

微分展開を用いた
波動関数等価ポテンシャルの非局所性の研究

大阪大学 理学研究科 物理学専攻

杉浦拓也

2016年2月

概要

近年、HAL QCD collaboration によって導入された方法により、核力ポテンシャルを第一原理的に導出することが可能になった。彼らのアプローチは、格子 QCD シミュレーションを用いて同時刻 Nambu-Bethe-Saleter(NBS) 波動関数を計算し、それを再現するようにポテンシャルを決定するというものである。この波動関数等価ポテンシャルは一般には非局所ポテンシャルとなるが、その非局所性の形は NBS 波動関数の定義に用いた核子内挿場の形に依存して変化する。そこで、適切な内挿場を選ぶことで非局所性の小さいポテンシャルを得ることができると期待されるが、計算資源の制限により内挿場を変えた計算には困難が伴う。また、彼らは非局所性を微分展開によって取り入れることを提唱したが、これを直接的に実行するためには複数のエネルギーにおける NBS 波動関数を計算する必要があり、格子 QCD においてはこれも難しい。

そこで本研究では、解析的に扱えるモデルを用いて非局所性の内挿場依存性を調べた。微分展開の収束性は展開を打ち切る次数を変えてポテンシャルを計算し、そこから導かれる位相差を比較することによって確認した。その結果、内挿場を変えること、そして微分展開自体の改良によっても、微分展開の収束性が改善されることが示された。

目次

第 1 章	序論	10
第 2 章	核力ポテンシャル	12
2.1	核力の三領域	12
2.2	ポテンシャルの一般形	14
2.2.1	同種粒子の系	14
2.2.2	運動量について 1 次までの核力ポテンシャル	16
2.2.3	運動量について 2 次以上の核力ポテンシャル	16
2.2.4	異種粒子を含む場合：荷電独立性	18
2.3	核力の状態依存性	19
2.3.1	核力ポテンシャル中の各演算子の行列要素	20
第 3 章	HAL QCD の核力ポテンシャル	24
3.1	波動関数等価ポテンシャル	24
3.2	微分展開	26
3.3	NBS 波動関数	27
3.4	格子上の NBS 波動関数とポテンシャル	29
3.4.1	$J^P = 0^+$ のポテンシャル	30
3.4.2	$J^P = 1^+$ のポテンシャル	30
3.5	核子内挿場依存性	31
第 4 章	Birse 模型	34
4.1	模型計算の必要性	34
4.2	チャンネル結合方程式	34
4.3	Birse 模型における核子内挿場依存性	37
4.4	Birse 模型の波動関数	39
第 5 章	微分展開の一般化とその評価	42
5.1	微分展開の一般化	42
5.2	ポテンシャルの逆構成	44
5.3	リップマン-シュウィンガー方程式	46

5.3.1	リップマン-シュウィンガー方程式の導出	46
5.3.2	リップマン-シュウィンガー方程式の数値計算方法	49
5.3.3	位相差の定義	50
第 6 章	数値計算結果	52
6.1	微分展開ポテンシャルの結果	52
6.2	位相差の結果	56
第 7 章	最近の発展と今後の展望	58
7.1	微分展開の核の非局所性の大きさについて： ρ 依存性	58
7.2	核子内挿場依存性： q 依存性	60
7.3	今後の展望	61
第 8 章	結論	62
付 録 A	テンソル力の行列要素	64
付 録 B	ソース演算子のスピンに対する射影	69
付 録 C	Birse 模型の解の具体形	71
C.1	位相差の理論値	71
C.2	TBC の下での解	72
C.2.1	$0 < E < \Delta$ の解	72
C.2.2	$-V_0 < E < 0$ の解	73
C.2.3	$E < -V_0$ の解	74
C.3	境界条件の検討	76
付 録 D	一般化微分展開 (5.10) の評価	77
D.1	x での微分による展開との関係	77
D.2	$x = 0$ 近傍での展開	78

目 次

2.1	現象論的に決められた 1S_0 チャンネルの中心力ポテンシャルの例。この図は [6] の FIG. 1 より引用。緑、青、赤の曲線はそれぞれ、CD-Bonn [2]、Reid93 [3]、AV18 [4] より。	13
3.1	1S_0 チャンネルの微分展開最低次近似のポテンシャル (3.31)。青が $E \sim 0\text{MeV}$ (PBC)、赤が $E \sim 45\text{MeV}$ (APBC) の結果を表す。	33
3.2	$J^P = 1^+$ の微分展開最低次近似のポテンシャル。左：中心力ポテンシャル (3.38)、右：テンソル力ポテンシャル (3.39)。	33
4.1	左：エネルギーを $E = 0$ に固定し、 q の値を変えたときの $V_q(x; E = 0)$ のプロット。縦軸がポテンシャル、横軸は x 。全て同じ線の色で描いてあるが、 $x = 0.2$ のところで見て、下から $q = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$ 。 右： $q = 1$ に固定して、 E を変えたときの $V_{q=1}(x; E)$ のプロット。 $x \sim 0$ 付近で見て、上から $E = 0, 1.0, 2.0$ 。これらの図は [8] から引用。	36
4.2	Birse 模型の相互作用。	37
4.3	$L = 10, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時の散乱状態の波動関数 $\psi_0(x)$ (紫) と $\psi_1(x)$ (緑)。横軸は x 。左上： $E_1 = 0.023$ 、右上： $E_2 = 0.091$ 、左下： $E_3 = 0.205$ 、右下： $E_4 = 0.367$ 。	40
4.4	$L = 10, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時の束縛状態 $E = E_0 = -33.67$ の解。	40
5.1	dp 積分の積分経路の変更。 $x - x' > 0$ のときは上半平面を通過して $p = - k - i\epsilon$ の極を拾い、 $x - x' < 0$ のときは下半平面を通過して $p = + k + i\epsilon$ の極を拾う。	48
6.1	微分展開 (6.2) の係数関数 $\tilde{v}_n(x)$ を N を変えてプロットしたもの。 $q = 0.2, \rho = 0.5$ は固定。縦軸の各 v_n の値は、質量の $2n$ 乗をかけて次元を揃えたもの ($v_n(x)M^{2n}$) とみなす。	54
6.2	式 (6.2) の微分展開ポテンシャル $V^{(N)}(x, x')$ 。 $0 < \{x, x'\} < 2$ の範囲で描いているが、 x 軸及び x' 軸に関して対称である。	55
6.3	位相差の結果。黒の実線は Birse 模型を解析的に解いて得られる理論値。データ点はそれぞれ $N = 1, \dots, 5$ の微分展開ポテンシャル $V^{(N)}(x, x')$ を用いてリップマン-シュウィンガー方程式を解いて得られた結果。横軸はエネルギーであるが、閾値 Δ で割って無次元化してある。	57

- 7.1 ρ を変えた時の位相差。(a) $\rho = 0.1$ では $N = 2$ まで、(b) $\rho = 0.3$ では $N = 3$ までしか
プロットされていないが、式 (5.13) を解く際の条件数¹ が 10^{10} より大きい場合は除外し
たためである。 59
- 7.2 (a) : $\rho = 0.1$, (b) : $\rho = 0.7$ における、 $N = 1$ の微分展開ポテンシャル。 59
- 7.3 (a) : $q = 0.2$, (b) : $q = 1.0$ の時の位相差。 $\rho = 0.5$ は共通。 60

表 目 次

2.1	2 核子系の状態分類とスピン・アイソスピン演算子の固有値。	22
2.2	スピン 3 重項における中心力+LS 力+テンソル力の行列要素。	22
A.1	$S = 1$ の場合のクレブシュ-ゴルダン係数 [17]。	68

第1章 序論

陽子や中性子(これらを総称して核子と呼ぶ)の間に働く力(核力)を理解することは、核物理学の積年の課題である。湯川秀樹の中間子論 [1] の提唱以来、核力の理解のために理論・実験の双方から数多くの研究がなされてきた。その重要な成果の1つが、2核子の散乱や束縛状態(重陽子)に関する数多くの実験結果を正確に再現するように決定された、現象論的核力ポテンシャルの導出である(例えば [2-4])。これらのポテンシャルは低エネルギーでの核力をよく再現する一方で、実験データを用いて現象論的に決定せざるをえないという意味で、理論の限界を表している。特に近距離での斥力芯描像 [5] は経験的に得られたものであり、この領域では核子や中間子を基本粒子とみなすことができないのである。

標準模型においては、核力の主な源である強い相互作用は、その第一原理である量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics; QCD) によって記述される。QCD においては核子や中間子はクォークとグルーオンの複合粒子であり、核力のすべての側面がこれを解くことで自動的に導かれるはずである。しかしながら、非摂動的なクォーク・グルーオン間のダイナミクスに基づいた核力の導出は容易ではなく、現在に至っても2核子間距離の全領域における定量的かつ系統的な理解は得られていない。

現時点において QCD を直接的に解く唯一の方法は、離散化したユークリッド空間上で数値的に解く格子 QCD シミュレーションである。近年、HAL QCD¹ collaboration は、格子 QCD を用いて核力ポテンシャルを導出する方法を提唱した [6, 7]。彼らは同時刻 Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) 波動関数と呼ばれる量を格子 QCD により計算し、これを再現するようにポテンシャルを導出した。この際、核子の演算子としてクォークとグルーオンの複合場を定義する。NBS 波動関数はこの核子内挿場の4点関数から定義される。カラー電荷の閉じ込めにより低エネルギーでは2核子間相互作用が空間的に局在しているために、得られたポテンシャルは有限の到達距離を持つ。この方法で計算された核力ポテンシャルは、全領域にわたって現象論的ポテンシャルと定性的に同じ特徴を示し、第一原理的に核力を導出することに初めて成功した。

HAL QCD の方法で求められるポテンシャルは、一般に非局所的である。彼らはポテンシャルの非局所性を取り扱うために、局所ポテンシャルからのずれを微分演算子のべき展開により取り入れる、微分展開を用いることを提唱した。低エネルギー散乱のみ考えれば、この展開は低次で収束し、有限次で打ち切る近似が有効であると期待される。しかしながら問題は、格子 QCD において励起状態からの寄与を取り出すことは、一般に難しいことである。微分展開を実行するためには複数のエネルギー固有状態における波動関数を用意する必要があるため、現在は微分展開の最低次のポテンシャルを近似的に用いている。

¹Hadrons to Atomic nuclei from Lattice QCD の略。

もう1つの重要な事実は、ポテンシャルの関数形がNBS波動関数を定義する際に用いた核子内挿場の形に依存することである。核子の量子数を再現する内挿場の形は無数にあり、そのどれを選ぶかに応じてポテンシャルの空間的構造、特に非局所性の大きさは変化する。ただし現実的には、複雑な内挿場を用いると統計数が多く必要になり、最も簡単な内挿場が選ばれている。Birseは、1次元の2チャンネル結合模型を用いて、ポテンシャルの内挿場依存性を議論した [8]。この模型は非常に簡略化されており解析的に解くことが可能だが、核子散乱の本質的な特徴を含んでいる。

本研究では、計算コストの問題から格子QCDシミュレーションにおいて直接調べるのが難しい、微分展開の収束性と内挿場依存性を、Birseの模型を用いて調べることを目的とする。ここで得られる結果は現実の核力と直接比較できるものではないが、現時点では直接調べる事ができていない、HAL QCDポテンシャルの非局所性に対して有益な示唆を与えることができるという点で重要である。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、対称性の観点から核力ポテンシャルの一般形を導き、その取り扱いについて述べる。第3章では、HAL QCDによる核力ポテンシャルの導出方法を紹介する。第4章では、Birseのチャンネル結合模型を導入し、ポテンシャルの核子内挿場依存性が1つのパラメータを用いて簡単に表されることを見る。第5章で本研究で用いる微分展開の方法とその評価方法を述べ、第6章で数値計算結果から微分展開の収束性を確認する。第7章では、さらに微分展開のパラメータや核子内挿場依存性についての最新の結果について述べて、第8章で結論と今後の展望について述べる。

第2章 核力ポテンシャル

ここでは、理論・実験の双方からの数多くの研究から明らかになった、核力ポテンシャルの定性的な性質について述べる。その後、2核子系に要求される対称性を考慮して、核力ポテンシャルの一般形を導く。

2.1 核力の三領域

核力ポテンシャルはその成因と性質から、空間的に3つの領域に分類して理解される [9]。後述のように核力はスピン S 、軌道角運動量 L 、全角運動量 J 、アイソスピン I といった2核子間の状態に依存する。しばしば、状態を表すのに分光学的記号 $^{2S+1}L_J$ が用いられる。図 2.1 には、 1S_0 チャネルにおける現象論的なポテンシャルのうち代表的な3例を示した。

長距離領域 ($r > 2 \text{ fm}$)

湯川の中間子交換理論 [1] によると、質量 m_a の中間子交換によって生じる核力の到達距離は、この中間子のコンプトン波長 $\lambda_a = \hbar/M_a c$ 程度である。よって長距離では最も質量の小さい中間子である π 中間子の交換が重要となる。この領域では One Pion Exchange Potential (OPEP) [10] による記述が定量的に確立しており、これは湯川関数型ポテンシャル $V(r) \propto e^{-m_\pi r}/r$ で表される、長く裾を引く引力ポテンシャルである。

ただし注意として、コンプトン波長による到達距離の推定値は小さすぎるということが知られている。これは非常に大きな結合定数から生じるものであり、1個の π 中間子の交換が支配的であるのは、コンプトン波長 $\lambda_\pi \simeq 1/(140 \text{ MeV}) \simeq 1.4 \text{ fm}$ 程度の距離から始まり、その3~4倍程度の遠方にまで及ぶ [11]。

中間領域 ($1 \text{ fm} < r < 2 \text{ fm}$)

中間領域では、2個の π 中間子交換や、重い中間子 (ρ , ω , σ) の効果が重要になる。 $m_\rho, m_\omega, m_\sigma \gtrsim 500 \text{ MeV}$ であるので、これらの重い中間子のコンプトン波長は 0.4 fm 以下であるが、 π 中間子の場合と同様、実際にはより遠くまで支配的に寄与することが知られている。重い中間子の交換によるポテンシャルは One Boson Exchange Potential (OBEP) と呼ばれる [12]。ここに現れる 100 MeV 程度の強い引力が、原子核を結合させる役割を担う。この領域は基本的には中間子交換により記述されるが、定量的には現象論的に決定される。

短距離領域 ($r < 1$ fm)

短距離領域の核力ポテンシャルには、核子の内部構造が本質的に反映される。このような領域では、中間子交換による描像はもはや有効性を失う。現象論的には、至近距離の核力は非常に強い斥力芯を持つとされる [5] が、斥力芯の起源を説明するためには QCD を解く必要があり、完全な理解には至っていない。

斥力芯の存在の必要性は、原子核の飽和性という観点からも理解できる。安定核では、種類によらずほぼ一定の核子個数密度 $\rho \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ を持つ。また、核子あたりの結合エネルギーもほぼ一定の値 ($\sim 8 \text{ MeV}$) を取る。核力が短距離でも引力的であれば、原子核は密度が小さいほどエネルギーが小さくなり、潰れてしまうであろう。短距離で急激に立ち上がる斥力芯があるからこそ、核子間の距離は中間の引力ポテンシャル領域程度に保たれ、このような飽和性が実現されるのである。

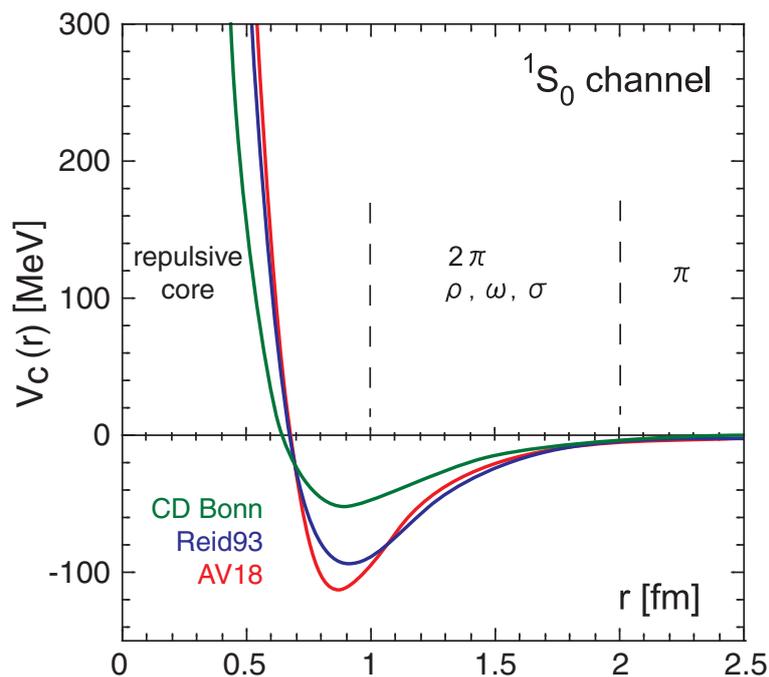


図 2.1: 現象論的に決められた 1S_0 チャンネルの中心力ポテンシャルの例。この図は [6] の FIG. 1 より引用。緑、青、赤の曲線はそれぞれ、CD-Bonn [2]、Reid93 [3]、AV18 [4] より。

2.2 ポテンシャルの一般形

2核子系の(非相対論的)ハミルトニアンに要請されるべき保存則を考慮し、核力ポテンシャルの一般形を導く [13]。これを用いて、ポテンシャルの運動量依存性、そして非局所性について考察する。

2.2.1 同種粒子の系

同種粒子の系(2陽子系 pp と 2中性子系 nn)では、核子の内部自由度はスピンのみである。また、p と n のわずかな質量差は無視して、共に質量 M とする。そこで、この系のハミルトニアンは、各粒子の位置 r_i 、運動量 p_i 、スピン σ_i ($i = 1, 2$) を用いて、

$$H = \frac{1}{M}(p_1^2 + p_2^2) + V(r_1, r_2, p_1, p_2, \sigma_1, \sigma_2) \quad (2.1)$$

と書ける。第一項の運動エネルギー項は以下の全ての要請を満たすので、ハミルトニアンに対する保存則の要請は直接ポテンシャル V に対する要請となる。

1. 確率の保存

π 中間子の閾値以下のエネルギーでは、核子の存在確率が保存するために、ハミルトニアンがエルミートであること $H^\dagger = H$ が要請される。すなわち

$$V^\dagger = V. \quad (2.2)$$

2. エネルギー・運動量保存

エネルギーの保存則から、ハミルトニアンが時間に陽に依存しないことが要請される。運動量保存からは、平行移動に対する不変性が課せられる。よって $r \equiv r_1 - r_2$ として、

$$V = V(r, p_1, p_2, \sigma_1, \sigma_2). \quad (2.3)$$

という形になる。

3. ガリレイ変換不変性

ポテンシャルは等速度変換に対して不変であること、すなわち重心運動の運動量 $P \equiv p_1 + p_2$ に依存しないことが要請される。これにより運動量依存性は、相対運動 $p = (p_1 - p_2)/2$ のみとなる。よって

$$V = V(r, p, \sigma_1, \sigma_2). \quad (2.4)$$

4. 全角運動量保存

全角運動量 $J = S + L$ が保存することが要請される。ただし

$$S = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (2.5)$$

$$L = r \times p. \quad (2.6)$$

J の保存より、 V は回転不変である。これを満たすには、 V が $(r, p, \sigma_1, \sigma_2)$ から作られるスカラーであれば良い。

5. パリティ保存

強い相互作用ではパリティが保存されるので、ポテンシャルはパリティ変換に対して不変でなければならない。パリティ変換のもとで $r \rightarrow -r$, $p \rightarrow -p$, 角運動量 σ_i , L , J は不変なので、

$$V(r, p, \sigma_1, \sigma_2) = V(-r, -p, \sigma_1, \sigma_2). \quad (2.7)$$

6. 時間反転不変性

強い相互作用には時間反転に対する対称性がある。時間反転では時間に対して1次である運動量演算子が符号を変える; $p \rightarrow -p$ 。また、角運動量演算子も一般に符号を変える; $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$, $S \rightarrow -S$, $J \rightarrow -J$ 。よって V に対しては、

$$V(r, p, \sigma_1, \sigma_2) = V(r, -p, -\sigma_1, -\sigma_2). \quad (2.8)$$

7. フェルミ統計性

同種粒子系を考えているので、粒子の入れ替え $1 \leftrightarrow 2$ に対してハミルトニアンは不変でなければならない。これは波動関数が(反)対称であることを意味する。よって、

$$V(r, p, \sigma_1, \sigma_2) = V(-r, -p, \sigma_2, \sigma_1) = V(r, p, \sigma_2, \sigma_1). \quad (2.9)$$

2つ目の等号にはパリティ保存の条件(式(2.7))を用いた。これは V がスピン演算子 σ_i の入れ替えに対して対称であることを意味する。

以上7つの保存則の要請に加えて、 V として各 σ_i をたかだか1次まで含んだ形のみ考える。これはスピン演算子の性質

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2.10)$$

により、 σ に対して2次以上の項は、必ず0次もしくは1次の形に書き直せることによるもので、新たな物理的要請ではない。

2.2.2 運動量について1次までの核力ポテンシャル

上に述べた条件を満たすポテンシャルのうち、まず運動量演算子を含まないものを座標表示で考える。 r^2 の関数で書ける部分は後で掛けるものとして、スピン演算子に対して許される形を考えると、恒等演算子 1 , $\sigma_1 \cdot \sigma_2$, $(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)$ の3つである。 $(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)$ の代わりに、テンソル演算子

$$S_{12} = 3(\sigma_1 \cdot \hat{r})(\sigma_2 \cdot \hat{r}) - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (2.11)$$

を考えるのが一般的である。その理由は、立体角積分により0になる性質、またスピン1重状態に対する行列要素が0となるという性質を持つためである¹。以上より運動量に依存しない核力の一般形は、

$$V = V_0(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)V_\sigma(r) + S_{12}V_T(r) \quad (2.12)$$

のように書ける²。右辺の各項はそれぞれ、中心力、スピン依存中心力、テンソル力と呼ばれる。OPEPには強いテンソル力が現れ、 3S_1 状態と 3D_1 状態を結合させる。重陽子では 3D_1 の状態確率は数%程度であるが、これが 3S_1 状態の有効ポテンシャルに強い引力効果をもたらし、結果として重陽子の束縛に不可欠な寄与を与えることが知られている。

次に運動量の1次を含むものを考える。すると $r \cdot p$ は時間反転に対する不変性を満たさないので除外され、 $L \cdot S$ の形に限られる。これはスピン・軌道結合力あるいはLS力と呼ばれる。LS力はOPEPからは出ず、2個の π 交換から生じる。しかしここからは十分な強さのLS力は得られない。OBEPでは、LS力はスカラー中間子 σ 、ベクトル中間子 ω および ρ の交換から生じる。

こうして結局、運動量について1次までの核力ポテンシャルの一般形は、

$$V = V_0(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)V_\sigma(r) + S_{12}V_T(r) + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})V_{LS}(r) \quad (2.13)$$

となることがわかった。

2.2.3 運動量について2次以上の核力ポテンシャル

座標表示で運動量 p の2次以上を含む項を考えると、その扱いは複雑になる。まず、各演算子に掛ける関数は、 r^2 , p^2 , および L^2 の関数へと拡張される。また、スピンについて双1次で p について2次の演算子として、 $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)p^2$, $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)L^2$, $(\sigma_1 \cdot p)(\sigma_2 \cdot p)$, $Q_{12} \equiv \frac{1}{2} \{(\sigma_1 \cdot L)(\sigma_2 \cdot L) + (\sigma_2 \cdot L)(\sigma_1 \cdot L)\}$ がある。

一方で核力を運動量表示で書いた場合も、座標表示のときと同様に保存則を考えれば一般形が書け

¹付録A参照。

² V_σ と V_T に $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ をかけた項が含まれていないのは、これらが $S=0$ 状態には働かず、 $S=1$ にのみ効くからである。

る [14]。重心系で、2 核子の初期状態 $(\mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i)$ を終状態 $(\mathbf{p}_f, -\mathbf{p}_f)$ へ移すポテンシャルを、

$$\langle \mathbf{p}_f, -\mathbf{p}_f | V | \mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i \rangle = \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (2.14)$$

と書く。ただし、 $\mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ (運動量移行), $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_i)/2$ (平均運動量) である。 \mathbf{k} と \mathbf{q} 、および $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{q}$ を用いて、運動量表示の核力の一般形は、

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) = & \tilde{V}_0 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \tilde{V}_1 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \tilde{V}_2 + i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) \tilde{V}_3 \\ & + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) \tilde{V}_4 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) \tilde{V}_5 \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。ただし $\tilde{V}_0 \sim \tilde{V}_5$ はスカラー量 k^2 , q^2 , および $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2$ の関数である。

運動量表示の核力 (2.15) を二重フーリエ変換すれば、座標表示の核力が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle &= \iint d^3\mathbf{p}_f d^3\mathbf{p}_i \langle \mathbf{r} | \mathbf{p}_f \rangle \langle \mathbf{p}_f | V | \mathbf{p}_i \rangle \langle \mathbf{p}_i | \mathbf{r}' \rangle \\ &= \iint \frac{d^3\mathbf{p}_f d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}'} \\ &= \iint \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi})} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで、 $\boldsymbol{\rho} \equiv (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$, $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ とした。これは一般に非局所ポテンシャル

$$\langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle \neq V(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.17)$$

となっている。しかし、 \tilde{V} が運動量移行 \mathbf{k} にのみ依存し \mathbf{q} には依存しない時は、局所ポテンシャルとなる：

$$\begin{aligned} \iint \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}} &= \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (2.18)$$

ただし

$$V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \equiv \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (2.19)$$

式 (2.15) の右辺で V_0 , V_1 , V_2 が k^2 のみの関数であるときには、運動量に依存しない局所ポテンシャル (2.12) が得られ、 \mathbf{q} の 1 次では、第 4 項の $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ に比例する項から LS 力 (式 (2.13) の第 4 項) が得ら

れる。

q の2次以上を含んだポテンシャルを座標表示で考えると、

$$\begin{aligned}
 \langle r | V | r' \rangle &= \iint \frac{d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma_1, \sigma_2) e^{i\mathbf{q} \cdot \xi} \\
 &= \iint \frac{d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, -i\vec{\nabla}_\xi, \sigma_1, \sigma_2) e^{i\mathbf{q} \cdot \xi} \\
 &= \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}, -i\vec{\nabla}_\xi, \sigma_1, \sigma_2) \delta^3(\xi) \\
 &= V(\mathbf{r}, -i\vec{\nabla}_r, \sigma_1, \sigma_2) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

となる。これは、運動量表示の平均運動量 q 依存性が、座標表示では波動関数に掛かる微分演算 $\hat{p} = -i\vec{\nabla}_r$ に置き換えられることを表している。これはすなわち、ポテンシャルは q 依存性を持つと、座標表示で非局所になるということを意味している。またポテンシャルを q に関して展開した形に書くと、この展開の高次の項は、低エネルギーの散乱を考えている限り、低次の項に対して無視できるはずである。このことから、低エネルギー散乱を再現するポテンシャルとしては、 q をたかだか有限次入れれば十分な精度の近似となることが期待され、非局所性は小さいと考えられる。

2.2.4 異種粒子を含む場合：荷電独立性

ここまで核子の種類を考えず、同種粒子の系 (pp, nn) の核力ポテンシャルの一般形について考えてきたが、実は核力ポテンシャルは、クーロン力を除けば pp 系と nn 系でほぼ等しい。これは低エネルギーの 1S_0 散乱実験や、n と p の数を反転させた核 (鏡映核) の間の対応から確認されたことで、核力の荷電対称性と呼ばれている。さらに広い対称性として、pn の系も含めて2核子系の核力は、荷電状態以外の量子数が同じならば近似的に一致する (クーロン力は除く)。これを核力の荷電独立性という。

これらは u クォークと d クォークの質量差が小さいことと、QCD ではフレーバー依存性は質量項にのみ存在していることから成り立つ近似であり、核力の荷電対称性は1%以下、荷電独立性は数%程度の精度で成り立つと考えられている。

Heisenberg は核力の荷電独立性をアイソスピンを導入して説明した。それによると、陽子と中性子は核子という1つの粒子の異なる状態としてみなされ、それぞれ固有アイソスピン上向き/下向きの状態として定義される。アイソスピン状態に作用する演算子 τ を用いて、

$$t = \frac{\tau}{2} \tag{2.21}$$

$$t_{\pm} = \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2} \tag{2.22}$$

のようにアイソスピン演算子 t 及びアイソスピンの昇降演算子 t_{\pm} を定義する。 τ_+ は n を p に、 τ_- は p を n に変える演算子である。ただし τ は形式的にはパウリスピン σ と同じものである：

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

2 核子系のアイソスピン状態は、角運動量の交換関係を満たす演算子 $I = t_1 + t_2$ の固有状態であり、 I^2 の固有値 $I(I+1)$ および I_3 の固有値 m_I によって表される。 $I=1$ は pp 系、 nn 系、対称 pn 系 (iso-triplet) を、 $I=0$ は半対称 pn 系 (iso-singlet) を表す。

核力の荷電独立性は、核力が m_I によらず、 I のみによって決まるということを意味する。アイソスピンの大きさ I^2 は

$$I^2 = \frac{3 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2} = I(I+1) \quad (2.24)$$

を満たすので、 $I=1$ 状態に対しては $\tau_1 \cdot \tau_2 = 1$ 、 $I=0$ 状態は $\tau_1 \cdot \tau_2 = -3$ を与える。よってアイソスピンを考慮した核力の形は、 $\tau_1 \cdot \tau_2$ を含む項と含まない項の和の形で与えることができる：

$$V = V_1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)V_{\tau}. \quad (2.25)$$

V_1 と V_{τ} についてそれぞれ、上で議論した同種粒子系の核力ポテンシャルの一般形 (例えば式 (2.13)) を用いれば、最終的な核力の一般形が得られる。

$$V = V_0(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)V_{\sigma}(r) + (\tau_1 \cdot \tau_2)V_{\tau}(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2)V_{\sigma\tau}(r) \\ + \{V_{T0}(r) + (\tau_1 \cdot \tau_2)V_{T\tau}(r)\} S_{12} + \{V_{LS0}(r) + (\tau_1 \cdot \tau_2)V_{LS\tau}(r)\} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) + \dots \quad (2.26)$$

2.3 核力の状態依存性

歴史的に核力の解明を難しくした理由の一つは、核力の 2 核子系の状態 (量子数) 依存性が非常に大きいということであった。これは、核力に強い非中心力 (テンソル力及び LS 力) があり、かつ中心力も スピン・パリティ状態に強く依存する (交換性) ためである。

2 核子系の良い量子数は、全角運動量の大きさ J 及び z 成分 m_J 、全スピン S 、パリティ P 、アイソスピンの z 成分 m_I である。荷電独立性を仮定すればアイソスピンの大きさ I も保存する。さらに 2 核子系の場合には、ポテンシャルはスピンの入れ替えに対して対称なので (式 (2.9))、スピンの大きさ S も保存する³。状態依存性を考えるために、これらの量子数で状態を分類する。核子はフェルミ粒子なので、2 核子の入れ替え $1 \leftrightarrow 2$ に対して波動関数は反対称でなければならない。それは交換演算子 $\mathcal{P}(1, 2)$ を用いて、

$$\mathcal{P}(1, 2)\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2) \quad (2.27)$$

³ スピン演算子に対し対称なものは、必ず S^2 と交換する。よって $[H, S^2] = 0$ が成り立ち、 S は保存する。

が成り立つことを意味する。 $\mathcal{P}(1, 2)$ は、位置の交換 $\mathcal{P}_r(1, 2)$ 、スピンの交換 $\mathcal{P}_\sigma(1, 2) = (1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)/2$ 、及びアイソスピンの交換 $\mathcal{P}_\tau(1, 2) = (1 + \tau_1 \cdot \tau_2)/2$ の積である。これらの作用により、波動関数の中の対応する部分から、それぞれ $(-1)^L = P$ 、 $(-1)^{S+1}$ 、 $(-1)^{I+1}$ の符号が出る。従って、一般化されたパウリ原理として、

$$(-1)^L(-1)^{S+1}(-1)^{I+1} = -1 \quad (2.28)$$

すなわち、

$$L + S + I = \text{奇数} \quad (2.29)$$

を得る。これを用いて、許される状態を I 、 S 、 P 、 J についてまとめたのが表 2.1 の上段である。

2.3.1 核力ポテンシャル中の各演算子の行列要素

このように分類した各状態における核力ポテンシャルを具体的に計算するために、ポテンシャルに現れる演算子 $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ 、 $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})$ 、 S_{12} 、及び $(\tau_1 \cdot \tau_2)$ の行列要素を計算する必要がある。このうちスピンとアイソスピンに関しては、式 (2.24) 及びその中の I を S に置き換えたもの、

$$\mathbf{S}^2 = S(S+1) \quad (2.30)$$

を用いて計算できる。結果は表 2.1 の下段の通りである。中心力の場合のみは、これらを用いて行列要素が決定される。この時は上で挙げたものに加えて m_L 、 m_S 、 L も良い量子数となる。

次に $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ の行列要素は、 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2$ より、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \\ &= \frac{1}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)) \end{aligned} \quad (2.31)$$

ただし2つ目の等号は ${}^{(2S+1)}L_J$ の状態に演算した結果を表す。これを用いると、 $S = 0$ に対しては $J = L$ なので、

$$\langle {}^1J_J; m_J | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | {}^1J_J; m_J \rangle = 0, \quad (2.32)$$

$S = 1$ では $L = J, J \mp 1$ より

$$\langle {}^3J_J; m_J | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | {}^3J_J; m_J \rangle = -1 \quad (2.33)$$

$$\langle {}^3(J-1)_J; m_J | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | {}^3(J-1)_J; m_J \rangle = J-1 \quad (2.34)$$

$$\langle {}^3(J+1)_J; m_J | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | {}^3(J+1)_J; m_J \rangle = -(J+2) \quad (2.35)$$

と計算される。LS 力では、異なる m_L と m_S の状態が混合されるが、 L は保存される。

最後にテンソル力を考える。この場合は計算が複雑になるので導出は付録 A に譲るが、結果は次のようになる。

$$\langle {}^1J_J; m_J | S_{12} | {}^1J_J; m_J \rangle = 0 \quad (2.36)$$

$$\langle {}^3J_J; m_J | S_{12} | {}^3J_J; m_J \rangle = 2 \quad (2.37)$$

$$\langle {}^3(J-1)_J; m_J | S_{12} | {}^3(J-1)_J; m_J \rangle = -\frac{2(J-1)}{2J+1} \quad (2.38)$$

$$\langle {}^3(J-1)_J; m_J | S_{12} | {}^3(J+1)_J; m_J \rangle = \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \quad (2.39)$$

$$\langle {}^3(J+1)_J; m_J | S_{12} | {}^3(J-1)_J; m_J \rangle = \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \quad (2.40)$$

$$\langle {}^3(J+1)_J; m_J | S_{12} | {}^3(J+1)_J; m_J \rangle = -\frac{2(J+2)}{2J+1} \quad (2.41)$$

テンソル力のスピン 3 重項に対する働き方は、 L と J の値によって状況が異なる。 $L = J$ の場合は他の状態と混ざらないので、これを uncoupled state という。それに対し $L = J \pm 1$ では、テンソル力によって 2 つの異なる L の状態が混合した状態、coupled state となる。

スピン 3 重項における中心力+LS 力+テンソル力の行列要素を、表 2.2 にまとめた。

I	0 (pp,nn,np)			1 (np)		
S	0	1		0	1	
L	odd	even		even	odd	
J	L	L	$L \pm 1$	L	L	$L \pm 1$
$J = 0$	—	—	—	1S_0	—	3P_0
$J = 1$	1P_1	—	$^3S_1 + ^3D_1$	—	3P_1	—
$J = 2$	—	3D_2	—	1D_2	—	$^3P_2 + ^3F_2$
$J = 3$	1F_3	—	$^3D_3 + ^3G_3$	—	3F_3	—
$J = 4$	—	3G_4	—	1G_4	—	$^3F_4 + ^3H_4$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	
$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$	-3	+1		-3	+1	
$(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$	+1			-3		

表 2.1: 2 核子系の状態分類とスピン・アイソスピン演算子の固有値。

$L' \backslash L$	$J - 1$	J	$J + 1$
$J - 1$	$V_c - \frac{2(J-1)}{2J+1}V_T + (J-1)V_{LS}$	0	$\frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}V_T$
J	0	$V_C + 2V_T - V_{LS}$	0
$J + 1$	$\frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}V_T$	0	$V_c - \frac{2(J+2)}{2J+1}V_T - (J+2)V_{LS}$

表 2.2: スピン 3 重項における中心力+LS 力+テンソル力の行列要素。

第3章 HAL QCDの核力ポテンシャル

近年、HAL QCD collaboration によって、格子 QCD から核力ポテンシャルを導出する方法が提唱された [6,7]。この方法は、量子力学における 2 体運動の波動関数に対応する量である、同時刻 Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) 波動関数を用いて、それを再現するようにポテンシャルを決定するというものである。このポテンシャルを波動関数等価ポテンシャルと呼ぶ。

3.1 波動関数等価ポテンシャル

空間の大きさが $L \times L \times L$ の有限体積中で、次のような 2 体系の相対運動に対するシュレディンガー方程式を考える。

$$\left(\frac{\nabla^2}{2\mu} + E_n\right) \psi_n(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}'). \quad (3.1)$$

ただし μ は換算質量、 E_n は離散化されたエネルギー固有値で、対応する運動量 k_n を用いて $E_n = k_n^2/(2\mu)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と表される¹。

以下では、相互作用が有限の到達距離 R を持つ場合を考える。すなわち、ポテンシャル $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ が $\{|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|\} > R$ において指数関数的に小さくなるとする。例として π 中間子の閾値以下のエネルギー ($E < m_\pi$) では、第 1 章で述べたように核力の到達距離は $\hbar/m_\pi c$ 程度である。これは中間子交換によるポテンシャルが、湯川関数

$$Y(m_\pi r) = \frac{\exp(-m_\pi r)}{m_\pi r} \quad (3.2)$$

の形をしているためであった。このように、ポテンシャルが有限の到達距離 $R < L/2$ を持つ場合を考えると、外側の領域 $\Omega_{out} = \{\mathbf{r} \in L^3 \mid |\mathbf{r}| > R\}$ では、波動関数はヘルムホルツ方程式に従う。すなわち、関数 $K_n(\mathbf{r})$ を、運動エネルギー演算子 $H_0 = -1/(2\mu)\nabla^2$ を用いて、

$$K_n(\mathbf{r}) \equiv \langle \mathbf{r} | (E_n - H_0) | n \rangle = \frac{1}{2\mu} (\nabla^2 + k_n^2) \psi_n(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

と定義すると、

$$K_n(\mathbf{r} \in \Omega_{out}) \sim 0 \quad (3.4)$$

¹無限体積との対応関係を考えると、 $L \rightarrow \infty$ の極限で、束縛状態は $E(L \rightarrow \infty) < 0$ で、散乱状態は $E(L \rightarrow \infty) > 0$ によって与えられるということがわかる。注意しなければならないのは、有限の L に対して $E_n(L) < 0$ が成り立っていても、これは必ずしも無限体積で束縛状態が存在することを意味しないという点である。また、束縛状態のみでなく $E_n(L) > 0$ の状態も離散的に現れるが、 L が大きくなるにつれて正のエネルギーを持つ状態密度が大きくなり、 $L \rightarrow \infty$ の極限では連続的な散乱状態のエネルギースペクトルが得られる。

である。ただし記号 \sim は $\{|r|, |r'|\}$ に対し指数関数的に小さくなる補正の範囲で等しいことを意味する。一方で、相互作用のある内側の領域 $\Omega_{in} = L^3 - \Omega_{out}$ では、 K_n は消えないで残る。これは式 (3.1) の右辺が、 $r \in \Omega_{in}$ でのみ 0 でない値を取ることを意味している。

ここでは、与えられた $U(r, r')$ に対して E_n および ψ_n を求める通常の固有値問題ではなく、次のような条件からポテンシャルを導出する逆問題を考える。

- エネルギー固有値 $E_n = k_n^2/(2\mu)$ ($n \leq n_c$) と、それに対応する線形独立な (ただし直交しているとは限らない) 固有関数 $\psi_n(\mathbf{r})$ が既知である。
- ポテンシャルについては、滑らかで空間的に局在しているということのみ分かっている。

ここで導こうとしているポテンシャルは、 $E = E_{n_c}$ 以下の低エネルギーに対してのみ適用できるものであることを強調しておく。 n_c は π 中間子の生成閾値 $E_{th} \sim m_\pi$ に対応するものであり、この方法ではより高いエネルギーにおけるポテンシャルの空間的局在が仮定できない。このように低エネルギー散乱、および束縛状態のみを考えるために、運動量の高次の項を無視できると期待できる。

波動関数が直交していない場合を考慮して、ノルムカーネルを

$$\mathcal{N}_{nn'} \equiv \langle n | n' \rangle = \int d^3\mathbf{r} \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_{n'}(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

で定義する。波動関数 $\psi_{n \leq n_c}$ で張られる部分空間 \mathcal{V}_{n_c} 上で $\mathcal{N}_{nn'}$ がゼロ固有値を持たない場合には、逆演算 $\mathcal{N}_{nn'}^{-1}$ が定義できる。すると \mathcal{V}_{n_c} への射影演算子は、

$$P(n_c) = \sum_{n, n'}^{n_c} |n\rangle \mathcal{N}_{nn'}^{-1} \langle n'| \equiv \sum_{n=0}^{n_c} P_n \quad (3.6)$$

で与えられる。 P_n は状態 $|n\rangle$ への射影である。式 (3.1) は

$$UP_n |\psi\rangle = (-H_0 + E_n) P_n |\psi\rangle \quad (3.7)$$

と書き直せるので、 \mathcal{V}_{n_c} 上で波動関数等価ポテンシャルが

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \left\langle \mathbf{r} \left| \sum_n^{n_c} (-H_0 + E_n) P_n \right| \mathbf{r}' \right\rangle \\ &= \sum_{n, n'}^{n_c} \langle \mathbf{r} | (-H_0 + E_n) | n \rangle \mathcal{N}_{nn'}^{-1} \langle n' | \mathbf{r}' \rangle \\ &= \sum_{n, n'}^{n_c} K_n(\mathbf{r}) \mathcal{N}_{nn'}^{-1} \psi_{n'}^*(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.8)$$

と定義できることがわかる。

以上のようにして得られたポテンシャル (3.8) は空間体積 $L \times L \times L$ の下で定義されたものなので、適切な方法で無限体積の空間へと外挿しなければならない。しかしここではポテンシャルとして有限の到達距離 R を持つものを考えているので、 L が十分大きくなれば、有限体積の境界条件からくる影響はポテンシャルにはわずかにしか効かない。よって実際には、 L を R より十分大きく取れば有限体積の効果は無視でき、それを無限体積のポテンシャルとみなすことができる。

波動関数にユニタリー変換

$$\psi \rightarrow \psi' = A\psi \quad (3.9)$$

を行うと、ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\rightarrow \sum_{n, n'}^{n_c} (AK)_n(\mathbf{r}) \mathcal{N}_{nn'}^{-1} (\psi^* A^\dagger)_{n'}(\mathbf{r}') \\ &= (AU A^\dagger)(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

と変換する。ただし式 (3.3) より $K_n \rightarrow AK_n$ が従うこと、及びノルムカーネルは不変であること

$$\mathcal{N}_{nn'} \rightarrow \langle n | A^\dagger A | n' \rangle = \mathcal{N}_{nn'} \quad (3.11)$$

を用いた。このようなユニタリー変換の結果、ポテンシャルの関数形は変更を受ける。これはポテンシャルが観測量でないためである。しかし、そこから導かれる散乱位相差などの観測量は不変である。

E_n が全て実数で、かつノルムカーネルが $\mathcal{N}_{nn'} = \delta_{nn'}$ である場合は、ポテンシャルは \mathcal{V}_{n_c} 上でエルミートである：

$$\begin{aligned} U &= \left[\sum_{n, n'}^{n_c} (-H_0 + E_n) |n\rangle \mathcal{N}_{nn'} \langle n'| \right]^\dagger \\ &= \sum_n (-H_0 + E_n^*) |n\rangle \langle n| \\ &= U. \end{aligned} \quad (3.12)$$

上の条件が満たされない場合は、ポテンシャルのエルミート性は保証されない。直交していない波動関数を用いてエルミートなポテンシャルを構成することは、現時点では課題として残されている。

3.2 微分展開

式 (3.8) のポテンシャルは、離散的なエネルギー準位 $E_n (n = 0, 1, \dots, n_c)$ の上で、波動関数を再現するように定義されている。 $L \rightarrow \infty$ の極限では離散的エネルギー E_n は連続的なエネルギースペクトル E になる。しかし、実際に格子 QCD を用いた有限空間体積シミュレーションで実現される、 $E \leq E_{th}$ を

満たすエネルギー順位はそれほど多くない。これは、得られたポテンシャルが限られたエネルギーでしか用いることのできない、ある意味で不便なものであることを意味する。

2.2.3 節で、ポテンシャルの平均運動量 $q = (p_1 + p_2)/2$ に対する依存性が、2 粒子間の相対座標 r に対する微分 $(-i\nabla_r)$ で表されることを見た。そしてその結果、座標空間のポテンシャルは非局所になるのであった。これを用いて、式 (2.20) の非局所ポテンシャル $U(r, r')$ を、 ∇ に対して展開して

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= V(\mathbf{r}, \nabla_r) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\mathbf{r}) \nabla_r^n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.13)$$

のように書く。これを微分展開と呼ぶ。

ここでは低エネルギーの散乱状態 (及び束縛状態) のみを考えているので、式 (3.13) において ∇_r の高次の項、すなわち q の高次の項は無視できるほど小さいと考えられる。そこで、

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim U^{(N)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^N v_n(\mathbf{r}) \nabla_r^n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.14)$$

と、展開を N 次で打ち切るという近似をする。この N は局所ポテンシャル $U \propto \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ からのずれの程度を表す数であり、ポテンシャルの非局所性が小さければ N も小さくて良い。よってこれにより非局所性の大きさを議論することができる。

ただしここで近似と言っているのは、決定されたポテンシャルから計算される物理的観測量 (散乱位相差、束縛エネルギー) に対するものである。ポテンシャルは観測量ではないのでその決め方によって関数形は変化する。各 $v_n(\mathbf{r})$ の関数型は N によって、もしくは展開の基底を変更した場合には変化する。さらに言えば、式 (3.8) の非局所ポテンシャル U 自体も、 ψ_n を再現する唯一の形ではない。以後、微分展開の収束性と言う時は常に、観測量の再現性について述べるものとする。

3.3 NBS 波動関数

前節で波動関数からポテンシャルを導出する方法がわかったので、次に核子 2 体系の波動関数をどのように計算するのかについて述べる。場の理論において、量子力学の波動関数に対応する量は同時刻 Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) 振幅と言われるものである。これを波動関数とみなしていることを明確にするため、以後これを NBS “波動関数” と呼ぶ。

NBS 波動関数 Ψ は次のように定義される :

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}; W) e^{-iWt} \equiv \langle 0 | n_{\beta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) p_{\alpha}(\mathbf{x}, t) | B = 2, W, \mathbf{P} = \mathbf{0} \rangle. \quad (3.15)$$

右辺のケット $|B=2, W, P=0\rangle$ はバリオン数 2、全エネルギー W 、全運動量 $P=0$ の QCD 固有状態を表す。 n_α 及び p_β は核子の量子数を持つ演算子で、クォークの局所的な複合場である。これを核子の内挿場と呼ぶ。 α, β はスピノル添字である。具体的には、例えば

$$\begin{aligned} n_\beta(\mathbf{r}) &= \epsilon_{abc} (u_a^T(\mathbf{r}) C \gamma_5 d_b(\mathbf{r})) d_{c\beta}, \\ p_\alpha(\mathbf{r}) &= \epsilon_{abc} (u_a^T(\mathbf{r}) C \gamma_5 d_b(\mathbf{r})) u_{c\alpha} \end{aligned} \quad (3.16)$$

を用いる。 u, d はアップ及びダウクォーク場の演算子で、 a, b, c はカラー添字である。 C は荷電共役変換行列である。しかし 3.5 節で述べるように、この内挿場の選び方は一意ではなく、それに応じて NBS 波動関数の関数形及び対応するポテンシャルにも不定性が残っている。

NBS 波動関数 $\Psi(r, W)$ は、相対距離 $|r|$ だけ離れた 2 点にそれぞれ中性子と陽子に“似た状態”で 3 つのクォークが存在する確率振幅とみなせる。第 2 章で述べたように、系の全エネルギー W が π 中間子の生成閾値より小さい場合

$$W < 2m_N + m_\pi \quad (3.17)$$

では、QCD の NN 相互作用は、 $r < R \sim 2\text{fm}$ に局在している。よって外側の領域 $\Omega_{out} = \{r \mid |r| > R\}$ では NBS 波動関数はヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \sim 0 \quad (3.18)$$

に従う。漸近運動量 k は、全エネルギー W と

$$W = 2\sqrt{k^2 + m_N^2} \quad (3.19)$$

で表される分散関係を満たすが、量子力学の枠組みに落とし込むために、重心系の非相対論的エネルギー E を

$$E = \frac{k^2}{2\mu} = \frac{k^2}{m_N} \quad (3.20)$$

と定義する [15]。

また、S 行列のユニタリー性から、NBS 波動関数の $r \rightarrow \infty$ での漸近的振る舞いが軌道角運動量 L 、スピン S に対し、

$$\Psi(r, W, L, S) \propto \frac{\sin(kr - L\pi/2 + \delta_{LS}(k))}{kr} e^{i\delta_{LS}(k)} \quad (3.21)$$

となる [7]。これは量子力学の散乱波の漸近形と同じ形である。よって NBS 波動関数を再現するように決めた波動関数等価ポテンシャル (3.8) が、観測量である位相差 δ_{LS} を正しく再現することが保証される。

3.4 格子上的 NBS 波動関数とポテンシャル

格子間隔 a 、空間体積 L_S^3 の格子を考える。この格子上で式 (3.15) の右辺は、核子場の 4 点関数として次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t_0; J^P) &= \langle 0 | n_\beta(\mathbf{y}, t) p_\alpha(\mathbf{x}, t) \bar{\mathcal{J}}_{pn}(t_0; J^P) | 0 \rangle \\
&= \sum_n \langle 0 | e^{Ht} n_\beta(\mathbf{y}, 0) p_\alpha(\mathbf{x}, 0) e^{-Ht} | n \rangle \langle n | e^{Ht_0} \bar{\mathcal{J}}_{pn} e^{-Ht_0} | 0 \rangle \\
&= \sum_n c_n \langle 0 | n_\beta(\mathbf{y}) p_\alpha(\mathbf{x}) | n \rangle e^{-E_n(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

E_0 は基底状態のエネルギーであり、 E_i ($i = 1, 2, \dots$) は励起状態のエネルギーである。 t が十分大きい時は励起状態からの寄与は消えて、

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t_0; J^P) \xrightarrow[t \gg t_0]{} c_0 \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}; J^P) e^{-E_0(t-t_0)} \tag{3.23}$$

$$c_n \equiv \langle n | \bar{\mathcal{J}}_{pn}(0) | 0 \rangle \tag{3.24}$$

のように、基底状態からの寄与のみが残る。ソース演算子 $\bar{\mathcal{J}}_{pn}(t_0; J^P)$ は、状態 $|B = 2, W, P = 0\rangle$ の中で、特定の角運動量 J 、パリティ P 、アイソスピン I を持つ状態を、ユークリッド時刻 t_0 で作る演算子である。ソース演算子の形は c_n にのみ影響し、これは 4 点関数 (3.23) の全体にかかる定数である。波動関数の規格化条件はポテンシャルに影響しないので、ソース演算子は任意のものを使って良い。

そこで、基底状態との重なりが比較的大きい、ウォール・ソースと呼ばれる演算子を用いる。

$$\mathcal{J}_{pn}(t_0; J^P) = P_{\alpha\beta}^{(s)} \left[p_\alpha^{wall}(t_0) n_\beta^{wall}(t_0) \right] \tag{3.25}$$

$p_\alpha^{wall}(t_0)$ 及び $n_\beta^{wall}(t_0)$ は、局所的な核子の内挿場 (3.16) を用いて、

$$q^{wall}(t_0) \equiv \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}, t_0) \tag{3.26}$$

と表される。これによって作られる状態は、 $t = t_0$ で軌道角運動量 $(L, m_L) = (0, 0)$ である。よって特定の (J, J_z) の状態を得るためには、スピンに関しての射影 $P^{(s)}$ をすれば良い。具体的には

$$P^{(s=0)} = \sigma_2, \quad P^{(s=1, s_z=0)} = \sigma_1 \tag{3.27}$$

を用いる²。

ただし、 S や L はそれ単体では保存しないので、 $P^{(s)}$ で指定されるのは、 $t > t_0$ における全角運動量 J であることに注意する。アイソスピンとパリティは式 (3.25) の右辺の括弧 $[]$ 中の形で指定されて

²付録 B 参照。

いるので、これにより望んだ (J^P, I) の状態を作ることができる。

3.4.1 $J^P = 0^+$ のポテンシャル

ソースで $J^P = 0^+$ の状態を指定した場合は、可能な状態は 1S_0 のみである。

$$\Psi(\mathbf{r}; 0^+) = \Psi(\mathbf{r}; ^1S_0) \quad (3.28)$$

1S_0 に対する核力ポテンシャルは、微分展開の最低次では中心力のみであり、1次のLS力(2.32)は現れないので、結局

$$V(\mathbf{r}; ^1S_0) = V_c(r) + \mathcal{O}(p^2) \quad (3.29)$$

である。低エネルギーでは $\mathcal{O}(p^2)$ の項は十分小さいと考えられ、中心力ポテンシャルは

$$(E - H_0)\Psi(\mathbf{r}; ^1S_0) = V(\mathbf{r}; ^1S_0)\Psi(\mathbf{r}; ^1S_0), \quad (3.30)$$

$$V(\mathbf{r}; ^1S_0) = \frac{(E - H_0)\Psi(\mathbf{r}; ^1S_0)(r)}{\Psi(\mathbf{r}; ^1S_0)} \quad (3.31)$$

と計算できる。

3.4.2 $J^P = 1^+$ のポテンシャル

$J^P = 1^+$ の微分展開最低次のポテンシャルは、

$$V(\mathbf{r}; 1^+) = V_c(r) + V_T(r)S_{12} \quad (3.32)$$

となる。この場合にはテンソル力により 3S_1 と 3D_1 の2つの状態が混合する。 $V_c(r)$ と $V_T(r)$ を決めるために、次のようなシュレディンガー方程式を考える。

$$(H_0 + V_c(r) + V_T(r)S_{12})\Psi(\mathbf{r}; 1^+) = E\Psi(\mathbf{r}; 1^+). \quad (3.33)$$

$\Psi(\mathbf{r}; 1^+)$ にはS波とD波両方の成分が含まれている。そこでそれぞれの成分に対する射影を考える³ :

$$\mathcal{P}\Psi_{\alpha\beta} = P^{(L=0)}\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}; 1^+), \quad (3.34)$$

$$\mathcal{Q}\Psi_{\alpha\beta} = (1 - P^{(L=0)})\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}; 1^+). \quad (3.35)$$

³ $\mathcal{P}\Psi_{\alpha\beta}$ と $\mathcal{Q}\Psi_{\alpha\beta}$ は $L \geq 4$ の成分を含むが、低エネルギーではそれらは小さいと期待される。

式 (3.33) の両辺に、左から \mathcal{P} と \mathcal{Q} をそれぞれかけると、

$$H_0[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + V_c(\mathbf{r})[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + V_T(\mathbf{r})[\mathcal{P}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = E[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \quad (3.36)$$

$$H_0[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + V_c(\mathbf{r})[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + V_T(\mathbf{r})[\mathcal{Q}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = E[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \quad (3.37)$$

という2つの独立な方程式を得る。ただし \mathcal{P} と \mathcal{Q} は H_0 、 V_c 、 V_T と交換するが、 S_{12} とは交換しないことを用いた。式 (3.37) を V_c と V_T に関して解くと、以下が得られる。

$$V_c(\mathbf{r}) = E - \frac{[\mathcal{Q}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})H_0[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - [\mathcal{P}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})H_0[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})[\mathcal{Q}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - [\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})[\mathcal{P}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}, \quad (3.38)$$

$$V_T(\mathbf{r}) = \frac{[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})H_0[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - [\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})H_0[\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{[\mathcal{P}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})[\mathcal{Q}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - [\mathcal{Q}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})[\mathcal{P}S_{12}\Psi]_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}. \quad (3.39)$$

3.5 核子内挿場依存性

既に述べたように、式 (3.16) のような内挿場の形は一意に決まるものではない。原理上は核子と同じ量子数を持つ演算子であれば、どのようなものを用いても問題ないはずである。しかし内挿場を変えれば NBS 波動関数の形も変わり、当然ポテンシャルの関数形も変化する。そのどれもが束縛エネルギーや位相差といった観測量を再現するという意味で“正しい”が、得られた核力ポテンシャルを原子核の多体問題や散乱問題などへ応用することを考えると、より“優れた”ポテンシャルと、そうでないものが存在すると言える。

ポテンシャルの非局所性が大きい場合には、微分展開の高次の項が必要になり、扱いにくい。そこで、最適な内挿場を選ぶことで非局所性が小さいポテンシャルを作るという方針が考えられる。しかし、式 (3.16) で与えた最も簡単な内挿場

$$\begin{aligned} n_\beta(\mathbf{r}) &= \epsilon_{abc} (u_a^T(\mathbf{r})C\gamma_5 d_b(\mathbf{r})) d_{c\beta}, \\ p_\alpha(\mathbf{r}) &= \epsilon_{abc} (u_a^T(\mathbf{r})C\gamma_5 d_b(\mathbf{r})) u_{c\alpha} \end{aligned} \quad (3.16)$$

以外を用いた場合は、非常に大きな統計数が必要になるため、少なくとも現時点ではこの方針を実行に移すことは計算資源の関係上難しい。

式 (3.16) の内挿場を用いた場合の非局所性の大きさを調べた先行研究がある [16]。ただし微分展開を直接的に実行するためには、式 (3.23) のように基底状態のみ考えるのではなく、励起状態も含めて複数のエネルギーにおける NBS 波動関数を計算しなければならない。ここでもまた多くの統計が必要になり難しい。そこで [16] では、 1S_0 チャネルは式 (3.31)、 3S_0 チャネルでは式 (3.38)、(3.39) のポテンシャルを用いて、それらのエネルギー依存性から非局所性の大きさを間接的に議論した。

彼らは、異なるエネルギーの状態を取り出すために、周期的/反周期的境界条件 (PBC/APBC) という2種類の空間方向の境界条件を用いた。彼らが用いたセットアップでは、式 (3.23) で引き出される最

低エネルギーは、PBCでは $E_0 \sim 0\text{MeV}$ 、APBCでは $E_0 \sim 45\text{MeV}$ となる⁴。これら2つのエネルギーにおいてそれぞれ局所ポテンシャルを計算し、それらを比較した結果が図3.1及び図3.2である。局所ポテンシャル(3.31)及び(3.38),(3.39)は、2つのエネルギーにおいて統計誤差の範囲で一致していることがわかる。すなわち、このエネルギー領域においては微分展開の最低次のみ用いる近似が有効であることが示された。これは、ポテンシャルの非局所性が小さいことを意味している。

しかし、ここで1つの疑問が生じる。彼らが用いた内挿場(3.16)は、計算コストの都合上便利なものを選んだだけであるのにも関わらず、結果として非局所性の小さいポテンシャルが得られた。これは偶然であろうか？それとも、何か理由があるのだろうか？例えば、HAL QCDの方法を使って、ストレンジクォークを含んだハイペロンなど、核子以外のバリオン間のポテンシャルを計算した際に、同様に非局所性の小さいポテンシャルが得られるという保証はない。非局所性の内挿場依存性については、今後さらなる検討の余地がある。

⁴このように境界条件によって最低のエネルギーが変わることは、1粒子運動とのアナロジーから理解できる。空間方向の大きさが L_S のPBCの下では、1粒子運動の運動量は $k_i = 2\pi n_i / L_S$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) のように離散化されるのに対し、APBCの下では $k_i = (2n_i + 1)\pi / L_S$ となる。これは、APBCの下では、1粒子が静止した状態が許されないということを意味している。

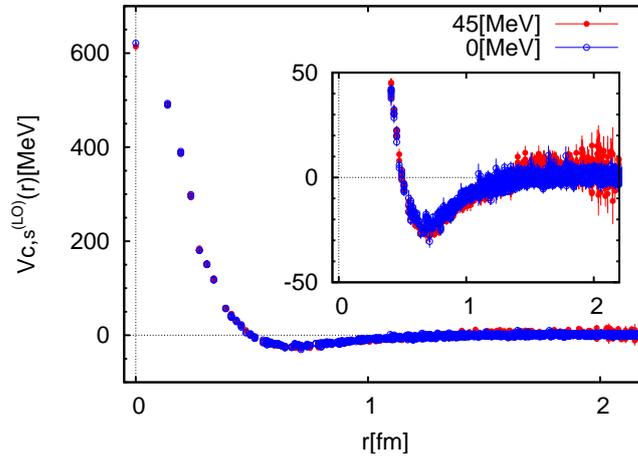


図 3.1: 1S_0 チャンネルの微分展開最低次近似のポテンシャル (3.31)。青が $E \sim 0\text{MeV}$ (PBC)、赤が $E \sim 45\text{MeV}$ (APBC) の結果を表す。

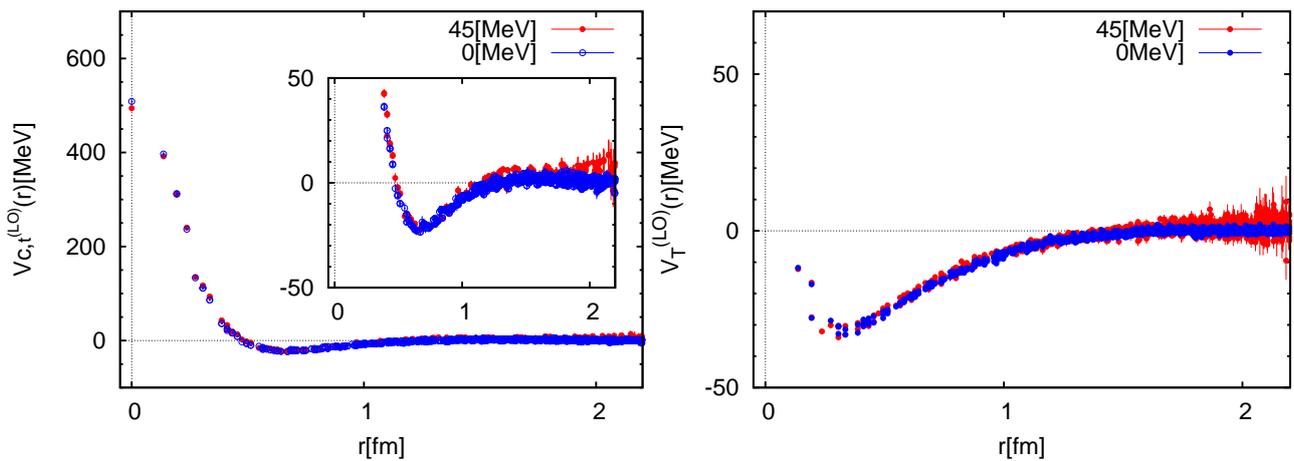


図 3.2: $J^P = 1^+$ の微分展開最低次近似のポテンシャル。左: 中心力ポテンシャル (3.38)、右: テンソル力ポテンシャル (3.39)。

第4章 Birse 模型

4.1 模型計算の必要性

前章で、格子 QCD シミュレーションを用いて核力ポテンシャルを計算する方法について述べた。しかしここでは、運動量について最低次のポテンシャル

$$V_{LO} = \frac{1}{2\mu} \frac{\nabla^2 \Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} + E \quad (\text{中心力の場合}) \quad (4.1)$$

に話を限定していた。微分展開の高次の項を含めないのは、一般に格子 QCD においては、式 (3.23) のように基底状態からの寄与は計算できるが、励起状態からの寄与を取り出すのは難しいためである。3.5 節で述べた例 [16] では、境界条件を変えることで複数のエネルギー状態を取り出している。これは、微分展開の収束性をエネルギー依存性という観点から間接的に評価したものであり、より直接的な評価が望まれる。

微分展開を直接的に評価するためには、同じ境界条件下の解として複数個のエネルギー固有値を用意する必要がある。これを実行するには統計数を増やすことが必要であり、計算資源の制限という問題から現時点では困難が伴う。

そこで、実際に複数のエネルギー固有状態の解を用意することができるように、解析的に解ける模型を用いて、微分展開が収束することを直接確認することは有用であると考えられる。ここでは本研究で用いる、2 核子散乱を模した 1 次元のチャンネル結合模型を導入する。

4.2 チャンネル結合方程式

Birse [8] は 1 次元の 2 体散乱問題を表す、2 チャンネル結合模型を用いて核子内挿場依存性を考えた。2 チャンネルのうちの 1 つは、2 核子が共に基底状態にあるチャンネル (NN) で、ここでは開いたチャンネルと呼ぶ。もう 1 つは 2 核子のうち片方が励起エネルギー Δ で励起したチャンネル (NN^*) で、これを閉じたチャンネルとする。開いたチャンネルでは、 NN は引力型井戸型ポテンシャルを通して相互作用する。これは核力中間領域の引力を想定している。一方で、閉じたチャンネルでは簡単のために NN^* 間のポテンシャルは 0 としている。2 つのチャンネルは接触相互作用により結合している。

すなわち、それぞれのチャネルの波動関数 $\psi_0(x)$ 及び $\psi_1(x)$ は、以下のチャネル結合方程式に従う。

$$[H_0 + V(x) - E] \psi_0(x) + 2g\delta(x)\psi_1(x) = 0 \quad (4.2)$$

$$[H_0 + \Delta - E] \psi_1(x) + 2g\delta(x)\psi_0(x) = 0 \quad (4.3)$$

ただし $V(x)$ は 1 次元の井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < R \\ 0 & |x| > R \end{cases} \quad (4.4)$$

である。

4.3 節で説明するように、Birse 模型においては NBS 波動関数に相当するものが、2 つのチャネルの波動関数の線形結合によって与えられる。すなわちパラメータ q を用いて、有効波動関数を、

$$\Psi_q(x) = \psi_0(x) + q\psi_1(x) \quad (4.5)$$

と定義する。 $E < \Delta$ では ψ_1 は閉じているので、遠方では 0 となる：

$$\Psi_q(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \psi_0(x). \quad (4.6)$$

このように遠方での振る舞いは $\psi_0(x)$ のみによって決定され、特に位相差は q に依存しない。これは格子 QCD シミュレーションにおいて、核子内挿場の取り方を変えても、NBS 波動関数に含まれる位相差の情報は変化しないことと対応している。

Birse は $\Psi_q(x)$ を再現するポテンシャルを、エネルギーに依存する局所ポテンシャルとして考えた：

$$\left[-\frac{1}{M} \frac{d^2}{dx^2} + V_q(x; E) - E \right] \Psi_q(x; E) = 0, \quad (4.7)$$

$$V_q(x; E) = \frac{1}{M\Psi_q(x; E)} \frac{d^2\Psi_q(x; E)}{dx^2} + E. \quad (4.8)$$

パラメータとしては、

$$MV_0 = 1/R^2, \quad M\Delta = 6/R^2, \quad Mg = 6/R, \quad R = 1 \quad (4.9)$$

が用いられた。このポテンシャルは原点付近に斥力芯に似た構造を持つが、その強さは q の値に依存していることが示された (図 4.1 左)。また、低エネルギー領域のみ考えれば、ポテンシャル $V_q(x; E)$ の関数形は E にほとんど依存しない (図 4.1 右)。これらのことから、彼は核力の斥力芯が系のダイナミクスよりもむしろ、核子内挿場の選び方によって生じうると主張した。

しかし彼の計算には大きく3つの問題点がある。第一に、4.4節で述べるように、この模型で上記のパラメータを用いると $E \simeq -33.7$ という非常に深い束縛状態があることがわかる。図4.1左の中で、 $x \simeq 0.07$ において全てのポテンシャルが1点で交わっているが、これはゼロエネルギーの波動関数 $\psi_0(x; E=0)$ が節を持つことの帰結である。すなわち、 $\psi_0(x_1; E=0) = 0$ を満たす点 x_1 が存在すると、

$$\begin{aligned} V_q(x_1; E=0) &= \left[-V_0(x) + \frac{q(V_0(x) + \Delta)\psi_1(x; E)}{\psi_0(x; E) + q\psi_1(x; E)} + \frac{2g(\psi_1(x; E) + q\psi_0(x; E))}{\psi_0(x; E) + q\psi_1(x; E)}\delta(x) \right]_{x=x_1, E=0} \\ &= \Delta \end{aligned} \quad (4.10)$$

と、ポテンシャルは q によらず同じ点を通ることになる。さらに調べれば、この“斥力芯”は、実は分母の $\Psi_q(x)$ が0になることによる発散であることがわかる。これは明らかに、通常の意味での斥力芯とは異なる。また、深い束縛状態の存在により、 $E=0$ が低エネルギーであるという仮定が成り立たず、微分展開の最低次のみを取るという近似の精度に影響している可能性がある。

第二の問題は、原点付近のポテンシャルの形が、 δ 関数の強さに大きく依存していることである。このことから、図4.1右のような強い q 依存性はこの模型の特性であり、一般の核力ポテンシャルに対しても成り立つという議論は成り立たないと考えられる。

最後に、局所ポテンシャル(4.8)はHAL QCDの目指す、エネルギーに依存しない非局所ポテンシャルとは異なっている。チャンネル結合方程式(4.2),(4.3)は解析的に解けるのであるから、その非局所性は微分展開を直接実行して研究するのが適切である。

本研究では、この模型から得られた波動関数 $\Psi_q(x; E)$ を用いて、波動関数等価ポテンシャルに微分展開を適用することを考える。上記の理由から、ここで得られたポテンシャルは現実の核力ポテンシャルと直接比較できるものではないが、微分展開手法の試金石として、2核子散乱の本質的な特徴は十分に捉えているものとする。

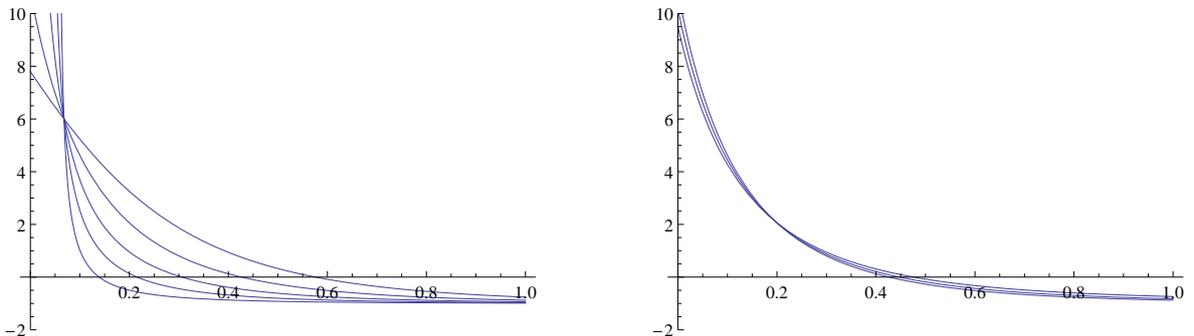


図4.1: 左: エネルギーを $E=0$ に固定し、 q の値を変えたときの $V_q(x; E=0)$ のプロット。縦軸がポテンシャル、横軸は x 。全て同じ線の色で描いてあるが、 $x=0.2$ のところで見て、下から $q=0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$ 。

右: $q=1$ に固定して、 E を変えたときの $V_{q=1}(x; E)$ のプロット。 $x \sim 0$ 付近で見て、上から $E=0, 1.0, 2.0$ 。これらの図は [8] から引用。

4.3 Birse 模型における核子内挿場依存性

この節では、NBS 波動関数に対応するものが、Birse 模型において式 (4.5) のように与えられることを見るために、第 2 量子化を用いて表した Birse 模型を考える。

系のハミルトニアンは、以下のように書ける。

$$\hat{H} = \hat{H}_p + \hat{H}_n + \hat{H}_{n'} + \hat{V}_{nppn} + \hat{V}_{nppn'} + (\hat{V}_{nppn'})^\dagger \quad (4.11)$$

$$\hat{H}_p = \int dx p^\dagger(x) \left(-\frac{1}{2M} \nabla^2 \right) p(x) \quad (4.12)$$

$$\hat{H}_n = \int dx n^\dagger(x) \left(-\frac{1}{2M} \nabla^2 \right) n(x) \quad (4.13)$$

$$\hat{H}_{n'} = \int dx n'^\dagger(x) \left(\Delta - \frac{1}{2M} \nabla^2 \right) n'(x) \quad (4.14)$$

$$\hat{V}_{nppn} = \int dx dy n^\dagger(x) p^\dagger(y) V(x-y) p(y) n(x) \quad (4.15)$$

$$\hat{V}_{nppn'} = 2g \int dx n^\dagger(x) p^\dagger(x) p(x) n'(x) \quad (4.16)$$

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } |x| < R \\ 0 & \text{for } |x| > R \end{cases}$$

すなわち、3 種類の粒子 p, n, n' があって、図 4.2 のファインマン図で表されるような相互作用をしている。

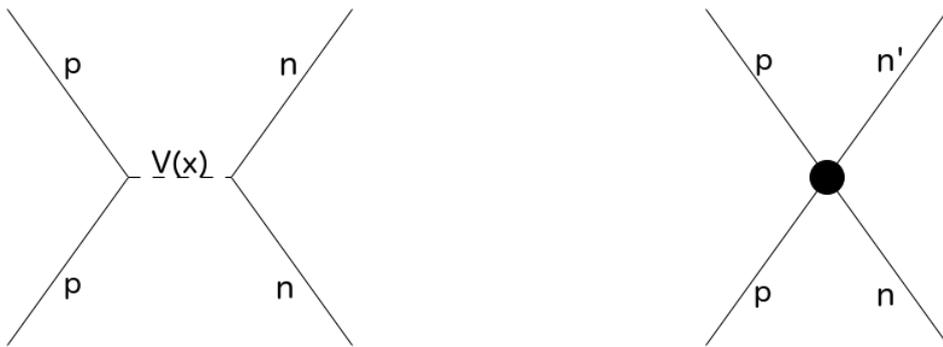


図 4.2: Birse 模型の相互作用。

ここに、次のような交換関係を課す。

$$\left[p(x), p^\dagger(y) \right] = \left[n(x), n^\dagger(y) \right] = \left[n'(x), n'^\dagger(y) \right] = \delta(x-y). \quad (4.17)$$

その他の交換関係はすべて 0 である。

NBS 波動関数は式 (3.15) のように、真空と 2 粒子状態の間の、核子場の行列要素として定義される。真空 $|0\rangle$ は場の演算子 $p(x)$, $n(x)$, $n'(x)$ がかかると 0 になり、 pn の 2 粒子散乱状態 $|\Psi(E)\rangle \equiv |p(+p)n(-p), in\rangle$ はハミルトニアン固有状態である。

$$p(x)|0\rangle = n(x)|0\rangle = n'(x)|0\rangle = 0, \quad (4.18)$$

$$\hat{H}|\Psi(E)\rangle = E|\Psi(E)\rangle, \quad E = \frac{p^2}{M}. \quad (4.19)$$

pn と pn' それぞれの NBS 波動関数

$$\psi_0(x-y) \equiv \langle 0 | p(x)n(y) | \Psi(E) \rangle \quad (4.20)$$

$$\psi_1(x-y) \equiv \langle 0 | p(x)n'(y) | \Psi(E) \rangle \quad (4.21)$$

は、次のような方程式を満たすことが確かめられる。

$$\begin{aligned} E\psi_0(x-y) &= \langle 0 | [p(x)n(y), \hat{H}] | \Psi(E) \rangle \\ &= -\frac{1}{M} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x-y) + V(x-y)\psi_0(x-y) + 2g\delta(x-y)\psi_1(x-y) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} E\psi_1(x-y) &= \langle 0 | [p(x)n'(y), \hat{H}] | \Psi(E) \rangle \\ &= \left(\Delta - \frac{1}{M} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi_1(x-y) + 2g\delta(x-y)\psi_0(x-y) \end{aligned} \quad (4.23)$$

これが式 (4.2), (4.3) のチャネル結合方程式である。

実際に格子 QCD で用いられる核子内挿場によって作られる状態は、基底状態の核子とその励起状態が混合したような状態であると考えられる。そこで、“実際の”中性子内挿場 $\phi(x)$ が、 n と n' の 2 粒子が混合した状態を作ると考えて、

$$\phi(x) \equiv n(x) + qn'(x) \quad (4.24)$$

とする。このとき、 p と “実際の”中性子 ϕ に対する NBS 波動関数は、

$$\begin{aligned} \Psi_q(x-y) &= \langle 0 | p(x)\phi(y) | \Psi(E) \rangle \\ &= \langle 0 | p(x)n(y) | \Psi(E) \rangle + q \langle 0 | p(x)n'(y) | \Psi(E) \rangle \\ &= \psi_0(x-y) + q\psi_1(x-y) \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる。よって確かに NBS 波動関数が、式 (4.5) のように 2 つのチャネルの線形結合によって与えられることが確かめられた。パラメータ q は、式 (4.24) のように、内挿場への励起状態の混合度を表す量である。

4.4 Birse 模型の波動関数

ここでは、Birse 模型のチャンネル結合方程式 (4.2),(4.3) の解について簡単にまとめる。境界条件としては、Twisted Boundary Condition (TBC) と呼ばれる、次のようなものを用いる¹。

$$\psi_i(x + 2L) = e^{i\theta} \psi_i(x) \quad (4.26)$$

$$\psi_i^*(x) = \psi_i(-x) \quad (i = 0, 1) \quad (4.27)$$

$\theta = 0$ ($\theta = \pi$) の時には、1 つ目の式 (4.26) は、空間の大きさが $2L$ の (反) 周期的境界条件を与える。2 つ目の式 (4.27) は、波動関数の実部が偶関数、虚部が奇関数になるようにするために入れている。本研究ではパリティ偶のポテンシャルを考えるので、 ψ_i の実部のみ用いる。

この境界条件の下で式 (4.2),(4.3) は解析的に解ける。解の具体的な形は付録 C.2 にまとめた。境界条件を $L = 10$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ として、模型のパラメータは式 (4.9) のものを使うと、散乱状態 $0 < E < \Delta$ のエネルギー固有状態は 15 個あることがわかる。例として、下から 4 つのエネルギー $E_1 = 0.023$ 、 $E_2 = 0.091$ 、 $E_3 = 0.205$ 、 $E_4 = 0.367$ での波動関数を図 4.3 に示した。全体の規格化は $\psi_1(0) = 1$ となるように取ったため、 ψ_0 のスケールがエネルギーにより異なっているが、ポテンシャルは規格化条件によらないため問題は生じない。 $x = 0$ で波動関数が尖っているのは、デルタ関数型ポテンシャルの影響である。また、図からは分かりにくいけど $|x| = R = 1$ には井戸型ポテンシャルの端点があり、2 階微分が不連続になっている。閉じたチャンネルの波動関数 $\psi_1(x)$ が、 x の大きいところでは 0 に近づくのも確認できる。

また、同じパラメータを使うと、 $E_0 = -33.67$ に束縛状態が存在することがわかる。 $E = E_0$ での波動関数を図 4.4 に示した。束縛状態では、 $\psi_0(x)$ も遠方で小さくなる。

¹通常よく用いられる (反) 周期的境界条件を使わないのは、境界の端の点 $x = \pm L$ 付近で問題が生じるためである。詳細は付録 C.3 を参照。

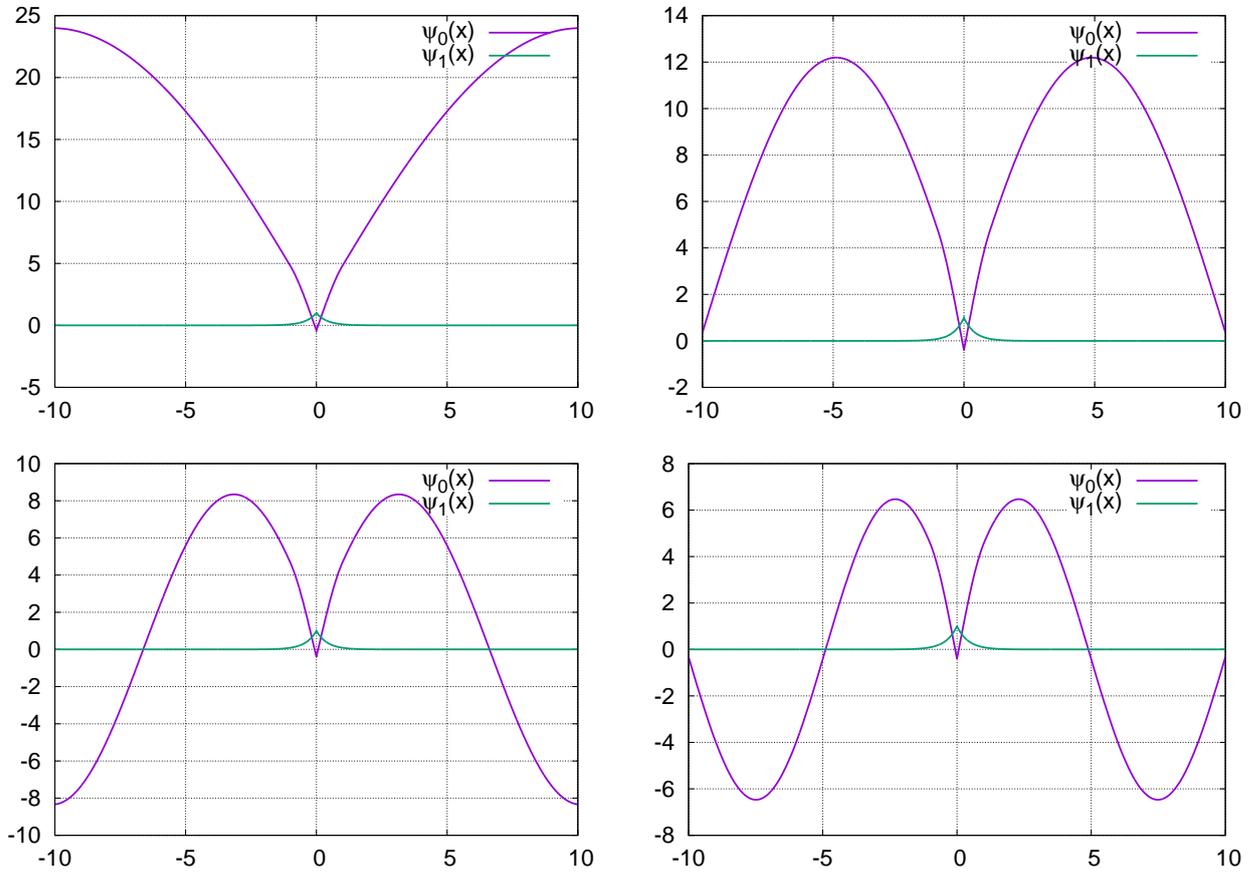


図 4.3: $L = 10, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時の散乱状態の波動関数 $\psi_0(x)$ (紫) と $\psi_1(x)$ (緑)。横軸は x 。左上: $E_1 = 0.023$ 、右上: $E_2 = 0.091$ 、左下: $E_3 = 0.205$ 、右下: $E_4 = 0.367$ 。

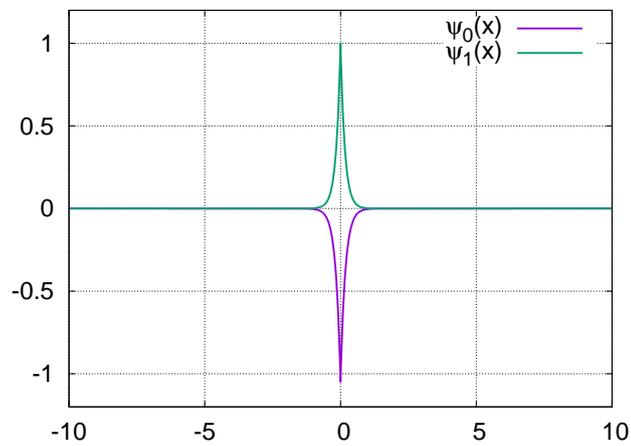


図 4.4: $L = 10, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時の束縛状態 $E = E_0 = -33.67$ の解。

第5章 微分展開の一般化とその評価

Birse 模型から得られた有効波動関数が、格子 QCD における NBS 波動関数と対応付けられることを確認したので、HAL QCD 法 (波動関数等価ポテンシャル + 微分展開) を用いてこれを再現するポテンシャルを構成する。Birse 模型のように解析的に解くことのできる模型を用いる利点として、複数のエネルギー固有状態を用いて微分展開を直接的に実行することが可能になる。

この章では、始めに波動関数が十分に滑らかでない場合への、微分展開の拡張を考える。微分展開の係数関数 $v_n(x)$ の導出は、各要素が波動関数の微分であるような行列の逆行列を求める問題に帰着される。ここで得られるポテンシャルには、微分を有限次で打ち切るという近似を行っている。そこで、この近似の正当性を確認するため、リップマン-シュウィンガー方程式を解き、それによって得られた位相差を元の模型と比較し、微分展開の収束性を議論する。

5.1 微分展開の一般化

Birse 模型の解は、井戸型ポテンシャル (4.4) の端点 $x = \pm R$ では、2 階以上の微分が不連続になる。また、 δ 関数型のポテンシャルにより原点では 1 階微分も不可能である。このような滑らかでない波動関数を用いる場合は、Naïve な微分展開

$$V(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x - x') \quad (5.1)$$

は適用できない。すなわち

$$\begin{aligned} \langle x | V | \Psi \rangle &= \int dx' V(x, x') \Psi(x') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int dx' v_n(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x - x') \Psi(x') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{d^n \Psi}{dx^n}(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

が $x = 0, \pm R$ で不定となってしまう。現実の核力ではこのような問題は生じないので、それに則して波動関数が滑らかになるように模型を変更することも考えられる。しかしここでは、滑らかでない波動関数に対しても適用できるように微分展開を一般化するという方策を取る。

式 (5.2) からわかるように、Naïve な微分展開 (5.1) を適用できないのは、非局所性の“核”が $\delta(x - x')$

で表されているためであった。これは、式 (2.20) のように、非局所性を全て微分演算で表すということの意味しているのであるが、その代わりに非局所性の一部を核の中にあらわに入れておくということも考えられる。すなわち、正の実数パラメータ ρ を導入して、

$$V(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\rho)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \quad (5.3)$$

という展開を考える。 δ 関数の定義式より、 $\rho \rightarrow 0$ の極限では

$$\frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \delta(x-x') \quad (5.4)$$

となり、式 (5.3) は式 (5.1) に戻る。式 (5.3) は、 δ 関数を ρ 程度の広がりを持ったガウス関数に置き換えたものである。

波動関数 $\Psi(x)$ をこのガウス関数の重みで均したものを、

$$\varphi_\rho(x) \equiv \int dx' \frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \Psi(x') \quad (5.5)$$

と定義しておくとも便利である。これを用いると、式 (5.2) と同様の形で、

$$\langle x | V | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\rho)}(x) \frac{d^n \varphi_\rho(x)}{dx^n} \quad (5.6)$$

と書ける。 $\varphi_\rho(x)$ の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d^n \varphi_\rho(x)}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} \int dx' \frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \Psi(x') \\ &= \int dx' \frac{1}{\rho^n} H_n \left(-\frac{x-x'}{\rho} \right) \frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \Psi(x') \end{aligned} \quad (5.7)$$

のように、波動関数が滑らかでない場合にも必ず定義される。ただしここで、ロドリゲスの公式

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} = H_n(-x) e^{-x^2} \quad (5.8)$$

を用いた。 $H_n(x)$ はエルミート多項式である。エルミート多項式は完全系を成すので、(滑らかな波動関数に対しては) 展開 (5.1) と (5.3) は等価である。

こうして波動関数の滑らかさに関する問題は解決したが、式 (5.3) の展開にはもう 1 つ問題がある。それは、ここでは波動関数 $\Psi(x)$ として偶パリティを持つもの限定して考えており、従って $\varphi_\rho(x)$ も

偶パリティを持つことに由来する：

$$\begin{aligned}
 \varphi_\rho(-x) &= \int dx' \frac{\exp\{-(-x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} \Psi(x') \\
 &= \int dx' \frac{\exp\{-(x+x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} \Psi(x') \\
 &= \int dx' \frac{1}{2} \left[\frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} + \frac{\exp\{-(x+x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} \right] \Psi(x') \\
 &= \varphi_\rho(x).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$\varphi_\rho(x)$ は滑らかな偶関数なので、原点での奇数階微分は0となる。次の節で具体的に示すが、この場合は $v_n^{(\rho)}(x)$ が原点で発散してしまう。そこで $\frac{d}{dx}$ を $D \equiv \frac{d}{d(x^2)}$ で置き換えたもの、

$$V^{(N)}(x, x') = \sum_{n=0}^N v_n^{(\rho)}(x) D^n W_\rho(x, x') \tag{5.10}$$

を用いる。ただしここで、展開を N 次で打ち切ったものを考えた。また V を x, x' に対して偶関数にするために、ガウス関数を

$$W_\rho(x, x') \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} + \frac{\exp\{-(x+x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi\rho}} \right] \tag{5.11}$$

で書き換えた。式 (5.9) より、偶パリティの波動関数に対するポテンシャルとしては W_ρ を使っても元のガウス関数を使っても同じものになるが、 x' 積分により結局消える x の奇数次の項をあらかじめ手で落とすことにより、数値計算の精度の上で利点がある。

x^2 での微分という直感的な理解が難しいが、実は式 (5.3) と式 (5.10) は各打ち切り次数 N において等価であり、左辺の $V^{(N)}(x, x')$ は同じものになる。式 (5.10) の展開を考えるのは、数値的に扱いやすいという理由のみによる。これは本質的には D^n が n 次以下の d/dx の線形結合で書けるためであるが、詳細は付録 D にまとめた。

5.2 ポテンシャルの逆構成

以下、表記の簡略化のため、 $v_n^{(\rho)}(x)$ 、 $W_\rho(x, x')$ 、及び $\varphi_\rho(x)$ についている指標 ρ を省略する。式 (5.10) の中の $(N+1)$ 個の展開係数 $v_n(x)$ を求めるには、 $(N+1)$ 個のエネルギーに対する有効シュレディンガー方程式、

$$(E - H_0)\Psi(x; E) = \sum_{n=0}^N v_n(x) D^n \varphi(x; E) \tag{5.12}$$

を連立する。すなわち、

$$\begin{pmatrix} (E_0 - H_0)\Psi(x; E_0) \\ (E_1 - H_0)\Psi(x; E_1) \\ \vdots \\ (E_N - H_0)\Psi(x; E_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x; E_0) & D\varphi(x; E_0) & \cdots & D^N\varphi(x; E_0) \\ \varphi(x; E_1) & D\varphi(x; E_1) & \cdots & D^N\varphi(x; E_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x; E_N) & D\varphi(x; E_N) & \cdots & D^N\varphi(x; E_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0(x) \\ v_1(x) \\ \vdots \\ v_N(x) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

を、 $(v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x))^T$ に関して解けばよい。ただし、離散的エネルギー固有値 E_i は、小さいものから順に飛ばすことなく用いる。

式 (5.3) のように微分を d/dx で行った時は、例えば $N = 2$ の場合、右辺の行列

$$\begin{pmatrix} \varphi(x; E_0) & \varphi'(x; E_0) & \varphi''(x; E_0) \\ \varphi(x; E_1) & \varphi'(x; E_1) & \varphi''(x; E_1) \\ \varphi(x; E_2) & \varphi'(x; E_2) & \varphi''(x; E_2) \end{pmatrix}$$

の第 2 列 (1 階微分) が $x \rightarrow 0$ で全て 0 となってしまう、逆行列が存在しない。これが x^2 での微分を考える理由である。

ポテンシャルの中の“正則”な部分は式 (5.13) に従って決定できるが、Birse 模型では原点に δ 関数型のポテンシャルがある。このような“非正則”な部分は数値的に扱えないので、別の方法で決める必要がある。

そのためにも、 $v_n(x)$ を正則部分 $\tilde{v}_n(x)$ と $\delta(x)$ に比例する項に分解する：

$$v_n(x) \equiv \tilde{v}_n(x) + g_n\delta(x). \quad (5.14)$$

シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi(x; E) = \sum_{n=0}^N (\tilde{v}_n(x) + g_n\delta(x)) D^n\varphi(x; E) \quad (5.15)$$

の両辺を $[-\epsilon, +\epsilon]$ の範囲で積分すると、 $\epsilon \rightarrow 0$ で正則部分からの寄与は消えて、 Ψ が偶関数であることを用いると次のようになる。

$$\frac{2}{M}\Psi'(x = +0; E) = \sum_n g_n [D^n \varphi(x; E)]_{x=0}. \quad (5.16)$$

この式を、正則部分を決めるときと同様に、 $(N+1)$ 個のエネルギーに対して連立して、

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{M}\Psi'(x; E_0) \\ \vdots \\ \frac{2}{M}\Psi'(x; E_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\varphi(x; E_0)]_{x=0} & \cdots & [D^N \varphi(x; E_0)]_{x=0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varphi(x; E_N)]_{x=0} & \cdots & [D^N \varphi(x; E_N)]_{x=0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

この方法で $(g_0, \dots, g_N)^T$ を求めれば、式 (5.13) と合わせて、ポテンシャル (5.14) は構成に用いた $(N+1)$ 個の波動関数を完全に再現する。

最後に、無限体積への外挿を考える。相互作用は R 以下の短距離にしか働かないので、微分展開ポテンシャル $V(x, x')$ は $|x| > R$ で指数関数的に小さくなる。また、ここでは大きさ $2L$ の有限体積空間を考えているので、 $x = \pm L$ 付近では境界条件に応じて変化する振る舞いが見られるが、 L が十分大きければ相互作用の内側でのポテンシャルの関数形には影響しない。そこで、 $R < x_m < L$ を満たすある x_m を用いて、上記の方法で得られた有限体積でのポテンシャル $V(x, x')$ が、 x_m の外側では 0 になるという近似をする：

$$V(|x| > x_m, x') = 0 \quad (5.18)$$

これによって、境界条件による影響を無視し、 V を無限体積におけるポテンシャルと考えることができる。次の 5.3 節では、この無限体積におけるポテンシャルを用いる。本研究においては $x_m = L/2$ を用いたが、これが条件を満たすことは、例えば図 6.2 の結果から確認できる。

5.3 リップマン-シュウイングー方程式

この章の初めに述べたように、導出された波動関数等価ポテンシャルを用いて再び波動関数を計算する。こうして計算された位相差 $\delta_N(E)$ が、Birse 模型を解析的に解いて得られた元々の位相差 $\delta_{th}(E) = \delta_\infty(E)$ をどの程度再現するのかを確かめることにより、微分展開の収束性を議論する。

ここではまず、非局所性を含んだポテンシャルを扱うために、リップマン-シュウイングー方程式を導入する。その後ポテンシャル (5.10), (5.14) が与えられた時のリップマン-シュウイングー方程式の数値計算方法を与え、最後に位相差を定義する。

5.3.1 リップマン-シュウイングー方程式の導出

ハミルトニアンが

$$H = H_0 + V \quad (5.19)$$

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{M} \quad (5.20)$$

で与えられるとき、時間に依存しない(散乱状態の)Schrödinger 方程式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \iff (E - H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \quad (5.21)$$

を考える。また、 $|\psi\rangle$ と同じエネルギー固有値を持つ自由粒子の解を $|\phi\rangle$ とする：

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle. \quad (5.22)$$

ポテンシャル $V \rightarrow 0$ の極限において、 $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ を満たすような式 (5.21) の解 $|\psi^{(\pm)}\rangle$ は、

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle \quad (5.23)$$

で与えられる。これはリップマン-シュウィンガー方程式と呼ばれる。ここで演算子を well-defined にするために、エネルギー E を $E \pm i\epsilon$ に置き換えた。これは計算の最後に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることを意味するが、正符号を取った場合は外向き、負符号は内向きの散乱を記述することが示される。物理的に主に興味があるのは外向き散乱であるので、以後正符号を取り、(+) の添字は省略する。

空間を 1 次元として、リップマン-シュウィンガー方程式を詳しく見ていく。基底として座標 $\langle x|$ を取ることにすると、

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|\phi\rangle + \int dx' dx'' \left\langle x \left| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right| x' \right\rangle \langle x'|V|x''\rangle \langle x''|\psi\rangle. \quad (5.24)$$

右辺第 1 項は運動量が $k = \sqrt{ME}$ で与えられる平面波である。ここでは偶パリティの解を考えるものとして、

$$\phi(x) \equiv \langle x|\phi\rangle = \frac{\cos kx}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.25)$$

を用いる。次に、

$$G(x, x') \equiv \left\langle x \left| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right| x' \right\rangle \quad (5.26)$$

で定義される $G(x, x')$ は、次のように評価できる。

$$\begin{aligned} G(x, x') &\equiv \left\langle x \left| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right| x' \right\rangle \\ &= \int dp dp' \langle x|p\rangle \left\langle p \left| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right| p' \right\rangle \langle p'|x'\rangle \\ &= \int dp dp' \frac{e^{i(px - p'x')}}{2\pi} \left\langle p \left| \frac{M}{k^2 - \hat{p}^2 + i\epsilon} \right| p' \right\rangle \\ &= \int dp dp' \frac{e^{i(px - p'x')}}{2\pi} \frac{M}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \delta(p - p') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} \frac{M}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{iM}{2k} \left[e^{ik(x-x')} \theta(x-x') + e^{-ik(x-x')} \theta(x'-x) \right]. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

ここで、 dp 積分の経路を $(x-x')$ の符号に応じて図 5.1 のように変更し、留数積分を行った。また、 $G(x, x')$ はヘルムホルツ方程式のグリーン関数であることがわかる：

$$\frac{1}{M} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) G(x, x') = \delta(x - x'). \tag{5.28}$$

さらに積分 Kernel $K(x, x'')$ を

$$K(x, x'') \equiv \int dx' G(x, x') V(x', x'') \tag{5.29}$$

と定義すると、座標表示の 1 次元リップマン-シュウィンガー方程式 (5.24) は結局次のように書ける。

$$\psi(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{2\pi}} + \int dx'' K(x, x'') \psi(x''). \tag{5.30}$$

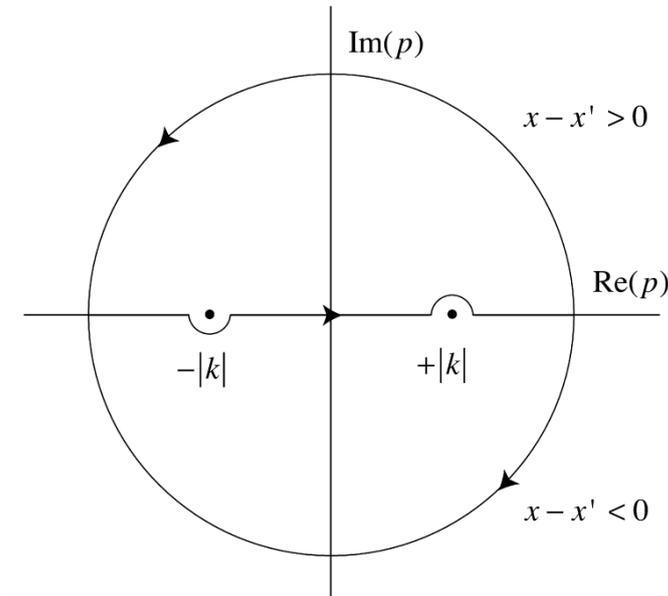


図 5.1: dp 積分の積分経路の変更。 $x - x' > 0$ のときは上半平面を通して $p = -|k| - i\epsilon$ の極を拾い、 $x - x' < 0$ のときは下半平面を通して $p = +|k| + i\epsilon$ の極を拾う。

5.3.2 リップマン-シュウインガー方程式の数値計算方法

ポテンシャルが式 (5.14) のように δ 関数を含む場合は、式 (5.29) の積分が数値的に行えないので、 δ 関数部分は手で積分する。すなわち、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} K(x, x'') &= \int dx' G(x, x') V(x', x'') \\ &= \int dx' G(x, x') \sum_n (\tilde{v}_n(x') + g_n \delta(x')) D_{x'}^n W(x', x'') \\ &= \tilde{K}(x, x'') + \sum_n g_n G(x, 0) [D_{x'}^n W(x', x'')]_{x'=0} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\tilde{K}(x, x'') \equiv \int dx' G(x, x') \sum_n \tilde{v}_n(x') D_{x'}^n G(x', x'') \quad (5.32)$$

次に、積分方程式 (5.30) を数値的に解くために、 x'' 積分を和の形で書き直して、

$$\int dx'' K(x, x'') \psi(x'') \rightarrow \sum_{j=0}^n w_j K(x_i, x_j) \psi(x_j) \quad (5.33)$$

と書く。 w_j は座標の離散化 $x'' \rightarrow x_j$ と共に決まる重みである。元の x'' 積分は $[-\infty, +\infty]$ の範囲で行うが、ポテンシャルが空間的に局在していることから、 $K(x, x'')$ には $x \simeq x''$ の部分からの寄与が支配的であるため、 $[x_0, x_n]$ の範囲での積分に置き換える。 $x \rightarrow x_i$ の間隔は x_j と同じにしておく。

これを用いてベクトル ψ 、 ϕ と行列 K を

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi(x_0) \\ \vdots \\ \psi(x_n) \end{pmatrix}, \quad \phi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\cos(kx_0)}{\sqrt{2\pi}} \\ \vdots \\ \frac{\cos(kx_n)}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}, \quad K_{ij} \equiv w_j K(x_i, x_j) \quad (5.34)$$

と定義すると、リップマン-シュウインガー方程式 (5.30) は次の形に書ける。

$$(\mathbf{1} - K)\psi = \phi \quad (5.35)$$

あとは行列 $(\mathbf{1} - K)$ の逆行列を計算すれば、リップマン-シュウインガー方程式の解 ψ が求まる。

5.3.3 位相差の定義

ポテンシャル $V(x', x'')$ が有限の到達距離を持っており、

$$V(x', x'') \simeq 0 \quad \text{for} \quad |x'| > R \text{ or } |x''| > R \quad (5.36)$$

を満たすとする。この時、1次元リップマン-シュウインガー方程式 (5.30) の $x > R$ における解を考えると、グリーン関数 (5.27) で積分に効くのは第1項のみとなる：

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{iM}{2k} e^{ikx} \iint dx' dx'' e^{-ikx'} V(x', x'') \psi(x''). \quad (5.37)$$

関数 $f(k)$ を

$$ikf(k) \equiv -\sqrt{2\pi} \frac{iM}{2k} \iint dx' dx'' e^{-ikx'} V(x', x'') \psi(x'') \quad (5.38)$$

$$= -\frac{i\pi M}{k} \langle k | V | \psi \rangle \quad (5.39)$$

と定義すると、式 (5.37) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x) + \frac{ikf(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\cos kx + ikf(k) e^{ikx} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ikx} + (1 + 2ikf(k)) e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

確率の保存の要請から、正方向へ向かう波 e^{ikx} と負方向へ向かう波 e^{-ikx} の係数のノルムが等しくなければならない。よって、実数 $\delta(k)$ を用いて

$$1 + 2ikf(k) \equiv e^{2i\delta(k)} \quad (5.41)$$

が成り立つ。すると、リップマン-シュウインガー方程式の $x > R$ における解は、結局、

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ikx} + e^{ikx} e^{2i\delta} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\delta} \left[e^{-i(kx+\delta)} + e^{i(kx+\delta)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\delta} \cos(kx + \delta) \end{aligned} \quad (5.42)$$

と書けることがわかる。空間3次元の場合に倣って、この $\delta(k)$ を散乱位相差と呼ぶことにする。

第6章 数値計算結果

前章までの方法を用いて数値計算を行い、微分展開の収束性を議論する。説明の便宜上、Birse 模型から得られる NBS 波動関数 (4.5) と微分展開の式 (5.10) を再度まとめておく。

$$\Psi_q(x) = \psi_0(x) + q\psi_1(x) \quad (6.1)$$

$$V^{(N)}(x, x') = \sum_{n=0}^N v_n^{(\rho)}(x) D^n W_\rho(x, x') \quad (6.2)$$

$$D \equiv \frac{d}{d(x^2)} \quad (6.3)$$

$$W_\rho(x, x') \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} + \frac{\exp\{-(x+x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \right] \quad (6.4)$$

式 (6.2) の左辺の $V^{(N)}(x, x')$ は、展開の打ち止め次数 N の他に、NBS 波動関数への励起状態の混合度 q 、非局所性の“核”の大きさ ρ に依存する。また、空間の大きさ L や式 (4.26) で導入された θ を変えて、境界条件からの影響が小さいことを確認する必要があるが、以下ではひとまず考えず、 $L = 10$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ に固定する。

6.1 微分展開ポテンシャルの結果

q, ρ をそれぞれ $q = 0.2$, $\rho = 0.5$ とする。

式 (6.2) の微分展開の係数 $v_n(x)$ ¹ を、 N を変えながらプロットすると図 6.1 のようになる。 $x = 1$ のところで段状になっているのは、模型に含まれている井戸型ポテンシャルの影響である。原点付近では、閉じたチャンネル ψ_1 の影響により $v_n(x)$ の絶対値が大きくなっている。このように、原点付近の振る舞いは q に大きく依存し、引力的にも斥力的にもなりうる。しかし、遠方では ψ_1 の影響は消えるため (式 (4.6))、遠方でのポテンシャルの関数形は q にはほとんど依存しない。

同じ $v_n(x)$ を用いて、式 (6.2) の $V^{(N)}(x, x')$ を描いたものが図 6.2 である。 N が大きくなるにつれて、ポテンシャルの中の斥力部分である山と引力部分である谷の数が増えて、波を打つようになっているのがわかる。また、山と谷の振れ幅も N と共に大きくなっていく。よってポテンシャルの関数形自体は、少なくとも 5 次までの微分展開では、ある特定の $V^{(\infty)}(x, x')$ に収束しているとは言えない。

¹ δ 関数はプロットできないので、正確には正則部分 $\tilde{v}_n(x)$ (式 (5.14))。

図 6.1(e) を見ると、 $N = 5$ のときの $v_n(x)$ は $x > 4$ の長距離まで尾をひいているように見えるが、全体の非局所ポテンシャル $V^{(N=5)}(x, x')$ には影響しないことが図 6.2(e) からわかる。これは、 $v_n(x)$ には式 (D.1) で表される、 x に対して負べきの因子が掛けられるためである²。微分展開ポテンシャル $V(x, x')$ の絶対値が $|x| > R$ に対して指数関数的に小さくなることは、シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi_q(x; E) = \int dx' V^{(N)}(x, x')\Psi_q(x'; E) \quad (6.5)$$

の左辺が井戸型ポテンシャルの外側 $|x| > R$ において、

$$(E - H_0)\Psi(x; E) = (E - H_0)(\psi_0(x) + q\psi_1(x)) \quad (6.6)$$

$$= (E - H_0)q\psi_1(x) \quad (6.7)$$

と閉じたチャンネル ψ_1 にのみよって決まり、かつ $\psi_1(x)$ は指数関数的に小さくなることから明らかである。

²この因子は $x = 0$ で見かけ上発散するが、 x について展開した形を用いることで取り除くことができる。詳しくは付録 D.2 参照。

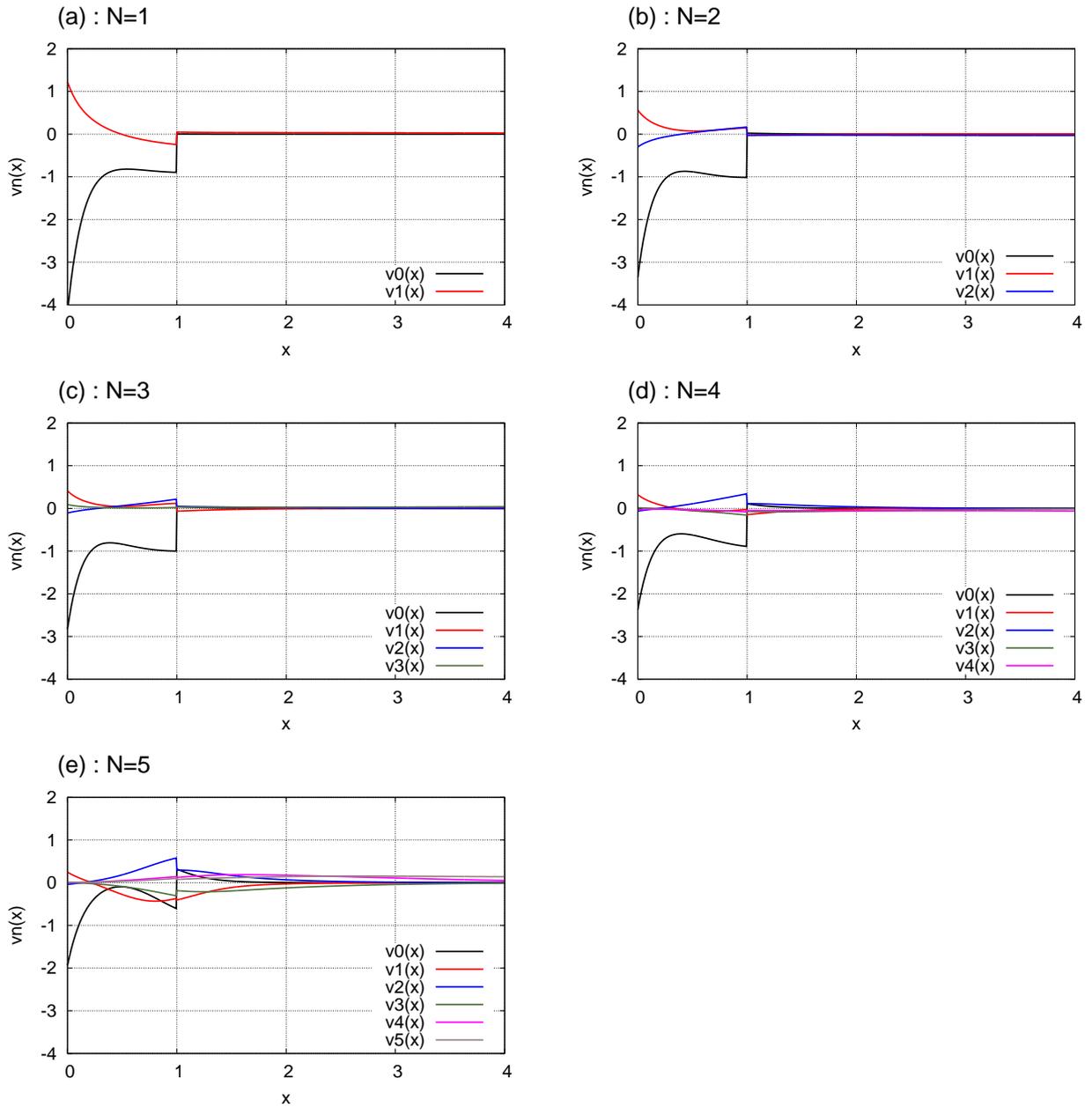


図 6.1: 微分展開 (6.2) の係数関数 $\tilde{v}_n(x)$ を N を変えてプロットしたもの。 $q = 0.2$, $\rho = 0.5$ は固定。縦軸の各 v_n の値は、質量の $2n$ 乗をかけて次元を揃えたもの ($v_n(x)M^{2n}$) とみなす。

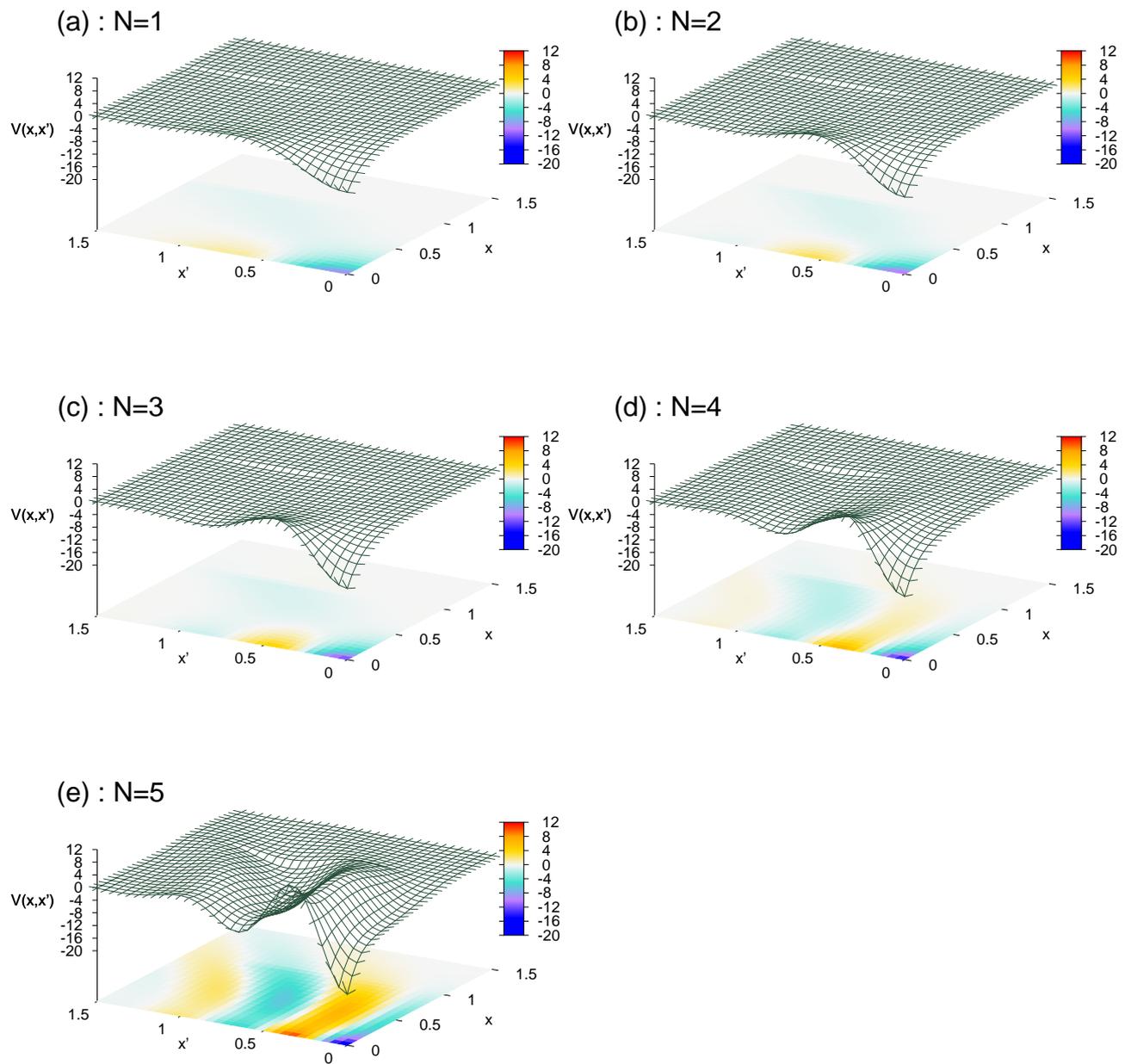


図 6.2: 式 (6.2) の微分展開ポテンシャル $V^{(N)}(x, x')$ 。 $0 < \{x, x'\} < 2$ の範囲で描いているが、 x 軸及び x' 軸に関して対称である。

6.2 位相差の結果

得られたポテンシャル $V^{(N)}(x, x')$ を用いて、位相差をリップマン-シュウィンガー方程式を解いて計算する。それを Birse 模型を直接解いて得られる位相差³と比較した結果が、図 6.3 である。以下に述べるように、この図から微分展開が収束していることが言える。

確認として、 N が異なればポテンシャルの計算に用いたエネルギーが異なることに注意する。図 6.3 で色つきの点に対応するエネルギーが、空間体積 $L = 10$ の TBC の下での正のエネルギー固有状態 $\{E_1, \dots, E_{15}\}$ である⁴。微分展開を N 次で打ち切ったポテンシャルは、束縛状態 $E_0 = -5.6[\Delta]$ 、及び E_1, \dots, E_N という下から $(N + 1)$ 個のエネルギーにおける波動関数の情報を用いている。図 6.3 から、ポテンシャルの構成に用いたエネルギーにおいては、位相差は黒の実線で表されている理論値を確かに再現していることがわかる。

ポテンシャルの構成に用いていないエネルギーにおいては、位相差の再現性は保証されない。エネルギーが大きくなり閾値 $E = \Delta$ に近づくと、位相差は理論値からずれていく。しかし、 N が大きくなるほど理論曲線に近づき、高エネルギーにおける位相差も良く再現するようになる。これは、ポテンシャルの非局所性が小さいために、微分展開の低次の項だけでそれを表現できているということであり、微分展開の収束性が確認できたと言える。

例えば $N = 3$ の場合を考えると、 $E \simeq E_{12} = 0.58[\Delta]$ まで非常によく理論値を再現している。このことから、 $E < E_{12}$ では 3 次の微分展開ポテンシャルが適用できると言える。微分展開 3 次のポテンシャルの構成には $E \leq E_3 = 0.03[\Delta]$ までの波動関数しか用いていないのにも関わらず、このように高いエネルギーにまで適用できるのは、この領域でポテンシャルの“エネルギー依存性”が小さいということの意味している。ポテンシャルのエネルギー依存性は、微分展開の高次の項が含まれていないために、ポテンシャルの非局所性の入り方に不定性が生じることに由来する。よって、微分展開を打ち切った場合にもエネルギー依存性が小さいということは、考えているエネルギー領域において、微分展開がその次数まででほぼ収束しているということを表している⁵。

³式 (C.12) 参照。

⁴式 (5.18) の方法で無限体積へ外挿したポテンシャル $V(x, x')$ が得られれば、任意の $E > 0$ において位相差を計算できるが、ここでは話を分かりやすくするために、ポテンシャルの構成に用いたのと同じエネルギーのみ用いている。

⁵ここで“微分展開の収束”と言っている意味は、位相差を正しく再現するという意味である。図 6.2 から、 $N = 3$ ではまだポテンシャルの関数形は収束しておらず、 $N = 4, 5$ のポテンシャルとは異なっている。しかし、その違いは $E < E_{12}$ の位相差の結果には影響していない。これはポテンシャルというのは観測量ではなく、非局所性は異なるが同様に位相差を再現するようなポテンシャルがいくつもあるということの意味している。

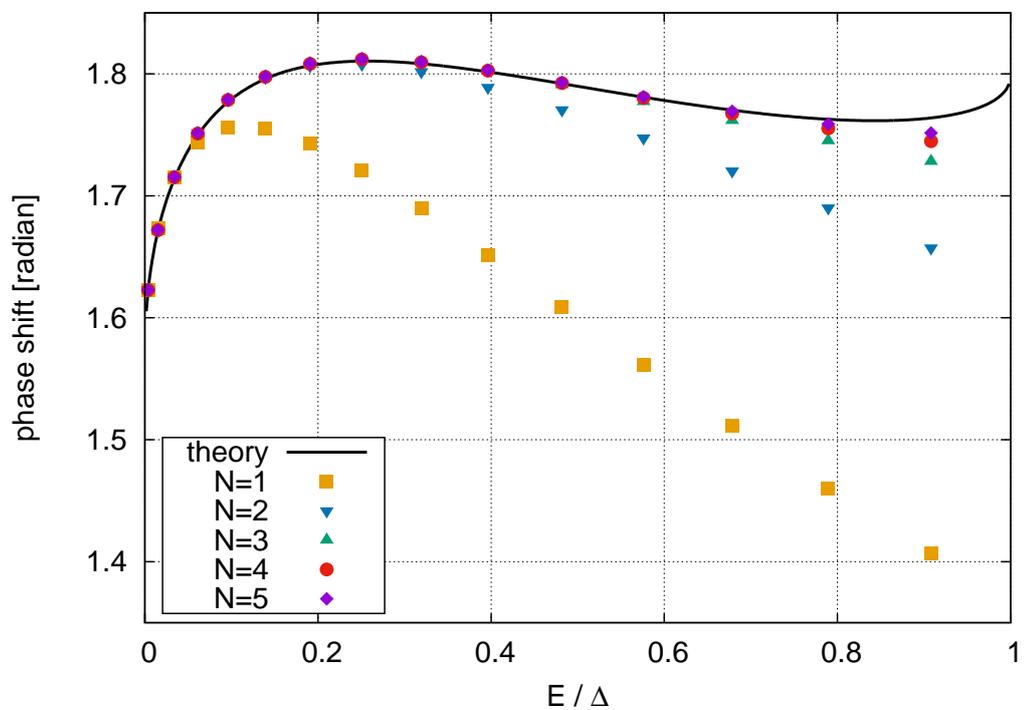


図 6.3: 位相差の結果。黒の実線は Birse 模型を解析的に解いて得られる理論値。データ点はそれぞれ $N = 1, \dots, 5$ の微分展開ポテンシャル $V^{(N)}(x, x')$ を用いてリップマン-シュウィンガー方程式を解いて得られた結果。横軸はエネルギーであるが、閾値 Δ で割って無次元化してある。

第7章 最近の発展と今後の展望

7.1 微分展開の核の非局所性の大きさについて： ρ 依存性

微分展開 (6.2) の核として $\delta(x - x')$ ではなく式 (6.4) の $W_\rho(x, x')$ を用いた元々の目的は、滑らかでない波動関数を微分するためであった。しかし、この一般化微分展開を用いるもう一つの利点として、微分の階数が低次で抑えられる可能性がある。

そう考える根拠は以下の通りである。一般化微分展開では、非局所性をまず幅 ρ のガウス関数で導入しておき、ポテンシャル $V(x, x')$ に固有な非局所性からのずれを微分によって取り入れる。適切な ρ の値を選んで用いればこのずれが小さくなり、低次の微分により十分に取り入れることができると考えられる。よってすべてのずれを微分によって表さなければならない δ 関数型の核と比較すれば、微分展開の収束性は改善されることが期待される。

そこで ρ 依存性を調べるために、 $q = 0.2$ のまま $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ と変えて、位相差を比較してみる。その結果は図 7.1 のようになる。

まず、 $N = 1$ の場合を見てみる。 $E = E_1$ では、どの ρ においても必ず理論値を再現するのは当然であるが、 $E > E_1$ での振る舞いには顕著な ρ 依存性が見られる。定性的に言えば、 ρ が小さいほど低エネルギー ($E \lesssim 0.3\Delta$) で位相差が理論値から上にずれるが、その分高エネルギー ($E \gtrsim 0.5\Delta$) における下方向へのずれが抑えられている。高エネルギーで位相差を小さく見積もってしまう原因は、閉じたチャンネルとの結合による非局所性が強い $x \sim 0$ の狭い領域で、ポテンシャルが引力的に働いているが、 ρ が大きすぎる場合はそのポテンシャルの鋭い変化を表すことができず、十分な強さの引力が得られないためであると考えられる。また逆に ρ を小さくしすぎると原点近傍以外で非局所性を再現できず、低エネルギーの位相差がずれてしまう。ポテンシャルのこうした振る舞いは、図 6.2(b)、及び $\rho = 0.1$ 及び $\rho = 0.7$ の時の 1 次の微分展開ポテンシャルを描いた図 7.2 から見て取れる。結局、低エネルギーの限られた領域でのエネルギー依存性が小さいポテンシャルを採用することにすると、 $\rho = 0.3$ と $\rho = 0.5$ の中間の値が、最も性質の良いものになると考えられる。

$N = 2$ の場合は、 $\rho = 0.5$ より $\rho = 0.1$ や $\rho = 0.3$ の場合の方が、広いエネルギーで位相差をよく再現していると言える。このことは、核により導入される非局所性を微分展開により補正する際に、大きな非局所性を小さくするのは、その逆より難しいということを示唆している。このように ρ の最適値は N によって変化しうる。

また $N = 3$ 以上では、どの ρ を用いても比較的良く理論値を再現する。これは $q = 0.2$ の場合には、そもそも非局所性が小さいということを表している。

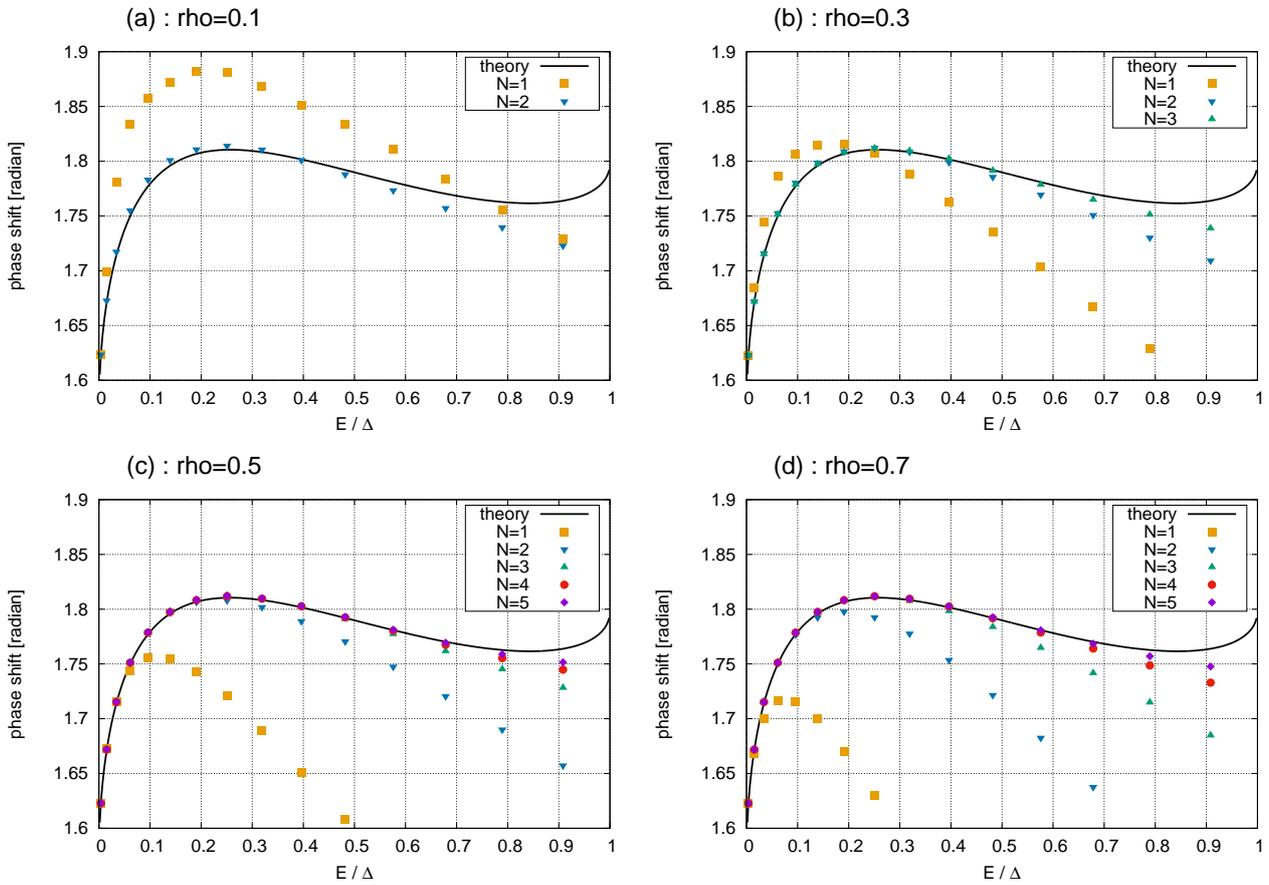


図 7.1: ρ を変えた時の位相差。(a) $\rho = 0.1$ では $N = 2$ まで、(b) $\rho = 0.3$ では $N = 3$ までしかプロットされていないが、式 (5.13) を解く際の条件数¹ が 10^{10} より大きい場合は除外したためである。

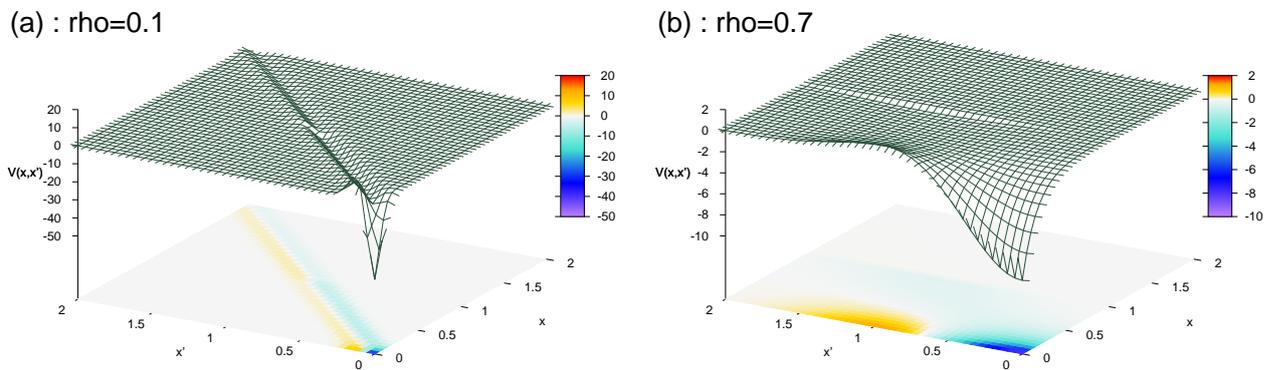


図 7.2: (a) $\rho = 0.1$, (b) $\rho = 0.7$ における、 $N = 1$ の微分展開ポテンシャル。

¹最大固有値と最小固有値の比を条件数と呼ぶ。この値が大きいと、解の数値的誤差が大きくなってしまふ。

7.2 核子内挿場依存性： q 依存性

核子内挿場の選び方がポテンシャルの非局所性に与える影響を調べるために、 q を変えてみる。まず、 $q = 0$ の場合の非局所性は非常に小さい。なぜならば $q = 0$ の場合、式 (5.12) の左辺は式 (4.2) より、

$$\begin{aligned} (E - H_0)\Psi_{q=0}(x; E) &= (E - H_0)\psi_0(x; E) \\ &= V(x)\psi_0(x; E) + 2g\delta(x)\psi_1(x) \end{aligned} \quad (7.1)$$

となる。すなわち、原点以外では式 (4.4) の完全に局所的な井戸型ポテンシャル $V(x)$ となり、非局所性は原点に局在する δ 関数的な形でのみ現れる。このため、この非局所性は小さい。前章の $q = 0.2$ の場合は微分展開の収束性が良く、非局所性がまだ小さかったと言えるので、ここでは、非局所性をさらに大きくするために $q = 1$ としてみる。 $\rho = 0.5$ は変えずにそのまま用いる。その結果が図 7.3 である。

$q = 1.0$ の場合は $q = 0.2$ の場合に比べて、低エネルギーで上にずれ、高エネルギーではより理論値に近い。この振る舞いは図 7.1 において、 ρ を小さくした時の変化とよく似ている。それが意味することは明らかに、 q を増やした際に非局所性が大きくなり、その結果核の非局所性の大きさ ρ が相対的に小さくなったということである。この結果は、微分展開の収束性を改善するための最適な ρ が存在するという前節の議論をより強固にするものである。

もう一つの重要な点は、 q の変化により確かに微分展開の収束性が変わっているということである。 $q = 1.0$ で $N = 1$ の場合は、位相差は $E = E_2$ から既に理論値を大きく外れているが、 $q = 0.2$ の対応する結果を見ると、 $E \simeq E_4$ あたりまで理論値を再現している。 $N = 2$ の場合も同様のことが言える。これにより、内挿場を変えることで（ここでは $q = 1.0$ から $q = 0.2$ にすることで）非局所性を小さくするというアイデアが、確かにうまくいくという具体例が示された。

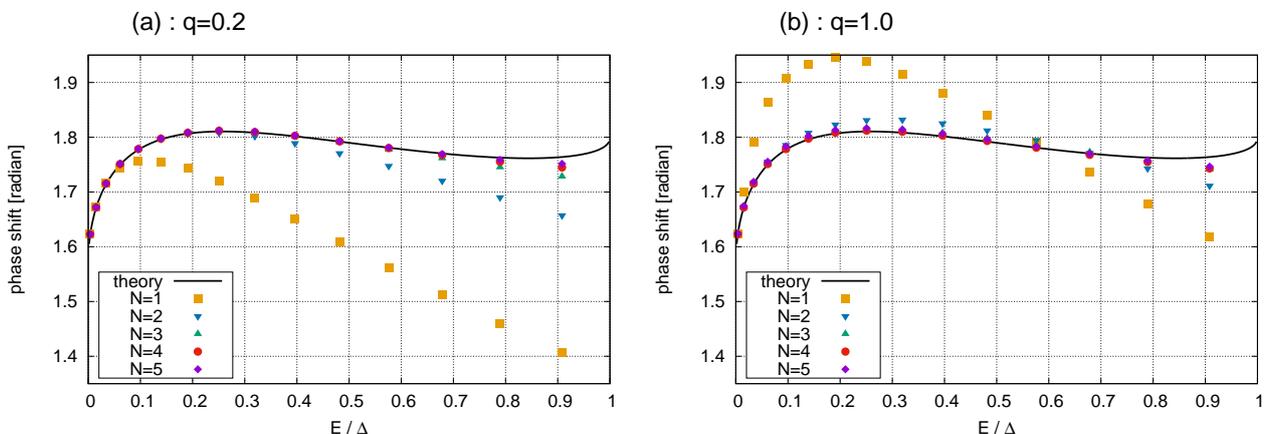


図 7.3: (a) : $q = 0.2$ 、(b) : $q = 1.0$ の時の位相差。 $\rho = 0.5$ は共通。

7.3 今後の展望

q を変えて非局所性を大きくし、微分展開の収束性が悪い例を作って比較したかったのだが、 $q = 1$ においても $N = 4, 5$ ではかなり精度よく位相差が再現できてしまった。もちろん、あえて非局所性を大きくするというのは、当初の目的とは逆転したことであるが、核子内挿場の依存性をより詳しく見るために、今後さらに q の値を変えて、微分展開の収束性を比較したい。

同時に、 ρ の値を調節することで微分展開の収束性が改善することがわかったので、 q 依存性と合わせてより多くのパラメータを用いて計算していく。

第8章 結論

本研究では、Birse のチャンネル結合模型を用いて、波動関数等価ポテンシャルの非局所性を微分展開を用いて考えた。元となるアイデアは HAL QCD collaboration の核力ポテンシャルであるが、限られたエネルギーにおける NBS 波動関数しか計算できない格子 QCD の場合とは対照的に、Birse 模型は解析的に解くことができるため複数個のエネルギーにおける波動関数が誤差なく得られる。これにより、初めて微分展開を直接的に実行・評価することが可能となった。

Birse 模型から得られる、滑らかでない波動関数に対して微分展開を適用するため、本研究では微分展開の“核”を非局所な広がりを持ったものとする、一般化微分展開を導入した。微分展開を有限次で打ち切った時の係数関数は、それらと同じ個数のエネルギー固有状態波動関数から決定された。こうして得られた微分展開ポテンシャルを用いて、リップマン-シュウィンガー方程式を解くことで再び波動関数を計算し、位相差を求めた。得られた位相差を元の模型から得られる理論値と比較することで、微分展開の収束性を議論することができる。これにより、展開は数次程度で十分収束しているということが確認された。すなわち、微分展開は運動量による展開と等価であり、低エネルギーでは収束性が良いと期待されるが、本研究においてそれが実際に確認された。

さらに、微分展開の核や核子内挿場の選び方を変えることによって、微分展開の収束性が改善されることも示された。今後、さらに多くの条件を比較することで、模型によらず一般的に成り立つ事実を明らかにし、将来の現実の核力ポテンシャルへの応用に対して有益な示唆を与えることを目指す。

謝辞

本修士論文は、筆者が大阪大学大学院 理学研究科 物理学専攻 博士前期課程において、核物理研究センター理論部にて行った研究をまとめたものです。

本研究は、大阪大学核物理研究センター 石井理修准教授の熱心かつ丁寧なご指導の下に成り立ったものであり、終始大変お世話になりました。ご自身もご多用の中、いつも親身になって指導していただきましたこと、心より感謝申し上げます。

同 保坂淳教授には、研究内容や基礎的な学習に関して数多くの助言をいただきました。特に、研究発表に関していただいたコメントは大変勉強になりました。ここに感謝の意を表します。

同 研究員、村野啓子氏には、石井准教授と共に助言と激励をいただきました。わかりやすいご説明に何度も助けられました。本当にありがとうございました。

東京工業大学 理工学研究科 基礎物理学専攻 岡眞教授には、研究に関する有益な議論をしていただき、激励の言葉をいただきましたこと、深くお礼申し上げます。

また、研究室のメンバーの皆様からの支えは非常に助けになりました。特に江添貴之氏とは、同期として切磋琢磨し、時に助け合いながら研究を進めてくることができました。素晴らしい研究環境を用意していただいたスタッフ、ポスドク、学生の皆様に感謝申し上げます。

最後に、本研究を進める上で、家族や友人には精神的、時には経済的に励ましていただきました。ここに厚く御礼を申し上げます。

2016年1月29日 杉浦拓也

付録A テンソル力の行列要素

テンソル力 S_{12} の行列要素 (式 (2.36)-(2.41)) を示す。まず、 σ 行列の性質より、

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2 \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 2S^2 - 3, \quad (\text{A.1})$$

$$(\sigma \cdot \hat{r})^2 = \hat{r}^2 + i\sigma \cdot (\hat{r} \times \hat{r}) = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$(\sigma_1 \cdot \hat{r})(\sigma_2 \cdot \hat{r}) = 2 \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \hat{r} \right)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 \cdot \hat{r})^2 = 2(S \cdot \hat{r})^2 - 1 \quad (\text{A.3})$$

が成り立つことを用いて、テンソル力演算子 (2.11) を次のように変形する。

$$\begin{aligned} S_{12} &= 3(2(S \cdot \hat{r})^2 - 1) - 2S^2 + 3 \\ &= 6(S \cdot \hat{r})^2 - 2S^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

さらに、ここに現れた演算子 $S \cdot \hat{r}$ はスピンの z 成分 S_z と昇降演算子 $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ を用いて、

$$\begin{aligned} S \cdot \hat{r} &= S_x \sin \theta \cos \phi + S_y \sin \theta \sin \phi + S_z \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \sin \theta \sin \phi + S_z \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}S_+ \sin \theta e^{-i\phi} + \frac{1}{2}S_- \sin \theta e^{i\phi} + S_z \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

と変形できる。 S_{\pm}, S_z はスピンの状態ケット $|m_S\rangle_S$ に作用して、

$$S_+ |m_S\rangle_S = \sqrt{(S - m_S)(S + m_S + 1)} |m_S + 1\rangle_S \quad (\text{A.6})$$

$$S_- |m_S\rangle_S = \sqrt{(S + m_S)(S - m_S + 1)} |m_S - 1\rangle_S \quad (\text{A.7})$$

$$S_z |m_S\rangle_S = m_S |m_S\rangle_S \quad (\text{A.8})$$

となる。 S_{\pm}, S_z のいずれもスピン 1 重項に作用した場合は 0 となるので、テンソル力のスピン 1 重項に対する行列要素が 0 であることがわかる：

$$\langle {}^1J_J | S_{12} | {}^1J_J \rangle = 0. \quad (\text{A.9})$$

また、式 (A.6)、(A.7) から

$$S_+ |S\rangle_S = S_- |-S\rangle_S = 0 \quad (\text{A.10})$$

が満たされていることを注意しておく。

スピン 3 重項に対する行列要素を求めるために、まず状態を表す基底を (L, S, J, m_J) で指定した $|^{(2S+1)}L_J; m_J\rangle$ から、 (L, S, m_L, m_S) で指定した $|m_L, m_S\rangle_{LS}$ に変更する：

$$|^{(2S+1)}L_J; m_J\rangle = \sum_{m_S} \sum_{m_L} \langle m_L, m_S | ^{(2S+1)}L_J; m_J \rangle |m_L, m_S\rangle_{LS}. \quad (\text{A.11})$$

ここに現れた係数 $\sum_{m_S} \langle m_L, m_S | ^{(2S+1)}L_J; m_J \rangle$ はクレプシュ-ゴルダン係数と呼ばれる。 $S = 1$ の時のクレプシュ-ゴルダン係数を表 A.1 にまとめた。

テンソル力演算子 S_{12} はスカラー演算子なので¹、ウイグナー-エッカルトの定理より行列要素は m_J によらない。よって計算が簡単な $m_J = J$ の場合のみ考えれば十分であり、必要なのは以下の 3 つである。

$$|^3J_J; J\rangle = \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left(\sqrt{J} |J, 0\rangle_{J,1} - |J-1, 1\rangle_{J,1} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$|^3(J-1)_J; J\rangle = |J-1, 1\rangle_{J-1,1}, \quad (\text{A.13})$$

$$|^3(J+1)_J; J\rangle = \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+3)}} \left(\sqrt{(J+1)(2J+1)} |J+1, -1\rangle_{J+1,1} - \sqrt{2J+1} |J, 0\rangle_{J+1,1} + |J-1, 1\rangle_{J+1,1} \right) \quad (\text{A.14})$$

ここで、状態 $|m_L, m_S\rangle_{LS}$ は

$$|m_L, m_S\rangle_{LS} = |m_L\rangle_L \otimes |m_S\rangle_S \quad (\text{A.15})$$

のように、軌道角運動量 L の空間とスピン S の空間の直積で与えられることに注意する。 L 空間の恒等演算子を球面座標の完全系で置き換えたもの、

$$\mathbf{1}_{LS} = \mathbf{1}_L \otimes \mathbf{1}_S = \int d\Omega |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|_L \otimes \mathbf{1}_S \quad (\text{A.16})$$

を用いると、 $(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2$ の行列要素は、

$$\langle ^3L'_J; J | (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 | ^3L_J; J \rangle = \int d\Omega \langle ^3L'_J; J | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | \theta, \phi \rangle \langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | ^3L_J; J \rangle \quad (\text{A.17})$$

となる。 $\langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | ^3L_J; J \rangle$ においては、スピンの状態 $|m_S\rangle_S$ に対しては S_{\pm}, S_z が式 (A.6),(A.7),(A.8) に従って作用するが、内積は取っておらずケットのままである。

¹「テンソル力」という名前は、これが座標の 2 階テンソル ($3\hat{r}_i\hat{r}_j - \delta_{ij}$) とスピンの 2 階テンソル ($\sigma_{1i}\sigma_{2j}$) をスカラーに組んだものであることからきている。

計算の具体例を示すために $L = J$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} |^3 J_J; J \rangle &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \langle \theta, \phi | S_+ \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left(\sqrt{J} |J, 0\rangle_{J,1} - |J-1, 1\rangle_{J,1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin \theta e^{+i\phi} \langle \theta, \phi | S_- \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left(\sqrt{J} |J, 0\rangle_{J,1} - |J-1, 1\rangle_{J,1} \right) \\
&\quad + \cos \theta \langle \theta, \phi | S_z \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left(\sqrt{J} |J, 0\rangle_{J,1} - |J-1, 1\rangle_{J,1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left[\frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \sqrt{2J} \langle \theta, \phi | J, 1\rangle_{J,1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \theta e^{+i\phi} \left\{ \sqrt{2J} \langle \theta, \phi | J, -1\rangle_{J,1} - \sqrt{2} \langle \theta, \phi | J-1, 0\rangle_{J,1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \cos \theta (-1) \langle \theta, \phi | J-1, 1\rangle_{J,1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left[\sqrt{\frac{J}{2}} \sin \theta e^{-i\phi} Y_J^J(\theta, \phi) |1\rangle_1 + \sqrt{\frac{J}{2}} \sin \theta e^{+i\phi} Y_J^J(\theta, \phi) |-1\rangle_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{+i\phi} Y_J^{J-1}(\theta, \phi) |0\rangle_1 - \cos \theta Y_J^{J-1}(\theta, \phi) |1\rangle_1 \right]. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

ここで、軌道角運動量のケット $|m_L\rangle_L$ は $\langle \theta, \phi |$ との内積をとって、球面調和関数

$$Y_L^{mL}(\theta, \phi) \equiv \langle \theta, \phi | m_L \rangle_L \tag{A.19}$$

で表されることを用いた。

式 (A.18) は、球面調和関数の漸化式 [18]

$$\sin \theta e^{-i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1}(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^{m-1}(\theta, \phi) \tag{A.20}$$

$$\sin \theta e^{+i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^{m+1}(\theta, \phi) \tag{A.21}$$

$$\cos \theta Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^m(\theta, \phi) \tag{A.22}$$

を用いて、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | {}^3J_J; J \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)(2J+3)}} \left[\right. \\
&\quad - \left(\sqrt{J} Y_{J+1}^{J-1}(\theta, \phi) + (J+1)\sqrt{2J+3} Y_{J-1}^{J-1}(\theta, \phi) \right) |1\rangle_1 \\
&\quad \left. + \sqrt{J(2J+1)} Y_{J+1}^J |0\rangle_1 - \sqrt{J(J+1)(2J+1)} Y_{J+1}^{J+1} |-1\rangle_1 \right] \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

上の例と同様にして、他の状態に対する $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ の行列要素も計算できる：

$$\langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | {}^3(J-1)_J; J \rangle = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \left[-\sqrt{J} Y_J^J(\theta, \phi) |0\rangle_1 + Y_J^{J-1}(\theta, \phi) |1\rangle_1 \right], \quad (\text{A.24})$$

$$\langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | {}^3(J+1)_J; J \rangle = \sqrt{\frac{J}{(J+1)(2J+1)}} \left[-\sqrt{J} Y_J^J(\theta, \phi) |0\rangle_1 + Y_J^{J-1}(\theta, \phi) |1\rangle_1 \right] \quad (\text{A.25})$$

上の3式から、演算子 $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ によって異なる L の状態が混合されていることがわかる。しかしスピン S や全角運動量 J, m_J は保存されている。

S_{12} の行列要素は、式 (A.17)、(A.23)(A.24)(A.25)、およびスピンと球面調和関数の直交性

$$\begin{aligned}
{}_{S'} \langle m'_S | m_S \rangle_S &= \delta_{SS'} \delta_{m_S m'_S} \quad (\text{A.26}) \\
\int d\Omega Y_{L'}^{*m'_L}(\theta, \phi) Y_L^{m_L}(\theta, \phi) &= \int d\Omega_{L'} \langle m'_L | \theta, \phi \rangle \langle \theta, \phi | m_L \rangle_L \\
&= {}_{L'} \langle m'_L | m_L \rangle_L = \delta_{LL'} \delta_{m_L m'_L} \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

を用いて、計算できる。例として始状態と終状態が共に $|{}^3J_J; J\rangle$ である場合は、

$$\begin{aligned}
&\langle {}^3J_J; J | (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 | {}^3J_J; J \rangle \\
&= \int d\Omega | \langle \theta, \phi | \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} | {}^3J_J; J \rangle |^2 \\
&= \frac{1}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \left[J + (J+1)^2(2J+3) + J(2J+1) + J(J+1)(2J+1) \right] \\
&= 1 \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

となり、よってテンソル力の行列要素は、

$$\langle {}^3J_J; J | S_{12} | {}^3J_J; J \rangle = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 2 \quad (\text{A.29})$$

である。その他の場合も同様にして、式 (2.37)-(2.41) が示せる。これら以外の組み合わせは全て0である。

$J \backslash m_S$	-1	0	+1
$J-1$	$\left[\frac{(L+m_J+1)(L+m_J)}{2L(2L+1)} \right]^{1/2}$	$-\left[\frac{(L-m_J)(L+m_J)}{L(2L+1)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(L-m_J)(L-m_J+1)}{2L(2L+1)} \right]^{1/2}$
J	$\left[\frac{(L-m_J)(L+m_J+1)}{2L(L+1)} \right]^{1/2}$	$\frac{m_J}{[L(L+1)]^{1/2}}$	$-\left[\frac{(L+m_J)(L-m_J+1)}{2L(2L+1)} \right]^{1/2}$
$J+1$	$\left[\frac{(L-m_J)(L-m_J+1)}{(2L+1)(2L+2)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(L-m_J+1)(L+m_J+1)}{(2L+1)(L+1)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(L+m_J)(L+m_J+1)}{(2L+1)(2L+2)} \right]^{1/2}$

表 A.1: $S = 1$ の場合のクレブシュ-ゴルダン係数 [17]。

付録B ソース演算子のスピンに対する射影

2 核子のソース演算子

$$\mathcal{J}_{pn}(t_0; J^P) = P_{\alpha\beta}^{(s)} \left[p_{\alpha}^{wall}(t_0) n_{\beta}^{wall}(t_0) \right] \quad (3.25)$$

のスピンに対する射影が、

$$P^{(s=0)} = \sigma_2, \quad P^{(s=1, s_z=0)} = \sigma_1 \quad (3.27)$$

で与えられることを示す。これは、スピノールの変換

$$p_{\alpha} \rightarrow (e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}})_{\alpha\beta} p_{\beta} \quad (B.1)$$

のもとで、(3.25) がスカラー (スピン 1 重項の場合)、もしくはベクトル (スピン 3 重項の場合) として変換することを示せば良い。まず準備として、

$$\sigma_2 (e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}})^T \sigma_2 = e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}} \quad (B.2)$$

が成り立つ。これは、

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta})^2 = |\boldsymbol{\theta}|^2 \equiv \theta^2 \quad (B.3)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}} &= 1 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} + \frac{i^2}{2!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta})^2 + \dots \\ &= \left(1 + \frac{i^2}{2!}\theta^2 + \frac{i^4}{4!}\theta^4 + \dots \right) + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\theta + \frac{i^2}{3!}\theta^3 + \frac{i^4}{5!}\theta^5 + \dots \right) \\ &= \cos \theta + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) \sin \theta \end{aligned} \quad (B.4)$$

となること、そして

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T = (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3), \quad (B.5)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (B.6)$$

を使えば示せる。

単位行列を σ_0 と書いて $P = \sigma_2 \sigma_0$ とすると、

$$\begin{aligned}
 (\sigma_2 \sigma_0)_{\alpha\beta} p_\alpha n_\beta &= p^T (\sigma_2 \sigma_0) n \\
 &\stackrel{(B.1)}{\rightarrow} p^T (e^{i\sigma \cdot \theta})^T \sigma_2 \sigma_0 (e^{i\sigma \cdot \theta}) n \\
 &= p^T \sigma_2^2 (e^{i\sigma \cdot \theta})^T \sigma_2 \sigma_0 (e^{i\sigma \cdot \theta}) n \\
 &= p^T \sigma_2 (e^{-i\sigma \cdot \theta}) \sigma_0 (e^{i\sigma \cdot \theta}) n \\
 &= p^T (\sigma_2 \sigma_0) n.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

よって式 (3.27) の第 1 式が示された。

次に $P = \sigma_2 \sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) とすると、

$$\begin{aligned}
 (\sigma_2 \sigma_i)_{\alpha\beta} p_\alpha n_\beta &= p^T (\sigma_2 \sigma_i) n \\
 &\stackrel{(B.1)}{\rightarrow} p^T (e^{i\sigma \cdot \theta})^T \sigma_2 \sigma_i (e^{i\sigma \cdot \theta}) n \\
 &= p^T \sigma_2 (e^{-i\sigma \cdot \theta}) \sigma_i (e^{i\sigma \cdot \theta}) n \\
 &= R_{ij}(\theta) p^T (\sigma_2 \sigma_i) n.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\tag{B.9}$$

ただし、 σ_i がベクトルとして変換すること、

$$\sigma_i \stackrel{(B.1)}{\rightarrow} (e^{-i\sigma \cdot \theta}) \sigma_i (e^{i\sigma \cdot \theta}) \equiv R_{ij}(\theta) \sigma_j, \tag{B.10}$$

を用いた。このスピン 3 重項の中で $s_z = 0$ へ射影するには、 $\theta \parallel \hat{z}$ とした変換のもとで \mathcal{J} が不変であれば良いので、 $i = 3$ と選ぶ。すると $\sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1$ であり、定数 i は無関係なので $P^{(s=1, s_z=0)} = \sigma_1$ とすればいいことがわかる。以上より式 (3.27) の第 2 式も示された。

付録C Birse 模型の解の具体形

ここでは、Birse のチャンネル結合方程式

$$[H_0 + V(x) - E] \psi_0(x) + 2g\delta(x)\psi_1(x) = 0, \quad (4.2)$$

$$[H_0 + \Delta - E] \psi_1(x) + 2g\delta(x)\psi_0(x) = 0. \quad (4.3)$$

の解についてまとめる。

まず、Birse 模型から解析的に導かれる位相差の表式を記す。位相差の定義は、式 (5.42) に与えた通りである。

その次に、Twisted Boundary Condition (TBC)

$$\psi_i(x + 2L) = e^{i\theta} \psi_i(x) \quad (4.26)$$

$$\psi_i^*(x) = \psi_i(-x) \quad (i = 0, 1) \quad (4.27)$$

の下で解いた解の具体形をまとめる¹。また、周期的境界条件を課した場合の、微分展開ポテンシャルに生じる問題点について述べる。

C.1 位相差の理論値

無限体積における散乱状態 ($0 < E < \Delta$) の解は、原点と井戸の端 $x = R$ における接続条件

$$\psi'_{0,1}(+0) = Mg\psi_{1,0}(0) \quad (C.1)$$

$$\psi_0(R-0) = \psi_0(R+0) \quad (C.2)$$

$$\psi'_0(R-0) = \psi'_0(R+0) \quad (C.3)$$

の他に、閉チャンネル ψ_1 に対して 2 乗可積分性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_1^*(x) \psi_1(x) < \infty \quad (C.4)$$

を課すことで得られる。

¹ここでは $\sin \theta \neq 0$ を仮定して解いているので、ここで与えた表式から (反) 周期的境界条件の下での解は得られない。

その結果は次のようになる。

$$\psi_0(x) = \begin{cases} A \cos \alpha x + B \sin \alpha |x| & |x| < R \\ C \cos \beta x + D \sin \beta |x| & |x| > R \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$$\psi_1(x) = e^{-\gamma|x|} \quad (\text{C.6})$$

$$\alpha^2 \equiv M(V_0 + E), \quad \beta^2 \equiv ME, \quad \gamma^2 \equiv M(\Delta - E) \quad (\text{C.7})$$

$$A = -\frac{\gamma}{Mg} \quad (\text{C.8})$$

$$B = \frac{Mg}{\alpha} \quad (\text{C.9})$$

$$C = A \left(\cos \alpha R \cos \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \sin \beta R \right) + B \left(\sin \alpha R \cos \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \sin \beta R \right) \quad (\text{C.10})$$

$$D = A \left(\cos \alpha R \sin \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \cos \beta R \right) + B \left(\sin \alpha R \sin \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cos \beta R \right) \quad (\text{C.11})$$

式 (5.42) の位相差 δ は、次のように表される²。

$$\tan \delta = -\frac{D}{C}. \quad (\text{C.12})$$

これを、例えば図 6.3 の理論値として用いた。

C.2 TBC の下での解

ポテンシャルを構成する際に用いる波動関数としては、境界条件として式 (C.1),(C.2),(C.3) の他に、2乗可積分性 (C.4) ではなく空間の大きさが $2L$ の TBC(4.26),(4.27) を考える。その理由は C.3 節で述べるが、ここでは先にこの境界条件の下での解の具体形を与える。

C.2.1 $0 < E < \Delta$ の解

$$\alpha = \sqrt{M(E + V_0)}, \quad \beta = \sqrt{ME}, \quad \gamma = \sqrt{M(\Delta - E)} \quad (\text{C.13})$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha |x|) + C \sin \alpha x & 0 < |x| < R \\ (D \cos \beta x + E \sin \beta |x|) + (F \operatorname{sgn}(x) \cos \beta x + G \sin \beta x) & R < |x| < L \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

$$\psi_1(x) = (H \cosh \gamma x + I \sinh \gamma |x|) + J \sinh \gamma x \quad (\text{C.15})$$

²ここでまとめた解は式 (5.42) と規格化条件が異なっているが、位相差には影響しない。

$$A = (-iJ) \frac{\gamma}{Mg} (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.16})$$

$$B = (-iJ) \frac{Mg}{\alpha} \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.17})$$

$$C = \frac{J}{\sin \theta} \frac{\tilde{D} \sin 2\beta L - \tilde{E} (\cos \theta + \cos 2\beta L)}{\sin \alpha R \sin \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cos \beta R} \quad (\text{C.18})$$

$$D = (-iJ) \tilde{D} \quad (\text{C.19})$$

$$E = (-iJ) \tilde{E} \quad (\text{C.20})$$

$$F = \frac{J}{\sin \theta} \left(-\tilde{D} (\cos \theta - \cos 2\beta L) + \tilde{E} \sin 2\beta L \right) \quad (\text{C.21})$$

$$G = \frac{J}{\sin \theta} \left(\tilde{D} \sin 2\beta L - \tilde{E} (\cos \theta + \cos 2\beta L) \right) \quad (\text{C.22})$$

$$H = (-iJ) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.23})$$

$$I = (-iJ) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.24})$$

$$\tilde{D} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(\cos \alpha R \cos \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \sin \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.25})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(\sin \alpha R \cos \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \sin \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.26})$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(\cos \alpha R \sin \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \cos \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.27})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(\sin \alpha R \sin \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cos \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.28})$$

エネルギー固有値の満たす条件は

$$\det \begin{pmatrix} +\tilde{D} (\cos \theta - \cos 2\beta L) - \tilde{E} \sin 2\beta L & \sin \alpha R \cos \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \sin \beta R \\ -\tilde{D} \sin 2\beta L + \tilde{E} (\cos \theta + \cos 2\beta L) & \sin \alpha R \sin \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cos \beta R \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.29})$$

となる。

C.2.2 $-V_0 < E < 0$ の解

$$\alpha = \sqrt{M(E + V_0)}, \quad \beta = \sqrt{-ME}, \quad \gamma = \sqrt{M(\Delta - E)} \quad (\text{C.30})$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha|x|) + C \sin \alpha x & 0 < |x| < R \\ (D \cosh \beta x + E \sinh \beta|x|) + (F \operatorname{sgn}(x) \cosh \beta x + G \sinh \beta x) & R < |x| < L \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

$$\psi_1(x) = (H \cosh \gamma x + I \sinh \gamma|x|) + J \sinh \gamma x \quad (\text{C.32})$$

$$A = (-iJ) \frac{\gamma}{Mg} (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.33})$$

$$B = (-iJ) \frac{Mg}{\alpha} \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.34})$$

$$C = \frac{J}{\sin \theta} \frac{\tilde{D} \sinh 2\beta L + \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L)}{\sin \alpha R \sinh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cosh \beta R} \quad (\text{C.35})$$

$$D = (-iJ) \tilde{D} \quad (\text{C.36})$$

$$E = (-iJ) \tilde{E} \quad (\text{C.37})$$

$$F = \frac{J}{\sin \theta} \left(-\tilde{D} (\cos \theta - \cosh 2\beta L) + \tilde{E} \sinh 2\beta L \right) \quad (\text{C.38})$$

$$G = \frac{J}{\sin \theta} \left(-\tilde{D} \sinh 2\beta L - \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L) \right) \quad (\text{C.39})$$

$$H = (-iJ) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.40})$$

$$I = (-iJ) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.41})$$

$$\tilde{D} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(\cos \alpha R \cosh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \sinh \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.42})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(\sin \alpha R \cosh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \sinh \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.43})$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(-\cos \alpha R \sinh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha R \cosh \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.44})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(-\sin \alpha R \sinh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cosh \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.45})$$

エネルギー固有値の満たす条件は

$$\det \begin{pmatrix} +\tilde{D} (\cos \theta - \cosh 2\beta L) - \tilde{E} \sinh 2\beta L & +\sin \alpha R \cosh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \sinh \beta R \\ +\tilde{D} \sinh 2\beta L + \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L) & -\sin \alpha R \sinh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cos \alpha R \cosh \beta R \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.46})$$

C.2.3 $E < -V_0$ の解

$$\alpha = \sqrt{-M(E + V_0)}, \quad \beta = \sqrt{-ME}, \quad \gamma = \sqrt{M(\Delta - E)} \quad (\text{C.47})$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha|x|) + C \sinh \alpha x & 0 < |x| < R \\ (D \cosh \beta x + E \sinh \beta|x|) + (F \operatorname{sgn}(x) \cosh \beta x + G \sinh \beta x) & R < |x| < L \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

$$\psi_1(x) = (H \cosh \gamma x + I \sinh \gamma|x|) + J \sinh \gamma x \quad (\text{C.49})$$

$$A = (-iJ) \frac{\gamma}{Mg} (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.50})$$

$$B = (-iJ) \frac{Mg}{\alpha} \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.51})$$

$$C = \frac{J}{\sin \theta} \frac{\tilde{D} \sinh 2\beta L + \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L)}{\sinh \alpha R \sinh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cosh \alpha R \cosh \beta R} \quad (\text{C.52})$$

$$D = (-iJ) \tilde{D} \quad (\text{C.53})$$

$$E = (-iJ) \tilde{E} \quad (\text{C.54})$$

$$F = \frac{J}{\sin \theta} \left(-\tilde{D} (\cos \theta - \cosh 2\beta L) + \tilde{E} \sinh 2\beta L \right) \quad (\text{C.55})$$

$$G = \frac{J}{\sin \theta} \left(-\tilde{D} \sinh 2\beta L - \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L) \right) \quad (\text{C.56})$$

$$H = (-iJ) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.57})$$

$$I = (-iJ) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.58})$$

$$\tilde{D} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(\cosh \alpha R \cosh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha R \sinh \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.59})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(\sinh \alpha R \cosh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cosh \alpha R \sinh \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.60})$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{\gamma}{Mg} \left(-\cosh \alpha R \sinh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \alpha R \cosh \beta R \right) (\cos \theta / \cosh 2\gamma L - 1) \quad (\text{C.61})$$

$$+ \frac{Mg}{\alpha} \left(-\sinh \alpha R \sinh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cosh \alpha R \cosh \beta R \right) \tanh 2\gamma L \quad (\text{C.62})$$

エネルギー固有値の満たす条件は

$$\det \begin{pmatrix} +\tilde{D} (\cos \theta - \cosh 2\beta L) - \tilde{E} \sinh 2\beta L & +\sinh \alpha R \cosh \beta R - \frac{\alpha}{\beta} \cosh \alpha R \sinh \beta R \\ +\tilde{D} \sinh 2\beta L + \tilde{E} (\cos \theta + \cosh 2\beta L) & -\sinh \alpha R \sinh \beta R + \frac{\alpha}{\beta} \cosh \alpha R \cosh \beta R \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.63})$$

C.3 境界条件の検討

ここで TBC の下での解を考えたが、通常よく用いられる周期的境界条件 (Periodic Boundary Condition ; PBC) を用いる方が自然に感じられる。PBC を用いないのは、5.1 節や 5.2 節において、微分を x に対して取ると $x = 0$ 近傍で問題が生じると類似の理由による。

PBC

$$\psi_i(x + 2L) = \psi_i(x) \quad (i = 0, 1) \quad (\text{C.64})$$

の下では、波動関数は $x = \pm L$ の周りで偶関数になっている。すなわち、波動関数 $\psi^{(PBC)}$ は境界近傍で、

$$\psi^{(PBC)}(x \sim \pm L) = \sum_n c_n (x \mp L)^{2n} \quad (\text{C.65})$$

という形に展開できる ($c_n \in \mathbb{R}$ は定数)。5.1 節の考え方に従えば、 $x = L$ 付近でポテンシャルの発散を生じさせないためには、微分を

$$y \equiv (|x| - L)^2 \quad (\text{C.66})$$

に関して取らなければならない。これは x^2 の微分 $D \equiv \frac{d}{d(x^2)}$ と両立しないばかりか、展開自体が空間の大きさ L に依存してしまい、望ましくない。それに対して TBC (4.26) 及び (4.27) を考えて³、解の実数部分のみ用いると、これは偶関数であるが $x = \pm L$ 付近で式 (C.65) のようには展開されない。よって境界付近での発散という問題は生じない。

もともと空間の体積は、短距離でのポテンシャルに影響しない程度に大きくしなければならないので、境界条件を変えることは位相差のような観測量には大きく影響しない。そこで、本研究では境界条件として TBC を用いることとするが、これは本質的な問題ではない。

³ $\sin \theta \neq 0$ とする

と簡単に表せるが、個別に書けば

$$\begin{aligned} D^1 &= \frac{1}{(2x)} \frac{d}{dx}, \\ D^2 &= \frac{1}{(2x)^2} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right], \\ D^3 &= \frac{1}{(2x)^3} \left[\frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{x} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{x^2} \frac{d}{dx} \right], \\ D^4 &= \frac{1}{(2x)^4} \left[\frac{d^4}{dx^4} - \frac{6}{x} \frac{d^3}{dx^3} + \frac{15}{x^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{15}{x^3} \frac{d}{dx} \right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

である。すると、

$$\langle x | V | \psi \rangle = \sum_{n=0}^N v_n^{(\rho)}(x) D^n \varphi_\rho(x) \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^N v_n^{(\rho)}(x) \sum_{m=0}^n M_{nm}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \varphi_\rho(x) \\ &= \sum_{n,m=0}^N v_n^{(\rho)}(x) M_{nm}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \varphi_\rho(x) \\ &= \sum_{n,m=0}^N v_m^{(\rho)}(x) M_{mn}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n \varphi_\rho(x) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

となり、式 (5.6) と比較すると、

$$w_n^{(\rho)}(x) = \sum_{m=0}^N v_m^{(\rho)}(x) M_{mn}(x) \quad (\text{D.5})$$

の関係があることがわかる。すなわち、式 (5.10) は式 (5.3) でガウス関数を $G_\rho(x, x')$ に置き換えたものと同じ $V(x, x')$ を与えるが、 $v_n^{(\rho)}$ は $x \rightarrow 0$ での発散が生じないように和を取り直されている。これは計算上の利点のためであって、微分展開の物理的な意味は変更されない。

D.2 $x = 0$ 近傍での展開

式 (D.3) を見ればわかるように、原点近傍で x^2 の関数で表される $\varphi_\rho(x)$ を x^2 に関して微分しているので、ここに発散は生じない。しかし式 (D.4) の中の $M_{nm}(x)$ 自体は原点近傍で $M_{nm}(x) \propto x^{-2n+m}$ の形で発散する。明らかにこの発散は見かけ上の発散であり、 m についての和によって打ち消されるものであるが、数値計算においては桁落ちの問題が生じるために無視できない。そこで、 $|x|$ が小さい場合

には式 (D.3) を x について展開した形を用いる :

$$\begin{aligned}
D^n \varphi(x) &= D^n \int dx' W(x, x') \psi(x'), \\
&= D^n \int \frac{1}{2} \left[\frac{\exp\{-(x-x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} + \frac{\exp\{-(x+x')^2/\rho^2\}}{\sqrt{\pi}\rho} \right] \psi(x'), \\
&= D^n \int dx' \frac{e^{-(x^2+x'^2)/\rho^2}}{\sqrt{\pi}\rho} \cosh(2xx'/\rho^2) \psi(x'), \\
&= \int dx' \frac{e^{-x'^2/\rho^2}}{\sqrt{\pi}\rho} \frac{1}{\rho^{2n}} \Delta_n\left(\frac{x}{\rho}, \frac{x'}{\rho}\right) \psi(x').
\end{aligned} \tag{D.6}$$

ただし、 $\Delta_n(y, y')$ を

$$\Delta_n(y, y') \equiv D_y^n e^{-y^2} \cosh(2yy') \tag{D.7}$$

と定義した。 $e^{-y^2} \cosh(2yy')$ は y について偶関数なので、 $D_y = d/d(y^2)$ で微分した結果は発散を含まない。すなわち

$$\begin{aligned}
\Delta_n(y, y') &= D^n e^{-y^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2yy')^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2y')^{2k}}{(2k)!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(D^{n-m} e^{-y^2} \right) \left(D^m y^{2k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2y')^{2k}}{(2k)!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (-1)^{n-m} e^{-y^2} \times \begin{cases} \frac{k!}{(k-m)!} y^{2(k-m)}, & k \geq m \\ 0, & k < m \end{cases} \\
&= \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{1}{(2k)!} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{k!}{m!(k-m)!} (2y')^{2k} y^{2(k-m)} e^{-y^2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{(m+l)! n!}{(2(m+l))! (n-m)! m! l!} (2y')^{2(m+l)} y^{2l} e^{-y^2}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

と展開できる。 $x \sim 0$ では l についての和を有限次のところで打ち切ることができる。本研究では、 $|x| < 0.05 \equiv x_{th}$ のところで、展開の最大次数 $l_{max} = 4$ の展開を用いた。展開の次数が十分であること、そして $|x| \gtrsim 0.05$ のところで見かけの発散による桁落ちが生じていないことは、 x_{th} と l_{max} の値をいくつか変えてみるにより確かめた。

参考文献

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **17**, 48 (1935).
- [2] R. Machleidt, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
- [3] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen and J. J. de Swart, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
- [4] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
- [5] R. Jastrow, Phys. Rev., **81**, 165 (1951).
- [6] N. Ishii, S. Aoki and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **99**, 022001 (2007).
- [7] S. Aoki, T. Hatsuda and N. Ishii, Prog. Theor. Phys. **123**, 1 (2010).
- [8] M. Birse, arXiv:1208.4807.
- [9] M. Taketani et al., Prog. Theor. Phys. Suppl. **No. 39**, 1 (1967).
N. Hoshizaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **No. 42**, 1 (1968).
中村誠太郎監修 (1996) 『大学院原子核物理』 講談社サイエンティフィック 117-181; 「核力の多面性」玉垣良三著.
- [10] J. Iwadare, S. Otsuki, R. Tamagaki and W. Watari, Prog. Theor. Phys. Suppl., **3**, 32 (1951).
- [11] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. **19** (1989) 210.
- [12] N. Hoshizaki, S. Otsuki, W. Watari, M. Yonezawa, Prog. Theor. Phys., **27**, 1197 (1962).
- [13] S. Okubo and R. E. Marshak, Ann. Phys., **4**, 166 (1958).
- [14] S. Machida, Prog. Theor. Phys., Suppl., **No. 39**, 91 (1967).
- [15] M. Lüscher, Nucl. Phys. B **354**, 531 (1991).
- [16] K. Murano, N. Ishii, S. Aoki and T. Hatsuda, Prog. Theor. Phys. **125** (2011) 1225-1240.
- [17] M.E. ローズ (1971) 『角運動量の基礎理論』 (山内恭彦・森田正人共訳) みすず書房 pp.223.

- [18] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev and V.K. Khersonskii (1988) *Quantum Theory Of Angular Momentum* pp.145. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.