷本解のまわりの理論における運動項演算子 L' (式 (5.3)) を用いて行われるが、この演算子はツイストされたビラソロ演算子 L'_n の線型結合である。したがって、コンフォーマル変換はツイスト CFT で行う必要がある。その際、特に gluing theorem [10] が変更されることに注意しなくてはならない。
- 世界面はリーマン球面と同相な閉じたりーマン面になるから、3つの複素モジュライを持つ。このうち2つは閉弦演算子の位置を表すモジュライとして導入できるが、あと2つが足りない。この不足分は、もともと開弦の両端であった固定点 (図 5.1 の点 B) の位置を指定することで得られると考えられる。この点には運動量 0 のディラトン状態が出現すると予想されている [21, 22, 23]。この状態は、ツイスト CFT のヒルベルト空間と通常の CFT のものとの関係を考えることにより記述できると思われる。

また、本論文ではユニバーサル解の例として高橋-谷本解のみを扱ったが、第 6 章の手法を用いれば、様々な形の解を分類することができる。高橋-谷本解のうちほとんどはピュアゲージ解であったように、ユニバーサル解のうち、多くのものはピュアゲージ変換によって結ばれていると考えられる。QD とゲージ変換の関数空間での表現をうまく利用すれば、このゲージ自由度をとりのぞき、ユニバーサル解の「物理的モジュライ空間」を得ることができるはずである。

これらの問題を調べることにより、不安定 D-brane の性質がより明らかになるばかりか、弦の場の理論構造をより深く理解できる。タキオン凝縮解は時空の座標に依存しないから、スカラー場の理論との対比でいえば、ポテンシャルの停留点を表す「定数解」にすぎない。また、Chern-Simons 理論との対比では、この解は単に平坦接続解である。本論文では、そのような解が世界面の情報を含む豊富な構造を持つことが明らかになった。これまでに挙げたような課題を考え、解決することにより、タキオン凝縮の物理を理解するのみならず、弦の場の理論の性質についても、これまでにないレベルでの深い理解が得られるであろう。

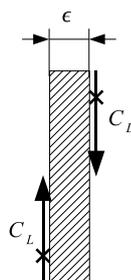


図 7.3 D-brane 張力の正則化

付録 A

コンフォーマル変換の作用

本章では、コンフォーマル変換の CFT 場への作用と、それに関連したいくつかの内容について述べる。ほとんどの内容は [10] で扱われているものである。

原点の近傍で正則な関数 $f(w)$ は、ウエイト h のコンフォーマル場 $\phi(w)$ に対して次のように作用する。

$$f[\phi] = \left(\frac{df(w)}{dw} \right)^h \phi(f(w)). \quad (\text{A.1})$$

上式を

$$f[\phi](dw)^h = (df)^h \phi(f) \quad (\text{A.2})$$

と書き直せば、 $f[\phi]$ は w 座標でのテンソル成分を f 座標を用いて表したものであることがわかる。

一方、CFT におけるコンフォーマル変換はビラソロ演算子 L_n で生成される。ベクトル場 $v(w)$ を

$$v(w) = \sum_n v_n w^{-n+1} \quad (\text{A.3})$$

と定義すれば、生成子の一般的な線型結合は、

$$\oint dw v(w) T(w) = \sum_n v_n L_{-n} \quad (\text{A.4})$$

と表せる。これを用いれば、

$$f(w) = e^{v(w)\partial_w w} \quad (\text{A.5})$$

の関係があるとき、

$$U_f = \exp \left(\oint dw v(w) T(w) \right) \quad (\text{A.6})$$

とおけば、

$$f[\phi] = U_f \phi(w) U_f^{-1} \quad (\text{A.7})$$

となる。式 (A.7) の詳しい証明は論文 [46] にある。

A.1 $v(w) \rightarrow f(w)$

前節では、コンフォーマル写像 $f(w)$ と無限小ベクトル場 $v(w)$ の関係が³

$$f(w) = e^{v(w)\partial_w w} \quad (\text{A.8})$$

で与えられることを述べたが、 $v(w)$ が与えられたときに $f(w)$ の関数型はどのような形で計算できるだろうか。

$$f_t(w) = e^{tv(w)\partial} w \quad (\text{A.9})$$

を考え、 t について展開すれば

$$f_t(w) = w + tv(w) + \frac{t^2}{2!}v(w)\partial_w v(w) + \dots \quad (\text{A.10})$$

となる。上式で $t = 1$ とすれば $f(w)$ を級数の形で求めることができるが、CSFT の解析において、 $f(w)$ の閉じた表式が必要な場合がある。ここでは $f(w)$ の閉じた形を求める方法を紹介する。

まず、演算子 $e^{v\partial}$ を任意の「波動関数」 $\Phi(w)$ への作用と思ったとき、演算子としての等式として

$$e^{v\partial} e^{-v\partial} = 1, \quad (\text{A.11})$$

$$e^{v\partial} w e^{-v\partial} = e^{v\partial} w \quad (\text{A.12})$$

となることがわかる。これらを用いれば、原点のまわりでローラン展開可能な関数 $\Phi(w)$ に対して

$$e^{v\partial} \Phi(w) = \Phi(e^{v\partial} w) = \Phi(f(w)) \quad (\text{A.13})$$

が示せる。式 (A.9) を t で微分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= e^{v\partial} v(w) \partial w \\ &= v(f(w)) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ここで式 (A.14) の 2 行目で式 (A.13) を用いた。式 (A.14) を変数分離の形

$$\frac{df_t}{v(f_t(w))} = dt \quad (\text{A.15})$$

の形にして積分する。

$$g(w) = \int^w dw' \frac{1}{v(w')} \quad (\text{A.16})$$

と書けば、式 (A.15) の積分を実行して

$$g(f_t(w)) = t + C(w) \quad (\text{A.17})$$

を得る。 $C(w)$ は t 積分における「積分定数」である。上式で $t \rightarrow 0$ とすれば、 $f_0(w) = w$ なので、 $C(w) = g(w)$ と決まる。従って式 (A.17) より

$$f_t(w) = g^{-1}(t + g(w)) \quad (\text{A.18})$$

である。上式で $t = 1$ とすれば

$$f(w) = g^{-1}(1 + g(w)) \quad (\text{A.19})$$

となる。 $g(w)$ は $v(w)$ を与えれば決まるから、式 (A.19) が $v(w)$ から $f(w)$ を求める公式である。

公式 (A.19) の応用例として,

$$v(w) = \beta w^{m+1} \quad (m \neq 0) \quad (\text{A.20})$$

の場合に $f(w)$ を求めてみる. 式 (A.16) の定義から

$$g(w) = \frac{1}{\beta(1-n)w^m}, \quad (\text{A.21})$$

$$g^{-1}(w) = (-\beta m w)^{-\frac{1}{n}} \quad (\text{A.22})$$

となる. 従って, 式 (A.19) に式 (A.21), (A.22) を適用すれば

$$f(w) = n_{m,\beta}(w) = (-\beta m + w^{-m})^{-\frac{1}{m}} \quad (m \neq 0) \quad (\text{A.23})$$

を得る. $m = 0$ の場合も同様の手続きで計算すれば答えが求まる.

$$n_{0,\beta}(w) = e^\beta w. \quad (\text{A.24})$$

以上の結果をまとめておく.

例 A.1 ($v(w) = \beta w^{m+1}$ に対応する写像) 無限小ベクトル場

$$v(w) = \beta w^{m+1} \quad (\text{A.25})$$

に対応するコンフォーマル変換 $n_{m,\beta}(w)$ は次式で与えられる.

$$n_{m,\beta}(w) = \begin{cases} (-\beta m + w^{-m})^{-\frac{1}{m}} & (m \neq 0) \\ \beta w^{m+1} & (m = 0) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

A.2 $f(w) \rightarrow v(w)$

逆に, コンフォーマル変換 $f(w)$ が先に与えられた場合, $v(w)$ の表式を求めることができるだろうか. 原理的には, $v(w) = \sum_n v_n w^{-n+1}$ と展開したものを, 式 (A.5) に代入し, $f(w)$ の係数と比較していくことにより, $v(w)$ をべき展開級数として求めることができる.

$v(w)$ と $f(w)$ の関係式 (A.5) に演算子 $v\partial$ を作用させれば,

$$\begin{aligned} v(w)\partial_w f(w) &= v(w)\partial_w e^{v\partial_w} w \\ &= e^{v\partial_w} v(w)\partial_w w \\ &= e^{v\partial_w} v(w) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

となるから, 最後の行に式 (A.13) を適用すれば,

$$v(w)\partial_w f(w) = v(f(w)) \quad (\text{A.28})$$

を得る. 従って, $v(w)$ を決定するには, 関数方程式 (A.28) を解けばよいが, この方程式を閉じた形で解くことは難しい.

知られる解法としては, $f(w)$ が式 (A.26) の合成写像として書かれている場合がある.

$$f(w) = n_{\alpha,n} \circ n_{\beta,m} \circ \dots (w) \quad (\text{A.29})$$

のような分解が見付けられれば、これに対応する変換オペレーターは

$$U_f = e^{\alpha L_n} e^{\beta L_m} \dots \quad (\text{A.30})$$

のようになる。オペレーター代数を用いて、上記の U_f を「運よく」

$$U_f = e^{\sum_n v_{-n} L_n} \quad (\text{A.31})$$

の形に書き直せば、 $v(w) = \sum_n v_n w^{-n+1}$ が求めるベクトル場である。

付録 B

ツイスト CFT とレベル k シフト

本章では、高橋-谷本解のまわりの理論をゲージ固定する際に必要となる様々なコンフォーマル変換の間の関係式を導出する。これらの変換はゴースト CFT の状態空間に作用するもので、マター CFT 部分には影響を与えない。

B.1 ツイスト CFT

ツイストされたエネルギー・運動量テンソル $T'(w)$ は

$$T'(w) = T(w) - \partial J_{gh}(w) \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。 $T(z)$ はマター部分とゴースト部分を合わせた全系のエネルギー・運動量テンソルであるから、中心電荷は 0 であり、コンフォーマル・アノマリーをもたない。 J_{gh} はゴースト数カレントである。演算子積

$$T(z)T(w) \sim \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \quad (\text{B.2})$$

$$T(z)J_{gh}(w) \sim \frac{-3}{(z-w)^3} + \frac{J_{gh}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J_{gh}(w)}{(z-w)}, \quad (\text{B.3})$$

$$\partial J_{gh}(z)\partial J_{gh}(w) \sim \frac{-6}{(z-w)^4} \quad (\text{B.4})$$

を用いれば、定義 (B.1) より

$$T'(z)T'(w) \sim \frac{12}{(z-w)^4} + \frac{2T'(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T'(w)}{(z-w)} \quad (\text{B.5})$$

が示せるので、 $T'(w)$ は中心電荷 24 を持つエネルギー・運動量テンソルであることがわかる。

さらに、演算子積

$$T'(z)c(w) \sim \frac{\partial c(w)}{(z-w)}, \quad (\text{B.6})$$

$$T'(z)b(w) \sim \frac{b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(w)}{(z-w)} \dots \quad (\text{B.7})$$

から、ツイストされた CFT では、 $c(w)$ 、 $b(w)$ はそれぞれウエイト 0、1 の場として変換する。しかしながら、例えば $b(w) = \sum_n b_n w^{-n-2}$ の展開のもとで、 $b(w)$ をウエイト 1

の量と思ってモードを抜き出してみると,

$$\oint dw b(w) w^n = b_{n-1} \quad (\text{B.8})$$

となってしまう. そこで, ゴースト座標のモード展開を

$$c'(w) = w^{-1} c(w) = \sum_n c_n w^{-n}, \quad (\text{B.9})$$

$$b'(w) = w b(w) = \sum_n b_n w^{-n-1} \quad (\text{B.10})$$

と定義する. この定義によって, ゴースト座標の演算子積は不変である:

$$c'(z) b'(w) \sim c(z) b(w) \sim \frac{1}{(z-w)}. \quad (\text{B.11})$$

従って, ゴースト座標を含む全ての量を $c'(w)$, $b'(w)$ で書いておけば, 全ての量は $c = 24$ CFT の演算子積を満たしつつ, 標準的な場とモードの関係式

$$c_n = \oint dw c'(w) w^{n-2}, \quad b_n = \oint dw b'(w) w^n \quad (\text{B.12})$$

を満たすようにできる.

単位円から上半平面への写像 $f(w)$ に対して, ツイストされたコンフォーマル変換の演算子を

$$U'_f = \exp \left(\oint dw v(w) T'(w) \right) \quad (\text{B.13})$$

を定義しておく. $v(w)$ は式 (A.5) で定義される $f(w)$ に対するベクトル場成分である. (B.7) より, $c'(w)$, $b'(w)$ の写像 f に対する変換則が求まる;

$$U'_f c'(w) U_f'^{-1} = c'(f), \quad (\text{B.14})$$

$$U'_f b'(w) U_f'^{-1} = (f')^1 b'(f). \quad (\text{B.15})$$

式 (B.15) を

$$U'_f b'(w) dw U_f'^{-1} = b'(f) df \quad (\text{B.16})$$

と書き換えて, 原点 $w = 0$, $f = f(0)$ のまわりで積分すれば, (写像 f に積分路と衝突する特異性がない場合), 式 (B.10) より

$$U'_f b_0 U_f'^{-1} = b_0 \quad (\text{B.17})$$

を得る. この式はツイストされたコンフォーマル変換が b_0 と可換であることを示している. (B.17) の内容を生成子 L'_n で表現すれば

$$[L'_n, b_0] = 0 \quad (\text{B.18})$$

である.

B.2 レベル k シフト

まず、「レベル k シフト」変換を次のように定義する.

$$c_n^{(k)} = c_{n+k}, \quad b_n^{(k)} = b_{n-k}. \quad (\text{B.19})$$

式 (B.19) から, $c_n^{(k)}$ と $b_n^{(k)}$ との反交換関係はシフト前と変わらない:

$$\{c_m^{(k)}, b_n^{(k)}\} = \delta_{n+m,0}. \quad (\text{B.20})$$

従って, オペレーター \mathcal{O} にシフト変換 $c_n \rightarrow c_n^{(k)}$, $b_n \rightarrow b_n^{(k)}$ を施したものを $\mathcal{O}^{(k)}$ と書くことにすると,

$$[\mathcal{O}^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}] = [\mathcal{O}, \mathcal{P}] \quad (\text{B.21})$$

のように, (反) 交換関係はシフト前と同じである.

定義 (B.19) を用いれば, シフトされたゴースト座標

$$c^{(k)}(w) = \sum_n c_n w^{-n+1+k}, \quad b^{(k)}(w) = \sum_n b_n w^{-n-2-k}, \quad (\text{B.22})$$

が定義できる. レベル k シフトに関しては, 全てのオペレーター積はシフト前と同様であり, $c^{(k)}(w)$, $b^{(k)}(w)$ のウェイトも変わらない. 従って, ツイストの場合と同様に写像 f に対して, オペレーター

$$U_f^{(k)} = \exp\left(\oint dw v(w) T^{(k)}(w)\right) \quad (\text{B.23})$$

を定義しておけば, コンフォーマル変換は次式で定義される.

$$U_f^{(k)} c^{(k)}(w) U_f^{(k)-1} = (f')^{-1} c^{(k)}(f), \quad (\text{B.24})$$

$$U_f^{(k)} b^{(k)}(w) U_f^{(k)-1} = (f')^2 b^{(k)}(f). \quad (\text{B.25})$$

B.3 ツイストとレベル k シフトの関係

本節では, ツイストされた CFT のコンフォーマル変換 U'_f と, シフトされた CFT のコンフォーマル変換 $U_f^{(k)}$ の間の関係式

$$U_f^{(k)} = \text{const.} \times U'_f \times \exp \tilde{q} \left(\log \frac{f^{k+1}}{w^{k+1} \partial f} \right) \quad (\text{B.26})$$

を導く.

$U_f^{(k)}$, U'_f の違いはゴースト部分のみであるから, 式 (B.26) の両辺がゴースト座標 $c^{(k)}(w)$, $b^{(k)}(w)$ に対して同じように作用することが証明できれば, 式 (B.26) が示せたことになる. すなわち,

$$U_f^{(k)} c^{(k)}(w) U_f^{(k)-1} = U'_f e^{\tilde{q}(g)} c^{(k)}(w) e^{-\tilde{q}(g)} U'_f{}^{-1} \quad (\text{B.27})$$

$$U_f^{(k)} b^{(k)}(w) U_f^{(k)-1} = U'_f e^{\tilde{q}(g)} b^{(k)}(w) e^{-\tilde{q}(g)} U'_f{}^{-1} \quad (\text{B.28})$$

を示すことが本節の目的である．ここで

$$g(w) = \log (f^{k+1}/w^{k+1}\partial f) \quad (\text{B.29})$$

とおいた．

まず，式 (B.27) の左辺の計算を行う．式 (B.22) より，

$$\begin{aligned} [\tilde{q}(g), c^{(k)}(w)] &= [\tilde{q}(g), w^k(w)] \\ &= w^k g(w) c(w) \\ &= g(w) c^{(k)}(w) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

であるから，

$$e^{\tilde{q}(g)} c^{(k)}(w) e^{-\tilde{q}(g)} = e^{g(w)} c^{(k)}(w) \quad (\text{B.31})$$

が示せる．

次に， $c^{(k)}(w)$ と $c'(w)$ の関係は，(B.9) と (B.22) より

$$c^{(k)}(w) = w^{k+1} c'(w) \quad (\text{B.32})$$

となっていることがわかる．これを用いて $c^{(k)}(w)$ にツイストされた変換 U'_f を作用させれば

$$\begin{aligned} U'_f c^{(k)}(w) U_f'^{-1} &= w^{k+1} U'_f c'(w) U_f'^{-1} \\ &= w^{k+1} c'(f) \\ &= \frac{w^{k+1}}{f^{k+1}} c^{(k)}(f) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

となる．式 (B.33)，(B.31) をあわせれば，式 (B.27) の右辺は

$$\begin{aligned} U'_f e^{\tilde{q}(g)} c^{(k)}(w) e^{-\tilde{q}(g)} U_f'^{-1} &= e^{g(w)} \frac{w^{k+1}}{f^{k+1}} c^{(k)}(f) \\ &= (\partial f)^{-1} c^{(k)}(f) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

と計算できる．ただし式 (B.34) の 2 行目で式 (B.29) を用いた．式 (B.34) の左辺はレベル k シフトのコンフォーマル変換であるから，式 (B.24) より

$$U_f^{(k)} c^{(k)}(w) U_f^{(k)-1} = (\partial f)^{-1} c^{(k)}(f) \quad (\text{B.35})$$

となる．上式の右辺は式 (B.34) と等しいから，式 (B.27) が示せた．

$b(w)$ に対しても，上記の計算と同様な方法で式 (B.28) が示せる．以上で目的とする関係式 (B.26) が示せた．

付録 C

ゲージ不変な閉弦演算子の性質

この章では、第 5 章の式 (5.8) で定義された閉弦演算子 Σ の性質を確かめる。

C.1 線形ゲージ不変性

閉弦ソース項の無限小ゲージ変換に対する不変性は次の式で表現される。

$$\int \Sigma * (Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi) = 0. \quad (\text{C.1})$$

ここで、 Ψ はゴースト数 1 の開弦場、 Λ はゴースト数 0 の弦場である。実は、ゲージ不変性は線形部分 (Q の部分) と Λ の 1 次の部分についてそれぞれ独立に成り立つ。以下でこれを示すことにする。

式 (C.1) から、線形レベルでのゲージ不変性は、条件

$$\langle \Sigma | Q = 0 \quad (\text{C.2})$$

で表される。閉弦 vertex operator を $\mathcal{V} = -ic(i)c(-i)V_c(i, -i)$ とまとめて書けば、式 (C.2) の左辺は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \langle \Sigma | Q \cdots &= \langle \mathcal{V} f_{\mathcal{I}}[Q] \cdots \\ &= \langle \mathcal{V} Q \cdots \\ &= \langle [\mathcal{V}, Q] \cdots \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ここで、式 (C.3) の 2 行目では、 Q のコンフォーマル不変性を用いた。3 行目では \mathcal{V} がウエイト (0,0) の演算子であり、 Q と可換になることを用いた。

C.2 非線型ゲージ不変性

ここでは、非線型ゲージ不変性の証明を行う。式 (C.1) の Λ について 1 次の項から、ゲージ不変性の条件は

$$\int \Sigma * (\Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi) = 0 \quad (\text{C.4})$$

で与えられる。上式の左辺は 3 弦相互作用の形をしており、surface state Σ が「中点に \mathcal{V} を置き、弦の左右をつなげる」という作用をすることから、図 C.1 のような ρ 平面のダイアグラムで計算できる。 \mathcal{V} は局所的な w 座標では $w = \pm i$ に位置し、ウエイト 0 なので

BPZ 不変である。従って、図 C.1 の 2 番目のダイアグラムに BPZ 共役を作用させれば、 Ψ と Λ の位置が入れ替わるため、1 番目の図と相殺して 0 になる。



図 C.1 $\int \Sigma * (\Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi)$ を表す ρ 平面でのダイアグラム：切り込みの入った部分は Σ の接続条件より、実際にはつながっている。

C.3 古典解のまわりの理論に対するゲージ不変性

さらに、 Q' を CSFT の古典解 Ψ_0 から作られる BRST 電荷

$$Q'\Psi = Q\Psi + \Psi_0 * \Psi + \Psi * \Psi_0 \quad (\text{C.5})$$

とする。この場合、ソース項の線形レベルの BRST 変換は

$$\int \Sigma * Q'\Lambda = \int \Sigma * (Q\Lambda + \Psi_0 * \Lambda - \Lambda * \Psi_0) \quad (\text{C.6})$$

となる。この式の右辺は Ψ_0 に対する BRST 電荷 Q の理論のゲージ変換になっているから、 Q 理論のゲージ不変性に帰着でき、当然 0 になる。非線形部分はどの理論でも同じ形をしているからやはりゲージ不変である。

したがって、ソース項 $\int \Sigma * \Psi$ は、任意の古典解のまわりで展開された CSFT において（局所的に）ゲージ不変である。

C.4 reality

弦場の理論の reality を CFT の振動子を使って表現するには、それぞれの振動子に対する reality 条件を決めてやる必要がある、少しばかり注意が必要である。

ここでは、ソース項の reality

$$\langle \Sigma | \Psi \rangle^* = \langle \Sigma | \Psi \rangle \quad (\text{C.7})$$

を証明する。まず、弦場 $|\Psi\rangle$ に対する reality は、条件

$$(|\Psi\rangle)^\dagger = \langle \Psi | = \langle I[\Psi(0)] \quad (\text{C.8})$$

で定義されており、演算 \dagger は振動子に対して、コンベンショナルに

$$\begin{aligned} (\alpha_n)^\dagger &= \alpha_{-n}, \\ (b_n)^\dagger &= b_{-n}, \\ (c_n)^\dagger &= c_{-n} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

と決める*1. 複数のオペレーターの積についても、オペレーターの偶奇を問わず

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (\text{C.10})$$

のように作用するものとする. 式 (C.9) から,

$$(c(i)c(-i))^\dagger = c(-i)c(i) \quad (\text{C.11})$$

が示せる. さらに, Ψ と V_c が実であることを使えば,

$$\begin{aligned} \langle \Sigma | \Psi \rangle^\dagger &= i(2)^{h_\Psi} \langle I[\Psi(0)] I[V_c] c(-i)c(i) \rangle \\ &= -i(2)^{h_\Psi} \langle \Psi(0) V_c c(i)c(-i) \rangle = \langle \Sigma | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

となり, ソース項全体が実であることが確認できた. (C.12) の 2 行目では期待値の BPZ 不変性を用いた.*2.

*1 この定義で状態のノルムをとると, ゴースト部分については対角にならないので不思議に感じるが, これでよい.

*2 vertex operator の前の “ $-i$ ” 因子が重要で, これがないと逆符号がでてしまう.

参考文献

- [1] E. Witten, “Non-Commutative Geometry and String Field Theory”, Nucl. Phys. **B 268** (1986) 253.
- [2] A. Sen and B. Zwiebach, “Tachyon Condensation in String Field Theory”, J. High Energy Phys. **03** (2000) 002 [hep-th/9912249].
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “On a Nonperturbative Vacuum for the Open Bosonic String”, Nucl. Phys. **B336** (1990) 236.
- [4] N. Moeller and W. Taylor, “Level Truncation and the Tachyon in Open Bosonic String Field Theory”, Nucl. Phys. **B538** (2000) 105 [hep-th/0002237].
- [5] D. Gaiotto and L. Rastelli, “Experimental String Field Theory”, hep-th/0211012.
- [6] T. Takahashi and S. Tanimoto, “Marginal and Scalar Solutions in Open Cubic String Field Theory”, J. High Energy Phys. **03** (2002) 033 [hep-th/020133].
- [7] T. Takahashi and S. Zeze, “Gauge Fixing and Scattering Amplitudes in String Field Theory Expanded around Universal Solutions”, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 159 [hep-th/0304261].
- [8] T. Takahashi and S. Zeze, “Closed String Amplitudes in Open String Field Theory”, J. High Energy Phys. **0308** (2003) 020 [hep-th/0307173].
- [9] M. Kaku and K. Kikkawa, “Field Theory of Relativistic Strings. I.”, Phys. Rev. **D10** (1974) 1110, M. Kaku and K. Kikkawa, “Field Theory of Relativistic Strings. II.”, Phys. Rev. **D10** (1974) 1823, E. Cremmer and J. L. Gervais, “Infinite Component Field Theory of Interacting Relativistic Strings and Dual Theory”, Nucl. Phys. **B90** (1975) 410, H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Covariant String Field Theory”, Phys. Rev. **D34** (1986) 2360, H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, “Covariant String Field Theory. II”, Phys. Rev. **D35** (1987) 1318, E. Witten, “Interacting Field Theory of Open Superstrings”, Nucl. Phys. **B276** (1986) 291, C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, “Superstring Field Theory”, Nucl. Phys. **B337** (1990) 363, T. Kugo and T. Takahashi, “Unoriented Open–Closed String Field Theory”, Prog. Theor. Phys. **99** (1997) 649 [hep-th/9711100], B. Zwiebach, “Oriented Open-Closed String Theory Revisited”, Ann. Phys. **267** (1998) 193, S. Naito, “Quantum Superstring Field Theory in the \mathcal{B}_0 -Gauge and the Physical Scattering Amplitudes”, J. Math. Phys. **40** (1999) 4713, N. Berkovits, “Super-Poincaré Invariant Superstring Field The-

- ory”, Nucl. Phys. **B459** (1996) 439, [hep-th/9503099].
- [10] A. Leclair, M. Peskin and C. R. Preitscheopf, “String Field Theory on the Conformal Plane (I)”, Nucl. Phys. **B317** (1989) 411,
A. Leclair, M. Peskin and C. R. Preitscheopf, “String Field Theory on the Conformal Plane (II)”, Nucl. Phys. **B317** (1989) 464.
- [11] By I.A. Batalin, G.A. Vilkovisky, “Quantization of Gauge Theories with Linearly Dependent Generators”, Phys. Rev. **D28** (1983) 2567, Phys. Rev. **D30** (1984) 508.
- [12] G. T. Horowitz, J. Lykken, R. Rohm, A. Strominger, “ A Purely Cubic Action for String Field Theory”, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 283.
- [13] J. Kluson, “Exact Solutions of Open Bosonic String Field Theory”, J. High Energy Phys. **0204** (2002) 043 ,[hep-th/0202045].
- [14] D. Gross and A. Javichi, “Operator Formalism of Interacting String Field Theory (I)”, Nucl. Phys. **B283** (1987) 1,
D. Gross and A. Javichi, “Operator Formalism of Interacting String Field Theory (II)”, Nucl. Phys. **B287** (1987) 225.
- [15] L. Rastelli and B. Zwiebach, “Tachyon Potentials, Star Products and Universality”, J. High Energy Phys. **09** (2001) 038 [hep-th/0006240].
- [16] I. Kishimoto, K. Ohmori, “ Cft Description of Identity String Field: toward Derivation of the VSFT Action”, J. High Energy Phys. **0205** (2002) 036 ,[hep-th/0112169].
- [17] G. T. Horowitz, A. Strominger, “Translations as Inner Derivations and Associativity Anomalies in Open String Field Theory”, Phys. Lett. **B185** (1987) 45.
- [18] M. Kato, K. Ogawa, “ Covariant Quantization of String based on BRS Invariance”, Nucl. Phys. **B212** (1983) 443.
- [19] I. Kishimoto and T. Takahashi, “Open String Field Theory around Universal Solutions”, Prog. Theor. Phys. **108** (2002) 591 [hep-th/0205257].
- [20] A. Sen, “Universality of the Tachyon Potential”, J. High Energy Phys. **12** (1999) 027 [hep-th/9911116].
- [21] N. Drukker, “Closed String Amplitudes from Gauge Fixed String Field Theory”, Phys. Rev. **D67** (2003) 126004 [hep-th/0207266].
- [22] N. Drukker, “On Different for the Vacuum of Bosonic String Field Theory”, hep-th/0301079.
- [23] D. Gaiotto, L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Ghost Structure and Closed Strings in Vacuum String Field Theory”, hep-th/0111129.
- [24] B. Zwiebach, “Interpolating String Field Theories”, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 1079 [hep-th/9202015].
- [25] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge Univ. Press, London, 1927), Chapter XXI.
- [26] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Infinity Cancellations in SO(32) Superstring Theory”, Phys. Lett. **B151** (1985) 21

-
- [27] H. Itoyama, P. Moxhay, “Multiparticle Superstring Tree Amplitudes”, Nucl. Phys. **B293** (1987) 685
- [28] M. Alishahiha and M. R. Garousi, “Gauge Invariant Operators and Closed String Scattering in Open String Field Theory”, Phys. Lett. **B536** (2002) 129 [hep-th/0201249].
- [29] K. Strebel, “Quadratic Differentials”, Springer-Verlag (1984).
- [30] S. B. Giddings and E. Martinec, “Conformal Geometry and String Field Theory”, Nucl. Phys. **B278** (1986) 91.
- [31] S. Giddings, E. Martinec and E. Witten, “Modular Invariance in String Field Theory”, Phys. Lett. **176B** (1986) 362.
- [32] B. Zwiebach, “Closed string field theory: Quantum action and the B–V master equation”, Nucl. Phys. **B390** (1993) 33 [hep-th/9206084]
- [33] T. Takahashi, “Tachyon Condensation and Universal Solutions in String Field Theory”, hep-th/0302182.
- [34] T. Takahashi, S. Zeze, unpublished.
- [35] A. Sen, “Descent Relations Among Bosonic D-branes”, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 4061 [hep-th/9902105].
- [36] A. Sen, “Non-BPS States and Branes in String Theory”, hep-th/9904207.
- [37] D. Z. Freedman, S. B. Giddings, J. A. Shapiro and C. B. Thorn, “The Nonplanar One-Loop Amplitude in Witten’s String Field Theory”, Nucl. Phys. **B298** (1988) 253.
- [38] D. Gaiotto, N. Itzhaki and L. Rastelli, “Closed Strings as Imaginary D-branes”, hep-th/0304192.
- [39] I. Ellwood, J. Shelton and W. Taylor, “Tadpoles and Closed String Backgrounds in Open String Field Theory”, hep-th/0304259.
- [40] A. Hashimoto and N. Itzhaki, “Observables of String Field Theory”, J. High Energy Phys. **01** (2002) 028 [hep-th/0111092].
- [41] T. Takahashi and S. Zeze, in preparation.
- [42] J. Polchinski, “String Theory I,II”, Cambridge University Press (1998).
- [43] A. M. Polyakov “Quantum Geometry of Bosonic Strings”, Phys. Lett. **B103** (1981) 207, “Quantum Geometry of Fermionic Strings”, Phys. Lett. **B103** (1981) 211.
- [44] D. Friedan, E. J. Martinec, S. H. Shenker, “Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory”, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.
- [45] W. Siegel, “Covariantly Second Quantized String. 2”, Phys. Lett. **B149** (1984) 157, Phys. Lett. **B151** (1985) 391
- [46] M. Schnabl, “Wedge States in String Field Theory”, J. High Energy Phys. **0301** (2003) 004 .
- [47] A. Kostelecky and R. Potting, “Analytical Construction of a Nonperturbative Vacuum for the Open Bosonic String”, Phys. Rev. **D63** (2001) 046007 [hep-th/0008252].
- [48] T. Banks and L. Susskind, “Brane– Anti-Brane Forces”, [hep-th/9511194].

-
- [49] G. Lifschytz, “Comparing D-branes to Black-branes”, Phys. Lett. **B388** (1996) 720, [hep-th/9604156].
- [50] L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, “Boundary CFT Construction of D-branes in Vacuum String Field Theory”, J. High Energy Phys. **0111** (2001) 045 , [hep-th/0105168].