

ホログラフィック QCD における
H ダイバリオンの研究：
D ブレーン系からの一般化された
スキルミオンを用いたアプローチ*

京都大学基礎物理学研究所
原子核分野

松本滉平

* 本稿は京都大学に提出した修士論文である。

概要

H ダイバリオン ($uuddss$) はバリオン数 2、SU(3) フレーバー 1 重項のエキゾチックハドロンである。1977 年に Jaffe によりその存在が予言され、MIT バッグ模型や Skyrme 模型を用いた解析から H 粒子が安定である可能性が理論的に示唆されたが、その後の実験でダブルハイパー核 (${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$) が発見され、少なくとも現実世界 (physical point) においては、H ダイバリオンは強い相互作用に対して安定な束縛状態でないことが示された。しかしながら共鳴状態として存在する可能性などは現在なお指摘されており、また近年の格子 QCD の計算においても、フレーバー SU(3) 対称で質量の大きな領域において H ダイバリオンは安定であることが指摘されるなど、H 粒子は依然、ハドロン物理学における興味の対象となっている。

本研究では、フレーバー SU(3) 対称領域の中でも重要な領域の一つである、カイラル極限 ($m_u = m_d = m_s = 0$) での H ダイバリオンの性質の解明を試みる。なお、格子 QCD はハドロン質量を計算する上で強力な手法である一方、ゼロ質量粒子の扱いが困難であるという側面があり、カイラル極限の計算には向かない。それゆえ本研究では、格子 QCD とは相補的に、近年の非摂動的手法であるホログラフィック QCD の枠組みにおいて、ソリトン描像を用いた解析を行う。ホログラフィック QCD は、超弦理論において massless QCD と等価な D ブレーン系 (S^1 -compactified D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$) からラージ N_c でのゲージ/重力対応によって導かれる理論であり、全てのバリオンは南部-Goldstone ボソンと (軸性) ベクトル中間子からなるトポロジカルなカイラル・ソリトンとして現れる。そこで本研究では、H ダイバリオンを、Skyrme 模型での解析に用いられたのと同様の SO(3) 型のヘッジホッグ・ソリトン解として記述し、SU(2) でのバリオンを解析した先行研究にならい、まずホログラフィック QCD での SO(3) 型のソリトンに対する作用を導出した。その際、低エネルギーの有効理論で重要な、massless の南部-Goldstone ボソンと最も軽いベクトル中間子のみを考慮した。そしてその作用に基づいた数値解析を行い、ホログラフィック QCD における H ダイバリオンの質量及び半径を計算した。その結果、特にカイラル極限での質量に関する結果として、H ダイバリオンの質量はバリオン数 1 のヘッジホッグ・ソリトン質量のほぼ 2 倍であることを明らかにした。またこのことより、カイラル極限において H ダイバリオンの質量は 2 核子質量よりも小さくなるという示唆を得た。

目次

第 1 章	序論	4
1.1	H ダイバリオンとは	5
1.2	H ダイバリオンに関する研究の現状	16
1.3	本研究の目的及びその手法	18
第 2 章	ホログラフィック QCD	20
2.1	準備	21
2.2	酒井・杉本模型	22
2.3	酒井・杉本模型におけるバリオンの解析	47
第 3 章	ホログラフィック QCD における H ダイバリオンの記述	50
3.1	SO(3) 型ヘッジホッグ解	50
3.2	SO(3) ソリトンに対する有効作用の導出	51
3.3	ホログラフィック QCD における SO(3) ソリトン解	65
3.4	SU(2) ソリトンの有効作用との関係	68
第 4 章	ホログラフィック QCD に基づく数値解析	73
4.1	解の配位	73
4.2	ベクトル中間子の効果	85
4.3	バリオンとの比較	86
第 5 章	結論と展望	90
	補遺	94
	補遺 A 記法	94
	補遺 B Skyrme 模型における SO(3) ヘッジホッグ解の作用	95
	参考文献	102

第1章

序論

現在の素粒子物理学において、強い相互作用の基礎理論は量子色力学 (quantum chromodynamics: QCD) であり、これはクォークやグルーオンによって記述される。また陽子や中性子といった一連の粒子はハドロンと呼ばれ、ハドロンはより基本的な階層であるクォークやグルーオンによって構成されると考えられている。数百種類にも及ぶ沢山のハドロンが今日までの様々な実験により観測されているが [1]、これらはクォーク模型 [2–4] の観点から通常2つのグループに大別される。1つはバリオン (baryon) と呼ばれるグループで、これは3つのクォーク (qqq) から成る。先に挙げた陽子や中性子などはバリオンの一種である。そしてもう1つは中間子 (メソン、meson) と呼ばれる、2つのクォーク ($q\bar{q}$) から成る粒子のグループである。例としては、湯川博士により予言されたパイ中間子などがこれにあたる。クォーク模型に基づくこの分類法は 1960 年代 Gell-Mann と Zweig により提唱され、これがハドロンと呼ばれる粒子の集まりに秩序をもたらした。多くのハドロンは2つないし3つのクォークから構成される粒子として記述することでよく説明できたのである。ところでこの、ハドロンがクォークからなるという考え方そのものは、ハドロンを構成するクォークの数を必ずしも2つまたは3つに制限するものではない。すなわち対象とするハドロンと同じ量子数さえ持っているものであれば、原理的には、例えば中間子に対して $qq\bar{q}\bar{q}$ (テトラクォーク) や、バリオンに対して $qqqq\bar{q}$ (ペンタクォーク) といったクォークの組み合わせを考えても構わない。このような qqq または $q\bar{q}$ 以外のクォーク構成を持つハドロンはエキゾチックハドロンと呼ばれている。通常の qqq あるいは $q\bar{q}$ によるハドロンの記述が大きな成功を取めた一方で、こういったエキゾチックハドロンの存在は長年議論されてきた。そしてついに近年、テトラクォークの存在が確認されたことにより [5, 6]、エキゾチックハドロンは現在ハドロン物理学において大きな注目を集めている。

ここまではハドロンのバリオン数 B が $B = 0$ (中間子) または $B = 1$ (バリオン) であることを暗に仮定して述べたが、一方でバリオン数が $B \geq 2$ というエキゾチックハドロンを考えることもまた可能である。ただし上に述べたエキゾチックハドロンと同様、ここでも問題となるのは、それらが観測可能か否か、すなわちある程度低いエネルギーでの安定な束縛状態として存在しうるか、ということである。歴史的には、後に述べるように、安定に存在しうるバリオ

ン数 $B = 2$ のハドロンの存在が Jaffe によって予言された [7]。今日その粒子は H ダイバリオンと呼ばれ、 $uuddss$ というクォーク構成を持つとされる。

本研究の研究対象はまさにこの H ダイバリオンである。この序論では、H ダイバリオンを取り巻く理論的背景とその観測、そして H ダイバリオンに関する最近の研究結果について述べた上で、最後に本研究の目的とそこで用いられる手法についての説明を行い、本論文の構成をまとめることとする。

1.1 H ダイバリオンとは

H ダイバリオンは $uuddss$ の束縛状態であり、バリオン数 $B = 2$ を持つエキゾチックハドロンである。以下ではクォーク模型によるハドロンの分類について簡単に述べ、H ダイバリオンはクォーク模型においてどのようなハドロンとして分類されているかを見ることから始める。

1.1.1 クォーク模型による分類

今日において存在が確認されているクォークは u, d, s, c, b, t の 6 種類である。このクォークの種類はフレーバーと呼ばれる。基礎理論である QCD に現れるクォークのカレント質量で見ると、この 6 種のうち c, b, t クォークの質量は 1GeV 以上であり、数 MeV 程度の u, d クォークやせいぜい 100MeV 程度である s クォークなどに比べてこれらは非常に重い [1]。そのため 1GeV 程度の低エネルギー領域におけるハドロンを考える場合には、 c, b, t クォークは無視して u, d, s クォークのみを考えれば良い。理論で考慮に入れるクォークのフレーバー数を N_f と書くと、これは $N_f = 3$ の場合に相当する。

1960 年代前半までに見つがっていたハドロンに対して、Gell-Mann らはこれらのハドロンが $SU(3)$ 群を用いて分類できることを提唱した [2–4]。それを以下に説明しよう。まずスピン $J = 1/2$ 、バリオン数 $B = 1/3$ を持つクォーク q という粒子を導入し (その反粒子は反クォーク \bar{q} 、バリオン数 $B = -1/3$)、ハドロンはこれらクォークの複合系であると考え。バリオン数を正しく実現するようなクォークの構成を考えると、バリオン ($B = 1$) は $qqq, qq\bar{q}\bar{q}, \dots$ から、また中間子 ($B = 0$) は $q\bar{q}, qq\bar{q}\bar{q}, \dots$ からそれぞれ成るものと考えられる。ここで u, d, s の 3 フレーバーを持つクォークに対し、 $SU(3)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(3)$ をクォークのフレーバー空間と考えると、各フレーバーを以下のようにその基本表現の標準基底に対応させることとする^{*1}。

$$u \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

この基本表現を $\mathbf{3}$ 表現と呼ぶ。このとき反クォークは $\bar{\mathbf{3}}$ 表現 ($\mathbf{3}$ 表現の反傾表現) に対応させる。このように考えた上で、 q と \bar{q} の組み合わせからなるクォークの複合系は、それに対応す

^{*1} より正確には、 $\mathfrak{su}(3)$ の複素化 $\mathfrak{su}(3)^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の基本表現を考え、その表現空間 \mathbb{C}^3 をクォークのフレーバー空間と考える。以下 $\mathfrak{su}(3)$ は常に $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ を指すものとする。

る $\mathbf{3}$ 表現と $\bar{\mathbf{3}}$ 表現からなる積表現の表現空間としてその q, \bar{q} の組で表されるハドロンの空間を構成し、この積表現を既約分解することでハドロンが分類されるものとするのである。

またここでクォークのウェイト図と呼ばれるものを見ておこう。そのためにまずクォークの持つ量子数について述べる必要がある。以下でも $N_f = 3$ のクォークについて考える。このときクォークの持つ量子数は、電荷 Q 、アイソスピン I (その第3成分 I_3)、バリオン数 B 、ストレンジネス S 、ハイパーチャージ Y 、そしてスピン J である。ハイパーチャージは $Y \equiv B + S$ で定義され、また電荷は $Q = e(I_3 + Y/2)$ という関係を持つ (中野-西島-Gell-Mann の法則 [8,9])。上で述べたようにクォークのバリオン数とスピンは皆等しく $B = 1/3, J = 1/2$ であることから、クォークの状態はアイソスピンの第3成分 I_3 とハイパーチャージ Y という2つの量子数により指定されることがわかる。ところでクォークが $\mathfrak{su}(3)$ の $\mathbf{3}$ 表現に対応するという仮定から、Lie 代数の表現論を用いてそれぞれのウェイトベクトルという量を考えることができる。SU(3) の生成子は8つあり、これを $\{F_i\}_{i=1,\dots,8}$ と書こう。ここでは $\mathfrak{su}(3)$ の基本表現に焦点を当てて述べるが、その際この生成子は通常 Gell-Mann 行列 $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,8}$ を用いて $F_i = \lambda_i/2$ と取ることが多い。ここで Gell-Mann 行列は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (1.1.2) \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定義される。ここで生成子の中で互いに可換な最大個数の組を取ってくる。SU(3) の場合その最大個数は2であり (これは表現によらない)、上の Gell-Mann 行列を用いた表式では $\{H_1 = F_3, H_2 = F_8\}$ と取れる。すると生成子の組は標準基底を固有ベクトルとして同時対角化されており、その2つの固有値を並べたベクトルをウェイトベクトルと呼ぶ。例えば u クォークに対応するウェイトベクトル μ_u は

$$|\mu_u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} H_1 |\mu_u\rangle = \frac{1}{2} |\mu_u\rangle \\ H_2 |\mu_u\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |\mu_u\rangle \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \mu_u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad (1.1.3)$$

であり、他にも同様に $\mu_d = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ 、 $\mu_s = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ となる。ここまでに述べた量子数とウェイトベクトルについての整理を兼ねて、これらを表にまとめる。

	Q/e	I_3	B	S	Y	μ
u	$2/3$	$1/2$	$1/3$	0	$1/3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$
d	$-1/3$	$-1/2$	$1/3$	0	$1/3$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$
s	$-1/3$	0	$1/3$	-1	$-2/3$	$(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

上表より、ウェイトベクトルの第1成分 μ_1 はアイソスピンの第3成分 I_3 と、第2成分 μ_2 はハイパーチャージ Y とそれぞれ同じふるまいをすることがわかる。よってこれらを

$$I_3 = H_1 \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}H_2 \quad (1.1.4)$$

と関係づける。すなわち、3フレーバーのクォークは $\mathfrak{su}(3)$ の2成分ウェイトベクトルとしてそれぞれ表すことができる。このウェイトベクトルを平面上に図示したものはウェイト図と呼ばれる。クォークのウェイト図は以下の図 1.1 のようになる。上に述べたように、ハドロンは $\mathbf{3}$ 表現と $\bar{\mathbf{3}}$ 表現の組み合わせによる積表現に対応するので、それらの状態もまたウェイト図として図示することができる。

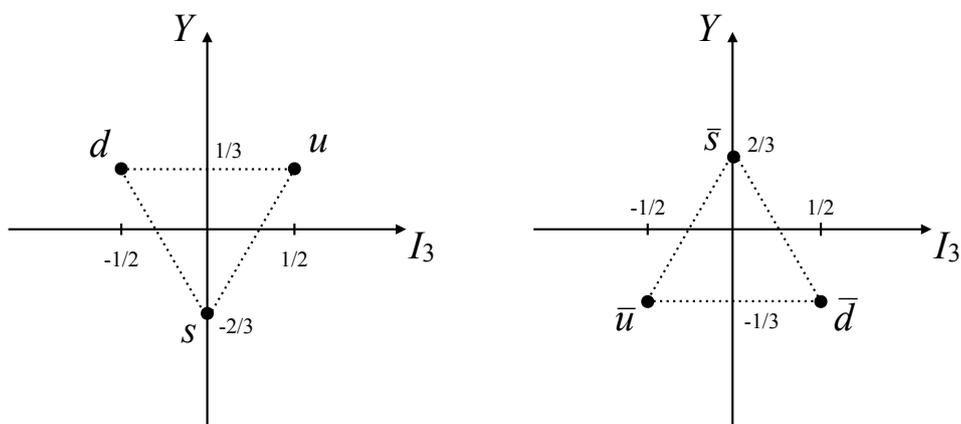
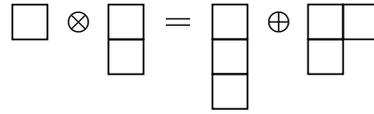


図 1.1 クォークと反クォークのウェイト図。ここでベクトルの成分は (I_3, Y) と取った。また反クォークはクォークの反傾表現であるので、そのウェイトベクトルはクォークのその符号を逆転させたものとなる。

実際に幾つかの例を用いてクォーク模型でのハドロンの分類について見よう。まず中間子について、それが最も簡単なクォークの構成 $q\bar{q}$ からなる場合を考える。 $q\bar{q}$ から成る中間子はそのれに対応する積表現 $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ におけるウェイトベクトルに対応すると考えられる。まず $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ 表現を既約分解すると、

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{1.1.5}$$



となる。(なお SU(N) の既約分解は Young 図を用いて組合せ論的に行うことができる。この方法は有用で、SU(3) の表現の既約分解にもしばしば用いられるので、ここでも Young 図を併記する。その分解の規則についてはここでは述べないが、例えば文献 [10]などを参照されたい。) すなわち $q\bar{q}$ から成る中間子は、1 重項と 8 重項とに分解される。この様子をウェイト図 1.2 に図示する。

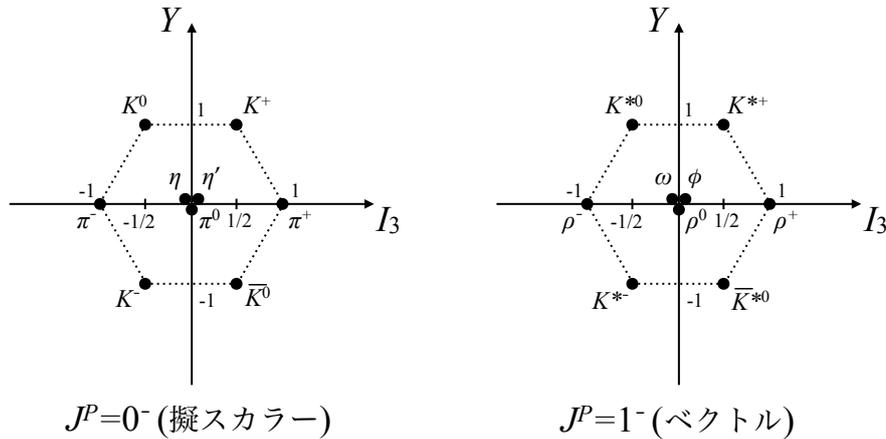
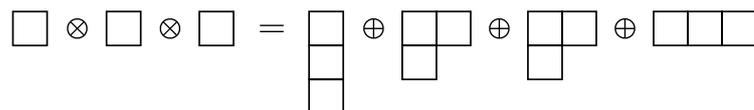


図 1.2 中間子のウェイト図。左は擬スカラー中間子、右は最も軽いベクトル中間子の組である。左右ともそれぞれ9つのウェイトベクトルからなり、中心は3重点になっている。この3重点のうち1つ(左では η' 、右では ϕ) はそれぞれ中間子 1 重項をなし、それ以外の8点がそれぞれ中間子 8 重項をなす。

次にバリオンが qqq から成る場合を考える。これに対応する積表現は $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ であり、これを既約分解すると、

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{1.1.6}$$



となる。実際に観測されている代表的なバリオンとして、核子 N (陽子 p 、中性子 n) はスピン・パリティが $J^P = 1/2^+$ のバリオン 8 重項に、また Δ 粒子は $J^P = 3/2^+$ のバリオン 10 重項にそれぞれ属しているが、上の既約分解はこの観測事実を再現していると言える。この様子をウェイト図 1.3 に図示する。

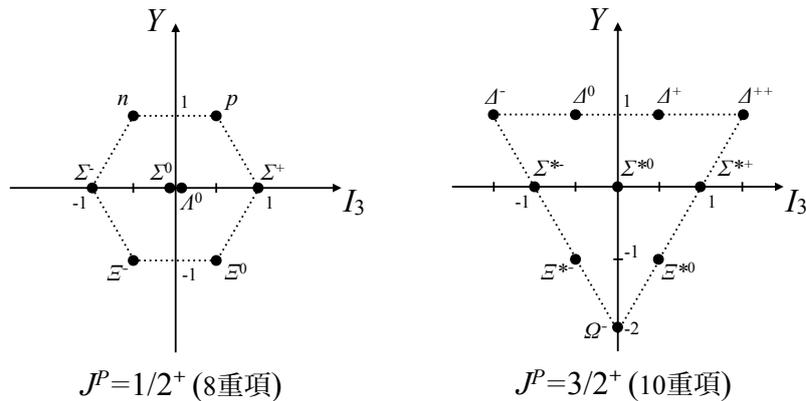
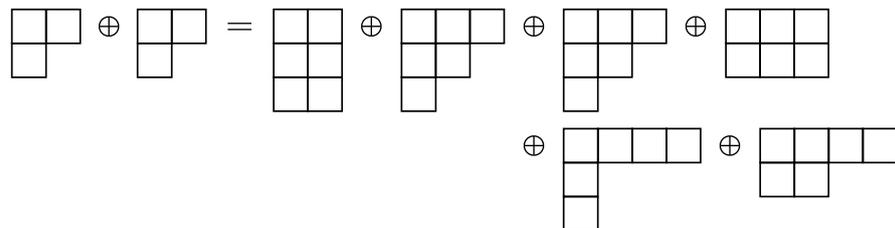


図 1.3 バリオン 8 重項と 10 重項のウェイト図。

以上がクォーク模型によって通常行われるバリオン (qqq) と中間子 ($q\bar{q}$) の分類である。またテトラクォークやペンタクォークといったエキゾチックハドロンや、より高いエネルギー領域において c, b, t クォークを含むようなバリオンの分類にもこの群論を用いた方法は有効であると考えられている^{*2}。

さて、クォーク模型を用いたハドロンの分類について概説してきたが、本研究の研究対象である H ダイバリオンは、このクォーク模型の下でどのようなハドロンとして分類されるだろうか。H ダイバリオンはバリオン数 $B = 2$ のハドロンであり、これを再現する最も単純なクォークの構成としては $qqqqqq$ が考えられる。これをクォーク模型によって分類するために、対応する積表現 $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ を既約分解することは可能だが、ここでは特に小さな質量を持つハドロンについて知りたいので、代わりに qqq バリオンの多重項のうち最も質量の小さいバリオン 8 重項を用いて $qqqqqq$ というクォーク構造を作ることとする^{*3}。すなわち 2 つのバリオン 8 重項の組に対応する積表現 $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ を既約分解する。

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27} \tag{1.1.7}$$



^{*2} フレーバー数 N_f の場合には $SU(N_f)$ による分類が行われる。

^{*3} これは、 $(\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) \otimes (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) = (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}) \otimes (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10})$ という積の展開において、エネルギーの最も低い多重項からなる $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ 部分のみを見ていることに相当する。

すると上式より、 $qqqqqq$ の中の $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ 表現からはフレーバー 1 重項がただ 1 つ現れることがわかる。実はこれが H ダイバリオンに対応している。すなわち H ダイバリオンは $uuddss$ からなる $SU(3)$ フレーバー 1 重項のハドロン粒子として定義される。またこのときスピンは $J = 0$ であるとする。H ダイバリオンのウェイト図を図 1.4 に示す。

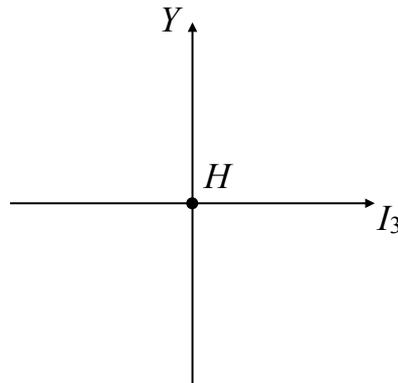


図 1.4 $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ 表現から現れる $\mathbf{1}$ 表現のウェイト図。中心のフレーバー 1 重項が H ダイバリオンに対応している。

1.1.2 量子色力学 (QCD)

上のクォーク模型におけるクォークは、ハドロンをその複合系として記述するために導入された粒子である。そしてこの考えに基づいて行われた $SU(3)$ によるハドロンの分類は実験事実をよく説明したため、ハドロンがクォークの複合系である可能性が考えられるようになった。しかしながらその後の実験により、クォークはハドロンを構成する基本粒子の候補であるにも関わらず、それ単体では観測されることがわかった。この事実はクォークの閉じ込めと呼ばれ、クォークの間には互いをハドロンの中に閉じ込めようとする強い力が働いていると考えられている。このクォーク間の相互作用は強い相互作用と呼ばれている。

このように、単体のクォークを観測できないという問題はあるものの、クォーク模型でハドロンの説明のために導入されたクォークは幾多の理論的進展と実験的検証を経て、今や素粒子の一員としてその地位を確立している。ただしそれはクォーク模型におけるクォークではなく、場の量子論を基礎とする素粒子標準模型において、強い相互作用を記述する基本的自由度としてのクォークである。

強い相互作用の場の理論は量子色力学 (QCD) と呼ばれ、これはクォーク場 $q(x)$ とグルーオン場 $A_\mu(x)$ により記述される。QCD は次のラグランジアンによって記述される^{*4}(記法の詳

^{*4} これは古典場のラグランジアンであり、正準量子化をするためにはこれにゲージ固定項と Faddeev-Popov 項を付け加える必要がある。

細については補遺 A 参照のこと)。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q \quad (1.1.8)$$

ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (1.1.9)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (1.1.10)$$

クォーク場 $q(x) \equiv {}^t(u, d, s, c, b, t)$ の成分 $u(x), d(x), \dots$ はそれぞれが各フレーバーに対応するスピン 1/2 の 4 成分 Dirac スピノルであり、かつ SU(3) ゲージ群の基本表現でもある。すなわちここでのクォークはフレーバー自由度に加えて、SU(3) の基本表現として 3 成分の新たな自由度を持っている。これはカラー自由度と呼ばれる。これによって各フレーバーのクォーク場、例えば $u(x)$ などは

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_r(x) \\ u_g(x) \\ u_b(x) \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

と表され、これら u_r, u_g, u_b がそれぞれ 4 成分 Dirac スピノルであるような構造を持っている (r, g, b は赤、緑、青を表す)。またグルーオン場 $A_\mu(x)$ は SU(3) ゲージ場 (随伴表現) であり、8 つの独立な成分を持つ。グルーオンはクォーク間の強い相互作用を媒介する粒子であり、クォークとの相互作用においてその色を交換する。そのためグルーオン自身もまたカラー自由度を持っており、グルーオンは自己相互作用を持つ (SU(3) の非可換性)。

また QCD のラグランジアン (1.1.10) においてクォークの質量項が無視できる場合には、フレーバー自由度に関して次のような大域的対称性を持つ (一般のフレーバー数 N_f で表す)。

$$q_L = \begin{pmatrix} q_L^{(1)} \\ q_L^{(2)} \\ \vdots \\ q_L^{(N_f)} \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta_L} U_L \begin{pmatrix} q_L^{(1)} \\ q_L^{(2)} \\ \vdots \\ q_L^{(N_f)} \end{pmatrix} \quad U_L \in \text{SU}(N_f)_L \quad (1.1.12)$$

$$q_R = \begin{pmatrix} q_R^{(1)} \\ q_R^{(2)} \\ \vdots \\ q_R^{(N_f)} \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta_R} U_R \begin{pmatrix} q_R^{(1)} \\ q_R^{(2)} \\ \vdots \\ q_R^{(N_f)} \end{pmatrix} \quad U_R \in \text{SU}(N_f)_R \quad (1.1.13)$$

ここで

$$q_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} q \quad q_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} q \quad \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.1.14)$$

この $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ 対称性はカイラル対称性と呼ばれており、またこの対称性が成り立つ極限 (クォーク質量 $m_q \rightarrow 0$) はカイラル極限と呼ばれる。ここで $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ は

$U(1)_L \times U(1)_R \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ と分解できるが、このうち $U(1)_L \times U(1)_R$ の部分群 $U(1)_A$ ($\theta_L = -\theta_R$ としたもの) の対称性は、量子論においてはあらわに破れる。これは $U(1)_A$ アノマリーとして知られる。よって $U(1)_L \times U(1)_R$ の対称性は、実際には部分群 $U(1)_V$ ($\theta_L = \theta_R$ としたもの) まで破れ、QCD はカイラル極限において $U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ という対称性を持つ。またさらに、 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ のうち部分集合 $SU(N_f)_A$ ($U_L = U_R^\dagger$ なるもの) の変換に関する対称性は、QCD においては自発的に破れ、それに伴う南部-Goldstone ボソンとして、パイ中間子を含む擬スカラー中間子の組が現れると考えられている。このため結局、カイラル極限における QCD のカイラル対称性は $U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \rightarrow U(1)_V \times SU(N_f)_V$ ($SU(N_f)_V$ は $U_L = U_R$ なるもの全体) まで自発的に破れる。 $U(1)_V$ はバリオン数保存則を与え、 $SU(N_f)_V$ はフレーバー多重項の分類に用いられる。この $SU(N_f)_V$ こそが、クォーク模型での分類に用いられた $SU(N_f)$ なのである。

ところで QCD の登場により、クォークに色という新たな自由度が加わったが、このときクォークの閉じこめは「カラーの閉じこめ」として次のように解釈される。すなわち、色を持った状態に対しては強い相互作用によって白色の状態にしようとする強い力が働き、そのために少なくとも低エネルギー領域において現れる粒子は全て白色の粒子となる。そしてこの白色の粒子こそがハドロンというわけである。これによるとクォークの閉じこめは、それが色を持っているために単体では観測されないのだと説明される。またグルーオンも色を持つため、グルーオンの輻射なども観測されないはずである*⁵。すなわち「色」は白色のハドロンの中に閉じ込められてしまうと言える*⁶。このカラーの閉じこめは、場の理論に基づく非摂動的な解析である格子 QCD の数値計算により、クォーク間ポテンシャルが長距離では線形 $V(r) \sim \sigma r$ となることなどによって示されている (例えば [11])。

また QCD は漸近的自由性と呼ばれる著しい特徴を持つことが知られている。すなわち QCD において、短距離スケール (高エネルギー領域) ではゲージ場の結合定数 g が小さくなり、逆に長距離のスケール (低エネルギー領域) においては結合定数 g が大きくなるのである。そのため、クォークがハドロンから飛び出そうとして遠くへ離れるほど結合定数は大きくなり、強い力によってハドロンの中に引き戻されてしまうのだと考えられる。またこの漸近的自由性により、高エネルギー現象 (例えば深非弾性散乱など) に対しては、QCD の摂動計算を用いた解析を行うことができる。しかし逆に言えばこれは、ハドロンなどの低エネルギー現象は QCD の非摂動領域において解析する必要があることを意味する。非摂動的な解析は一般に難しく、実際、クォークの閉じこめ現象を QCD から理論的かつ解析的に説明することは、今日まで残る未解決問題の一つである。

このような事情から、ハドロン物理の解析的研究においては南部-Jona-Lasinio 模型やカイ

*⁵ グルーオンのみでカラー 1 重項をなしたグルーボールについてはハドロン同様に観測されうる。

*⁶ ここで「白色」という言葉をもう少し正確に述べておくと、これはカラー $SU(3)$ の 1 重項のことを指している。 qqq はカラー $SU(3)$ の $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ 表現をなし、既約分解 (1.1.6) からこれはカラー 1 重項を持つ。これがバリオンである。また中間子 $q\bar{q}$ のカラー 1 重項についても同様である。

ラル摂動論といった QCD の有効理論ないしはそれに準ずる現象論的模型を用いた解析がしばしば行われてきた。以下に述べる Jaffe の H ダイバリオンの予言も、そのような現象論的模型の枠組みにおいてなされたものである。

1.1.3 Jaffe による予言

ハドロンを解析するための現象論的模型として、バッグ模型というものがある (レビューとしては、例えば [12] など)。この模型ではその名の通り、クォークをバッグ (袋) の中に閉じ込めてハドロンを作る。このときバッグの内側はクォークが自由粒子として存在する摂動的な真空とし、外側はハドロンを基本的な自由度とする非摂動的な真空であるとする。そのためクォークは基本的にバッグからは出られないと考え、それを再現するような境界条件をバッグ表面において与える。その条件の与え方などによって様々なバッグ模型が存在するが、中でも最初に論じられた最も簡単な模型は MIT バッグ模型で [13]、これはバッグの境界においてクォークから作られる種々のカレントが外に出ないという単純な条件をおいた模型である。非常に単純な構造を持った模型ではあるが、これを用いてハドロン質量を求めると実験結果の傾向をそれなりによく再現することは特筆に値する。このとき核子 N (バリオン 8 重項) と Δ 粒子 (バリオン 10 重項) の質量差は、次のクォーク間の色磁気相互作用 (1 グルーオン交換) を考慮することによって与えられる [14, 15]。

$$\Delta E_M = -\frac{\alpha_c}{R} \sum_{a=1}^8 \sum_{i>j} (\sigma_i \cdot \sigma_j) \lambda_i^a \lambda_j^a M(m_i R, m_j R) \quad (1.1.15)$$

ここで $\alpha_c = g^2/4\pi$ 、 R はバッグの半径 (バッグは球形と仮定)、 a はカラーの足であり、 σ_i と λ_i^a はそれぞれ i 番目のクォークのスピンベクトルとカラーベクトルを表す。ここに現れる $\sigma^k \lambda^a$ という積がカラー・スピン $SU(6)_{cs}$ の生成子をなすことから、この相互作用は $SU(6)_{cs}$ の 2 次の Casimir 演算子に対する依存性を持つことが特徴的である。またハドロンがカラー・スピン $SU(6)_{cs}$ のどの多重項に属しているかに応じて、それが属するフレーバー多重項も系の対称性によって決まる。そのためハドロンの質量は、それがどのフレーバー多重項に属しているかによって大体決まるとも言える*7。

そしてこのことに目をつけた Jaffe は、バリオン数が $B = 2$ の粒子で特に質量の小さなものが存在することを、MIT バッグ模型を用いて次のように予言した。まず 6 つのクォークを閉じ込めたバッグを考えてバリオン数 $B = 2$ のハドロン (ダイバリオン) を作る。このときクォーク間の色磁気相互作用のエネルギーに対する寄与は次のように与えられる [7]。

$$\Delta E_M = \alpha_c \left[8N - \frac{1}{2}C_6 + \frac{4}{3}J(J+1) \right] \bar{M} \quad (1.1.16)$$

*7 $SU(3)$ フレーバーで s クォーク質量のみ $m_s \neq 0$ とする場合など、カイラル極限から外れる場合には、多重項の間にも当然質量差が生じる。

ここで N はクォーク数、 J はハドロンのスピン、 C_6 は $SU(6)_{cs}$ の2次の Casimir 演算子、 \bar{M} は定数である。この表式から、Casimir 演算子の値が大きな $SU(6)_{cs}$ 多重項ほどその質量は小さくなることがわかる。 $qqqqqq$ からなるダイバリオンに対して、 C_6 が最大となる $SU(6)_{cs}$ 多重項は完全対称な **490** 表現である [7]。このとき対称性から、フレーバー多重項については完全反対称でなければならない。特に $SU(3)$ フレーバーを考える場合には、(1.1.7) 式を思い出すと、ダイバリオン ($qqqqqq$) はフレーバーについて1重項、8重項、10重項、…と既約分解されるので、完全反対称なフレーバー1重項を持っている。したがって、この $SU(3)$ フレーバー1重項 ($uuddss$) はクォーク間の色磁気相互作用によってとりわけ質量が小さくなることが期待される。なお S 波状態の $SU(3)$ フレーバー1重項のスピンは $J=0$ であるので [7]、(1.1.16) 式からこの状態が最も小さな質量を持つダイバリオンであることがわかる。実際に MIT バッグ模型を用いてこのダイバリオンの質量 M_H を計算すると、 $M_H = 2150\text{MeV}$ となり、これは $uuddss$ のクォーク組成を与える2つのバリオンの組、例えば $\Lambda\Lambda$ の閾値 2231MeV (実験値 [1]) などよりも小さな値を持つことが明らかになった*⁸。

この結果をもって Jaffe は、スピン $J=0$ 、 $SU(3)$ フレーバー1重項のダイバリオンが特に小さい質量を持ち、強い相互作用に対して安定な束縛状態として存在することを予言し、 $uuddss$ の組であることにちなんでそれをダイハイペロンと名付けた。今日ではこの粒子は H ダイバリオンと呼ばれている。

1.1.4 Skyrme 模型を用いた解析

Jaffe の予言以降、H ダイバリオンの安定性は種々の模型を用いて理論的に調べられることとなった。そのような研究の一つに Skyrme 模型を用いた解析がある [16, 17]。ここではその概要と結果について簡単に述べよう。Skyrme 模型 [18–20] は非線形シグマ模型にその起源を持っており、ラグランジアンはカイラル場と呼ばれる $SU(N_f)$ 値関数 $U(x)$ を用いて次のように表される。

$$\mathcal{L}_{\text{Skyrme}} = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 \quad \left(L_\mu \equiv \frac{1}{i} U^\dagger \partial_\mu U \right) \quad (1.1.17)$$

このラグランジアンの下でトポロジカルなソリトン解 (スキルミオン) を求め、バリオンはそのソリトン解として記述されるとするのが、この Skyrme 模型である。ただしそのソリトン解を厳密に導出することは困難であり、実際には解の形を仮定して解析を行うことが多い。そこでしばしば用いられるのはヘッジホッグ解と呼ばれる対称性のよいものである。

このヘッジホッグ解を用いて、Skyrme 模型の枠組みで H ダイバリオンの性質を調べることができる。ここで用いられるのは $SO(3)$ 型のヘッジホッグ解と呼ばれるもので、以下のような形を持つ ($N_f = 3$) [16, 17]。

*⁸ $uuddss$ を与える他の2バリオン (8重項) の閾値は $N\Xi$ ($n\Xi^0$: 2254MeV , $p\Xi^-$: 2260MeV)、 $\Sigma\Sigma$ ($\Sigma^0\Sigma^0$: 2385MeV , $\Sigma^+\Sigma^-$: 2387MeV) であり、いずれも $\Lambda\Lambda$ の閾値より大きい。

$$U(\mathbf{x}) = e^{i\{(\Lambda \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r) + ((\Lambda \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi(r)\}} \in \text{SU}(3)_f \quad (1.1.18)$$

$$F(r), \varphi(r) \in \mathbb{R} \quad (r \equiv |\mathbf{x}|, \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r)$$

ここで $\{\Lambda_{i=1,2,3}\}$ は $\mathfrak{so}(3)$ の生成子である。これをラグランジアン (1.1.17) に代入して解を求めると、カイラル極限^{*9}での質量について

$$M_H \simeq 1.92 M_{B=1} \quad (1.1.19)$$

という関係を得る [16]。ただし $M_{B=1}$ は同じ枠組みで求めた $B = 1$ のバリオンの質量である。ここで Skyrme 模型において、カイラル極限でのバリオン 8 重項 (N, Λ, Σ, Ξ) の質量 M_8 は $B = 1$ バリオン質量と $M_8 > M_{B=1}$ の関係にあるので、上の関係 (1.1.19) はまた $M_H < 2M_8$ 、すなわちカイラル極限における H ダイバリオンの質量が 2 核子質量よりも小さいことを意味している。この結果は MIT バッグ模型を用いた Jaffe の結果を支持するものである。

1.1.5 ダブルハイパー核の発見

上のような理論的背景から、H ダイバリオンは安定な束縛状態として存在する可能性が高いと考えられていた。しかしながら、その後の実験でダブルハイパー核 (${}_{\Lambda\Lambda}^6\text{He}$) が発見されたことにより、少なくとも現実世界 (physical point) においては、H ダイバリオンが強い相互作用に対して安定な束縛状態でないことが明らかとなった [22]。ここではダブルハイパー核の存在が H ダイバリオンの探索にどう関わっているかについて簡単に述べる。

原子核は通常、陽子 $p(uud)$ と中性子 $n(udd)$ によって構成される。一方、ストレンジクォーク s を含むような $\text{SU}(3)$ フレーバーのバリオンはハイペロンと呼ばれ、ハイペロンを含むような原子核はハイパー核と呼ばれる。すなわちハイパー核とはストレンジネス S を持つような原子核のことである。その中でも特に、 Λ 粒子を 2 つ含むような原子核はダブル Λ ハイパー核と呼ばれる。以下ではこれを単にダブルハイパー核と呼ぼう^{*10}。このような原子核の存在は $\Lambda\Lambda$ の相互作用を知る上での手がかりとなるため、その探索は Jaffe による H ダイバリオンの予言以前から行われていた。ところでダブルハイパー核は s クォークを 2 つ含むためストレンジネス $S = -2$ を持つが、H ダイバリオンを 1 つ含むものもまたそのような原子核の一つである。ヘリウム原子を例にとってこの両者の様子を図 1.5 に示す。 $\Lambda\Lambda$ と H 粒子はいずれも $uudds$ というクォークの集まりであるため、例えば H 粒子の質量が $\Lambda\Lambda$ の閾値 (2231MeV) よりも十分小さい場合には、 $S = -2$ を持つ ${}^6\text{He}$ の基底状態は H 核となるだろう。また逆も然りである。両者の質量がある程度近い場合には少し複雑で、 $S = -2$ の ${}^6\text{He}$ の基底状態は両者の束縛エネルギーの大小などから決まると考えられる。このようにして Jaffe の予言以降、 $S = -2$ を持つ原子核の探索は H ダイバリオンの存在性を検証する上でも重要な意味を持つこととなった。

^{*9} ここでのラグランジアン (1.1.17) は質量項を持たないため、これに基づく計算は必然的にカイラル極限での結

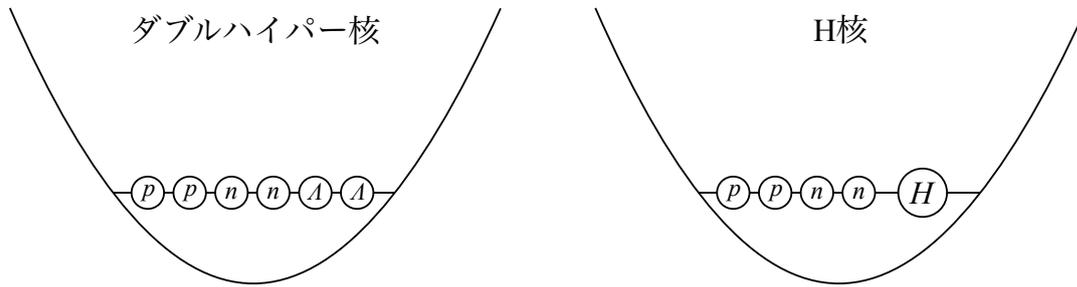


図 1.5 ストレンジネス $S = -2$ を持つ原子核 ${}^6\text{He}$ の様子。 s クォークを含む部分については $\Lambda\Lambda$ や H 粒子など、候補が複数考えられる。

そして実際に実験で観測されたのは、 ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ のダブルハイパー核であった。KEK-E373 実験における (K^-, K^+) 反応を用いた “NAGARA” event ^{*11}で、今井グループによって 2001 年に発見された^{*12} [22]。この結果から H ダイバリオンの束縛エネルギーは 6MeV より小さくなることが見積もられ、少なくとも現実世界 (physical point) においては H 粒子が強い相互作用に対して安定な束縛状態でないことが証明された。また同時に、この実験の結果は H 粒子の質量に下限を与え、

$$M_H \geq 2223.7\text{MeV} \quad (1.1.20)$$

であることが明らかとなった。この下限は $\Lambda\Lambda$ の閾値 2231MeV と非常に近い値にある。

1.2 H ダイバリオンに関する研究の現状

ダブルハイパー核 ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ の発見によって束縛状態としての安定性が否定された H ダイバリオンであるが、この粒子に対する研究を放棄してしまうのは全くの時期尚早である。実際、physical point において否定されたのはその強い相互作用に対する安定性であり、実験が与える質量の下限 (1.1.20) が $\Lambda\Lambda$ の閾値と非常に近い値であることから、 H 粒子が $\Lambda\Lambda$ の閾値近傍で不安定な共鳴状態として存在する可能性は依然として否定できない。

この予想に対して肯定的な示唆を与える最近の理論的研究として、例えば文献 [27] がある。そこでは低エネルギー有効理論に基づいて $S = -2$ の 2-バリオン散乱における H 粒子のクォーク質量に対する依存性が調べられており、physical point における H ダイバリオンは $N\Xi$ の閾

果を与える。なお QCD の対称性に基づいてラグランジアンにクォーク質量を導入することは可能である [21]。

^{*10} ストレンジネス $S = -2$ を持つ原子核を総称してダブルハイパー核と呼ぶこともあるようである。

^{*11} (K^-, K^+) 反応とは $K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$ のことで、これにより生じた Ξ^- を ${}^{12}\text{C}$ に捕獲させ、 $\Xi^- + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He} + {}^4\text{He} + t$ と反応させることによりダブルハイパー核が生成される。そしてその後、ダブルハイパー核は弱い相互作用によって ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He} \rightarrow {}^5_{\Lambda}\text{He} + p + \pi^-$ と崩壊する。

^{*12} ダブルハイパー核を同定したとする報告はそれまでも存在したが [23–26]、それらはいずれもその結果の解釈に不確定な要素が残っていた。

値のすぐ下にエネルギーを持つ共鳴状態として現れるという結果が示されている。

また最近のハドロン実験においても H ダイバリオンの探索は依然行なわれている。KEK で行われた Belle 実験では、 $1S$ 状態あるいは $2S$ 状態のボトモニウム $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ の崩壊 $\Upsilon(1S, 2S) \rightarrow HX$ で生じる $H \rightarrow \Lambda p \pi^-$ あるいは $H \rightarrow \Lambda \Lambda$ という反応の観測から $\Lambda \Lambda$ の閾値近傍での H 粒子の発見を試みたが、明確な証拠は得られなかった [28]。また LHC を用いた ALICE 実験では、鉛-鉛衝突における $H \rightarrow \Lambda p \pi^-$ 崩壊の観測を試みたが、H ダイバリオンのシグナルはやはり得られなかった [29]。また今後の H ダイバリオンに関する実験としては、J-PARC での $\Lambda \Lambda$ の閾値近傍における H ダイバリオンの探索実験が予定されている (J-PARC E42 実験) [30]。

このように、physical point での $\Lambda \Lambda$ の閾値近傍における H ダイバリオンの存在性は現在盛んに研究されている。一方、H 粒子に対する別の視点からの興味として、*unphysical* ではあるが *general* なクォーク質量領域における H ダイバリオンについての研究結果もまた注目を集めている。安定な束縛状態としての H 粒子が否定されたのは physical point においてであり、*general* な質量領域ではひょっとすると H 粒子が安定に存在するかもしれないというわけである。実際、SU(3) 対称 ($m_u = m_d = m_s$) かつクォーク質量が大きい領域 (図 1.6 網掛け部分) においては、H ダイバリオンが安定な束縛状態として存在することが NPLQCD、HAL QCD 両グループの格子 QCD を用いた計算によって示された [31–33]。このような *unphysical* な領

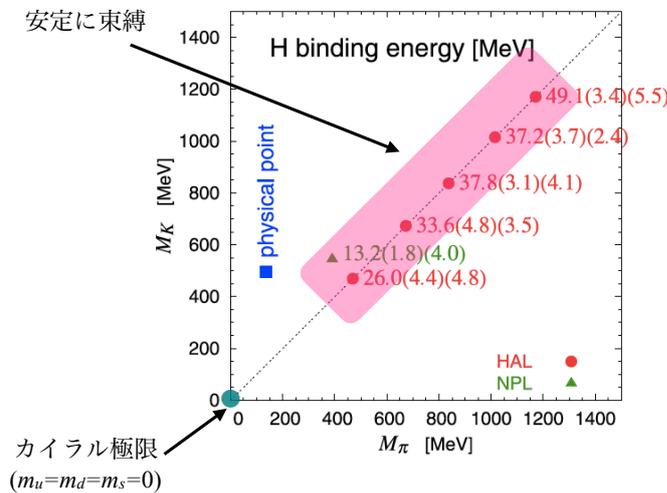


図 1.6 格子 QCD による計算結果 (文献 [33] 中の図を引用、加筆)。横軸はパイ中間子の質量 M_π 、縦軸は K 中間子の質量 M_K であり、グラフの各点がクォーク質量を変えたときのそれぞれ世界に対応する。現実世界 (physical point) は特に青点で表されている。図中の対角線上が SU(3) 対称な領域であり、網掛け部分に含まれる赤点または緑点のそれぞれにおいて H 粒子が安定な束縛状態として存在することが示された。点の横にはそこでの H 粒子の束縛エネルギーが付記されてある。また原点 ($m_u = m_d = m_s = 0$) は、本研究の研究対象とするカイラル極限である。

域における H ダイバリオンの研究は、幾分アカデミックなものではあるが、クォーク質量に

よって粒子の束縛エネルギーが変化するという非常に興味深い物理を我々に提供する。現実世界での現象の記述はもちろん重要だが、一方でその物理をより深く理解するためにはこういった研究や考察が不可欠であろう。

ところで一般のクォーク質量領域における H 粒子の質量を計算する手段として、ここでは格子 QCD による数値計算が用いられた。これは QCD に直接基づく第一原理計算であり、QCD の非摂動領域を解析する上で信頼できる方法の一つである。計算機技術の進歩により、近年ではスーパーコンピュータを用いた大規模数値シミュレーションによるハドロン質量の精密計算が可能となった。したがって今日では、ハドロン質量を計算する上で格子 QCD による数値計算は非常に強力な手法であると言える。しかし一方でこの手法は、質量が非常に小さな粒子を扱うことが困難であるという側面を持っている。軽い粒子は格子空間の中で大きく動き回るため、空間体積をその分大きく取っておく必要が生じ、それにより計算時間が膨大となってしまうのである。この問題は、質量を持った粒子に対しては計算技術の進歩によって解決しうるが、massless 粒子を扱う場合には格子空間を無限に大きく取る必要があるため、これを数値シミュレーションで扱うことは不可能である。よって特に massless クォークを含むような一般のクォーク質量領域におけるハドロン質量の計算には、格子 QCD による数値計算を用いることができない。それゆえ、例えばカイラル極限における H ダイバリオンの質量を求めるといった場合には、QCD の有効理論を用いるなど、他の非摂動的な手法による解析が必要となる。

1.3 本研究の目的及びその手法

以上の背景から、本研究では一般のクォーク質量領域として特にカイラル極限における H ダイバリオンの質量及びその性質を調べることをその目的とする。しかしながら上で述べたように、カイラル極限、すなわち u, d, s クォークが全て massless である領域 (ここでは 3 フレーバーとして考える) での H ダイバリオンの質量を求める場合、この計算は格子 QCD の数値的手法では扱えず、したがって他の手段に頼る必要がある。この序論でも述べた MIT バッグ模型や Skyrme 模型を用いた H ダイバリオンの計算は、格子 QCD の手法によらない非摂動的な計算の例であるが、こういった有効理論は QCD との厳密な対応関係が不明確である場合が多く、他のクォーク領域での格子 QCD を用いた計算結果に匹敵するほどの信頼性を持つものではない。

ところで近年、QCD の非摂動的側面への解析的なアプローチとして「ホログラフィック QCD」と呼ばれる模型が超弦理論の枠組みにおいて提案された [34, 35]。これは超弦理論において D ブレーンと呼ばれる物体を用いて構築された、QCD と等価な D ブレーン系である。そして Maldacena の提唱した AdS/CFT 対応を用いてこの系を解析することにより、中間子の質量スペクトルや低エネルギーにおける中間子の現象論がこの枠組み一つで統一的に記述できることが明らかとなった。このことは QCD の非摂動領域に対する解析的手法がホログラフィック QCD によって与えられる可能性を示唆している。またこの模型は低エネルギー領域

において QCD と等価であるため、ホログラフィック QCD を用いた計算は格子 QCD と同様、QCD に基づいた計算であると言える。

そこで本研究では、カイラル極限における H ダイバリオンの諸性質を、ホログラフィック QCD の枠組みを用いて解析する。格子 QCD による第一原理計算ではないものの、QCD と等価な D ブレーン系を用いた本研究での計算結果は、格子 QCD でのそれに匹敵する信頼性を持つものと期待される。

本論文は以下のように構成される。まず本研究で用いる手法であるホログラフィック QCD について、その枠組みに関するレビューを第 2 章で行う。第 3 章、第 4 章では本研究の結果について述べる。本研究ではまずホログラフィック QCD における H ダイバリオンの作用を導出するが、その結果を主に第 3 章において述べる。そして第 4 章では、第 3 章で導かれた作用に基づいて行った H ダイバリオンに対する数値計算の手法とその結果について述べ、カイラル極限における H ダイバリオンの性質について議論する。

第 2 章

ホログラフィック QCD

序論でも述べたように、QCD の非摂動領域においてハドロンを解析する際、格子 QCD による第一原理計算は強力な手法であるものの、この手法には massless 粒子を扱うことが困難であるという側面がある。そのため本研究のようにカイラル極限でのハドロンを調べる際には、むしろ格子 QCD 以外の解析的な手法が必要である。そのような方法の一つとして、とりわけバリオンに焦点を当てて言うならば、歴史的には前章に述べた Skyrme 模型による解析がある^{*1}。ただしこの模型はカイラル場のソリトン解を存在させるためにカイラル場の 4 次の微分を含む Skyrme 項を現象論的に導入しており、さらにはこの模型と QCD とのつながりが不明確であるなどの点があるため、Skyrme 模型は、QCD に基づくバリオンの解析という観点からは結局のところ一現象論に過ぎないというのもまた事実である。これまでに用いられてきた他の多くの有効模型も、やはり QCD との厳密な対応関係は不明確なものが多く、QCD に基づく解析的手法と呼べるほど信頼性の高いものではない。

しかし近年、QCD の非摂動領域の解析に有用な手法を与える可能性を持つ理論の存在が、弦理論の枠組みにおいて提唱された。「AdS/CFT 対応」と呼ばれる超弦理論と超対称ゲージ理論との対応関係が Maldacena によって 1997 年に提示され [36]、それ以降 QCD に対応する超弦理論側の記述が模索された。1998 年には Witten によって超弦理論から 4 次元 Yang-Mills 理論を構築する方法 [37] が提案され、そして 2005 年、酒井と杉本により提案された $D4/D8/\overline{D8}$ 模型 (酒井・杉本模型) [34, 35] が低エネルギー領域ではラージ N_c massless QCD と等価な理論であることが示された。彼らはまたこの模型が中間子の現象論をよく再現することを明らかにした。これにより、酒井・杉本模型は QCD に基づいてその非摂動領域に対する有用なアプローチを与えるものと考えられている。

本研究では、酒井・杉本模型において H ダイバリオンを記述し、QCD に基づく非摂動的解析を行う。その準備として、以下では特に酒井・杉本模型の枠組みを中心にレビューし、最後にそこでのバリオンの記述について述べる。

^{*1} Skyrme 模型は始めカイラル極限で定義されるが、カイラル模型と同様の方法で現象論的にクォーク質量を導入することは可能である。

2.1 準備

以下の説明は超弦理論に基づいて述べられるが、ここではその心の準備として、弦理論に関して以下で必要となる前提知識について、厳密さは追求せずごく簡単に述べる。

開弦と閉弦

弦理論は、粒子の代わりに弦をその基本的自由度とする理論である。このとき弦には開いた弦 (開弦) と閉じた弦 (閉弦) がある。弦の典型的な長さはストリング長 l_s と呼ばれ、これは弦理論において唯一の次元を持ったパラメータである。また粒子の運動によって時空中に作られる世界線に対応して、弦の運動によって時空中に作られる軌跡は世界面であり、逆に弦の運動は世界面を指定することで決まる。

超弦理論

弦理論を世界面上の場の理論であると考えたとき、そこに超対称性が存在する場合それは超弦理論と呼ばれる。以下では弦理論として超弦理論のみを考える。この下で弦を量子化すると、アノマリーを回避するためには弦の運動する時空の次元が 10 でなければならない [38]。

弦の量子化

弦を量子化すると、弦の振動からたくさんのモードが現れる。超弦理論では、閉弦と開弦から、例えば

- 閉弦 → 重力場 $g_{\mu\nu}$ 、ダイラトン場 ϕ 、B 場 $B_{\mu\nu}$ 、...
- 開弦 → ゲージ場 A_μ 、スカラー場 Φ 、フェルミオン場 ψ 、...

という massless モードが現れる。またこれに加え、質量が $\mathcal{O}(1/l_s)$ のオーダーの massive モードが現れる。

D ブレーン

また超弦理論では、弦とは別に D ブレーンと呼ばれる物体もある。10 次元時空に埋め込まれた $(p+1)$ 次元の物体で、その上に開弦の端点が乗れるものを Dp ブレーンと呼ぶ。以下開弦の端点は常に D ブレーン上にあるものとする。

D ブレーン上の massless ボソン場

同じ Dp ブレーン上に端点を持つ開弦の振動から現れる massless ボソン場は

- $A_\mu(x^0, \dots, x^p)$: ゲージ場 ($\mu = 0, 1, \dots, p$)
- $\Phi^i(x^0, \dots, x^p)$: スカラー場 ($i = p+1, \dots, 9$)

となる。D ブレーンに平行な方向の振動からゲージ場が、また垂直な方向の振動からボソン場が生じる。

N 枚の D ブレーン上のゲージ理論

D ブレーンを N 枚重ねた場合を考える。するとその D ブレーンの上に端点を持つ開弦は、端点を別々の D ブレーン上に置くことも可能である。この端点の置き方によって生じる $N \times N$ の自由度により、 N 枚重なった D ブレーン上の開弦から生じる massless ボソン場は $U(N)$ ゲージ理論を構成する^{*2}。

D ブレーンと重力の結合

D ブレーン間をつなぐ開弦がそのままぐるっと一周する様子を考えると、それは D ブレーンの間を閉弦が伝播しているとも見なせる。すなわち D ブレーンは閉弦を放出しており、この見方から、D ブレーンは重力の源になると考えられる。よって D ブレーンがあるとその周りの時空は曲がり、また弦の結合が弱い場合にその曲がった時空は超重力解として与えられる。

ゲージ/重力対応

上では、 N 枚重なった D ブレーンから $U(N)$ ゲージ理論が現れることを見た。そして D ブレーンは重力場を作ることも見た。D ブレーンにはこのような 2 つの側面があり、これら 2 つの理論が D ブレーンを通じて等価であるとするのがゲージ/重力対応である。すなわちこの対応は、ある $U(N)$ ゲージ理論とある曲がった時空における弦理論とは等価であることを主張する。これらがそれぞれどのようなゲージ理論あるいは重力解に対応するかは、もちろん考える D ブレーンによる。Maldacena は D3 ブレーンから現れる 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論と $AdS_5 \times S^5$ 上の超重力理論に対してこの対応関係を初めて提示したので、しばしばこれは AdS/CFT 対応とも呼ばれる。

2.2 酒井・杉本模型

2005 年に酒井・杉本が提案した模型 [34] は、IIA 型の弦理論において D4 ブレーンと D8 ブレーンを用いて massless QCD の horographic dual を構築するというものである。この模型では QCD のカイラル対称性 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ が $D8-\overline{D8}$ ブレーン上のゲージ対称性として実現している。そしてこの対称性は D4 ブレーンの作る超重力解において $U(N_f)_V$ にまで自発的に破れ、それに伴う南部-Goldstone ボソンとして massless のパイ中間子が現れるため、Kruczenski らの D4/D6 模型 [40] のような困難はここでは起こらない。また D4/D8/ $\overline{D8}$ 模型の利点はこのことにとどまらず、中間子の質量スペクトルをよく再現し、さらにはベクターメソン・ドミナンスを始めとする低エネルギーでの中間子の現象論を記述することにも成功して

^{*2} ただしこの $U(1)$ 部分は D ブレーンの重心運動に相当し、 $SU(N)$ と decouple する [39]。

いる [35]。そのためこの D4/D8/ $\overline{D8}$ ブレーン系による酒井・杉本模型は、低エネルギーの非摂動領域におけるハドロン物理を QCD に基づいて調べるための非常に有用な解析的手法を与えるものと考えられる。本研究ではこの模型を用いて H ダイバリオンの性質を調べることにするが、そのための準備として、以下では酒井・杉本模型についてより詳しく解説する。

2.2.1 D4/D8/ $\overline{D8}$ ブレーン系

まず D ブレーンの配置から話を始めよう。この模型においてまず基本となるのは、Witten による S^1 コンパクト化された N_c 枚の D4 ブレーンを用いた 4 次元 Yang-Mills (YM) 理論の構成 [37] である。この D4 ブレーンの YM 理論を土台として、その上にフレーバー自由度を担う D ブレーンを導入するのであるが、この酒井・杉本模型においてはフレーバー D ブレーンとして N_f 枚の D8- $\overline{D8}$ 対を S^1 方向と直交するように配置する。この配置についてもう少し正確に述べておこう。10 次元 Minkowski 空間の 1 方向 (x^4 方向とする) を S^1 コンパクト化した 10 次元時空 $M^4 \times S^1 \times \mathbb{R}^5$ を考える (M^4 は 4 次元 Minkowski 空間)。ここで S^1 の半径は M_{KK}^{-1} とする。そして $M^4 \times S^1$ 方向に広がりを持つ D4 ブレーンを N_c 枚、また $M^4 \times \mathbb{R}^5$ 方向に広がりを持つ D8 ブレーンと $\overline{D8}$ ブレーンを N_f 枚ずつ、この 10 次元時空上にそれぞれ配置する。このとき D4、D8- $\overline{D8}$ ブレーンが共有する 4 次元 Minkowski 空間で各 D ブレーンとともに M^4 全体に広がっているものとし、また広がっていない次元での配置に関して、D4 ブレーンは 5 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^5 の原点に、D8- $\overline{D8}$ ブレーンは S^1 上で互いに離れて、それぞれ配置されているものとする。各 D ブレーンの広がる次元について表 2.1 に、また配置の視覚的な様子を図 2.1 にそれぞれ示す。

表 2.1 D ブレーンの配置

	0	1	2	3	(4)	5	6	7	8	9
D4	○	○	○	○	○	-	-	-	-	-
D8- $\overline{D8}$	○	○	○	○	-	○	○	○	○	○

ここでこの D ブレーン系の持つ対称性について述べておく。まず D ブレーンの配置から、D4、D8 ($\overline{D8}$) ブレーンはともに 4 次元 Minkowski 空間全体に広がっているため、 M^4 上の Poincaré 対称性、特に Lorentz 対称性 $SO(3,1)$ を持つ。また同様に、この D ブレーン配置は 5 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^5 \ni (x^5, \dots, x^9)$ での $SO(5)$ 回転に対しても不変である^{*3}。また低エネルギー領域においては、D4 ブレーン上に $U(N_c)$ ゲージ対称性が、D8- $\overline{D8}$ ブレーン上に $U(N_f)$ ゲージ対称性がそれぞれ存在する。

^{*3} この D ブレーン配置は 5 次元 Euclid 空間での並進対称性は持っていない。というのも、この D ブレーン配置は \mathbb{R}^5 での D4 ブレーンの位置に関する情報を含んでおり、並進によってその位置が変化してしまうためである。また系が $SO(5)$ の回転対称性を持つのも、D4 ブレーンを \mathbb{R}^5 の原点に配置したことによるものであり、一般の位置にあってはその回転対称性すら失われる。

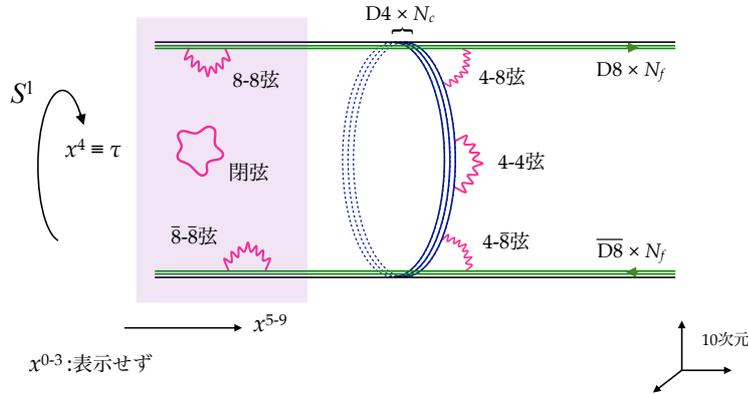


図 2.1 10次元時空における D4/D8/ $\overline{D8}$ ブレーン系の配置の様子。ただしここでは S^1 方向の x^4 と x^{5-9} の動径方向のみで描かれており、4次元時空 x^{0-3} の情報は図の各点にそれぞれ備わっているものと見る必要がある。またそれぞれの D ブレーンに端点を持つ開弦も同時に描かれており、閉弦、8-8 弦及び $\overline{8-8}$ 弦に対する網掛けは、本文中に述べる decoupling 極限においてこれらが D4 ブレーン上の massless モードと decouple してしまうことを示している。

さて、このように配置された D ブレーン上での開弦の振動から生じる massless スペクトルを次に見ていくが、その前に decoupling 極限について述べておく。decoupling 極限とは、弦理論における唯一の次元を持ったパラメータであるストリング長 l_s を 0 に取る極限である。この極限 $l_s \rightarrow 0$ によって、諸々の相互作用を切ることができる。まず開弦と閉弦との相互作用の強さは、10次元 SUGRA の重力定数 $G_{10} \sim g_s l_s^2$ によって与えられる。ここで \sim はオーダーが等しいことを表す。 g_s は閉弦の結合定数であり、これは小さい値に取っておくべきものであることを考えると、 $l_s \rightarrow 0$ の極限においては $G_{10} \sim g_s l_s^2 \rightarrow 0$ となり、開弦と閉弦との相互作用が切れることがわかる。またこの極限を取った際、D4 ブレーンに端点を持つ開弦 (4-4 弦、4-8 弦、4- $\overline{8}$ 弦) の振動から生じる massless モードと 8-8 弦及び $\overline{8-8}$ 弦から生じる massless モードとの間の相互作用は切れてしまう*4。よってこれらをまとめると、 $l_s \rightarrow 0$ の極限において、D4 ブレーンに端点を持つ開弦から生じる massless モードは、閉弦、8-8 弦及び $\overline{8-8}$ 弦から生じる massless モードとの相互作用を持たず、両者は decouple することとなる。そのため以下では decoupling 極限の下で閉弦、8-8 弦及び $\overline{8-8}$ 弦の存在を無視し、D4 ブレーンに端点を持つ開弦から生じる massless スペクトルについて述べよう。

4-4 弦

Witten の D4 ブレーンを用いた YM 理論の構成と同様に、4-4 弦から生じるフェルミオンに対し S^1 方向に沿って反周期境界条件を課すことで、フェルミオンは $\mathcal{O}(M_{KK})$ の質

*4 これは作用を具体的に書くことによってわかる。

量を獲得する。それゆえ 4-4 弦から massless フェルミオンは現れない。

一方、4-4 弦から生じるボソン場のうち massless となり得るものは、4 つのゲージ場 $A_\mu^{(D4)}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と 6 つのスカラー場 $A_4^{(D4)}, \Phi^i$ ($i = 5, \dots, 9$) であり、これらは全て D4 ブレーン上の $U(N_c)$ ゲージ群の随伴表現である。なおここでは S^1 コンパクト化のために、元々 x^4 方向のゲージ場成分であった $A_4^{(D4)}$ はもはやゲージ場ではなく、単なるスカラー場であることに注意されたい。さて、 S^1 コンパクト化の際、フェルミオンに反周期境界条件を課したことで超対称性が破れているため、上に挙げたボソン場のうちスカラー場に関しては、その輻射補正が超対称性によりボソンとフェルミオンとでそれぞれ打ち消しあうなどの機構が存在しない。ゆえにこの場合、スカラー場 $A_4^{(D4)}, \Phi^i$ は一般に輻射補正によって質量を獲得する。ただし $A_4^{(D4)}, \Phi^i$ のトレース部分、すなわち $U(1)$ 部分である a_4 と ϕ^i については例外で、D4 ブレーンを記述する DBI 作用が定数のシフト $A_4^{(D4)} \rightarrow A_4^{(D4)} + \alpha \mathbf{1}_{N_c}$ 、 $\Phi^i \rightarrow \Phi^i + \alpha^i \mathbf{1}_{N_c}$ の下で不変であるために massless 性が保たれる。しかしながらこれらのモードは、10 次元時空における D4 ブレーンの重心運動に付随する、ソリトンの集団運動としての massless モードであり、D ブレーン上での低エネルギーの物理には影響を及ぼさないと期待されるため、以下の低エネルギー領域での議論の際にはこれらのモードを無視することとする。

一方 $A_\mu^{(D4)}$ に関してはゲージ場であるため massless 性が保たれる。またこれは $U(N_c)$ ゲージ群の随伴表現であるので、 $A_\mu^{(D4)}$ は QCD のグルーオン場と解釈される。

4-8 弦と $4\bar{8}$ 弦

まず注目すべきは、表 2.1 に示した D ブレーンの配置についてである。この表から、それぞれの D ブレーンのうち一方のみが広がりを持つ次元の数（すなわち表の各次元の欄を縦に見た際に \circ と $-$ が並ぶ次元の数、以下 $\#_{ND}$ と記す）を数えると、 $\#_{ND} = 6$ であることがわかる。一般に 2 つの D ブレーンがそれぞれ座標軸に沿って配置されている場合に、上に述べた数 $\#_{ND}$ が 4 の倍数でなければ超対称性が破れることが知られている [38]。今の場合、 $\#_{ND} = 6$ は 4 の倍数ではないので、この D4-D8 及び D4- $\overline{D8}$ ブレーンによっても超対称性が破れており、その結果それぞれの D ブレーンに端点を持つ 4-8 弦と $4\bar{8}$ 弦の振動からは massless ボソンが現れない。一方フェルミオンについては massless モードが存在する。D4 ブレーンの $U(N_c)$ ゲージ群に対する変換性を調べると、これらのフェルミオンは $U(N_c)$ の基本表現になっており、さらに Lorentz 群 $SO(3,1)$ に対する変換性を調べると、4-8 弦の massless フェルミオンは左手系、 $4\bar{8}$ 弦のそれは右手系のカイラリティをそれぞれ持つことがわかる。またこれらの massless フェルミオン $(q_L^f, q_R^{\bar{f}})$ はそれぞれ D8- $\overline{D8}$ ブレーンの $U(N_f)$ ゲージ対称性の添字 f, \bar{f} を持っているが、今の decoupling 極限においては D8 ブレーン上のゲージ場との相互作用が切れているために、この $U(N_f)$ ゲージ対称性は dynamical なもの (局所的ゲージ対称性) ではなく、単に $(q_L^f)_{f=1, \dots, N_f}$ または $(q_R^{\bar{f}})_{\bar{f}=1, \dots, N_f}$ という N_f 重項に対する

大域的な $U(N_f)$ ゲージ対称性として機能している。すなわち $D8-\overline{D8}$ ブレーン上でのゲージ対称性は、 $D4$ ブレーン上の massless 場に関する大域的な $U(N_f)_{D8} \times U(N_f)_{\overline{D8}}$ ゲージ対称性としての役割を持つ。酒井・杉本模型においては、これを QCD の持つ $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ カイラル対称性であると解釈する。これらのことから、 N_f フレーバーを持つ $4-8$ 弦、 $4-\overline{8}$ 弦の Weyl フェルミオン $(q_L^f, q_R^{\bar{f}})$ は合わせて QCD のクォーク場と解釈される。

以上より、 $D4$ ブレーンに端点を持つ開弦の massless モードからクォークとグルーオンに対応するモードが得られることがわかった。ところで decoupling 極限においては、 $D4$ ブレーン上のモードと閉弦、 $8-8$ 弦及び $\overline{8}-\overline{8}$ 弦のモードとの相互作用は無視できることをあらかじめ述べたが、 $8-\overline{8}$ 弦のモードについてもここで言及しておく。

8- $\overline{8}$ 弦

D ブレーンの配置を思い出すと、 $D8-\overline{D8}$ ブレーン対は S^1 上で互いに離して置かれていた。このときの $D8$ ブレーンと $\overline{D8}$ ブレーンとの距離を Δx^4 とすると、 $8-\overline{8}$ 弦から生じるタキオンモードの質量は

$$m_{\text{tachyon}}^2 = \left(\frac{\Delta x^4}{2\pi\alpha'} \right)^2 - \frac{1}{2\alpha'} \quad (2.2.1)$$

と与えられる。ここで $\alpha' \equiv l_s^2$ である。よってこのモードを massive にして以下の議論で無視するためには、 $D8$ ブレーンと $\overline{D8}$ ブレーンを

$$\left(\frac{\Delta x^4}{2\pi\alpha'} \right)^2 > \frac{1}{2\alpha'} \quad \therefore \Delta x^4 > \sqrt{2}\pi l_s \quad (2.2.2)$$

となるよう離しておけばよく、以下では Δx^4 をそのように取っておくものとする。

これにより、考慮すべき開弦のモードについては全て述べた。一方ここまでの議論では、それぞれの弦から生じる massive モードや Kaluza-Klein モードといったモードの扱いについて明確には触れて来なかった。以下ではこれについて述べるとともに、ここで考えた D ブレーン配置が真に QCD と等価になるようなパラメータの取り方について説明する。まず上に見たように、 $4-4$ 弦からグルーオン場 $A_\mu^{(D4)}$ が、 $4-8$ 弦と $4-\overline{8}$ 弦からクォーク場 $(q_L^f, q_R^{\bar{f}})$ が既にそれぞれ得られており、したがってそれらの弦から生じる massive モードや Kaluza-Klein モードなどは、massless QCD を構成する上で不要なモードである。そのため真に QCD と等価なモデルを得るには、これらの質量が理論のエネルギースケールと比べて十分に大きくなるよう調整し、不要なモードを理論から消し去る必要がある。そこでまず、QCD の構成に不要なモードをその質量のオーダーとともに列挙しよう。

モード	質量
開弦の massive モード	$m_{\text{str}} \sim 1/l_s$
Kaluza-Klein モード	$m_{\text{KK}} \sim M_{\text{KK}}$
8- $\bar{8}$ 弦のモード	$m_w \sim \frac{1}{\alpha'} M_{\text{KK}} \sim \frac{m_{\text{str}}^2}{M_{\text{KK}}}$

またこれらに加え、閉弦、8-8 弦及び $\bar{8}$ - $\bar{8}$ 弦のモードも不要である。先に述べたように、これらを見捨てるためには decoupling 極限 $l_s \rightarrow 0$ が必要であった。ところでストリング長 l_s は次元を持ったパラメータなので、 $l_s \rightarrow 0$ という表記は実際のところ正確ではなく、本来なら理論のエネルギースケール (仮に E と書こう) を用いて $l_s E \rightarrow 0$ と表されるべきである。ここでは QCD を構成したいので、エネルギースケールとしては Λ_{QCD} を用いるのが良い。よってこの模型における decoupling 極限は正確には $l_s \Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow 0$ と書かれる。またこのエネルギースケール Λ_{QCD} を用いて、上に挙げた不要なモードたちを排除するための条件は以下のように表される。

$$\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_{\text{str}}} \rightarrow 0 \quad \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_{\text{KK}}} \rightarrow 0 \quad \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_w} \rightarrow 0 \quad (2.2.3)$$

このうち massive モードに対する条件 (左式) は、実は decoupling 極限と同じ内容である。よってエネルギースケール Λ_{QCD} を有限に保ちつつ、上の 3 条件が満たされるようパラメータを調整することができれば、酒井・杉本模型は真に QCD と等価な D ブレーン系となる。ここで m_w のオーダーの式より

$$\frac{m_w}{m_{\text{str}}} \sim \frac{m_{\text{str}}}{M_{\text{KK}}} \quad (2.2.4)$$

が成り立つので、

$$M_{\text{KK}} < m_{\text{str}} \quad (\because l_s M_{\text{KK}} < 1) \quad (2.2.5)$$

と取ることになると、上に挙げたモードの質量の大小関係は

$$M_{\text{KK}} < m_{\text{str}} < m_w \quad (2.2.6)$$

となる。すると M_{KK} が十分大きければ、条件 (2.2.3) は全て満たされることになって便利である。よって以下では $l_s M_{\text{KK}}$ を 1 より小さい値に固定するものとする。次に Λ_{QCD} を固定することを考えよう。QCD の結合定数 g_{YM} が十分小さい場合、 Λ_{QCD} は 1 ループの計算で

$$\Lambda_{\text{QCD}} \sim M_{\text{KK}} e^{-\frac{\#}{g_{\text{YM}}^2 N_c}} \quad (2.2.7)$$

と表せる ($\#$ は数係数)。 Λ_{QCD} を有限に保ちつつ $M_{\text{KK}} \rightarrow \infty$ とするためには、't Hooft 結合定数 $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N_c$ を $\lambda \rightarrow 0$ とする必要がある (そしてこのとき上の 1 ループの計算が信頼できる)。ところで YM 結合定数 g_{YM} は今のブレーン配置における D4 ブレーンの DBI 作用から

$$g_{\text{YM}}^2 = 2\pi g_s l_s M_{\text{KK}} \quad (2.2.8)$$

であるので [34]、弦の結合定数は

$$g_s l_s M_{\text{KK}} N_c \sim \lambda \sim \frac{-1}{\log(\Lambda_{\text{QCD}}/M_{\text{KK}})} \quad (2.2.9)$$

$$\therefore g_s \sim \frac{-1}{l_s M_{\text{KK}} N_c \log(\Lambda_{\text{QCD}}/M_{\text{KK}})} \quad (2.2.10)$$

と表される。この g_s も弦理論の摂動展開を用いる上で十分小さく取っておくべきであるが、 $l_s M_{\text{KK}} < 1$ を固定して $\Lambda_{\text{QCD}}/M_{\text{KK}} \rightarrow 0$ とする限りは $g_s \ll 1$ となり問題ない。ここで N_c の値は任意である。よって以上から、酒井・杉本模型が真に QCD と等価な D ブレーン系となるのは以下の極限においてである。

$$l_s M_{\text{KK}} < 1 : \text{固定の下で } M_{\text{KK}} \rightarrow \infty \quad (2.2.11)$$

実際このとき、 Λ_{QCD} を有限の値に固定しておけば、上に現れた諸量は

$$\lambda \ll 1 \quad g_s \ll 1 \quad g_{\text{YM}}^2 \ll 1 \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_w} < \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_{\text{KK}}} < \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_{\text{str}}} \rightarrow 0 \quad (2.2.13)$$

となり、これまでの要請を全て満たしている。またこの結果は N_c の値によらず成り立つことに注意されたい。

以上の考察から、D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーン系の開弦理論から得られるゲージ理論が $M_{\text{KK}} \rightarrow \infty$ ($l_s M_{\text{KK}}$: 固定) の極限で massless QCD と等価になることがわかった。この極限において QCD を構成する massless 場を改めて表にまとめておく。

場	$U(N_c)$	$SO(3,1)$	$SO(5)$	$U(N_f)_L \times U(N_f)_R$
$A_\mu^{(\text{D4})}$	adj.	4	1	(1,1)
q_L^f	fund.	2₊	1	(fund.,1)
q_R^f	fund.	2₋	1	(1,fund.)

2.2.2 D4 ブレーン解におけるプローブ D8 ブレーン

次に D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーン系を超重力理論 (SUGRA) によって記述しよう (ここでの超重力解による記述がよくなる条件については後に述べる)。D ブレーンは重力と結合している、すなわち重さを持っているので、一般に D ブレーンが存在するとその周りの時空は曲がる。今の D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーン系においても、各 D ブレーンはそれぞれ重力の源となっている。ここで、同じ位置に重ねて配置した同種の D ブレーンを1つのまとまりと見ると、この D ブレーン系は N_c 枚の D4 ブレーンのまとまりと、それぞれ N_f 枚ずつある D8 ブレーンのまとまりと $\overline{\text{D8}}$ ブレーンのまとまりとから構成される。このように見た上で、 $N_f \ll N_c$ という状況を考えてみよう。このとき D4 ブレーンのまとまりは D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンのまとまりに比べて極端に重く

なり、この D ブレーン系を源とする重力場は主に D4 ブレーンのまとまりによって作られるだろう。するとこの系では近似的に、D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの作る重力場を無視して、D4 ブレーンのまとまりによって作られる重力場の中を D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンが運動するという記述がよくなる。このように、D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンが D4 ブレーンの重力場に与える反作用を無視して、D4 ブレーンの作る重力場のみを用いて系を記述する近似をプローブ近似と呼ぶ。以下ではこのプローブ近似を $N_f \ll N_c$ の下で用いることとする。すなわち D4 ブレーンは単に重力の源であると考えて背景重力場に置き換えてしまい、その背景重力場の下での D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンに対する解析を行う^{*5}。ただし D ブレーンは超弦理論における物体であるので、上に述べた D ブレーンの作る重力場というのは実際には超重力解として与えられることに注意されたい。

D4 ブレーンの作る超重力解は以下のように与えられる。

$$ds^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f(U) d\tau^2) + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \left(\frac{dU^2}{f(U)} + U^2 d\Omega_4^2\right) \quad (2.2.14)$$

$$e^\phi = g_s \left(\frac{U}{R}\right)^{3/4} \quad F_4 = dC_3 = \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4 \quad f(U) = 1 - \frac{U_{\text{KK}}^3}{U^3}$$

ここで x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と $x^4 \equiv \tau$ は D4 ブレーンの広がる方向であり、 U は 5 次元空間 $\mathbb{R}^5 \ni (x^5, \dots, x^9)$ での極座標の動径方向を表す。また (x^5, \dots, x^9) での極座標の角度方向は S^4 をなし、 $d\Omega_4^2$, ϵ_4 , $V_4 = 8\pi^2/3$ はそれぞれ S^4 の線要素 (line element)、 S^4 の体積要素 (volume form)、 S^4 の体積を表す。 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) 部分の計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ である。また R と U_{KK} は定数のパラメータであり、特に R は g_s, l_s を用いて

$$R^3 = \pi g_s N_c l_s^3 \quad (2.2.15)$$

と表される。

ここで D4 解 (2.2.14) の形から、 τ と U が空間的座標であるために $f(U) \geq 0$ 、ゆえに $U \geq U_{\text{KK}}$ が要請される。すなわち、この超重力解はホライズン $U = U_{\text{KK}}$ を持つ。ところで $U = U_{\text{KK}}$ は $f(U) = 0$ の点に対応しているため、解 (2.2.14) は一般にこの点で特異性を持つ。しかしここでは座標 τ が周期的であるために、この周期をうまく取ることでこの特異性を回避することができる。そのように τ の周期 $\delta\tau$ を取ると、

$$\tau \sim \tau + \delta\tau \quad \delta\tau \equiv \frac{4\pi}{3} \frac{R^{3/2}}{U_{\text{KK}}^{1/2}} \quad (2.2.16)$$

となる。またこれから S^1 の半径 M_{KK}^{-1} は

$$M_{\text{KK}} \equiv \frac{2\pi}{\delta\tau} = \frac{3}{2} \frac{U_{\text{KK}}^{1/2}}{R^{3/2}} \quad (2.2.17)$$

と与えられる。

*5 これはちょうど惑星の周りを運動する小惑星の記述のようである。

また $g_{\text{YM}}, R, \delta\tau, M_{\text{KK}}$ の定義 (2.2.8)、(2.2.15)、(2.2.16)、(2.2.17) から、 R, U_{KK}, g_s は $g_{\text{YM}}, M_{\text{KK}}, l_s$ を用いてそれぞれ

$$R^3 = \frac{1}{2} \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c l_s^2}{M_{\text{KK}}} \quad U_{\text{KK}} = \frac{2}{9} g_{\text{YM}}^2 N_c M_{\text{KK}} l_s^2 \quad g_s = \frac{1}{2\pi} \frac{g_{\text{YM}}^2}{M_{\text{KK}} l_s} \quad (2.2.18)$$

と表すことができる。

さて、上で与えた D4 解 (2.2.14) の下でのプローブ D8 ブレーンの配位を求めよう。D8 ブレーンは 10 次元時空中の 9 次元物体なので、式を 1 つ与えればその配位は決まる。ここで D8 ブレーンは x^{0-3} の全空間に広がり、 x^{5-9} での回転対称性があるものを考えているので、その配位を決める式は τ と U の関数として表される。それを $U = U(\tau)$ と書こう*⁶。この配位 $U = U(\tau)$ を用いると、D4 解の下での D8 ブレーン上の誘導計量は以下のように与えられる*⁷。

$$\begin{aligned} ds_{\text{D8}}^2 &= \left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(\left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \frac{U'^2}{f(U)} \right) d\tau^2 + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} U^2 d\Omega_4^2 \\ &\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\tau\tau} d\tau^2 + g_{S^4} d\Omega_4^2 \\ &\equiv (g_{\text{D8}})_{MN} dx^M dx^N \quad (M, N = 0, 1, 2, 3, \tau, S^4) \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

ここで $U' = \frac{d}{d\tau} U$ である。この誘導計量の下で D8 ブレーンの作用を最小化する配位が求められるものである。ゲージ場のゆらぎを無視すると、D8 ブレーンの作用は

$$S_{\text{D8}} = -T_8 \int d^9 x e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{\text{D8}})} \quad (2.2.20)$$

で与えられる ($T_p = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1}}$)。ここで誘導計量の行列式は

$$\begin{aligned} \det(g_{\text{D8}}) &= \det(g_{\mu\nu}) \cdot \det(g_{\tau\tau}) \cdot \det(g_{S^4}) \\ &= -\left(\frac{U}{R}\right)^{\frac{3}{2} \cdot 4} \cdot \left[\left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \frac{U'^2}{f(U)} \right] \cdot \left[\left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} U^2 \right]^4 \\ &= -\left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} U^8 \left[f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^3 \frac{U'^2}{f(U)} \right] \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

となるので、D8 ブレーンの作用は

$$S_{\text{D8}} \propto \int d^4 x d\tau U^4 \sqrt{f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^3 \frac{U'^2}{f(U)}} \quad (2.2.22)$$

*⁶ 一般には $f(\tau, U) = 0$ の形で表される。しかしここでは差し当たって誘導計量を導くことを念頭に置いており、また計量の中では配位の局所的な情報しか要らないため、今の場合には局所的に陽な関数として $U = U(\tau)$ と書いてよい。また局所的にはその逆関数 $\tau = \tau(U)$ を持つとして構わない。しかしこれらが大域的に許されるかは、実際に解いてみないとわからないことである。

*⁷ ここで g_{S^4} は添字の足があらわでないが、 $g_{S^4} = (R/U)^{3/2} U^2 \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ の意味である。

となる。この表式から、被積分関数には陽な τ 依存性がないことがわかる。そのような場合には、最小作用の原理から導かれる運動方程式と等価な式として、力学でのエネルギー保存則と同様の関係式

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{U^4 f(U)}{\sqrt{f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^3 \frac{U'^2}{f(U)}}} \right) = 0 \quad (2.2.23)$$

が得られる^{*8}。これを積分して解いたものが D4 解における D8 ブレーンの配位を表す。初期条件として $\tau = 0$ で $U(0) = U_0 (\geq U_{\text{KK}})$ 、 $U'(0) = 0$ を与えて積分すると、解は

$$\tau(U) = \pm \int_{U_0}^U dU \frac{U_0^4 f(U_0)^{1/2}}{\left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} f(U) \sqrt{U^8 f(U) - U_0^8 f(U_0)}} \quad (2.2.24)$$

と与えられる。また初期条件において特に $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合には

$$\tau(U)|_{U_0=U_{\text{KK}}} = \pm \frac{\delta\tau}{4} \quad (2.2.25)$$

という解を得る^{*9}。以下 $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合を考えることとする。この解 (2.2.25) に基づいて D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの配位を考えると、D8 ブレーンと $\overline{\text{D8}}$ ブレーンは $U = U_{\text{KK}}$ でくっついて 1 つの D8 ブレーンになってしまうことがわかる。これについて説明しよう。 $\overline{\text{D8}}$ ブレーンは D8 ブレーンと同じ作用 (2.2.20) によって記述されるので、その配位についても D8 ブレーンと全く同じ解 (2.2.25) (あるいは一般に (2.2.24) 式) を得る。ところで元々の D ブレーン配位を思い出すと、8- $\overline{8}$ 弦から生じるモードに質量を与えるべく D8 ブレーンと $\overline{\text{D8}}$ ブレーンは S^1 上で互いに離して配置されていた。D4 解によって重力側の記述を行う際にも、D4 ブレーンから遠く離れた無限遠方では D4 ブレーンの作る重力場の影響は無視されて、D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンは本来の離れた配置になっているはずである。しかしながら D4 解の下での D8 及び $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの配位は $\tau(U) = \delta\tau/4$ または $\tau(U) = -\delta\tau/4$ の 2 つに限られているため、無限遠方 ($U \rightarrow \infty$) で D8 ブレーンと $\overline{\text{D8}}$ ブレーンとが互いに離れて位置しているためには、それぞれがこの 2 通りの配位から別々のものを選んでいなければならない。そこで例えば D8 ブレーンの配位を $\tau(U) = \delta\tau/4$ 、また $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの配位を $\tau(U) = -\delta\tau/4$ と選ぶと、この 2 つの配位は D4 解のホライズン $U = U_{\text{KK}}$ でつながっているため、その結果 D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンは $U = U_{\text{KK}}$ でくっついて 1 つの D8 ブレーンになるのである^{*10}。このときの D8 ブレーンの配位の様子を図 2.2 に示す。

^{*8} S_{D8} の被積分関数を $L(U, U')$ と書くと、今の場合 $\frac{d}{d\tau} (U' \frac{\partial L}{\partial U'} - L) = 0$ が成立する。

^{*9} これは、 $U > U_{\text{KK}}$ において $\frac{d\tau}{dU}|_{U_0=U_{\text{KK}}} = 0$ であることと、そこでの 2 つの解 $\tau(U)|_{U_0=U_{\text{KK}}} = \pm \text{const.}$ が初期条件 $U'(0) = 0$ のために $\tau = 0$ でなめらかに接続しなければならないことからわかる。

^{*10} ここでは特に $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合について述べたが、一般の U_0 の場合にも全く同じ議論から D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーンが $\tau = 0$ でつながって 1 つの D8 ブレーンをなすことがわかる。

ここで $U_0 = U_{\text{KK}}$ の場合を議論する上で便利な座標系に移る。10次元座標のうち (U, τ) 部分を次のように座標変換する。

$$\begin{cases} U^3 = U_{\text{KK}}^3 + U_{\text{KK}} r^2 \\ \theta = \frac{2\pi}{\delta\tau} \tau = \frac{3}{2} \frac{U_{\text{KK}}^{1/2}}{R^{3/2}} \tau \end{cases} \quad \begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2.26)$$

[[(U, τ) と (r, θ)] [[(y, z) と (r, θ)]]

このとき D4 解の計量 (2.2.14) の (U, τ) 部分を (r, θ) を用いて表すと

$$\begin{aligned} ds_{(U, \tau)}^2 &= \left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} f(U) d\tau^2 + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \frac{dU^2}{f(U)} \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \left(\frac{U_{\text{KK}}}{U} dr^2 + r^2 d\theta^2\right) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

となるが、これはまた (y, z) を用いて

$$= \frac{4}{9} \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \left\{ (1 - h(r)y^2) dy^2 + (1 - h(r)z^2) dz^2 - 2h(r)yz dydz \right\} \quad (2.2.28)$$

と表せる。ここで

$$h(r) \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{U_{\text{KK}}}{U}\right) \quad (2.2.29)$$

であり、これは $r = 0$ ($U = U_{\text{KK}}$) で正則な関数である。

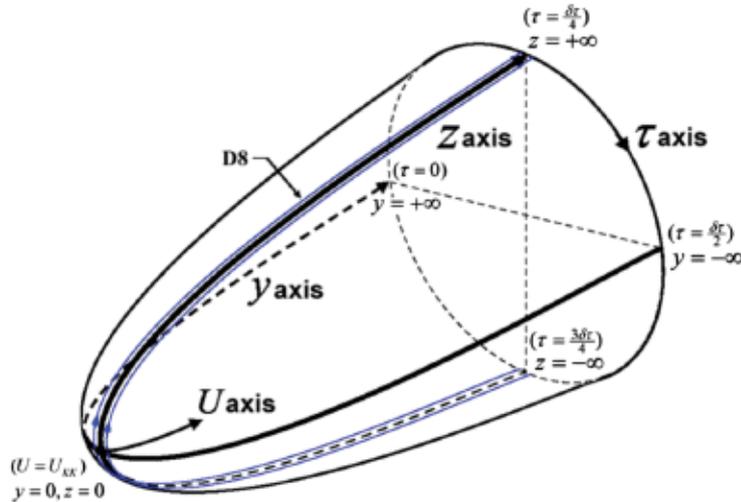


図 2.2 D4 解におけるプローブ D8 ブレーンの配位 (文献 [41] より引用)。

この新しい座標系の下での D8 ブレーン解の配位とそれに対する誘導計量を導く。上での議論から、D4 解における D8 ブレーンの配位は結局 (U, τ) 平面上での関係式 $\tau(U) = \pm \delta\tau/4$ で

与えられたが、これは (r, θ) 平面での

$$\theta = \pm \frac{2\pi}{\delta\tau} \frac{\delta\tau}{4} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.2.30)$$

に対応しており、また (y, z) 平面においては $y = 0$ に対応している。すなわち D4 解の下での D8 ブレーンは、 $M^4 \ni (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 全体に広がり、 z 軸上全体に伸び、さらに (x^5, \dots, x^9) での極座標の角度部分 S^4 を覆うような配位をとっている。このような D8 ブレーン上の誘導計量は、D8 ブレーンが y 方向に広がりを持たないことを考慮して (2.2.28) 式で $y = 0, dy = 0$ とすることにより、(2.2.14) 式から

$$\begin{aligned} ds_{\text{D8}}^2 &= \left(\frac{U_z}{R}\right)^{3/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{4}{9} \left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/2} \frac{U_{\text{KK}}}{U_z} dz^2 + \left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/2} U_z^2 d\Omega_4^2 \\ &\equiv g_{MN} dx^M dx^N \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

と与えられる。ただしここで

$$U_z^3 = U_{\text{KK}}^3 + U_{\text{KK}} z^2 \quad (2.2.32)$$

である。

以上で D4 解における D8 ブレーンについての必要な情報が得られた。ここで次のトピックに移る前に、これまで用いてきた D4 ブレーンの SUGRA 近似が妥当となる条件について述べておこう。まず第一に、IIA 型超重力理論は IIA 型超弦理論の有効理論であり、これは l_s より十分大きいスケールでのみ有効となるものである^{*11}。今の D4 の超重力解 (2.2.14) における時空のトポロジーは $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \times S^4$ となっており、この時空の曲率半径は $R_{S^4} \sim \sqrt{\lambda} l_s$ で与えられる。よってこの SUGRA 解による記述が良い近似になるためには、ストリング長 l_s が時空の典型的な長さスケールである曲率半径 R_{S^4} よりも十分小さくしなければならないので、

$$\frac{l_s}{R_{S^4}} \ll 1 \quad \therefore 1 \ll \lambda \quad (2.2.33)$$

を満たす必要がある。そして第二に、超弦理論の摂動展開 (トポロジー展開) において、弦のループ補正を無視した際に支配的となるツリー・ダイアグラム (すなわち古典論) が超重力理論に相当するので、超弦理論を超重力理論で近似するためには、弦の有効結合定数 e^ϕ が十分小さくなければならない。D4 解 (2.2.14) の e^ϕ は

$$\begin{aligned} e^\phi &= g_s \left(\frac{U}{R}\right)^{3/4} = g_s \left(\frac{U_{\text{KK}}}{R}\right)^{3/4} \left(\frac{U}{U_{\text{KK}}}\right)^{3/4} \\ &= \frac{\lambda^{3/2}}{3\sqrt{3}\pi N_c} (1+r^2)^{1/4} \quad (\because (2.2.18), (2.2.26)) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

^{*11} これは、弦の massive モードを無視して理論に現れるモードの種類を限定するために必要である。

であるので、この条件は

$$e^\phi \ll 1 \Rightarrow \frac{\lambda^{3/2}}{N_c} \ll 1 \quad \therefore g_{\text{YM}}^4 \lambda \ll 1 \quad (2.2.35)$$

と表すことができる。よってこれらをまとめると、SUGRA 近似が妥当であるのは

$$g_{\text{YM}}^4 \ll \frac{1}{\lambda} \ll 1 \quad (2.2.36)$$

のときである。この状況は $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N_c$ を有限かつ十分大きい値 ($\lambda \gg 1$) に取り、これを保ちつつ $g_{\text{YM}} \rightarrow 0$, $N_c \rightarrow \infty$ とすることによって実現できる。

ただしこの場合には、実は $M_{\text{KK}} \rightarrow \infty$ と取れないことに留意しておく必要がある。SUGRA 近似が良いときには $g_{\text{YM}} \ll 1$ であるので、この場合も Λ_{QCD} は (2.2.7) 式のように表せるが、 $\lambda \gg 1$ の下で Λ_{QCD} を有限に保つには、 M_{KK} の値を λ の値に応じて小さく取る必要が生じる。すなわち $g_{\text{YM}} \rightarrow 0$ の場合に、 $\lambda \gg 1$ としつつ $l_s M_{\text{KK}} < 1$ を固定して $M_{\text{KK}} \rightarrow \infty$ とする極限は取れないのである。そのため SUGRA 近似が妥当な領域 ($g_{\text{YM}} \rightarrow 0$, $N_c \rightarrow \infty$, $\lambda \gg 1$: 有限) での D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーン系は、massless QCD の自由度に加えて、先に述べたような QCD には不必要なモード (massive モード、Kaluza-Klein モード、8-8 モード) を含んだ理論に対応していることになる。

$$(D4/D8/\overline{\text{D8}} \text{ ブレーン系}) \stackrel{\text{SUGRA 近似}}{\simeq} (\text{強結合 massless QCD}) + (\text{不必要なモード})$$

このような事情はあるものの、一旦そのことには目をつむって、この D4 解におけるプローブ D8 ブレーン系を強結合 ($\lambda \gg 1$) massless QCD の holographic dual であるとして解析を進めると、低エネルギーでの中間子の現象論をいくつも説明できることは驚くべきことである。このことから、実はこの SUGRA 近似の下で余分なモードの存在による QCD への影響はさほど大きくないとも考えられる。

2.2.3 プローブ D8 ブレーン上のゲージ理論

前小節で D4 解の下でのプローブ D8 ブレーンの配位とその上の誘導計量が得られた。これに基づいて、以下ではこの D8 ブレーン上のゲージ理論を調べる。この解析によって我々は最終的に中間子の有効理論を導出することができる。

再びプローブ D8 ブレーン上での開弦の振動から生じる massless スペクトルを見ることから始めよう。今の場合 D4 ブレーンとはもはや背景重力場と化しており、D8 ブレーン以外に D ブレーンは存在しないので、この系に現れる開弦は 8-8 弦のみである。ここで D8 ブレーンは S^4 のトポロジーを持っているために、その上でフェルミオンを考えるとこれは必ず質量を獲得してしまう。よってこの 8-8 弦からは massless フェルミオンが現れず、massless スペクトルはボソンとしてのみ現れうる。8-8 弦から生じるボソン場のうち massless となり得るものは、9 つのゲージ場 A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), A_z , A_{θ^i} ($i = 1, 2, 3, 4$) と 1 つのスカラー場 Φ である。ここ

で $(\theta^1, \dots, \theta^4)$ は S^4 の座標である。対称性を利用すると、これらのモードのうちいくつかは排除することができる。2.2.1 での対称性の議論を思い出すと、この模型は時空に関して次のような対称性を持っていた。

- 4次元 Minkowski 空間 M^4 上の Lorentz 対称性 $SO(3,1)$
(あるいはより広く Poincaré 対称性)
- 5次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^5 上の $SO(5)$ 回転対称性

このうち $SO(5)$ 対称性は QCD には存在しないので、酒井・杉本模型の D ブレーン系が QCD と等価であるためには、この $SO(5)$ 変換に対する多重項などは存在してはならないはずである。そのため以下では、理論に現れるモードに関して $SO(5)$ 1 重項にのみ焦点を当てることとし、 $SO(5)$ 多重項の存在は理論から除外する。このことを踏まえて上に挙げた 8-8 弦の massless ボソン場を見てみると、まず S^4 方向への弦の振動から生じる A_{θ^i} は $SO(5)$ 多重項である。そのため以下の解析においては $A_{\theta^i} = 0$ としてこれらのモードを理論から排除する。また他のゲージ場についても、その引数をあらわに書くと $A_\mu(x^\mu, z, \theta^i)$, $A_z(x^\mu, z, \theta^i)$ である。 $SO(5)$ 変換への依存性を排除するために、以下ではこれらの場が S^4 の座標 θ^i によらないと仮定し、 $A_\mu(x^\mu, z)$, $A_z(x^\mu, z)$ であるとする。ところでスカラー場 Φ は別の理由によって理論から除外できる。このモードは y 方向への弦の振動から生じたものであり、 Φ は一般に y 方向のパリティ変換 $y \mapsto -y$ (以下 \mathbb{Z}_2 と記す) に対し不変でない。一方ここでのプローブ D8 ブレーンの配位を思い出すと、これは y 方向への広がりを持たず、したがって \mathbb{Z}_2 不変である。またこの模型と対応しているべき QCD にはこのような \mathbb{Z}_2 変換性は存在しないため、先の $SO(5)$ 対称性と同様、 \mathbb{Z}_2 不変でないものもやはり理論から除外されなければならない。よって以下ではスカラー場 Φ についても $\Phi = 0$ としてこれを排除する。

結局、以下の解析に現れる D8 ブレーン上のゲージ場は

$$A_\mu(x^\mu, z) \ (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad A_z(x^\mu, z) \quad (2.2.37)$$

の 5 つである。その結果、元々 D8 ブレーン上で 9 次元のゲージ理論であったものが 5 次元のゲージ理論に簡約化されることとなる。次にこれについて見ていこう。プローブ D8 ブレーンを記述する有効作用は以下で与えられる。

$$S_{D8} = -T_8 \int d^9 x e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{MN} + 2\pi\alpha' F_{MN})} + S_{CS} \quad (2.2.38)$$

ただしゲージ場の field strength は

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N] \quad (M, N = 0, 1, 2, 3, z) \quad (2.2.39)$$

とする。ここで Chern-Simons 項 S_{CS} は massless QCD のカイラルアノマリーを記述するために必要となるが、実は $1/\lambda$ 展開の主要項ではない。そのため SUGRA 近似の下で行われる

以下の解析においては、差し当たって CS 項を無視して DBI 作用項のみに注目するとして良い^{*12}。

まず上の DBI 作用を α' について展開しよう。

$$g = (g_{MN}) \quad g^{-1} = (g^{MN}) \quad F = (F_{MN}) \quad (2.2.40)$$

として、行列 M についての展開式

$$\det(1 + M) = \exp \left[\text{tr} \left(M - \frac{1}{2} M^2 + \dots \right) \right] \quad (2.2.41)$$

を用いると、被積分関数に現れる行列式は

$$\begin{aligned} \det(g + 2\pi\alpha'F) &= \det g \cdot \det(1 + 2\pi\alpha'g^{-1}F) \\ &= \det g \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}(2\pi\alpha')^2 \text{tr}(g^{-1}F)^2 + \dots \right) \quad (\because \text{tr}(g^{-1}F) = 0) \\ &= \det g \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(2\pi\alpha')^2 \text{tr}(g^{-1}F)^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3) \right) \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sqrt{-\det(g + 2\pi\alpha'F)} &= \sqrt{-\det g} \sqrt{1 - \frac{1}{2}(2\pi\alpha')^2 \text{tr}(g^{-1}F)^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3)} \\ &= \sqrt{-\det g} \left(1 - \frac{1}{4}(2\pi\alpha')^2 \text{tr}(g^{-1}F)^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3) \right) \\ &= \sqrt{-\det g} \left(1 + \frac{1}{4}(2\pi\alpha')^2 g^{MN} g^{PQ} \text{tr}_f(F_{MP}F_{NQ}) \right) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \end{aligned}$$

と展開できる。ただし最後の行の tr_f はフレーバーの足についてのトレースである。ここで D4 解での D8 ブレーン上の誘導計量は

$$(g_{MN}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & g_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & g_{S^4} \end{pmatrix} \quad (2.2.43)$$

ここで

$$g_{\mu\nu} = \left(\frac{U_z}{R} \right)^{3/2} \eta_{\mu\nu} \quad (2.2.44)$$

$$g_{zz} = \frac{4}{9} \left(\frac{R}{U_z} \right)^{3/2} \frac{U_{KK}}{U_z} \quad (2.2.45)$$

$$g_{S^4} = \left(\frac{R}{U_z} \right)^{3/2} U_z^2 \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (2.2.46)$$

^{*12} このプローブ D8 ブレーンの CS 項について解析すると、低エネルギー有効理論におけるカイラルラグランジアン Wess-Zumino-Witten 項を正しく導くことがわかる [34]。しかしながらこのカイラルアノマリー項は本研究に直接関係しないため、本論文においてこれ以上の CS 項への言及は行わない。

であるので、

$$\begin{aligned}
\det g &= \det g_{\mu\nu} \cdot \det g_{zz} \cdot \det g_{S^4} \\
&= -\left(\frac{U_z}{R}\right)^{\frac{3}{2} \cdot 4} \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/2} \frac{U_{\text{KK}}}{U_z} \cdot \left[\left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/2} U_z^2\right]^4 \\
&= -\frac{4}{9} \left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/2} \frac{U_{\text{KK}}}{U_z} U_z^8 \\
\therefore \sqrt{-\det g} &= \frac{2}{3} \left(\frac{R}{U_z}\right)^{3/4} \left(\frac{U_{\text{KK}}}{U_z}\right)^{1/2} U_z^4
\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

また

$$\begin{aligned}
g^{MN} g^{PQ} \text{tr}_f(F_{MP} F_{NQ}) &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \text{tr}_f(F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}) + 2g^{\mu\nu} g^{zz} \text{tr}_f(F_{\mu z} F_{\nu z}) \\
&= \left(\frac{R}{U_z}\right)^3 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \text{tr}_f(F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}) + \frac{9}{2} \frac{U_z}{U_{\text{KK}}} \eta^{\mu\nu} \text{tr}_f(F_{\mu z} F_{\nu z})
\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

である。よって DBI 作用は、D4 解 (2.2.14) を用いて

$$\begin{aligned}
S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} &= -T_8 \int d^4 x dz \epsilon_4 e^{-\phi} \sqrt{-\det g} \left(1 + \frac{1}{4} (2\pi\alpha')^2 g^{MN} g^{PQ} \text{tr}_f(F_{MP} F_{NQ})\right) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \\
&= -T_8 V_4 \frac{2}{3} \frac{1}{g_s} R^{3/2} U_{\text{KK}}^{1/2} \int d^4 x dz \left[U_z^2 + (2\pi\alpha')^2 \left(\frac{R^3}{4U_z} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \text{tr}_f(F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} \frac{U_z^3}{U_{\text{KK}}} \eta^{\mu\nu} \text{tr}_f(F_{\mu z} F_{\nu z}) \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha'^3)
\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

と α' 展開される。ここで係数を

$$\tilde{T} \equiv T_8 V_4 \frac{2}{3} \frac{1}{g_s} R^{3/2} U_{\text{KK}}^{1/2} \tag{2.2.50}$$

とし、ゲージ場と関係のある部分の最低次の項だけ見ると、

$$S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} \simeq -\tilde{T} (2\pi\alpha')^2 \int d^4 x dz \left(\frac{R^3}{4U_z} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \frac{9}{8} \frac{U_z^3}{U_{\text{KK}}} \text{tr} F_{\mu z}^2 \right) \tag{2.2.51}$$

となる。ただしここでフレーバーのトレース tr_f を単に tr と記した。この表式はもう少し簡単な形に直せる。まず

$$Z \equiv \frac{z}{U_{\text{KK}}} \quad K(Z) \equiv 1 + Z^2 \tag{2.2.52}$$

とすると、

$$U_z = U_{\text{KK}} \left(1 + \frac{z^2}{U_{\text{KK}}^2}\right)^{1/3} = U_{\text{KK}} (K(Z))^{1/3} \tag{2.2.53}$$

であり、また (2.2.17) 式より

$$M_{\text{KK}}^2 = \frac{9}{4} \frac{U_{\text{KK}}}{R^3} \quad (2.2.54)$$

であるので、作用 (2.2.51) は

$$\begin{aligned} S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} &\simeq -\tilde{T}(2\pi\alpha')^2 \frac{R^3}{2} \int d^4x dZ \left(\frac{1}{2} K(Z)^{-1/3} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \frac{9}{4} \frac{U_{\text{KK}}}{R^3} K(Z) \cdot U_{\text{KK}}^2 \text{tr} F_{\mu Z}^2 \right) \\ &= -\kappa \int d^4x dZ \left(\frac{1}{2} K(Z)^{-1/3} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + M_{\text{KK}}^2 K(Z) \text{tr} F_{\mu Z}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

と表せる。ここで

$$A_Z \equiv U_{\text{KK}} A_z \quad \therefore F_{\mu Z} = U_{\text{KK}} F_{\mu z} \quad (2.2.56)$$

とし、また係数 κ は (2.2.15) 式を用いて計算すると

$$\kappa \equiv \frac{1}{2} \tilde{T}(2\pi\alpha')^2 R^3 = \frac{\lambda N_c}{216\pi^3} \quad (2.2.57)$$

である。これで表式がすっきりしたが、もう少しだけ表式を簡単にできる。作用 (2.2.51) に現れるパラメータ l_s , R , U_{KK} , g_s は (2.2.18) 式により全て M_{KK} , U_{KK} , l_s を用いて表すことができるが、それらを用いて表した作用 (2.2.55) は M_{KK} , U_{KK} , l_s のうち l_s にはよらない。そのため一般性を失うことなく

$$\frac{2}{9} M_{\text{KK}}^2 l_s^2 = (g_{\text{YM}}^2 N_c)^{-1} = \lambda^{-1} \quad (2.2.58)$$

と取ることができる。このとき (2.2.18) 式を用いると

$$U_{\text{KK}} = \frac{1}{M_{\text{KK}}} \quad R^3 = \frac{9}{4} \frac{1}{M_{\text{KK}}^3} \quad \frac{1}{g_s l_s^3} = \frac{4\pi}{9} N_c M_{\text{KK}}^3 \quad (2.2.59)$$

となるので、ここで $M_{\text{KK}} = 1$ の単位系を用いることにすると、上はそれぞれ

$$U_{\text{KK}} = 1 \quad R^3 = \frac{9}{4} \quad \frac{1}{g_s l_s^3} = \frac{4\pi}{9} N_c \quad (2.2.60)$$

と書いて表式が簡単になる。よって以下 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を採用しよう。このとき

$$Z = \frac{z}{U_{\text{KK}}} = z \quad \therefore F_{\mu Z} = F_{\mu z} \quad (A_Z = A_z) \quad (2.2.61)$$

となって Z と z の区別がなくなるため、上の作用 (2.2.55) は単に

$$S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} \simeq -\kappa \int d^4x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} K(z)^{-1/3} F_{\mu\nu}^2 + K(z) F_{\mu z}^2 \right) \quad (2.2.62)$$

と表せる。以上により、プローブ D8 ブレーン上の 9 次元のゲージ理論は、(2.2.55) 式あるいは (2.2.62) 式のような 5 次元のゲージ理論に簡約化されることがわかった。ただしここでのゲージ理論は、D4 ブレーンの作る SUGRA 解の影響を受けて、5 次元目の z 方向に関しては $K(z)$ により時空が曲がっていることに注意されたい。

2.2.4 中間子の有効理論

上では D8 ブレーンの DBI 作用から 5 次元 Yang-Mills 作用 (2.2.55) または (2.2.62) を得たが、この作用から中間子を記述する有効理論を導くことができる。そのことを見るために、以下ではまずこの 5 次元ゲージ理論において A_μ , A_z の持つゲージ自由度について述べる。

5 次元 YM 作用 (2.2.55) の z 積分を先に実行して 4 次元の作用を得ることを考えると、それが有限であるためには、field strength が $z \rightarrow \pm\infty$ で $F_{MN} \rightarrow 0$ となる必要がある。これにより、ゲージ場 A_M は $z \rightarrow \pm\infty$ において pure gauge の形^{*13}でなければならない。

$$A_M(x^\mu, z) \rightarrow \frac{1}{i} V_\pm^{-1}(x^\mu, z) \partial_M V_\pm(x^\mu, z) \quad (z \rightarrow \pm\infty) \quad (2.2.63)$$

以下ではこれを漸近的な条件として満たすゲージ変換のみを扱うこととする。 A_M のゲージ変換は一般に次のように与えられる。

$$A_M(x^M) \mapsto A_M^g(x^M) \equiv g(x^M) A_M(x^M) g^{-1}(x^M) + \frac{1}{i} g(x^M) \partial_M g^{-1}(x^M) \quad (2.2.64)$$

ここでは初めに $A_M \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \pm\infty$) となるゲージについて見ていく。あるゲージにおいて A_M の漸近的なふるまいが (2.2.63) であったとき、

$$V(x^\mu, z) \rightarrow V_\pm(x^\mu, z) \quad (z \rightarrow \pm\infty) \quad (2.2.65)$$

となる $U(N_f)$ 値関数 $V(x^\mu, z)$ を考え、ゲージ関数 $g(x^\mu, z) = V(x^\mu, z)$ によってゲージ変換 (2.2.64) を行くと、

$$A_M(x^\mu, z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty) \quad (2.2.66)$$

とできることがわかる。この漸近条件 $A_M \rightarrow 0$ を保つ残りのゲージ自由度は、変換 (2.2.64) において

$$\partial_M g(x^\mu, z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty) \quad (2.2.67)$$

を満たすようなゲージ関数 $g(x^\mu, z)$ での変換である。この残りのゲージ自由度を $g^{\text{res}}(x^\mu, z)$ と呼ぼう。この条件 (2.2.67) から $g^{\text{res}}(x^\mu, z)$ は、 $z \rightarrow \pm\infty$ において座標によらない $U(N_f)$ 値 g_\pm を持つ。すなわち

$$g_\pm \equiv \lim_{z \rightarrow \pm\infty} g^{\text{res}}(x^\mu, z) \quad (2.2.68)$$

この状況を D8 ブレーンと関連付けて考えてみる。プローブ D ブレーンは元々あった D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーン対が D4 解のホライズン $z = 0$ でくっついて 1 つになったものであったが、無限遠方 $z \rightarrow \pm\infty$ では依然として元の D8- $\overline{\text{D8}}$ ブレーン対としての配置を保っている。そのため

*13 ゲージ変換によって $A_M \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \pm\infty$) とできる配位の一般形である。

$z \rightarrow \infty$ での D8 ブレーン上には $U(N_f)_L$ の大域的ゲージ対称性が、また $\overline{D8}$ ブレーン上には $U(N_f)_R$ の大域的ゲージ対称性がそれぞれ残っているはずである。そこで、上に見た残りのゲージ自由度 g^{res} における $z \rightarrow \pm\infty$ での組 $(g_+, g_-) \in U(N_f) \times U(N_f)$ を、D8- $\overline{D8}$ ブレーン対の $z \rightarrow \pm\infty$ での大域的ゲージ対称性の組 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ と対応させよう。これをもって g^{res} の $(g_+, g_-) \in U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ を、この模型における QCD の持つカイラル対称性と解釈する。

この解釈はまた酒井・杉本模型において QCD の低エネルギー有効理論を構築するために用いることができる。QCD の低エネルギー有効理論として知られるカイラル模型において、カイラル場 $U(x^\mu) \in U(N_f)$ はカイラル変換 $(g_+, g_-) \in U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ の下で

$$U(x^\mu) \mapsto g_+ U(x^\mu) g_-^{-1} \quad (2.2.69)$$

と変換する。そこで酒井・杉本模型においても

$$U(x^\mu) \equiv P \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz' A_z(x^\mu, z') \right) \in U(N_f) \quad (2.2.70)$$

という量を考えると、これは上の変換性を実現する。よってこれを酒井・杉本模型におけるカイラル場と定義しよう。またここで後の便利のために

$$\xi_{\pm}^{-1}(x^\mu) \equiv P \exp \left(-i \int_0^{\pm\infty} dz' A_z(x^\mu, z') \right) \quad (2.2.71)$$

という量を定義して、上で定義したカイラル場を

$$U(x^\mu) = \xi_+^{-1}(x^\mu) \xi_-(x^\mu) \quad (2.2.72)$$

と表しておく。

これまでの $A_M \rightarrow 0$ ゲージにおける考察から、酒井・杉本模型は QCD のカイラル対称性を実現し、またこの対称性に基づいてカイラル模型のカイラル場 $U(x^\mu)$ に対応するものを含むことがわかった。このことは酒井・杉本模型が QCD の低エネルギー有効理論を含むことを示唆しているが、それについてより詳しく見るために、今度は $A_z = 0$ となるゲージに移る。ゲージ関数 g を

$$g^{-1}(x^\mu, z) = P \exp \left(-i \int_0^z dz' A_z(x^\mu, z') \right) \quad (2.2.73)$$

と取ってゲージ変換 (2.2.64) を行うと、

$$A_z \mapsto 0 \quad (2.2.74)$$

$$A_\mu \mapsto g A_\mu(x^\mu, z) g^{-1} + \frac{1}{i} g \partial_\mu g^{-1} \quad (2.2.75)$$

$$\rightarrow \frac{1}{i} \xi_{\pm} \partial_\mu \xi_{\pm}^{-1} \quad (z \rightarrow \pm\infty) \quad (2.2.76)$$

となり、 $A_z = 0$ に取れる。またその代償として $z \rightarrow \pm\infty$ ではもはや $A_\mu \rightarrow 0$ でなくなるものの、pure gauge の形なので、これは作用 (2.2.55) を有限に保つゲージである。このゲージにおける A_μ を、 z 軸上の直交関数系を用いて z 方向に沿って展開することを考える。(2.2.76) 式は $z \rightarrow \pm\infty$ での A_μ のふるまいを規定しており、この漸近条件を満たすように A_μ を以下のように展開することができる。

$$A_\mu(x^\mu, z) = \frac{1}{i}\xi_+(x^\mu)\partial_\mu\xi_+^{-1}(x^\mu)\psi_+(z) + \frac{1}{i}\xi_-(x^\mu)\partial_\mu\xi_-^{-1}(x^\mu)\psi_-(z) + \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu)\psi_n(z) \quad (2.2.77)$$

ただしここで $\psi_\pm(z)$ は

$$\psi_\pm(z) \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\pi} \arctan Z \equiv \frac{1}{2} \pm \hat{\psi}_0(z) \quad (2.2.78)$$

$$\hat{\psi}_0(z) \equiv \frac{1}{\pi} \arctan Z \quad (2.2.79)$$

と定義される z 軸上の関数であり、それぞれ

$$\psi_+(z) \rightarrow \begin{cases} 1 & (z \rightarrow \infty) \\ 0 & (z \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (2.2.80)$$

$$\psi_-(z) \rightarrow \begin{cases} 0 & (z \rightarrow \infty) \\ 1 & (z \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (2.2.81)$$

を満たす。また $\{\psi_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ はこの $\psi_\pm(z)$ と直交関係にあり、 $z \rightarrow \pm\infty$ で $\psi_n(z) \rightarrow 0$ となる何らかの直交関数系である。 $\{\psi_n(z)\}$ の取り方は任意であるが、ここでは微分方程式

$$-K(Z)^{1/3} \frac{\partial}{\partial Z} \left(K(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \psi_n(z) \right) = \lambda_n \psi_n(z) \quad (2.2.82)$$

の正則な解であるとする。このとき $\psi_\pm(z)$ が (2.2.82) 式のゼロモードになっていることは容易に確かめられる。またこれらの $\{\psi_n(z)\}$ に対し、正規直交関係を以下のように定める。

$$\kappa \int dZ K(Z)^{-1/3} \psi_m(z) \psi_n(z) = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.2.83)$$

この内積に関して $\{\psi_n(z)\}$ は $\psi_\pm(z)$ と直交する。またこのとき (2.2.82) を用いて

$$\kappa \int dZ K(Z) \partial_Z \psi_m(z) \partial_Z \psi_n(z) = \lambda_n \delta_{mn} \quad (2.2.84)$$

が成り立つことをここで述べておく。

$$\begin{cases} l_\mu \equiv \frac{1}{i}\xi_+ \partial_\mu \xi_+^{-1} \\ r_\mu \equiv \frac{1}{i}\xi_- \partial_\mu \xi_-^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_\mu \equiv l_\mu - r_\mu \\ \beta_\mu \equiv \frac{1}{2}(l_\mu + r_\mu) \end{cases} \quad (2.2.85)$$

と定義すると、上の展開は

$$A_\mu(x^\mu, z) = l_\mu(x^\mu)\psi_+(z) + r_\mu(x^\mu)\psi_-(z) + \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu)\psi_n(z) \quad (2.2.86)$$

$$= \alpha_\mu(x^\mu)\widehat{\psi}_0(z) + \beta_\mu(x^\mu) + \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu)\psi_n(z) \quad (2.2.87)$$

と表される。

この展開 (2.2.87) に現れる場がどのようなモードに対応しているかを調べる。そのために、展開 (2.2.87) を作用 (2.2.55) に代入して場の 2 次まで展開する。まず field strength は、場の 2 次まで残すと

$$\begin{aligned} F_{Z\mu} &= \partial_Z A_\mu & (\because A_z = 0 \text{ ゲージ}) \\ &= \alpha_\mu \partial_Z \widehat{\psi}_0 + \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)} \partial_Z \psi_n \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \\ &\simeq (\partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu)\psi_+ + (\partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu)\psi_- + \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)})\psi_n \\ &= -i[l_\mu, l_\nu]\psi_+ - i[r_\mu, r_\nu]\psi_- + \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)})\psi_n \\ &\simeq \sum_{n \geq 1} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)})\psi_n \end{aligned} \quad (2.2.89)$$

ただし $F_{\mu\nu}$ の変形では l_μ, r_μ が pure gauge であるために成り立つ関係式

$$\begin{cases} \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu + i[l_\mu, l_\nu] = 0 \\ \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu + i[r_\mu, r_\nu] = 0 \end{cases} \quad (2.2.90)$$

を用いた。この field strength を用いて作用を計算すると、まず第 1 項は

$$\begin{aligned} & -\kappa \int d^4x dZ \frac{1}{2} K(Z)^{-1/3} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 \\ & \simeq -\frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n,m} \text{tr} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)}) (\partial^\mu B^{(m)\nu} - \partial^\nu B^{(m)\mu}) \left(\kappa \int dZ K(Z)^{-1/3} \psi_n \psi_m \right) \\ & = -\frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n \geq 1} \text{tr} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)})^2 \quad (\because (2.2.83) \text{ 式}) \end{aligned}$$

となる。

また第 2 項は

$$\begin{aligned}
& -\kappa \int d^4x dZ M_{\text{KK}}^2 K(Z) \text{tr} F_{\mu Z}^2 \\
& \simeq -\int d^4x \text{tr} \alpha_\mu \alpha^\mu \left(M_{\text{KK}}^2 \kappa \int dZ K(Z) (\partial_Z \widehat{\psi}_0)^2 \right) \\
& - 2M_{\text{KK}}^2 \int d^4x \sum_n \text{tr} \alpha_\mu B^{(n)\mu} \left(\kappa \int dZ K(Z) \partial_Z \widehat{\psi}_0 \partial_Z \psi_n \right) \\
& - \sum_{n,m} \int d^4x M_{\text{KK}}^2 \text{tr} B_\mu^{(n)} B^{(m)\mu} \left(\kappa \int dZ K(Z) \partial_Z \psi_n \partial_Z \psi_m \right) \\
& = -\int d^4x \left(\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \alpha_\mu \alpha^\mu + \sum_{n \geq 1} \lambda_n M_{\text{KK}}^2 \text{tr} B_\mu^{(n)} B^{(n)\mu} \right) \quad (\because (2.2.84)) \\
\end{aligned} \tag{2.2.91}$$

ここで

$$\frac{f_\pi^2}{4} \equiv M_{\text{KK}}^2 \kappa \int dZ K(Z) (\partial_Z \widehat{\psi}_0)^2 \tag{2.2.92}$$

と定義した。またカイラル場 $U = \xi_+^{-1} \xi_-$ に対して

$$L_\mu \equiv \frac{1}{i} U^\dagger \partial_\mu U \tag{2.2.93}$$

と定義すると、 α_μ は

$$\alpha_\mu = \xi_- L_\mu \xi_-^{-1} \tag{2.2.94}$$

と表せる。これを用いると、作用 (2.2.55) は場の 2 次までで

$$S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} \simeq -\int d^4x \left[\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} L_\mu L^\mu + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \text{tr} (\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)})^2 + \lambda_n M_{\text{KK}}^2 \text{tr} B_\mu^{(n)} B^{(n)\mu} \right) \right] \tag{2.2.95}$$

と表される。この表式からわかることをいくつか述べよう。まず第 1 項はカイラルラグランジアンそのものであり、これから ξ_\pm はパイ中間子からなる場であることがわかる。また (2.2.70) 式で定義された量をカイラル場と同定することはこの結果からも支持される。そして第 2 項は質量を持つベクトル場のラグランジアンである。第 1 項がパイ中間子の項であったので、このベクトル場 $B_\mu^{(n)}$ はベクトル中間子または軸性ベクトル中間子を表す場であると解釈しよう。すると、ラグランジアンに現れる質量 $m_n^2 = \lambda_n M_{\text{KK}}^2$ はそれぞれ (軸性) ベクトル中間子の質量であると解釈できる。またこれらが (軸性) ベクトル中間子を表すという解釈は、パリティ変換に対するベクトル場 $B_\mu^{(n)}$ のふるまいを見ることでより信頼できるものとなる。まず 4 次元のパリティ変換は 5 次元空間において

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, z) \mapsto (x^0, -x^1, -x^2, -x^3, -z) \tag{2.2.96}$$

と定義されたとする^{*14}。このとき $\psi_n(-z) = (-1)^{n+1}\psi_n(z)$ であることと、ゲージ場 A_μ が奇パリティを持つことから、 ψ_n が奇 (偶) パリティを持つなら $B_\mu^{(n)}$ は偶 (奇) パリティを持つことがわかる。すなわち

- n が奇数 $\rightarrow B_\mu^{(n)}$ はベクトル中間子
- n が偶数 $\rightarrow B_\mu^{(n)}$ は軸性ベクトル中間子

である。

以上により、D8 ブレーンの 5 次元 YM 作用 (2.2.55) から中間子の有効理論が導出できることが明らかになったが、その有効理論を用いて種々の解析を行うためには有効作用の具体形が必要である。それを以下に導出する。ところで、ここでの解析に用いた SUGRA 近似が妥当であるためには M_{KK} を無限に大きく取ることができず、そのために M_{KK} が理論のカットオフスケールになっていたことを思い出すと、低エネルギー有効作用の導出にあたってエネルギーの大きなベクトル中間子を無限に含むことは不自然であろう。よって以下の導出においては、パイ中間子のモードに加え、エネルギーの最も低いベクトル中間子である ρ 中間子^{*15}のモードのみを考慮することとする。すなわち A_μ の展開を

$$A_\mu(x^\mu, z) \simeq l_\mu(x^\mu)\psi_+(z) + r_\mu(x^\mu)\psi_-(z) + \rho_\mu(x^\mu)\psi_1(z) \quad (2.2.97)$$

として有効作用を導く。ただしここで $\rho_\mu(x^\mu) \equiv B_\mu^1(x^\mu)$ は ρ 中間子場である。また以下では表記を簡単にするために、 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いることとし、 Z と z を同一視する。上の展開 (2.2.97) の下での作用の第 2 項は、先の計算 (2.2.91) より

$$-\kappa \int d^4x dz K(z) \text{tr} F_{\mu z}^2 \simeq - \int d^4x \left(\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + m_\rho^2 \text{tr}(\rho_\mu \rho^\mu) \right) \quad (2.2.98)$$

となることが容易にわかる。また作用の第 1 項については、まず field strength $F_{\mu\nu}$ を求める。(2.2.90) 式及び (2.2.85) 式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\simeq -i([l_\mu, l_\nu] + [r_\mu, r_\nu] - [l_\mu, r_\nu] - [r_\mu, l_\nu])\psi_+\psi_- + (\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)\psi_1 \\ &\quad + i[\rho_\mu, \rho_\nu]\psi_1^2 + i([l_\mu\psi_+ + r_\mu\psi_-, \rho_\nu] + [\rho_\mu, l_\nu\psi_+ + r_\nu\psi_-])\psi_1 \\ &= -i[\alpha_\mu, \alpha_\nu]\psi_+\psi_- + (\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)\psi_1 + i[\rho_\mu, \rho_\nu]\psi_1^2 \\ &\quad + i([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu])\widehat{\psi}_0\psi_1 + i([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])\psi_1 \end{aligned} \quad (2.2.99)$$

ここで 1 行目の変形に $\psi_\pm - \psi_\pm^2 = \psi_+\psi_-$ を用いた。

^{*14} この変換は 5 次元の本義 Lorentz 変換に含まれ、したがって 5 次元作用はこの変換について対称である。

^{*15} この模型は massless QCD の holographic dual であり、必然的にカイラル極限を考えているため、ここでの ρ 中間子というのは ρ 中間子を含むベクトル中間子 8 重項の総称である。

よってこの 2 乗は

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = & - [\alpha_\mu, \alpha_\nu]^2 \psi_+^2 \psi_-^2 + (\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)^2 \psi_1^2 - [\rho_\mu, \rho_\nu]^2 \psi_1^4 \\
& - ([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu])^2 \widehat{\psi}_0^2 \psi_1^2 - ([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])^2 \psi_1^2 \\
& - 2i[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu) \psi_+ \psi_- \psi_1 + 2[\alpha^\mu, \alpha^\nu][\rho_\mu, \rho_\nu] \psi_+ \psi_- \psi_1^2 \\
& + 2[\alpha^\mu, \alpha^\nu]([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu]) \psi_+ \psi_- \widehat{\psi}_0 \psi_1 \\
& + 2[\alpha^\mu, \alpha^\nu]([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu]) \psi_+ \psi_- \psi_1 + 2i(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)[\rho^\mu, \rho^\nu] \psi_1^3 \\
& + 2i(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)([\alpha^\mu, \rho^\nu] + [\rho^\mu, \alpha^\nu]) \widehat{\psi}_0 \psi_1^2 \\
& + 2i(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)([\beta^\mu, \rho^\nu] + [\rho^\mu, \beta^\nu]) \psi_1^2 \\
& - 2[\rho^\mu, \rho^\nu]([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu]) \widehat{\psi}_0 \psi_1^3 - 2[\rho^\mu, \rho^\nu]([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu]) \psi_1^3 \\
& - 2([\alpha^\mu, \rho^\nu] + [\rho^\mu, \alpha^\nu])([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu]) \widehat{\psi}_0 \psi_1^2 \tag{2.2.100}
\end{aligned}$$

となる。ここで上式の各項に現れる ψ_\pm , ψ_1 , $\widehat{\psi}_0$ の積の偶奇性について見ておく。というのも、以下でこれらについて最終的に z 積分を行うため、奇関数となる基底の積を持つ項は作用に寄与しないからである。基底の z 方向のパリティはそれぞれ

$$\psi_1(-z) = \psi_1(z) \quad \widehat{\psi}_0(-z) = -\widehat{\psi}_0(z) \quad \psi_+ \psi_- = \frac{1}{4} - \widehat{\psi}_0^2 \mapsto \psi_+ \psi_- \tag{2.2.101}$$

なので、上式に現れる積のうち奇関数のものは

$$\psi_+ \psi_- \widehat{\psi}_0 \psi_1 \quad \widehat{\psi}_0 \psi_1^2 \quad \widehat{\psi}_0 \psi_1^3 \tag{2.2.102}$$

の 3 つである。よってこれらを持つ 4 つの項は z 積分で 0 となり作用に寄与しない。また上式のトレースを取る際、 α_μ と L_μ の関係式 (2.2.94) を用いて

$$\text{tr}[\alpha_\mu, \alpha_\nu]^2 = \text{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 \tag{2.2.103}$$

となることを用いると、有効作用は第 1 項と第 2 項の寄与を合わせて以下のように表される [41]。

$$\begin{aligned}
S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} \simeq \int d^4x \left\{ & -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(L^\mu L_\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 && \text{(chiral/Skyrme)} \\
& -\frac{1}{2} \text{tr}(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)^2 - m_\rho^2 \text{tr}(\rho^\mu \rho_\mu) && (\rho\text{-kinetic}/\rho\text{-mass)} \\
& -ig_{3\rho} \text{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu](\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)\} && (3\rho \text{ coupling}) \\
& +\frac{1}{2}g_{4\rho} \text{tr}[\rho_\mu, \rho_\nu]^2 && (4\rho \text{ coupling}) \\
& +ig_1 \text{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)\} && (\partial\rho\text{-}2\alpha \text{ coupling}) \\
& -g_2 \text{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu][\rho_\mu, \rho_\nu]\} && (2\rho\text{-}2\alpha \text{ coupling}) \\
& -g_3 \text{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\beta_\mu, \rho_\nu) + [\rho_\mu, \beta_\nu]\} && (\rho\text{-}2\alpha\text{-}\beta \text{ coupling}) \\
& -ig_4 \text{tr}\{(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)(\beta^\mu, \rho^\nu) + [\rho^\mu, \beta^\nu]\} && (\rho\text{-}\partial\rho\text{-}\beta \text{ coupling}) \\
& +g_5 \text{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu](\beta_\mu, \rho_\nu) + [\rho_\mu, \beta_\nu]\} && (3\rho\text{-}\beta \text{ coupling}) \\
& +\frac{1}{2}g_6 \text{tr}([\alpha_\mu, \rho_\nu) + [\rho_\mu, \alpha_\nu)]^2 && (2\rho\text{-}2\alpha \text{ coupling}) \\
& +\frac{1}{2}g_7 \text{tr}([\beta_\mu, \rho_\nu) + [\rho_\mu, \beta_\nu)]^2 \} && (2\rho\text{-}2\beta \text{ coupling}) \\
\end{aligned} \tag{2.2.104}$$

ここで各項に現れる結合定数の定義は以下の通り ($M_{\text{KK}} = 1$ 単位系)。

$$\frac{f_\pi^2}{4} \equiv \kappa \int dz K(z) (\partial_z \widehat{\psi}_0)^2 = \frac{\kappa}{\pi} \tag{2.2.105}$$

$$\frac{1}{16e^2} \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_+^2 \psi_-^2 \tag{2.2.106}$$

$$m_\rho^2 \equiv \kappa \int dz K(z) (\partial_z \psi_1)^2 = \lambda_1 \tag{2.2.107}$$

$$g_{3\rho} \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_1^3 \tag{2.2.108}$$

$$g_{4\rho} \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_1^4 \tag{2.2.109}$$

$$g_1 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_+ \psi_- \psi_1 \tag{2.2.110}$$

$$g_2 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_+ \psi_- \psi_1^2 \tag{2.2.111}$$

$$g_3 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_+ \psi_- \psi_1 = g_1 \tag{2.2.112}$$

$$g_4 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_1^2 = 1 \tag{2.2.113}$$

$$g_5 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_1^3 = g_{3\rho} \tag{2.2.114}$$

$$g_6 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \widehat{\psi}_0^2 \psi_1^2 \tag{2.2.115}$$

$$g_7 \equiv \kappa \int dz K(z)^{-1/3} \psi_1^2 = 1 \tag{2.2.116}$$

この表式からわかることをいくつか述べる。まずパイ中間子のみの寄与を見ると、これは Skyrme 模型のラグランジアンそのものである。すなわち、Skyrme 模型においては現象論的に手で加えていた Skyrme 項が、酒井・杉本模型では有効作用の高次項として自ずと現れるのである。これは特筆すべきことであり、またある意味では Skyrme 模型において Skyrme 項を加えることの根拠を QCD に基づいて与えているとも言える。一方ベクトル中間子のみの寄与について、一見するとこれは massive Yang-Mills 理論のラグランジアンである。ところがその自己相互作用部分に注目すると、これらの結合定数は $g_{3\rho}^2/g_{4\rho} \simeq 0.90$ 、すなわち $g_{3\rho}^2 \neq g_{4\rho}$ となっており [41]、通常の massive Yang-Mills 理論とはわずかに形が異なる点に注意されたい。

2.3 酒井・杉本模型におけるバリオンの解析

以上により、酒井・杉本模型において D4 解の下でのプローブ D8 ブレーンから得られる 5 次元 YM 作用から、QCD の低エネルギー有効理論として、中間子を基本的な自由度を持つ理論が導かれた。この解析はラージ N_c 極限の下で行われているため、これがラージ N_c QCD の holographic dual になっていることを考えると、そこで導かれる有効理論が中間子のみの自由度で記述されるというのは極めて自然なことである。一方で、バリオンはこの模型においてどのように記述されるのだろうか？ここでラージ N_c QCD の知恵を借りるならば、酒井・杉本模型におけるバリオンとは、上に導かれた中間子の有効理論でのソリトン解であると考えられる。この考えに基づいて、ホログラフィック QCD を用いたバリオンの解析を行うことができる。その解析手法はいくつか提案されているが (例えば [41, 42])、そのうち本論文では名和らによって行われた、ヘッジホッグ解を用いた方法 [41] を以下に紹介する。また後に見るように、本研究における H ダイバリオンの研究はここで述べる名和らの方法に基づいて行われる。

2.3.1 ヘッジホッグ解を用いた方法

前節で見たように、酒井・杉本模型から導かれた中間子の有効作用は、パイ中間子からの寄与として Skyrme 模型を自然に包含していた。そのため、この中間子の有効理論においてソリトン解を調べる上で Skyrme 模型における解析手法を用いることは極めて自然な考え方である。ところで Skyrme 模型におけるバリオンの記述は、一般にヘッジホッグ解を用いることが多く、特に有名なものとしては SU(2) ヘッジホッグ解による核子の記述がある [20]。このような背景の下、SU(2) ヘッジホッグ解を用いて酒井・杉本模型におけるバリオンを調べるという最初の仕事が文献 [41] において行われた。すなわちそこでは、カイラル場 $U(x)$ を SU(2) ヘッジホッグ解

$$U(\mathbf{x}) = e^{i(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r)} \in \text{SU}(2) \quad (2.3.1)$$

$$\left(\hat{x}^i \equiv \frac{x^i}{r}, r \equiv |\mathbf{x}|, \tau_i : \text{Pauli 行列}, F(r) \in \mathbb{R} \right)$$

として有効作用 (2.2.104) に代入し、その解を調べるということが行われた。ここで境界条件を

$$\begin{cases} F(0) = \pi \\ F(\infty) = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

とすると、このヘッジホッグ解はバリオン数 $B = 1$ のバリオンを記述する。

ところで Skyrme 模型とここでの中間子の有効理論との大きな違いは、ベクトル中間子の寄与の有無である。この観点から、酒井・杉本模型の中間子有効理論は Skyrme 模型にベクトル中間子の寄与を含めて拡張したものと見ることができる。ここでの有効作用 (2.2.104) はカイラル場に加え、ベクトル中間子の寄与として ρ 中間子場 $\rho_\mu(x)$ を含んでいる。そのため、ヘッジホッグ解を用いた解析を行う際には、カイラル場に加えて ρ 中間子場に対しても SU(2) ヘッジホッグ解を与える必要がある。それをここでは以下のように与えることとする^{*16}。

$$\rho_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \rho_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j G(r) \tau_k \in \mathfrak{su}(2) \quad (G(r) \in \mathbb{R}) \quad (2.3.3)$$

ここで $G(r)$ の境界条件は、

$$\begin{cases} G(0) = 0 & (r = 0 \text{ での正則性}) \\ G(\infty) = 0 & (r \rightarrow \infty \text{ で } \rho_i \rightarrow 0) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

と定める。このヘッジホッグ解は 't Hooft と Polyakov によるモノポールの議論 (例えば [43] を参照) において SU(2) ゲージ場に対して用いられた 't Hooft-Polyakov Ansatz と同じ形である。ここで ρ_i の形は、カイラル場の SU(2) ヘッジホッグ解と同様の実空間とアイソスピン空間での同時回転に対する不変性に加え、ベクトル場としての奇パリティ性を要請することにより与えられる。またベクトル中間子場にこのヘッジホッグ解を用いて、Skyrme 模型にベクトル中間子の寄与を加えた研究も過去に行われている (例えば [44])。

これらの Ansatz (2.3.1)、(2.3.3) を用いて有効作用 (2.2.104) を書き下すのであるが、パイ中間子の寄与は L_μ の他に α_μ, β_μ の形でも現れているので、このヘッジホッグ解に対する ξ_\pm の形についてここで言及する必要がある。 $A_z = 0$ ゲージにおける残りのゲージ自由度を用いて $\xi_+^{-1} = \xi_- \equiv \xi$ となるゲージを取ることができ、以下ではこの $\xi_+^{-1} = \xi_-$ ゲージを採用する。このときカイラル場の表式 (2.2.72) から

$$U(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})^2 = e^{i(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r)} \quad (2.3.5)$$

$$\therefore \xi(\mathbf{x}) = e^{i(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r)/2} \quad (2.3.6)$$

と与えられる。この ξ 及び U の表式を用いて $L_\mu, \alpha_\mu, \beta_\mu$ を計算すると、

^{*16} ここでの ρ_i の表式は文献 [41] でのものと少しだけ異なっており、文献 [41] における $-\tilde{G}(r)$ がここでの $G(r)$ に対応することに注意されたい。

$$L_0(\mathbf{x}) = 0 \quad L_i(\mathbf{x}) = \left(\hat{x}^i \hat{x}^j F' + \widehat{\delta}^{ij} \frac{\sin F \cos F}{r} + \varepsilon_{ijk} \hat{x}^k \frac{\sin^2 F}{r} \right) \tau_j \quad (2.3.7)$$

$$\alpha_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \alpha_i(\mathbf{x}) = \left(\hat{x}^i \hat{x}^j F' + \widehat{\delta}^{ij} \frac{\sin F}{r} \right) \tau_j \quad (2.3.8)$$

$$\beta_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \beta_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{x}^k \frac{1 - \cos F}{r} \tau_j \quad (\widehat{\delta}^{ij} \equiv \delta^{ij} - \hat{x}^i \hat{x}^j)$$

となり [41]、これから SU(2) ヘッジホッグ解に対する有効作用を書き下すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{SU}(2)} = - \int d^4x & \left\{ \frac{f_\pi^2}{4} \left[2 \left(F'^2 + \frac{2 \sin^2 F}{r^2} \right) \right] \right. && \text{(chiral term)} \\ & + \frac{1}{32e^2} \left[\frac{16 \sin^2 F}{r^2} \left(2F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] && \text{(Skyrme term)} \\ & + \frac{1}{2} \left[8 \left(\frac{3}{r^2} G^2 + \frac{2}{r} G G' + G'^2 \right) \right] && \text{(\rho-kinetic term)} \\ & + m_\rho^2 [4G^2] && \text{(\rho-mass term)} \\ & + g_{3\rho} \left[16 \frac{G^3}{r} \right] && \text{(3\rho coupling)} \\ & + \frac{1}{2} g_{4\rho} [16G^4] && \text{(4\rho coupling)} \\ & - g_1 \left[\frac{16}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} G + G' \right) F' \sin F + \frac{G}{r^2} \sin^2 F \right\} \right] && \text{(\partial\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\ & - g_2 \left[\frac{16}{r^2} G^2 \sin^2 F \right] && \text{(2\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\ & + g_3 \left[\frac{16}{r^3} G \sin^2 F (1 - \cos F) \right] && \text{(\rho-2}\alpha\text{-}\beta \text{ coupling)} \\ & - g_4 \left[\frac{16}{r^2} G^2 (1 - \cos F) \right] && \text{(\rho-}\partial\rho\text{-}\beta \text{ coupling)} \\ & - g_5 \left[\frac{16}{r} G^3 (1 - \cos F) \right] && \text{(3\rho-}\beta \text{ coupling)} \\ & + g_6 [16G^2 F'^2] && \text{(2\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\ & + g_7 \left[\frac{8}{r^2} G^2 (1 - \cos F)^2 \right] \left. \right\} && \text{(2\rho-2}\beta \text{ coupling)} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

この作用から導かれる $F(r)$, $G(r)$ についての Euler-Lagrange 方程式を解くことにより、ホログラフィック QCD におけるヘッジホッグバリオンの性質を調べることができる。なお、その解析結果は本研究での H ダイバリオンについての結果との比較に用いられるので、これについては後の章で改めて示すこととする。

第 3 章

ホログラフィック QCD における H ダイバリオンの記述

前章の終わりに、ホログラフィック QCD における SU(2) ヘッジホッグ解を用いたバリオンの記述について見た。本研究ではこれと同様の手法を用いて、ホログラフィック QCD の枠組みにおいて H ダイバリオンの記述を試みる。

3.1 SO(3) 型ヘッジホッグ解

前章にも述べたように、ラージ N_c QCD において、バリオンは中間子の有効理論でのソリトン解として記述される [45]。よってホログラフィック QCD においてもバリオンはホログラフィック QCD から導出される中間子有効理論の中でのソリトン解として記述されるはずである。またホログラフィック QCD から導かれる中間子の有効理論が Skyrme 模型を自然に包含していることは前章で見た通りである。この事情から、ホログラフィック QCD でのソリトン解を考える上で Skyrme 模型の手法を用いることは極めて自然であり、その考えに基づいて前章では、核子の記述に対して Skyrme 模型と同様の SU(2) ヘッジホッグ解を用いた解析を行った。

ところで序章に述べたように、H ダイバリオンは Skyrme 模型において SO(3) ヘッジホッグ解を用いて記述される [16, 17]。ホログラフィック QCD でのバリオンの記述に対する上の考え方に基づくならば、ホログラフィック QCD における H ダイバリオンの記述は Skyrme 模型で用いられた SO(3) ヘッジホッグ解によって行うのが妥当であろう。すなわち、ホログラフィック QCD で H ダイバリオンを記述する上で、カイラル場に対しては

$$U(\mathbf{x}) = e^{i\{(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r) + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi(r)\}} \in \text{SU}(3)_f \quad (3.1.1)$$

$$F(r), \varphi(r) \in \mathbb{R} \quad (r \equiv |\mathbf{x}|, \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r)$$

という形の Ansatz を採用する。ここでバリオン数 $B = 2$ の H ダイバリオンを記述するため

の境界条件は

$$\begin{cases} F(0) = \pi \\ F(\infty) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{i\varphi(0)/3} = -e^{i2\pi k/3} \\ e^{i\varphi(\infty)/3} = 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.1.2)$$

であり [16, 17]、 $\{\Lambda_{i=1,2,3}\}$ は $\mathfrak{so}(3)$ の生成子

$$\Lambda_1 = \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = -\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\Lambda_3 = \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

である。これらはまた

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = i\varepsilon_{ijk}\Lambda_k \quad (3.1.5)$$

$$\text{tr}[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3] = 0 \quad (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^3 = \mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (3.1.6)$$

を満たす。

一方、Skyrme 模型はパイ中間子によるカイラル場だけで記述されていたのに対し、ホログラフィック QCD はこれに加えてベクトル中間子場も存在する。低エネルギー領域では最もエネルギーの低い ρ 中間子の寄与が特に重要であると考え、前章ではベクトル中間子のうち ρ 中間子のみを考慮した中間子有効理論 [41] を構築したが、本研究においてもこの有効理論を用いることとする。このとき ρ 中間子場の Ansatz についても、本研究では前章で見た先行研究 [41] と同じく 't Hooft-Polyakov Ansatz

$$\rho_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\rho_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk}\hat{x}^j G(r)\Lambda_k \in \mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{su}(3) \quad (G(r) \in \mathbb{R}) \quad (3.1.8)$$

を ρ 中間子の記述に用いることとする。ただしここでは SO(3) ヘッジホッグ解を考えるため、 ρ 中間子場の Ansatz に含まれる回転の生成子についても、核子の記述に用いた SU(2) の $\tau_i/2$ ではなく、上で定義された SO(3) の Λ_i を用いる。また境界条件については SU(2) ソリトンの場合と同様に

$$G(0) = G(\infty) = 0 \quad (3.1.9)$$

と取る。

3.2 SO(3) ソリトンに対する有効作用の導出

前節で採用した Ansatz を用いて、ホログラフィック QCD における SO(3) ヘッジホッグソリトン解としての H ダイバリオンを記述する有効作用を、具体的な計算によって以下に導出す

る。そのための準備として、まず作用 (2.2.104) に現れる α_μ, β_μ を SO(3) ヘッジホッグ解について計算する。

(なお、 L_μ で表される Skyrme 作用部分は、Skyrme 模型で SO(3) ヘッジホッグ解を用いた先行研究 [16, 17] と全く同様であるので、それについて本章で述べることはしない。ただしそこでの計算は以下に示す本研究での計算の基礎となっているため、補遺 B にまとめておいた。以下の計算においてもしばしば補遺 B を参照する。)

3.2.1 α_μ, β_μ の計算

第2章で見たように、これらは (2.2.85) 式

$$\alpha_\mu(x) \equiv l_\mu(x) - r_\mu(x) \quad (3.2.1)$$

$$\beta_\mu(x) \equiv \frac{1}{2}\{l_\mu(x) + r_\mu(x)\} \quad (3.2.2)$$

によって l_μ, r_μ で書かれるので、これらの計算から始める。計算を簡単にするため、以下では 2.3 節同様 $\xi_+^{-1} = \xi_-$ ゲージを採用する。

$$\xi_+^{-1}(x) = \xi_-(x) \equiv \xi(x) \quad (3.2.3)$$

このゲージにおいてカイラル場は

$$U(x) = \xi_+^{-1}(x)\xi_-(x) = \xi(x)^2 \quad (3.2.4)$$

と表せるので、SO(3) ヘッジホッグ解の下で ξ は

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= \xi(\mathbf{x})^2 = e^{i[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi]} \\ \therefore \xi(\mathbf{x}) &= e^{\frac{i}{2}[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi]} \\ &= e^{i[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F/2 + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi/2]} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

となる。一方、 $\xi_+^{-1} = \xi_-$ ゲージにおいて l_μ, r_μ は

$$l_\mu(x) \equiv \frac{1}{i}\xi_+(x)\partial_\mu\xi_+^{-1}(x) = \frac{1}{i}\xi^\dagger(x)\partial_\mu\xi(x) \quad (3.2.6)$$

$$r_\mu(x) \equiv \frac{1}{i}\xi_-(x)\partial_\mu\xi_+^{-1}(x) = \frac{1}{i}\xi(x)\partial_\mu\xi^\dagger(x) \quad (3.2.7)$$

と表され、これに (3.2.5) 式を代入すれば、SO(3) ヘッジホッグ解に対する l_μ, r_μ の表式が求まる。

ここで SO(3) ヘッジホッグ解に関して定義される intrinsic parity P_{int} の下での l_μ, r_μ の変換性について触れておく。SO(3) ヘッジホッグ解に関する intrinsic parity P_{int} は次で定義される。

$$P_{\text{int}} : \begin{cases} F(r) \mapsto -F(r) \\ \varphi(r) \mapsto -\varphi(r) \end{cases} \quad (3.2.8)$$

このとき ξ は

$$\xi(\mathbf{x}) \xrightarrow{P_{\text{int}}} \xi^\dagger(\mathbf{x}) \quad (3.2.9)$$

と変換するので、 l_μ と r_μ は P_{int} の下で

$$l_\mu(\mathbf{x}) \xleftrightarrow{P_{\text{int}}} r_\mu(\mathbf{x}) \quad (3.2.10)$$

と互いに入れかわる。よって l_μ の表式を求めれば、 r_μ は P_{int} により直ちに求まる。

Static soliton について l_μ の時間成分は L_0 と同様に

$$l_0 = \frac{1}{i} \xi^\dagger \partial_0 \xi = 0 \quad (3.2.11)$$

である (補遺 B 参照)。さらに (3.2.5)、(3.2.6) 式と (3.1.1)、(B.8) 式との比較から、空間成分 l_i は L_i (補遺 B) において

$$\begin{cases} F \mapsto F/2 \\ \varphi \mapsto \varphi/2 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

としたものであるので、 l_i の行列成分は (B.30) 式より直ちに

$$\begin{aligned} (l_i)_{mn} &= \hat{x}^i \left(-\delta^{mn} \frac{\varphi'}{3} + \widehat{\delta}^{mn} \frac{\varphi'}{2} - i \varepsilon_{jmn} \hat{x}^j \frac{F'}{2} \right) \\ &\quad - \frac{i}{r} (\widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n g_0 g_2^* - \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m g_0^* g_2) \\ &\quad - \frac{1}{r} (\varepsilon_{ijm} \hat{x}^j \hat{x}^n g_0 g_1^* + \varepsilon_{ijn} \hat{x}^j \hat{x}^m g_0^* g_1) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

と求まる。ここで

$$g_0(r) = e^{-i\varphi/3} \quad (3.2.14)$$

$$g_1(r) = i e^{i\varphi/6} \sin \frac{F}{2} \quad (3.2.15)$$

$$g_2(r) = e^{i\varphi/6} \cos \frac{F}{2} - e^{-i\varphi/3} \quad (3.2.16)$$

である。またこれに P_{int} を施せば r_i が求まる。 P_{int} の下で

$$g_0 \mapsto g_0^* \quad g_1 \mapsto g_1^* \quad g_2 \mapsto g_2^* \quad (3.2.17)$$

に注意すると、行列 r_i の成分表示

$$\begin{aligned} (r_i)_{mn} &= -\hat{x}^i \left(-\delta^{mn} \frac{\varphi'}{3} + \widehat{\delta}^{mn} \frac{\varphi'}{2} - i \varepsilon_{jmn} \hat{x}^j \frac{F'}{2} \right) \\ &\quad - \frac{i}{r} (\widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n g_0^* g_2 - \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m g_0 g_2^*) \\ &\quad - \frac{1}{r} (\varepsilon_{ijm} \hat{x}^j \hat{x}^n g_0^* g_1 + \varepsilon_{ijn} \hat{x}^j \hat{x}^m g_0 g_1^*) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

を得る。

上で求めた l_μ, r_μ の表式を (3.2.1)、(3.2.2) 式に代入して α_μ, β_μ の表式をそれぞれ求めることができる。まず時間成分はそれぞれ

$$\alpha_0 = 0 \quad (3.2.19)$$

$$\beta_0 = 0 \quad (3.2.20)$$

である。空間成分についても

$$g_0 g_1^* + g_0^* g_1 = -2 \sin \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.2.21)$$

$$g_0 g_1^* - g_0^* g_1 = -2i \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (3.2.22)$$

$$g_0 g_2^* + g_0^* g_2 = -2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.2.23)$$

$$g_0 g_2^* - g_0^* g_2 = -2i \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.2.24)$$

に注意して計算すると、 α_i, β_i の行列成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\alpha_i)_{mn} &= \hat{x}^i \left(-\delta^{mn} \frac{2}{3} \varphi' + \hat{\delta}^{mn} \varphi' - i \varepsilon_{jmn} \hat{x}^j F' \right) \\ &\quad - \frac{2}{r} \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (\hat{\delta}^{im} \hat{x}^n + \hat{\delta}^{in} \hat{x}^m) \\ &\quad + \frac{2i}{r} \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (\varepsilon_{ijm} \hat{x}^j \hat{x}^n - \varepsilon_{ijn} \hat{x}^j \hat{x}^m) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} (\beta_i)_{mn} &= \frac{i}{r} \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (\hat{\delta}^{im} \hat{x}^n - \hat{\delta}^{in} \hat{x}^m) \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (\varepsilon_{ijm} \hat{x}^j \hat{x}^n + \varepsilon_{ijn} \hat{x}^j \hat{x}^m) \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

と求まる。

ここで後の計算のために、 $\alpha_i, \beta_i, \rho_i$ で書かれる交換子

$$[\alpha_i, \alpha_j], \quad [\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j], \quad [\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j]$$

の行列成分についてまとめておく。上で求めた α_μ, β_μ の行列成分 (3.2.25)、(3.2.26) 式及び ρ_i の行列成分

$$\begin{aligned} (\rho_i)_{mn} &= \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j G(\Lambda_k)_{mn} \\ &= -iG(\delta^{im} \hat{x}^n - \delta^{in} \hat{x}^m) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

を用いて計算すると、以下を得る。

$$[\alpha_i, \alpha_j]_{mn} \equiv [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(S)} + [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)} \quad (3.2.28)$$

$$[\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(S)} = -\frac{2i}{r}(F' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \varphi' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2})(H_{ij}^{(1)})_{mn} \\ - \frac{i}{r^2} \sin F \sin \varphi \{(H_{ij}^{(2)})_{mn} + 4(H_{ij}^{(3)})_{mn}\} \quad (3.2.29)$$

$$[\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)} = -\frac{2}{r}(F' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2})(H_{ij}^{(4)})_{mn} \\ + \frac{4}{r^2} \{\cos^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} (H_{ij}^{(5)})_{mn} + \sin^2 \frac{F}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} (H_{ij}^{(6)})_{mn}\} \quad (3.2.30)$$

$$([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])_{mn} \equiv ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} + ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \quad (3.2.31)$$

$$([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} = \frac{i}{r} G \sin \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \{(H_{ij}^{(2)})_{mn} + 4(H_{ij}^{(3)})_{mn}\} \quad (3.2.32)$$

$$([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} = -\frac{2}{r} G (1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) (H_{ij}^{(5)})_{mn} \quad (3.2.33)$$

$$([\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j])_{mn} \equiv ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} + ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \quad (3.2.34)$$

$$([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} = -iG\varphi' (H_{ij}^{(7)})_{mn} \quad (3.2.35)$$

$$([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} = GF' (H_{ij}^{(8)})_{mn} + \frac{2}{r} G \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (H_{ij}^{(9)})_{mn} \quad (3.2.36)$$

ここで右肩の (S), (A) はそれぞれ行列の対称部分、反対称部分であることを表す。また上で導入した $\{(H_{ij}^{(a)})\}_{a=1\dots 9}$ は以下の通り：

$$(H_{ij}^{(1)})_{mn} \equiv (\hat{x}^i \varepsilon_{jmk} \hat{x}^k \hat{x}^n + \hat{x}^i \varepsilon_{jnk} \hat{x}^k \hat{x}^m) - (\hat{x}^j \varepsilon_{imk} \hat{x}^k \hat{x}^n + \hat{x}^j \varepsilon_{ink} \hat{x}^k \hat{x}^m) \quad (3.2.37)$$

$$(H_{ij}^{(2)})_{mn} \equiv (\widehat{\delta}^{im} \varepsilon_{jnk} \hat{x}^k + \widehat{\delta}^{in} \varepsilon_{jmk} \hat{x}^k) - (\widehat{\delta}^{jm} \varepsilon_{ink} \hat{x}^k + \widehat{\delta}^{jn} \varepsilon_{imk} \hat{x}^k) \quad (3.2.38)$$

$$(H_{ij}^{(3)})_{mn} \equiv \varepsilon_{ijk} \hat{x}^k \hat{x}^m \hat{x}^n \quad (3.2.39)$$

$$(H_{ij}^{(4)})_{mn} \equiv (\hat{x}^i \widehat{\delta}^{jm} \hat{x}^n - \hat{x}^i \widehat{\delta}^{jn} \hat{x}^m) - (\hat{x}^j \widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n - \hat{x}^j \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m) \quad (3.2.40)$$

$$(H_{ij}^{(5)})_{mn} \equiv \widehat{\delta}^{im} \widehat{\delta}^{jn} - \widehat{\delta}^{in} \widehat{\delta}^{jm} \quad (3.2.41)$$

$$(H_{ij}^{(6)})_{mn} \equiv \varepsilon_{imk} \varepsilon_{jnl} \hat{x}^k \hat{x}^l - \varepsilon_{ink} \varepsilon_{jml} \hat{x}^k \hat{x}^l \quad (3.2.42)$$

$$(H_{ij}^{(7)})_{mn} \equiv (\hat{x}^i \widehat{\delta}^{jm} \hat{x}^n + \hat{x}^i \widehat{\delta}^{jn} \hat{x}^m) - (\hat{x}^j \widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n + \hat{x}^j \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m) \quad (3.2.43)$$

$$(H_{ij}^{(8)})_{mn} \equiv (\hat{x}^i \varepsilon_{jmk} \hat{x}^k \hat{x}^n - \hat{x}^i \varepsilon_{jnk} \hat{x}^k \hat{x}^m) - (\hat{x}^j \varepsilon_{imk} \hat{x}^k \hat{x}^n - \hat{x}^j \varepsilon_{ink} \hat{x}^k \hat{x}^m) \quad (3.2.44)$$

$$(H_{ij}^{(9)})_{mn} \equiv (\widehat{\delta}^{im} \varepsilon_{jnk} \hat{x}^k - \widehat{\delta}^{in} \varepsilon_{jmk} \hat{x}^k) - (\widehat{\delta}^{jm} \varepsilon_{ink} \hat{x}^k - \widehat{\delta}^{jn} \varepsilon_{imk} \hat{x}^k) \quad (3.2.45)$$

また後に必要となるこれらの積をあらかじめ計算したものを以下にまとめておく。

$$\begin{cases} (H_{ij}^{(1)})_{mn}(H_{ij}^{(2)})_{mn} = 0 \\ (H_{ij}^{(1)})_{mn}(H_{ij}^{(3)})_{mn} = 0 \\ (H_{ij}^{(2)})_{mn}(H_{ij}^{(3)})_{mn} = 0 \end{cases} \quad (3.2.46)$$

$$\begin{cases} (H_{ij}^{(2)})_{mn}(H_{ij}^{(2)})_{mn} = 16 \\ (H_{ij}^{(3)})_{mn}(H_{ij}^{(3)})_{mn} = 2 \end{cases} \quad (3.2.47)$$

$$\begin{cases} (H_{ij}^{(4)})_{mn}(H_{ij}^{(5)})_{mn} = 0 \\ (H_{ij}^{(5)})_{mn}(H_{ij}^{(5)})_{mn} = 4 \\ (H_{ij}^{(5)})_{mn}(H_{ij}^{(6)})_{mn} = 4 \end{cases} \quad (3.2.48)$$

$$\begin{cases} (H_{ij}^{(7)})_{mn}(H_{ij}^{(7)})_{mn} = 8 \\ (H_{ij}^{(8)})_{mn}(H_{ij}^{(8)})_{mn} = 8 \\ (H_{ij}^{(9)})_{mn}(H_{ij}^{(9)})_{mn} = 0 \\ (H_{ij}^{(8)})_{mn}(H_{ij}^{(9)})_{mn} = 0 \end{cases} \quad (3.2.49)$$

準備が整ったので、以下では SO(3) ソリトンに対する作用を各項毎に計算していく。
(ただし chiral term と Skyrme term の表式については補遺 B にて (B.71) と与えられる。)

3.2.2 ρ -kinetic term

まず ρ 中間子場の Ansatz (3.1.7)、(3.1.8) 式について

$$\partial_0 \rho_i = \partial_i \rho_0 = 0 \quad (3.2.50)$$

より、有効作用 (2.2.104) の ρ -kinetic term は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr}(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)^2 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr}(\partial_i \rho_j - \partial_j \rho_i)^2 \\ &= -\int d^4x \operatorname{tr}[(\partial_i \rho_j)(\partial_i \rho_j) - (\partial_i \rho_j)(\partial_j \rho_i)] \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

と表される。ここで ρ_i の空間微分は

$$\partial_i \rho_j = \varepsilon_{jab} \Lambda_b \left(\frac{\widehat{\delta}^{ia}}{r} G + \hat{x}^i \hat{x}^a G' \right) \quad (3.2.52)$$

である。これを用いてトレースの各項を計算する。

トレースの第 1 項は、

$$(\partial_i \rho_j)(\partial_i \rho_j) = \varepsilon_{jab} \varepsilon_{jcd} \Lambda_b \Lambda_d \left(\frac{\widehat{\delta}^{ac}}{r^2} G^2 + \hat{x}^a \hat{x}^c G'^2 \right) \quad (3.2.53)$$

のトレースを取って

$$\text{tr}(\partial_i \rho_j)(\partial_i \rho_j) = 4 \left(\frac{2}{r^2} G^2 + G'^2 \right) \quad (3.2.54)$$

と求まる。ここで $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 Λ_i のトレースに対し

$$\text{tr}(\Lambda_a \Lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (3.2.55)$$

を用いた。

トレース第2項についても同様に

$$(\partial_i \rho_j)(\partial_j \rho_i) = \varepsilon_{jab} \varepsilon_{icd} \Lambda_b \Lambda_d \left\{ \frac{\widehat{\delta}^{ia} \widehat{\delta}^{jc}}{r^2} G^2 + \left(\frac{\widehat{\delta}^{ia}}{r} \hat{x}^j \hat{x}^c + \frac{\widehat{\delta}^{jc}}{r} \hat{x}^i \hat{x}^a \right) G G' \right\} \quad (3.2.56)$$

のトレースを取ると、(3.2.55) 式を用いて

$$\text{tr}(\partial_i \rho_j)(\partial_j \rho_i) = -4 \left(\frac{1}{r^2} G^2 + \frac{2}{r} G G' \right) \quad (3.2.57)$$

を得る。これから ρ -kinetic term は

$$-\frac{1}{2} \int d^4 x \text{tr}(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)^2 = -\frac{1}{2} \int d^4 x 8 \left(\frac{3}{r^2} G^2 + \frac{2}{r} G G' + G'^2 \right) \quad (3.2.58)$$

として与えられる。

3.2.3 ρ -mass term

SO(3) ソリトンに対する中間子有効作用 (2.2.104) の ρ -mass term は、 $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 Λ_i のトレース (3.2.55) 式を用いると

$$\begin{aligned} -m_\rho^2 \int d^4 x \text{tr}(\rho^\mu \rho_\mu) &= -m_\rho^2 \int d^4 x \text{tr}(\rho_i \rho_i) \quad (\because \rho_0 = 0) \\ &= -m_\rho^2 \int d^4 x 4G^2 \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

と求まる。

3.2.4 3ρ coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の 3ρ coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$\begin{aligned} &-ig_{3\rho} \int d^4 x \text{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu](\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)\} \\ &= -ig_{3\rho} \int d^4 x \text{tr}\{[\rho_i, \rho_j](\partial_i \rho_j - \partial_j \rho_i)\} \quad (\because \rho_0 = 0) \\ &= -ig_{3\rho} \int d^4 x 2 \text{tr}\{[\rho_i, \rho_j](\partial_i \rho_j)\} \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

ここで ρ_i の交換子は

$$[\rho_i, \rho_j] = i\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\varepsilon_{bde}\Lambda_e\hat{x}^a\hat{x}^cG^2 \quad (3.2.61)$$

と表される。これと ρ_i の空間微分 (3.2.52) 式を用いると

$$[\rho_i, \rho_j](\partial_i\rho_j) = -i\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\varepsilon_{bde}\varepsilon_{ijf}\Lambda_e\Lambda_f\hat{x}^a\hat{x}^c\frac{G^3}{r} \quad (3.2.62)$$

(3.2.55) 式を用いてトレースを取ると

$$\text{tr}\{[\rho_i, \rho_j](\partial_i\rho_j)\} = -4i\frac{G^3}{r} \quad (3.2.63)$$

となるので、SO(3) ソリトンに対する 3ρ coupling term

$$-ig_{3\rho} \int d^4x \text{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu](\partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu)\} = -g_{3\rho} \int d^4x 8\frac{G^3}{r} \quad (3.2.64)$$

を得る。

3.2.5 4ρ coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の 4ρ coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$\frac{1}{2}g_{4\rho} \int d^4x \text{tr}[\rho_\mu, \rho_\nu]^2 = \frac{1}{2}g_{4\rho} \int d^4x \text{tr}[\rho_i, \rho_j]^2 \quad (\because \rho_0 = 0) \quad (3.2.65)$$

ここで ρ_i の交換子 (3.2.61) 式より

$$[\rho_i, \rho_j]^2 = -\varepsilon_{iab}\varepsilon_{ifg}\varepsilon_{jcd}\varepsilon_{jkh}\varepsilon_{bde}\varepsilon_{gkl}\hat{x}^a\hat{x}^c\hat{x}^f\hat{x}^h\Lambda_e\Lambda_lG^4 \quad (3.2.66)$$

(3.2.55) 式を用いてこのトレースを取ると

$$\text{tr}[\rho_i, \rho_j]^2 = -4G^4 \quad (3.2.67)$$

となり、 4ρ coupling term は

$$\frac{1}{2}g_{4\rho} \int d^4x \text{tr}[\rho_\mu, \rho_\nu]^2 = -\frac{1}{2}g_{4\rho} \int d^4x 4G^4 \quad (3.2.68)$$

と表される。

3.2.6 $\partial\rho$ - 2α coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の $\partial\rho$ - 2α coupling term は、static soliton に対して

$$\begin{aligned} ig_1 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu)\} &= ig_1 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\partial_i\rho_j - \partial_j\rho_i)\} \\ &= ig_1 \int d^4x 2 \operatorname{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\partial_i\rho_j)\} \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

ここで $(\partial_i\rho_j)$ の行列成分は (B.13) 式を用いて

$$(\partial_i\rho_j)_{mn} = -i\varepsilon_{bmn}\varepsilon_{jab} \left(\frac{\widehat{\delta}^{ia}}{r} G + \hat{x}^i \hat{x}^a G' \right) \quad (3.2.70)$$

であり、これと α_i の交換子 (3.2.28)、(3.2.30) 式を用いると、(3.2.69) 式のトレースは

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\partial_i\rho_j)\} &= [\alpha_i, \alpha_j]_{mn} (\partial_i\rho_j)_{nm} \\ &= [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)} \varepsilon_{bmn} \cdot i\varepsilon_{jab} \left(\frac{\widehat{\delta}^{ia}}{r} G + \hat{x}^i \hat{x}^a G' \right) \quad (\because (\partial_i\rho_j) \text{ は反対称行列}) \\ &= -i\frac{8}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} G + G' \right) \left(F' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{r^2} G (1 - \cos F \cos \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

と表される。ここで

$$2 \left(\sin^2 \frac{F}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 1 - \cos F \cos \varphi \quad (3.2.72)$$

を用いた。これから $\partial\rho$ - 2α coupling term は

$$\begin{aligned} ig_1 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu)\} \\ = g_1 \int d^4x \frac{16}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} G + G' \right) \left(F' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{r^2} G (1 - \cos F \cos \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

と表される。

3.2.7 2ρ - 2α coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の 2ρ - 2α coupling term は、static soliton に対して

$$-g_2 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu][\rho_\mu, \rho_\nu]\} = -g_2 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j][\rho_i, \rho_j]\} \quad (3.2.74)$$

ここで ρ_i の交換子 (3.2.61) の行列成分は (B.13) 式を用いて

$$[\rho_i, \rho_j]_{mn} = \varepsilon_{emn}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\varepsilon_{bde} \hat{x}^a \hat{x}^c G^2 \quad (3.2.75)$$

であり、これと α_i の交換子 (3.2.28)、(3.2.30) 式を用いると、(3.2.74) 式のトレースは

$$\begin{aligned} \text{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j][\rho_i, \rho_j]\} &= [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}[\rho_i, \rho_j]_{nm} \\ &= -[\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)} \varepsilon_{emn} \cdot \varepsilon_{iab} \varepsilon_{jcd} \varepsilon_{bde} \hat{x}^a \hat{x}^c G^2 \quad (\because [\rho_i, \rho_j] \text{ は反対称行列}) \\ &= -\frac{8}{r^2} G^2 (1 - \cos F \cos \varphi) \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

となる。ここで (3.2.72) 式を用いた。よって 2ρ - 2α coupling term は

$$-g_2 \int d^4x \text{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu][\rho_\mu, \rho_\nu]\} = g_2 \int d^4x \frac{8}{r^2} G^2 (1 - \cos F \cos \varphi) \quad (3.2.77)$$

と表される。

3.2.8 ρ - 2α - β coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の ρ - 2α - β coupling term は、static soliton に対して

$$-g_3 \int d^4x \text{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu](\beta_\mu, \rho_\nu) + [\rho_\mu, \beta_\nu]\} = -g_3 \int d^4x \text{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\beta_i, \rho_j) + [\rho_i, \beta_j]\} \quad (3.2.78)$$

であり、 α_i や β_i, ρ_i の交換子 (3.2.28)、(3.2.31) 式を用いてこのトレースを計算すると

$$\begin{aligned} &\text{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\beta_i, \rho_j) + [\rho_i, \beta_j]\} \\ &= [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}([\beta_i, \rho_j) + [\rho_i, \beta_j)]_{nm} \\ &= ([\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(S)} + [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)})\{([\beta\rho]_{ij})_{nm}^{(S)} + ([\beta\rho]_{ij})_{nm}^{(A)}\} \\ &= [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(S)}([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} - [\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)}([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

第1項は (3.2.29)、(3.2.32) 式を用いて

$$\begin{aligned} &[\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(S)}([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} \\ &= \frac{1}{r^3} G \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \{(H_{ij}^{(2)})_{mn}(H_{ij}^{(2)})_{mn} + 16(H_{ij}^{(3)})_{mn}(H_{ij}^{(3)})_{mn}\} \\ &\quad (\because (3.2.46) \text{ 式}) \\ &= \frac{16}{r^3} 3G \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \quad (\because (3.2.47) \text{ 式}) \end{aligned}$$

第2項は (3.2.30)、(3.2.33) 式を用いて

$$[\alpha_i, \alpha_j]_{mn}^{(A)}([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} = -\frac{16}{r^3} G (1 - \cos F \cos \varphi) \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \quad (\because (3.2.48) \text{ 式})$$

とそれぞれ表されるので、結局

$$\begin{aligned} &\text{tr}\{[\alpha_i, \alpha_j](\beta_i, \rho_j) + [\rho_i, \beta_j]\} \\ &= \frac{16}{r^3} G \left\{3 \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + (1 - \cos F \cos \varphi) \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

となる。よって ρ - 2α - β coupling term は

$$\begin{aligned} & -g_3 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\alpha^\mu, \alpha^\nu]([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])\} \\ & = -g_3 \int d^4x \frac{16}{r^3} G \left\{ 3 \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + (1 - \cos F \cos \varphi) \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.81)$$

と表される。

3.2.9 ρ - $\partial\rho$ - β coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の ρ - $\partial\rho$ - β coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$\begin{aligned} & -ig_4 \int d^4x \operatorname{tr}\{(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)([\beta^\mu, \rho^\nu] + [\rho^\mu, \beta^\nu])\} \\ & = -ig_4 \int d^4x \operatorname{tr}\{(\partial_i \rho_j - \partial_j \rho_i)([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])\} \\ & = -ig_4 \int d^4x 2 \operatorname{tr}\{([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])(\partial_i \rho_j)\} \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

と表される。このトレースは (3.2.31)、(3.2.70) 式を用いて

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}\{([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])(\partial_i \rho_j)\} = ([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])_{mn} (\partial_i \rho_j)_{nm} \\ & = ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \varepsilon_{bmn} \cdot i\varepsilon_{jab} \left(\frac{\widehat{\delta}^{ia}}{r} G + \hat{x}^i \hat{x}^a G' \right) \\ & = i \frac{8}{r^2} G^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.83)$$

と計算されるので、結局 ρ - $\partial\rho$ - β coupling term は

$$\begin{aligned} & -ig_4 \int d^4x \operatorname{tr}\{(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)([\beta^\mu, \rho^\nu] + [\rho^\mu, \beta^\nu])\} \\ & = g_4 \int d^4x \frac{16}{r^2} G^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

となる。

3.2.10 3ρ - β coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の 3ρ - β coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$g_5 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu]([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])\} = g_5 \int d^4x \operatorname{tr}\{[\rho_i, \rho_j]([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])\} \quad (3.2.85)$$

であり、このトレースは ρ_i と β_i の交換子の行列成分 (3.2.31)、(3.2.75) を用いて

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{[\rho_i, \rho_j]([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])\} &= ([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])_{mn} [\rho_i, \rho_j]_{nm} \\
&= -([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \varepsilon_{emn} \varepsilon_{iab} \varepsilon_{jcd} \varepsilon_{bde} \hat{x}^a \hat{x}^c G^2 \quad (\because [\rho_i, \rho_j] \text{ は反対称行列}) \\
&= \frac{8}{r} G^3 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.2.86)
\end{aligned}$$

と表されるので、 $3\rho\text{-}\beta$ coupling term は

$$g_5 \int d^4x \text{tr}\{[\rho^\mu, \rho^\nu]([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])\} = g_5 \int d^4x \frac{8}{r} G^3 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.2.87)$$

となる。

3.2.11 $2\rho\text{-}2\alpha$ coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の $2\rho\text{-}2\alpha$ coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$\frac{1}{2} g_6 \int d^4x \text{tr}([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu])^2 = \frac{1}{2} g_6 \int d^4x \text{tr}([\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j])^2 \quad (3.2.88)$$

α_i, ρ_i の交換子 (3.2.34) 式を用いてこのトレースは

$$\begin{aligned}
\text{tr}([\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j])^2 &= ([\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j])_{mn} ([\alpha_i, \rho_j] + [\rho_i, \alpha_j])_{nm} \\
&= \{([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} + ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)}\} \{([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} - ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)}\} \\
&= ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} - ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \quad (3.2.89)
\end{aligned}$$

ここで (3.2.49) 式を用いると、第1項は

$$([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} = -8G^2 \varphi'^2 \quad (3.2.90)$$

第2項は

$$([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} ([\alpha\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} = 8G^2 F'^2 \quad (3.2.91)$$

とそれぞれ計算されるので、 $2\rho\text{-}2\alpha$ coupling term は

$$\frac{1}{2} g_6 \int d^4x \text{tr}([\alpha_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \alpha_\nu])^2 = -g_6 \int d^4x 4G^2 (F'^2 + \varphi'^2) \quad (3.2.92)$$

と表される。

3.2.12 $2\rho\text{-}2\beta$ coupling

中間子有効作用 (2.2.104) の $2\rho\text{-}2\beta$ coupling term は、SO(3) ソリトンに対して

$$\frac{1}{2} g_7 \int d^4x \text{tr}([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])^2 = \frac{1}{2} g_7 \int d^4x \text{tr}([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])^2 \quad (3.2.93)$$

β_i, ρ_i の交換子 (3.2.31) を用いてこのトレースは

$$\begin{aligned} \text{tr}([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])^2 &= ([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])_{mn} ([\beta_i, \rho_j] + [\rho_i, \beta_j])_{nm} \\ &= \{([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} + ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)}\} \{([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} - ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)}\} \\ &= ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} - ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} \end{aligned} \quad (3.2.94)$$

第1項は (3.2.46)、(3.2.47) 式より

$$([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(S)} = -\frac{16}{r^2} 3G^2 \sin^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (3.2.95)$$

第2項は (3.2.48) 式より

$$([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} ([\beta\rho]_{ij})_{mn}^{(A)} = \frac{16}{r^2} G^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 \quad (3.2.96)$$

とそれぞれ計算されるので、 2ρ - 2β coupling term は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} g_7 \int d^4x \text{tr}([\beta_\mu, \rho_\nu] + [\rho_\mu, \beta_\nu])^2 \\ &= -g_7 \int d^4x \frac{8}{r^2} G^2 \left[3 \sin^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.97)$$

と表される。

3.2.13 SO(3) ヘッジホッグ解に対する有効作用

以上の計算をまとめると、ホログラフィック QCD において H ダイバリオンを記述する SO(3) ソリトンに対し、有効作用は profile function $F(r), \varphi(r), G(r)$ を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned}
S_{\text{SO}(3)} = & - \int d^4x \left\{ \frac{f_\pi^2}{4} \left[2F'^2 + \frac{2}{3}\varphi'^2 + \frac{8}{r^2}(1 - \cos F \cos \varphi) \right] \right. && \text{(chiral term)} \\
& + \frac{1}{32e^2} \frac{16}{r^2} \left[(F'^2 + \varphi'^2)(1 - \cos F \cos \varphi) + 2F'\varphi' \sin F \sin \varphi \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r^2} \left\{ (1 - \cos F \cos \varphi)^2 + 3 \sin^2 F \sin^2 \varphi \right\} \right] && \text{(Skyrme term)} \\
& + \frac{1}{2} \left[8 \left(\frac{3}{r^2} G^2 + \frac{2}{r} G G' + G'^2 \right) \right] && \text{(\rho-kinetic term)} \\
& + m_\rho^2 [4G^2] && \text{(\rho-mass term)} \\
& + g_{3\rho} \left[8 \frac{G^3}{r} \right] && \text{(3\rho coupling)} \\
& + \frac{1}{2} g_{4\rho} [4G^4] && \text{(4\rho coupling)} \\
& - g_1 \left[\frac{16}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} G + G' \right) \left(F' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} G (1 - \cos F \cos \varphi) \right\} \right] && \text{(\partial\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\
& - g_2 \left[\frac{8}{r^2} G^2 (1 - \cos F \cos \varphi) \right] && \text{(2\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\
& + g_3 \left[\frac{16}{r^3} G \left\{ 3 \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1 - \cos F \cos \varphi) \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \right] && \text{(\rho-2}\alpha\text{-}\beta \text{ coupling)} \\
& - g_4 \left[\frac{16}{r^2} G^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right] && \text{(\rho-\partial\rho-\beta coupling)} \\
& - g_5 \left[\frac{8}{r} G^3 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right] && \text{(3\rho-\beta coupling)} \\
& + g_6 [4G^2 (F'^2 + \varphi'^2)] && \text{(2\rho-2}\alpha \text{ coupling)} \\
& + g_7 \left[\frac{8}{r^2} G^2 \left\{ 3 \sin^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right\} \right] && \text{(2\rho-2}\beta \text{ coupling)} \\
& \left. \right\} && \text{(3.2.98)}
\end{aligned}$$

また以下ではこの作用を単に

$$S_{\text{SO}(3)}[F(r), \varphi(r), G(r)] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{SO}(3)}(F(r), \varphi(r), G(r)) \quad (3.2.99)$$

と書くこともある。

ここで上の表式 (3.2.98) からわかることとして、chiral term 以外の部分については chiral profile function $F(r), \varphi(r)$ の入れかえについて対称であることを指摘しておく。

3.3 ホログラフィック QCD における SO(3) ソリトン解

前節において、ホログラフィック QCD での SO(3) ソリトンに対する作用の表式を得た。以下ではこの作用の下でソリトン解を求める方法について述べる。

3.3.1 Euler-Lagrange 方程式

ホログラフィック QCD における SO(3) ソリトン解は、上で導出した作用 (3.2.98) を用いて求めることができる。SO(3) ヘッジホッグ解は 3 つの profile function $F(r), \varphi(r), G(r)$ によって決定されるので、SO(3) ソリトン解は作用 (3.2.98) から導かれる $F(r), \varphi(r), G(r)$ それぞれの Euler-Lagrange 方程式の解によって与えられる。

作用 (3.2.98) の下での profile function に対する Euler-Lagrange 方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F(r)} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F'(r)} \right) \\
&= f_\pi^2 (2 \sin F \cos \varphi - 2rF' - r^2 F'') + \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{r^2} \{ 2 \sin F \cos \varphi + \sin 2F(1 - 2 \cos 2\varphi) \} \right. \\
&\quad \left. - 2F''(1 - \cos F \cos \varphi) - 2\varphi'' \sin F \sin \varphi - (F'^2 + \varphi'^2) \sin F \cos \varphi - 2F'\varphi' \cos F \sin \varphi \right] \\
&\quad + 16g_1 \left[(2G' + rG'') \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{G}{r} \sin F \cos \varphi \right] - 8g_2 \cdot G^2 \sin F \cos \varphi \\
&\quad + 16g_3 \frac{G}{r} \left[3 \left(\cos F \sin \frac{F}{2} + \frac{1}{2} \sin F \cos \frac{F}{2} \right) \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (1 - \cos F \cos \varphi) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin F \cos \varphi \right] - 8g_4 \cdot G^2 \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 4g_5 \cdot rG^3 \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\
&\quad - 8g_6 [2rG^2 F' + r^2 G(2G' F' + GF'')] + 4g_7 \cdot G^2 \left[\sin F(1 - 2 \cos \varphi) + 2 \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(r)} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'(r)} \right) \\
&= f_\pi^2 \left(2 \sin \varphi \cos F - \frac{2}{3} r \varphi' - \frac{1}{3} r^2 \varphi'' \right) + \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{r^2} \{ 2 \sin \varphi \cos F + \sin 2\varphi (1 - 2 \cos 2F) \} \right. \\
&\quad \left. - 2\varphi'' (1 - \cos \varphi \cos F) - 2F'' \sin \varphi \sin F - (\varphi'^2 + F'^2) \sin \varphi \cos F - 2\varphi' F' \cos \varphi \sin F \right] \\
&\quad + 16g_1 \left[(2G' + rG'') \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} - \frac{G}{r} \sin \varphi \cos F \right] - 8g_2 \cdot G^2 \sin \varphi \cos F \\
&\quad + 16g_3 \frac{G}{r} \left[3 \left(\cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin F \sin \frac{F}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} (1 - \cos \varphi \cos F) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} \right) \sin \varphi \cos F \right] - 8g_4 \cdot G^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} - 4g_5 \cdot rG^3 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} \\
&\quad - 8g_6 [2rG^2 \varphi' + r^2 G(2G' \varphi' + G\varphi'')] + 4g_7 \cdot G^2 \left[\sin \varphi (1 - 2 \cos F) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F}{2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G(r)} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G'(r)} \right) \\
&= 8(2G - 2rG' - r^2 G'') + 8m_\rho^2 \cdot r^2 G + 24g_{3\rho} \cdot rG^2 + 8g_{4\rho} \cdot r^2 G^3 \\
&\quad + 16g_1 \left[r \left\{ F'' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi'' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} (F'^2 + \varphi'^2) \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F' \varphi' \sin \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right\} - \frac{1}{r} (1 - \cos F \cos \varphi) \right] - 16g_2 \cdot G(1 - \cos F \cos \varphi) \\
&\quad + 16g_3 \frac{1}{r} \left[3 \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) (1 - \cos F \cos \varphi) \right] \\
&\quad - 32g_4 \cdot G \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) - 24g_5 \cdot rG^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \\
&\quad + 8g_6 \cdot r^2 G (F'^2 + \varphi'^2) + 16g_7 \cdot G \left[3 \sin^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ただしここに現れる \mathcal{L} は

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \equiv -r^2 \mathcal{L}_{\text{SO}(3)} \\
& \left(L_{\text{SO}(3)} = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \mathcal{L}_{\text{SO}(3)} = -4\pi \int_0^\infty dr \mathcal{L} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

であり、作用 (3.2.98) でのラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{SO}(3)}$ 自身でないことに注意されたい。

上の3式 (3.3.1)-(3.3.3) を連立して解 $F(r), \varphi(r), G(r)$ を求めることにより、ホログラフィック QCD での SO(3) ソリトン解を得ることができる。

3.3.2 SO(3) ソリトンのエネルギー

ところで、SO(3) ソリトンのエネルギーは、今の場合 SO(3) ソリトンの作用を用いて直ちに求まる。というのも、SO(3) ヘッジホッグ解は static soliton 解であるため、そのエネルギー

はラグランジアンを用いて

$$E_{\text{SO}(3)}[F(r), \varphi(r), G(r)] = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{SO}(3)}(F(r), \varphi(r), G(r))$$

と表されるからである。

これから、SO(3) ソリトンのエネルギー（静止質量）は

$$E_{\text{SO}(3)}[F(r), \varphi(r), G(r)] \equiv \int_0^\infty 4\pi dr r^2 \mathcal{E}(F(r), \varphi(r), G(r)) \quad (3.3.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(F(r), \varphi(r), G(r)) \quad (= -\mathcal{L}_{\text{SO}(3)}(F(r), \varphi(r), G(r))) \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \left[2F'^2 + \frac{2}{3}\varphi'^2 + \frac{8}{r^2}(1 - \cos F \cos \varphi) \right] \\ &+ \frac{1}{32e^2} \frac{16}{r^2} \left[(F'^2 + \varphi'^2)(1 - \cos F \cos \varphi) + 2F'\varphi' \sin F \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \{ (1 - \cos F \cos \varphi)^2 + 3 \sin^2 F \sin^2 \varphi \} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[8 \left(\frac{3}{r^2} G^2 + \frac{2}{r} G G' + G'^2 \right) \right] + m_\rho^2 [4G^2] + g_{3\rho} \left[8 \frac{G^3}{r} \right] + \frac{1}{2} g_{4\rho} [4G^4] \\ &- g_1 \left[\frac{16}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} G + G' \right) \left(F' \sin \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \varphi' \cos \frac{F}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{r^2} G (1 - \cos F \cos \varphi) \right\} \right] \\ &- g_2 \left[\frac{8}{r^2} G^2 (1 - \cos F \cos \varphi) \right] \\ &+ g_3 \left[\frac{16}{r^3} G \left\{ 3 \sin F \sin \frac{F}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + (1 - \cos F \cos \varphi) \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \right] \\ &- g_4 \left[\frac{16}{r^2} G^2 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right] - g_5 \left[\frac{8}{r} G^3 \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ &+ g_6 [4G^2 (F'^2 + \varphi'^2)] + g_7 \left[\frac{8}{r^2} G^2 \left\{ 3 \sin^2 \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(1 - \cos \frac{F}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.3.6) \end{aligned}$$

と与えられる。

ホログラフィック QCD での SO(3) ソリトン解を得る方法として前小節で述べたのは、Euler-Lagrange 方程式を解くというものであった。一方これと全く等価な方法として、上で得たエネルギーの表式 (3.3.5) を最小化するような profile function を求める、という方法もある（実際、(3.3.6) 式より $\mathcal{E} = -\mathcal{L}_{\text{SO}(3)}$ であり、エネルギーを profile function について変分してエネルギーを最小化する際に解くべき方程式は Euler-Lagrange 方程式そのものである）。ソリトン解を求める上ではもちろんどちらの方法を用いても構わない。本研究においては、後に見るように、SO(3) ソリトン解を与える profile function を数値的に求める際に後者の方法、すなわちエネルギーを最小化する方法を用いることとする。

3.4 SU(2) ソリトンの有効作用との関係

本章ではこれまで、ホログラフィック QCD から導かれる中間子有効理論におけるソリトン解として SO(3) ヘッジホッグ解を採用し、SO(3) ソリトンに対する有効作用やエネルギーの表式を求めてきた。この節では本題から少し離れて、前章で見たホログラフィック QCD での SU(2) ソリトンに対する有効作用を、本章で求めた SO(3) ソリトンの有効作用から得る方法について述べる。

結論を先に述べてしまうと、SU(2) ソリトンの作用は SO(3) ソリトンの作用 (3.2.98) と以下の関係にある。

$$S_{\text{SU}(2)}[\tilde{F}(r), \tilde{G}(r)] = \frac{1}{4} S_{\text{SO}(3)}[F(r) = 2\tilde{F}(r), \varphi(r) = 0, G(r) = 2\tilde{G}(r)] \quad (3.4.1)$$

すなわち SO(3) ソリトンの有効作用において、profile function のうち φ を 0 にし、 F と G を 2 倍した上で、全体を 1/4 倍すると SU(2) ソリトンの作用に帰着するのである。ここで SU(2) の profile function は SO(3) のものと区別するためにチルダを付してある。

上の関係式 (3.4.1) は、SO(3) ソリトンの作用 (3.2.98) の具体形を用いてあらわに確かめることができる。ここではそれを作用の各項に対して逐一行うことはしないが、その手順について簡潔に述べておく。

各項を見る際に、まず $\varphi = 0$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} 1 - \cos F \cos \varphi &\xrightarrow{\varphi=0} 1 - \cos F \\ &= -2 \sin^2 \frac{F}{2} \end{aligned}$$

にのみ注意して、4 をくくり出すよう作用を変形すると、

$$\mathcal{L}_{\text{SO}(3)}(F, \varphi = 0, G) = 4\mathcal{L}_{\text{SU}(2)}(\tilde{F} = F/2, \tilde{G} = G/2) \quad (3.4.2)$$

が得られる。これが (3.4.1) を与えることは明らかである。

このように、作用の間の関係式 (3.4.1) は具体的な考察から直接確かめることができるが、SO(3) の作用から SU(2) の作用を導くための操作に対して、より一般的な視点から説明を与えることもできる。

まずカイラル場と ρ 中間子場に対する SU(2) ヘッジホッグ解は、前章において

$$\tilde{U} = \exp[i(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{x}})\tilde{F}] \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{\rho}_0 = 0, \quad \tilde{\rho}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j \tau_k \tilde{G} \quad (3.4.4)$$

と与えられた。ここで τ_i は Pauli 行列である。

一方、SO(3) ヘッジホッグ解は

$$U = \exp[i\{(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi\}] \quad (3.4.5)$$

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j \Lambda_k G \quad (3.4.6)$$

ここで Λ_i は $\mathfrak{so}(3)$ の生成子である。この 2通りの Ansatz の違いは以下の 2点である。

- profile function の個数が異なる：
SU(2) では (\tilde{F}, \tilde{G}) の 2つ、SO(3) では (F, φ, G) の 3つ
- 回転の生成子が異なる：
SU(2) では $\{\tilde{\Lambda}_i = \tau_i/2 \in \mathfrak{su}(2)\}$ 、SO(3) では $\{\Lambda_i \in \mathfrak{so}(3)\}$

特に profile function に関する大きな違いとして、SO(3) の持つ φ が SU(2) には存在しない。そこで SO(3) の Ansatz において $\varphi = 0$ としてみると、

$$U|_{\varphi=0} = \exp[i(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F] \quad (3.4.7)$$

となり、上の SU(2) の Ansatz \tilde{U} と同じ形になることがわかる。よって $\varphi = 0$ の下では SU(2) と SO(3) の Ansatz がそれぞれ同じ形を持つ。

$\varphi = 0$ の下での 2つの Ansatz 間の差異をより詳しく見るために、今度は回転の生成子に注目する。SU(2) の Ansatz は Pauli 行列 τ_i で書かれているが、これを $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 Λ_i を用いて書かれた SO(3) の Ansatz と比較する際には、むしろ $\mathfrak{su}(2)$ の生成子 $\tilde{\Lambda}_i = \tau_i/2$ で表したものを考えるべきである。SU(2) についてそのように書き直した上で、それぞれの Ansatz を $\varphi = 0$ の下で比較すると以下ようになる。

SU(2)	SO(3)
$\tilde{U} = \exp[i(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \cdot \hat{\mathbf{x}})2\tilde{F}]$	$U _{\varphi=0} = \exp[i(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F]$
$\tilde{\rho}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j \tilde{\Lambda}_k 2\tilde{G}$	$\rho_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}^j \Lambda_k G$

これから SU(2) と SO(3) の Ansatz の間には、profile function について

$$2\tilde{F} \leftrightarrow F \quad 2\tilde{G} \leftrightarrow G \quad (3.4.8)$$

という対応関係があることが見て取れる。

以上が SU(2) と SO(3) の作用の関係式 (3.4.1) での profile function に対する操作

$$F \rightarrow 2\tilde{F} \quad \varphi \rightarrow 0 \quad G \rightarrow 2\tilde{G} \quad (3.4.9)$$

についての説明である。残るは全体に掛かる 1/4 の因子についてであるが、これは Ansatz に用いている Lie 代数の基底が SU(2) と SO(3) とでは生成子として因子が 2 だけずれていることに由来する。そのことを見るには、有効作用の元となる D8 ブレーン上の 5次元 Yang-Mills 作用まで一度さかのぼって考えると見通しが良い。

D8 ブレーン上の 5 次元 Yang-Mills 作用 (2.2.62) は

$$S_{\text{D8}}^{\text{DBI}} \simeq -\kappa \int d^4x dz \text{tr} \left(\frac{1}{2} K^{-1/3} F_{\mu\nu}^2 + K F_{\mu z}^2 \right) \quad (3.4.10)$$

と表された。ここに現れるトレース

$$\text{tr}(F_{MN}F_{PQ}) \quad (M, N, P, Q = 0-3, z) \quad (3.4.11)$$

に注目して、これが SU(2) と SO(3) それぞれの Ansatz に対してどのようにふるまうかを調べる。まず上の作用に現れる field strength F_{MN} は N_f 枚の D8 ブレーン上での SU(N_f) ゲージ理論を記述するものであり、 $\mathfrak{su}(N_f)$ に値を持つゲージ場 A_M を用いて

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N] \in \mathfrak{su}(N_f) \quad (3.4.12)$$

と表された。この $\mathfrak{su}(N_f)$ に値を持つ field strength によって書かれた 5 次元 Yang-Mills 作用の下で、ゲージ場 A_M を

$$A_z = 0 \quad (3.4.13)$$

$$A_\mu = l_\mu \psi_+ + r_\mu \psi_- + \rho_\mu \psi_1 \in \mathfrak{su}(N_f) \quad (3.4.14)$$

とすることで、中間子の有効理論を導くことができるのであった。ここで l_μ, r_μ は

$$l_\mu = \frac{1}{i} \xi^\dagger \partial_\mu \xi \in \mathfrak{su}(N_f) \quad (3.4.15)$$

$$r_\mu = \frac{1}{i} \xi \partial_\mu \xi^\dagger \in \mathfrak{su}(N_f) \quad (3.4.16)$$

また

$$\xi \in \text{SU}(N_f) \quad (3.4.17)$$

であり、 l_μ, r_μ, ρ_μ は全て $\mathfrak{su}(N_f)$ に値を持つ関数である。これらが SU(2) 及び $\varphi = 0$ での SO(3) の Ansatz に対してそれぞれどのようなようになるかを考えてみると、SU(2) ヘッジホッグ解については l_μ, r_μ, ρ_μ がそれぞれ $\mathfrak{su}(2)$ に値を持つ関数となることは上に述べたとおりである。一方 SO(3) ヘッジホッグ解については、まず Ansatz の表式から ρ_i が $\mathfrak{so}(3)$ に値を持つことは明らかである。また $\varphi = 0$ の下で ξ は

$$\xi = \exp[i(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F/2] \quad (3.4.18)$$

であり、 \exp の引数は $\mathfrak{so}(3)$ に値を持っているので、その結果 l_μ, r_μ もまた $\mathfrak{so}(3)$ に値を持っていることが示せる。よってこれらの結果をゲージ場 (3.4.14) 式に用いると、結局それぞれの Ansatz について

- SU(2) の Ansatz に対しては $A_\mu \in \mathfrak{su}(2)$
- SO(3) の Ansatz で $\varphi = 0$ としたものに対しては $A_\mu \in \mathfrak{so}(3)$

であることがわかる。また Lie 代数 $\mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(3)$ はそれぞれかっこ積 $[\cdot, \cdot]$ について閉じているので、各 Ansatz に対する field strength もそれぞれ対応する Lie 代数に値を持つことが言える。

これらを踏まえて field strength のトレース (3.4.11) を見てみると、まず SO(3) ヘッジホッグ解については $F_{MN} \in \mathfrak{so}(3)$ より、 F_{MN} は Λ_i の線形結合で表される。これを $F \sim \Lambda$ と書くことにすると、それらのトレースは

$$\mathrm{tr}(FF) \sim \mathrm{tr}(\Lambda\Lambda) \quad (3.4.19)$$

となる。一方 SU(2) の場合も $F_{MN} \in \mathfrak{su}(2)$ より、field strength は τ_i の線形結合として表され、上と同様に

$$\mathrm{tr}(FF) \sim \mathrm{tr}(\tau\tau) \quad (3.4.20)$$

である。

ここでトレースについて、SO(3) は

$$\mathrm{tr}(\Lambda_i \Lambda_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (3.4.21)$$

であるのに対し、SU(2) では

$$\mathrm{tr}(\tau_i \tau_j) = 2 \delta_{ij} \quad (3.4.22)$$

あるいは

$$\mathrm{tr}(\tilde{\Lambda}_i \tilde{\Lambda}_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (\tilde{\Lambda}_i = \tau_i/2) \quad (3.4.23)$$

であったことに注意する必要がある。SO(3) と SU(2) の比較をする上では、同じように規格化された Λ_i と $\tilde{\Lambda}_i$ とを用いて行うのが自然であり、その考えに基づいてそれぞれの Ansatz に対する作用 S を比較すると

SU(2)	SO(3)
$S \sim \mathrm{tr}(\tau\tau) = 4 \mathrm{tr}(\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})$	$S \sim \mathrm{tr}(\Lambda\Lambda)$

となり、SO(3) と SU(2) とでは 4 だけ因子がずれることが見て取れる。

かくして、(3.4.1) 式での作用全体にかかる $1/4$ の因子は、Ansatz に用いていたそれぞれの Lie 代数の基底 (Λ_i と τ_i) を生成子に書き直して見たときに 2 だけ因子がずれていることに由来すると説明することができる^{*1}。

このようにして手に入れた作用の間の関係式 (3.4.1) によって、我々は $SO(3)$ の作用から $SO(3)$ ソリトンのみならず、 $SU(2)$ ソリトンをも調べることができる。その点においてこの関係式は非常に重宝する。

^{*1} ここでの説明と称した一連の記述は、もっともらしくはあるものの、これらはいくまで“説明”であり、関係式 (3.4.1) をより一般的な視点から演繹的に証明できたわけではない。例えば field strength F_{MN} は上で述べたように、ある Ansatz に対してそれに対応する Lie 代数に値を持つことがわかっており、Lie 代数の適当な基底を用いてその線形結合として表すことができるが、その基底の取り方は通常どのように取っても一向構わない。上の説明では特に $su(2)$ の基底として τ_i を取っていたが、本来なら初めからこれを $su(2)$ の生成子 $\tilde{\Lambda}_i$ に取っても良かったのである。しかしそうするとここでの $1/4$ の因子の説明は成り立たないことになる。もちろん関係式 (3.4.1) は 2 つの Ansatz の持つ性質によるものであり、用いているそれぞれの Lie 代数の基底 Λ_i, τ_i の相違点及び類似点と密接に関係していると考えられるが、その視点から一般的な証明をこの関係式に対して与えることは、残念ながら現状敵っていない。ただ、そのような不足はあるものの、関係式 (3.4.1) 自身は作用の具体形から直接示すことのできる厳密に正しい式であることに変わりはない。

第 4 章

ホログラフィック QCD に基づく 数値解析

前章では、ホログラフィック QCD において H ダイバリオンを記述するための有効作用を導出した。以下ではその有効作用 (3.2.98) に基づき、H ダイバリオンを記述する SO(3) ソリトン解を数値的に求める [46]。またその解に対してソリトンの質量や半径などを計算し、これを SU(2) ソリトン解と比較することでカイラル極限における H ダイバリオンの性質を調べる。特にここでの質量の比較は、本研究の主題の一つでもあるカイラル極限での H ダイバリオンの安定性を考察する上で重要である。また Skyrme 模型による H ダイバリオンの記述との比較も行い、本研究で用いたホログラフィック QCD でのバリオンの記述の特徴について考察する。

4.1 解の配位

前章 3.3 節において、有効作用 (3.2.98) の下でホログラフィック QCD での SO(3) ソリトン解を求める方法について述べた。そこでも少し触れたように、本研究では SO(3) ソリトン解を得るための手段として、エネルギーを最小化するような SO(3) ソリトンの profile function を求める方法を採用する。以下ではまずその数値的手法について述べる。

4.1.1 エネルギー最小化の方法

3.3.2 において、SO(3) ソリトンのエネルギーは

$$E_{\text{SO}(3)}[F(r), \varphi(r), G(r)] \equiv \int_0^\infty 4\pi dr r^2 \mathcal{E}(F(r), \varphi(r), G(r)) \quad (4.1.1)$$

という形で表された。これを数値的に扱うためには座標を離散化して積分を離散和で書き直す必要がある。以下では離散的な profile function をそれぞれ

$$F(r) \rightarrow X_I \quad \varphi(r) \rightarrow Y_I \quad G(r) \rightarrow Z_I \quad (4.1.2)$$

と表記する。ここで I は離散化した座標を表すラベルであり、元の座標で $r = 0$ の点を $I = 1$ に対応させ、 $I = 1, 2, \dots$ とする。このときエネルギーは

$$E(X_1, \dots, X_I, \dots; Y_1, \dots, Y_I, \dots; Z_1, \dots, Z_I, \dots) \quad (4.1.3)$$

の形で表される。これを最小化する手続きについて述べよう。初めに X_I, Y_I, Z_I ($I = 1, 2, \dots$) についてある配位が与えられており、そこから X_I, Y_I, Z_I をそれぞれどのように変えていけばエネルギー E を最小化できるかを考える。ある X_I に注目し、これを両隣の X_{I+1}, X_{I-1} を用いて次のように表してみる。

$$X_I = XA_I + \Delta X \quad (4.1.4)$$

ただしここで XA_I は X_{I+1} と X_{I-1} の平均

$$XA_I \equiv \frac{X_{I+1} + X_{I-1}}{2} \quad (4.1.5)$$

であり、 ΔX はその平均からのずれを表す。このとき、他の配位は変えずに X_I だけを変化させることは、ずれ ΔX を動かすことに対応しており、このように表すと、与えられた配位の中でエネルギーをより小さくする X_I を見出す上での見通しが良くなる。実際、 X_I を (4.1.4) 式で表し、エネルギーの表式を ΔX で展開すると、

$$\begin{aligned} E(X_I = XA_I + \Delta X; X_{J \neq I}, Y_J, Z_J) \\ = \bar{E} + AX_I(\Delta X)^2 - 2BX_I(\Delta X) + \mathcal{O}((\Delta X)^3) \end{aligned}$$

ここで ΔX は十分小さいと仮定して、3次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} &= \bar{E} + AX_I \left(\Delta X - \frac{BX_I}{AX_I} \right)^2 - \frac{(BX_I)^2}{AX_I} \\ &\geq \bar{E} - \frac{(BX_I)^2}{AX_I} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

となるので、エネルギーをより小さくするような X_I は (4.1.6) の等号が成立するような ΔX によって与えられることがわかる。よってエネルギーを最小化する手続きとして、与えられた配位に対し各 X_I の値を順に

$$X_I \rightarrow XA_I + \frac{BX_I}{AX_I} \quad (4.1.7)$$

に変えてゆくという操作を考えることができる。また Y_I, Z_I についても全く同様の操作を行えばよい。すなわち

$$Y_I = YA_I + \Delta Y \quad \left(YA_I \equiv \frac{Y_{I+1} + Y_{I-1}}{2} \right) \quad (4.1.8)$$

$$Z_I = ZA_I + \Delta Z \quad \left(ZA_I \equiv \frac{Z_{I+1} + Z_{I-1}}{2} \right) \quad (4.1.9)$$

と書いて、エネルギーを $\Delta Y, \Delta Z$ についてそれぞれ展開した表式

$$\begin{aligned} E(Y_I = YA_I + \Delta Y; X_J, Y_{J \neq I}, Z_J) \\ = \bar{E} + AY_I(\Delta Y)^2 - 2BY_I(\Delta Y) + \mathcal{O}((\Delta Y)^3) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} E(Z_I = ZA_I + \Delta Z; X_J, Y_J, Z_{J \neq I}) \\ = \bar{E} + AZ_I(\Delta Z)^2 - 2BZ_I(\Delta Z) + \mathcal{O}((\Delta Z)^3) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

に現れる量 AY_I, BY_I あるいは AZ_I, BZ_I を用いて、各 Y_I, Z_I を順に

$$Y_I \rightarrow YA_I + \frac{BY_I}{AY_I} \quad Z_I \rightarrow ZA_I + \frac{BZ_I}{AZ_I} \quad (4.1.12)$$

と変えてゆくのである。

こうして得た最小化の手続きを実際に数値的に行うことを考える。離散化された座標間の間隔を A とおき、(4.1.1) 式において

$$\int_0^\infty \rightarrow \sum_{I=1}^\infty \quad dr \rightarrow A \quad r \rightarrow r_I \equiv (I-1)A \quad (4.1.13)$$

という置き換えをすると、エネルギー積分は離散和として

$$E(X_1, \dots; Y_1, \dots; Z_1, \dots) = 4\pi \sum_{I=1}^\infty A r_I^2 \mathcal{E}_I \quad (4.1.14)$$

の形に表される。これは $A \rightarrow 0$ の極限で元のエネルギー積分 (4.1.1) を再現するとされる。

$$\lim_{A \rightarrow 0} E(X_1, \dots; Y_1, \dots; Z_1, \dots) = E_{\text{SO}(3)}[F(r), \varphi(r), G(r)] \quad (4.1.15)$$

しかし実際の数値計算において $A \rightarrow 0$ の極限を取ることは不可能であり、以下 A は有限の座標間隔を表すものとする。また上の離散和の表式では I についての和を 1 から ∞ まで足し上げているが、これも実際の数値計算においては実行できない。そのため以下では元の r 積分を有限区間 $[0, R]$ での積分 (ただし $R > 0$ は有限) とし、区間 $[0, R]$ を座標間隔 A で $N-1$ 等分したものを離散化された座標に用いる。このとき $I = 1, 2, \dots, N$ であり、

$$A \equiv \frac{R}{N-1} \quad r_1 = 0 \quad r_N = R \quad (4.1.16)$$

またエネルギーは

$$E(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N; Z_1, \dots, Z_N) = 4\pi A \sum_{I=1}^N r_I^2 \mathcal{E}_I \quad (4.1.17)$$

と与えられる。

離散化された $\text{SO}(3)$ ソリトンのエネルギー (4.1.17) の具体的な表式を以下に記しておく。

微分を含む項は差分に置き換えるなどして (3.3.6) 式を離散化すると、以下を得る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N r_I^2 \mathcal{E}_I \\
&= \frac{f_\pi^2}{2} \left[\sum_{I=1}^{N-1} \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} + \sum_{I=1}^N 4(1 - \cos X_I \cos Y_I) \right] \\
&+ \frac{1}{2e^2} \left[\sum_{I=1}^{N-1} \left[\left\{ \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \frac{X_{I+1} - X_I}{A} \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{I=1}^N \frac{1}{r_I^2} \left\{ (1 - \cos X_I \cos Y_I)^2 + 3 \sin^2 X_I \sin^2 Y_I \right\} \right] \\
&+ 4 \left[\sum_{I=1}^{N-1} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right) (Z_{I+1} + Z_I) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right)^2 \right\} + \sum_{I=1}^N 3Z_I^2 \right] \\
&+ \sum_{I=1}^N [4m_\rho^2 r_I^2 Z_I^2 + 8g_{3\rho} r_I Z_I^3 + 2g_{4\rho} r_I^2 Z_I^4] \\
&- 16g_1 \left[\sum_{I=1}^{N-1} \left\{ \frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right\} \right. \\
&\quad \times \left\{ \frac{X_{I+1} - X_I}{A} \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{I=1}^N \frac{Z_I}{r_I} (1 - \cos X_I \cos Y_I) \right] - 8g_2 \sum_{I=1}^N Z_I^2 (1 - \cos X_I \cos Y_I) \\
&+ 16g_3 \sum_{I=1}^N \frac{Z_I}{r_I} \left\{ 3 \sin X_I \sin \frac{X_I}{2} \sin Y_I \sin \frac{Y_I}{2} + (1 - \cos X_I \cos Y_I) \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \right\} \\
&- 16g_4 \sum_{I=1}^N Z_I^2 \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) - 8g_5 \sum_{I=1}^N r_I Z_I^3 \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \\
&+ g_6 \sum_{I=1}^{N-1} \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 (Z_{I+1} + Z_I)^2 \left\{ \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} \\
&+ 8g_7 \sum_{I=1}^N Z_I^2 \left\{ 3 \sin^2 \frac{X_I}{2} \sin^2 \frac{Y_I}{2} + \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right)^2 \right\} \tag{4.1.18}
\end{aligned}$$

またこの表式を用いて AX_I, BX_I などの表式も得ることができる。ここでは導出はしないが、結果は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& AX_I \\
&= \frac{f_\pi^2}{2} \left[\frac{1}{A^2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} + 2 \cos XA_I \cos Y_I \right] \\
&+ \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{A^2} \left\{ 2 - \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{A^2} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \left\{ \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 \right\} \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_I - X_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \\
&- \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A^2} \left\{ \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) + \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{8} \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \right\} \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \\
&+ \frac{Y_I - Y_{I-1}}{A^2} \left\{ \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) - \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{8} \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \right\} \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{r_I^2} \left\{ \cos XA_I \cos Y_I + \cos 2XA_I (3 \sin^2 Y_I - \cos^2 Y_I) \right\} \Big] \\
&+ g_1 \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[8 \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right\} \right. \\
&- \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} + \left(r_I - \frac{A}{2} \right) \frac{Z_I - Z_{I-1}}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[8 \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \right\} - \frac{8}{r_I} Z_I \cos XA_I \cos Y_I \right] \\
&- 4g_2 Z_I^2 \cos XA_I \cos Y_I \\
&+ 8g_3 \frac{Z_I}{r_I} \left[3 \left\{ \cos XA_I \cos \frac{XA_I}{2} - \frac{5}{4} \sin XA_I \sin \frac{XA_I}{2} \right\} \sin Y_I \sin \frac{Y_I}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ 1 - \frac{5}{4} \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right\} \cos XA_I \cos Y_I + \sin XA_I \sin \frac{XA_I}{2} \cos Y_I \cos \frac{Y_I}{2} \right] \\
&- 2g_4 Z_I^2 \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} - g_5 r_I Z_I^3 \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \\
&+ \frac{4g_6}{A^2} \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} \right)^2 + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} \right)^2 \right] \\
&+ 2g_7 Z_I^2 \left[\cos XA_I (1 - 2 \cos Y_I) + \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right] \tag{4.1.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& BX_I \\
&= \frac{f_\pi^2}{2} \left[\frac{1}{A^2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 - \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} - 2 \sin XA_I \cos Y_I \right] \\
&+ \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{A^2} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \left\{ -\cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&- \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 \right\} \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \\
&- \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_I - X_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A^2} \left\{ \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{2} \right) \right\} \\
&- \frac{Y_I - Y_{I-1}}{A^2} \left\{ \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{2} \right) \right\} \\
&- \frac{1}{2r_I^2} \left\{ 2 \sin XA_I \cos Y_I + \sin 2XA_I (3 \sin^2 Y_I - \cos^2 Y_I) \right\} \Big] \\
&- 2g_1 \left[\left\{ \frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[4 \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \sin \left(\frac{3X_{I+1} + X_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right\} \right. \\
&- \left\{ \frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} + \left(r_I - \frac{A}{2} \right) \frac{Z_I - Z_{I-1}}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[4 \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \sin \left(\frac{X_{I+1} + 3X_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \right\} - \frac{4}{r_I} Z_I \sin XA_I \cos Y_I \right] \\
&+ 4g_2 Z_I^2 \sin XA_I \cos Y_I \\
&- 8g_3 \frac{Z_I}{r_I} \left[3 \left(\cos XA_I \sin \frac{XA_I}{2} + \frac{1}{2} \sin XA_I \cos \frac{XA_I}{2} \right) \sin Y_I \sin \frac{Y_I}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} (1 - \cos XA_I \cos Y_I) + \left(1 - \cos \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \sin XA_I \cos Y_I \right] \\
&+ 4g_4 Z_I^2 \sin \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} + 2g_5 r_I Z_I^3 \sin \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \\
&+ \frac{4g_6}{A^2} \frac{X_{I+1} - X_{I-1}}{2} \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} \right)^2 - \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} \right)^2 \right] \\
&- 4g_7 Z_I^2 \left[\sin XA_I \left(\frac{1}{2} - \cos Y_I \right) + \sin \frac{XA_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right] \tag{4.1.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& AY_I \\
&= \frac{f_\pi^2}{2} \left[\frac{1}{3A^2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} + 2 \cos X_I \cos YA_I \right] \\
&+ \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{A^2} \left\{ 2 - \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{A^2} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \left\{ \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \\
&- \frac{X_{I+1} - X_I}{A^2} \left\{ \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) + \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{8} \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \right\} \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \\
&+ \frac{X_I - X_{I-1}}{A^2} \left\{ \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) - \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{8} \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \right\} \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{r_I^2} \left\{ \cos YA_I \cos X_I + \cos 2YA_I (3 \sin^2 X_I - \cos^2 X_I) \right\} \Big] \\
&+ g_1 \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[8 \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{X_{I+1} - X_I}{A} \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \right\} \right. \\
&- \frac{1}{2} \left\{ \frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} + \left(r_I - \frac{A}{2} \right) \frac{Z_I - Z_{I-1}}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[8 \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{X_I - X_{I-1}}{A} \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \right\} - \frac{8}{r_I} Z_I \cos YA_I \cos X_I \right] \\
&- 4g_2 Z_I^2 \cos YA_I \cos X_I \\
&+ 8g_3 \frac{Z_I}{r_I} \left[3 \left\{ \cos YA_I \cos \frac{YA_I}{2} - \frac{5}{4} \sin YA_I \sin \frac{YA_I}{2} \right\} \sin X_I \sin \frac{X_I}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ 1 - \frac{5}{4} \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \right\} \cos YA_I \cos X_I + \sin YA_I \sin \frac{YA_I}{2} \cos X_I \cos \frac{X_I}{2} \right] \\
&- 2g_4 Z_I^2 \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} - g_5 r_I Z_I^3 \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \\
&+ \frac{4g_6}{A^2} \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} \right)^2 + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} \right)^2 \right] \\
&+ 2g_7 Z_I^2 \left[\cos YA_I (1 - 2 \cos X_I) + \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \right] \tag{4.1.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& BY_I \\
&= \frac{f_\pi^2}{2} \left[\frac{1}{3A^2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 - \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} - 2 \sin YA_I \cos X_I \right] \\
&+ \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{A^2} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \left\{ -\cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \right\} \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{X_{I+1} - X_I}{A^2} \left\{ \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{X_I - X_{I-1}}{A^2} \left\{ \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2r_I^2} \left\{ 2 \sin YA_I \cos X_I + \sin 2YA_I (3 \sin^2 X_I - \cos^2 X_I) \right\} \Big] \\
&- 2g_1 \left[\left\{ \frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} + \left(r_I + \frac{A}{2} \right) \frac{Z_{I+1} - Z_I}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[4 \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{X_{I+1} - X_I}{A} \sin \left(\frac{3Y_{I+1} + Y_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \right\} \right. \\
&\quad - \left\{ \frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} + \left(r_I - \frac{A}{2} \right) \frac{Z_I - Z_{I-1}}{A} \right\} \left\{ \frac{1}{A} \left[4 \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \cos \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \right] \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{X_I - X_{I-1}}{A} \sin \left(\frac{Y_{I+1} + 3Y_{I-1}}{8} \right) \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \right\} - \frac{4}{r_I} Z_I \sin YA_I \cos X_I \right] \\
&+ 4g_2 Z_I^2 \sin YA_I \cos X_I \\
&- 8g_3 \frac{Z_I}{r_I} \left[3 \left(\cos YA_I \sin \frac{YA_I}{2} + \frac{1}{2} \sin YA_I \cos \frac{YA_I}{2} \right) \sin X_I \sin \frac{X_I}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} (1 - \cos YA_I \cos X_I) + \left(1 - \cos \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \right) \sin YA_I \cos X_I \right] \\
&+ 4g_4 Z_I^2 \sin \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} + 2g_5 r_I Z_I^3 \sin \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \\
&+ \frac{4g_6}{A^2} \frac{Y_{I+1} - Y_{I-1}}{2} \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_{I+1} + Z_I}{2} \right)^2 - \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \left(\frac{Z_I + Z_{I-1}}{2} \right)^2 \right] \\
&- 4g_7 Z_I^2 \left[\sin YA_I \left(\frac{1}{2} - \cos X_I \right) + \sin \frac{YA_I}{2} \cos \frac{X_I}{2} \right] \tag{4.1.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& AZ_I \\
&= 4 \left[2 + \frac{1}{A^2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} \right] + 4m_\rho^2 r_I^2 + 24g_{3\rho} r_I Z A_I + 12g_{4\rho} r_I^2 Z A_I^2 \\
&- 8g_2 (1 - \cos X_I \cos Y_I) - 16g_4 \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) - 24g_5 r_I Z A_I \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \\
&+ g_6 \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{X_I - X_{I-1}}{A} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \right] + 8g_7 \left[3 \sin^2 \frac{X_I}{2} \sin^2 \frac{Y_I}{2} + \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right)^2 \right] \quad (4.1.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& BZ_I \\
&= 4 \left[\frac{1}{A^2} \frac{Z_{I+1} - Z_{I-1}}{2} \left\{ \left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 - \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \right\} - 2Z A_I \right] \\
&- 4m_\rho^2 r_I^2 Z A_I - 12g_{3\rho} r_I Z A_I^2 - 4g_{4\rho} r_I^2 Z A_I^3 \\
&- 8g_1 \left[\frac{r_I}{A} \left\{ \frac{X_{I+1} - X_I}{A} \sin \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \right. \right. \\
&\quad - \frac{X_I - X_{I-1}}{A} \sin \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \cos \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \\
&\quad + \frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \cos \left(\frac{X_{I+1} + X_I}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_{I+1} + Y_I}{4} \right) \\
&\quad \left. \left. - \frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \cos \left(\frac{X_I + X_{I-1}}{4} \right) \sin \left(\frac{Y_I + Y_{I-1}}{4} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r_I} (1 - \cos X_I \cos Y_I) \right] + 8g_2 Z A_I (1 - \cos X_I \cos Y_I) \\
&- 8g_3 \frac{1}{r_I} \left[3 \sin X_I \sin \frac{X_I}{2} \sin Y_I \sin \frac{Y_I}{2} + (1 - \cos X_I \cos Y_I) \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \right] \\
&+ 16g_4 Z A_I \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) + 12g_5 r_I Z A_I^2 \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right) \\
&- 2g_6 \left[\left(r_I + \frac{A}{2} \right)^2 \frac{3Z_{I+1} + Z_{I-1}}{4} \left\{ \left(\frac{X_{I+1} - X_I}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y_{I+1} - Y_I}{A} \right)^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left(r_I - \frac{A}{2} \right)^2 \frac{Z_{I+1} + 3Z_{I-1}}{4} \left\{ \left(\frac{X_I - X_{I-1}}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y_I - Y_{I-1}}{A} \right)^2 \right\} \right] \\
&- 8g_7 Z A_I \left[3 \sin^2 \frac{X_I}{2} \sin^2 \frac{Y_I}{2} + \left(1 - \cos \frac{X_I}{2} \cos \frac{Y_I}{2} \right)^2 \right] \quad (4.1.24)
\end{aligned}$$

これらを用いて、 $I = 1, N$ での X_I, Y_I, Z_I について与えられる境界条件の下で、上に述べた操作 (4.1.7)、(4.1.12) を X_2, Y_2, Z_2 から $X_{N-1}, Y_{N-1}, Z_{N-1}$ まで順に行い、この手続きを繰り返すこと、最終的にエネルギーを最小化することができる*1。

*1 最小化する汎関数の形によっては、一度 local minimum にはまってしまうとそこから抜け出せず、本来の最小値を与える点まで到達できないこともあるが、今の場合にはそのようなことは起こらないと思われる。

4.1.2 結合定数の値

実際に数値計算を行う際には、理論に現れる種々のパラメータにそれぞれ値を与えておく必要がある。SO(3) ソリトンの有効作用 (3.2.98) に現れる結合定数は $f_\pi, e, m_\rho, g_{3\rho}, g_{4\rho}, g_a (a = 1, \dots, 7)$ であり、第2章 2.3 で述べたように、これらは全てホログラフィック QCD の持つ2つのパラメータ M_{KK}, κ にのみ依存するものであった。そのため、これらの結合定数のうちいずれか2つについて実験値を再現するよう M_{KK} と κ の値を定めれば、残りの結合定数の値は自動的に与えられることとなる。例として、パイ中間子崩壊定数 f_π と ρ 中間子質量 m_ρ の実験値

$$f_\pi = 92.4\text{MeV} \quad m_\rho = 776.0\text{MeV} \quad (4.1.25)$$

を再現するように理論のパラメータを定めると、 M_{KK} と κ の値は

$$M_{\text{KK}} \simeq 948.0\text{MeV} \quad \kappa \simeq 7.46 \times 10^{-3} \quad (4.1.26)$$

となり、このとき残りの結合定数は

$$e \simeq 7.315 \quad (4.1.27)$$

$$g_{3\rho} = g_5 \simeq 5.17 \quad (4.1.28)$$

$$g_{4\rho} \simeq 29.7 \quad (4.1.29)$$

$$g_1 = g_3 \simeq 0.0341 \quad (4.1.30)$$

$$g_2 \simeq 0.180 \quad (4.1.31)$$

$$g_6 \simeq 0.070 \quad (4.1.32)$$

$$g_4 = g_7 = 1 \quad (4.1.33)$$

と与えられる [41]。以下の数値計算では結合定数に対して上の値を用いることとする。

4.1.3 SO(3) ソリトン解

4.1.1 に述べた方法を用いて、以下ではエネルギーを最小化する profile function の配位を求める。解がバリオン数 $B = 2$ の SO(3) ソリトンの境界条件 (3.1.2)、(3.1.9) を満たすよう、 $I = 1, N$ での X_I, Y_I, Z_I に対して条件

$$\begin{aligned} X(1) &= \pi & X(N) &= 0 \\ Y(1) &= \pi & Y(N) &= 0 \\ Z(1) &= 0 & Z(N) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

を課し、この境界条件の下でエネルギーを最小化すると、図 4.1 のようになる。ここで積分範囲の上端 $R (= r_N, N$ 番目の座標) は 5 fm とし^{*2}、また $N = 151$ として、範囲 $[0, R]$ を 150

^{*2} より大きく取っても結果に有意な差はないことがわかっている。

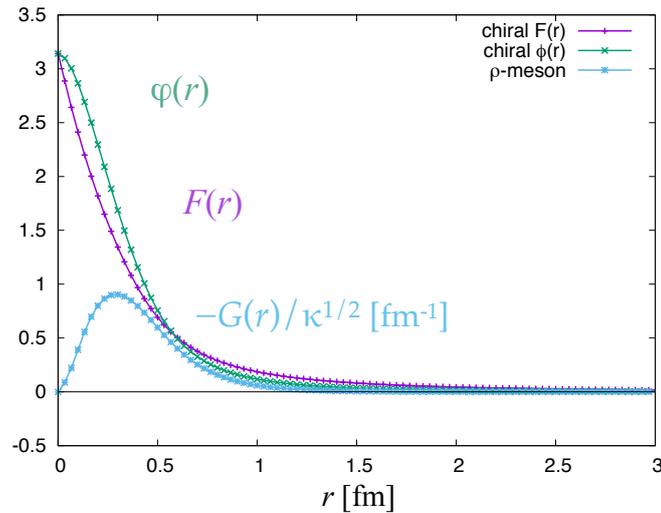


図 4.1 エネルギーを最小化するバリオン数 $B = 2$ の $SO(3)$ ソリトンの profile function $F(r)$, $\varphi(r)$, $G(r)$ の配位。ここで $G(r)$ は見やすくするために符号を反転してスケールを変えてある。

分割した各点 r_I を座標に用いた。このことは以下に示すいずれの結果においても同様である。また ρ 中間子の profile function $G(r)$ については、見やすくするために符号を反転してスケールを変えてある。

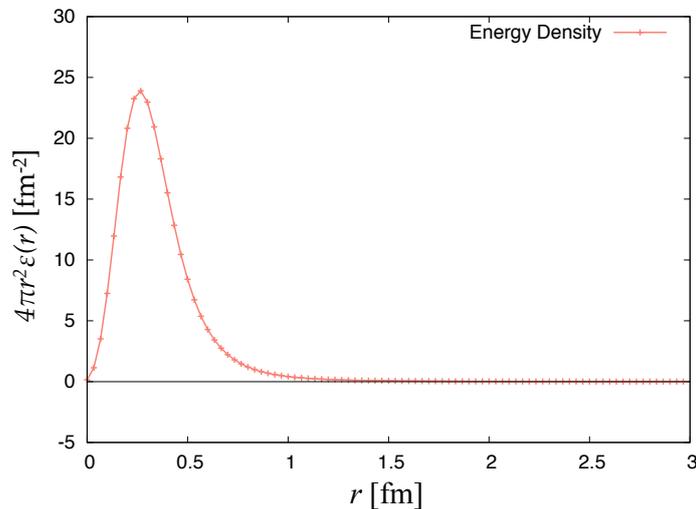


図 4.2 バリオン数 $B = 2$ の $SO(3)$ ソリトン解のエネルギー密度。ただしここではエネルギー密度そのものではなく、それに $4\pi r^2$ をかけたものをプロットしている。

この $SO(3)$ ソリトン解について、エネルギー密度は図 4.2 のようになる。またエネルギー密度 (3.3.6) は、南部-Goldstone ボソン部分 (chiral + Skyrme)、 ρ 中間子部分 (ρ -kinetic + ρ -mass + $3\rho + 4\rho$)、そして NG ボソンと ρ 中間子の相互作用部分 ($g_1 \sim g_7$) という 3 つの部分に分解できるが、それらのエネルギー密度全体に対する各寄与の内訳を図 4.3 に示す。ただ

しこれらの図ではエネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ そのものではなく、それに $4\pi r^2$ をかけたものをプロットしている*3。

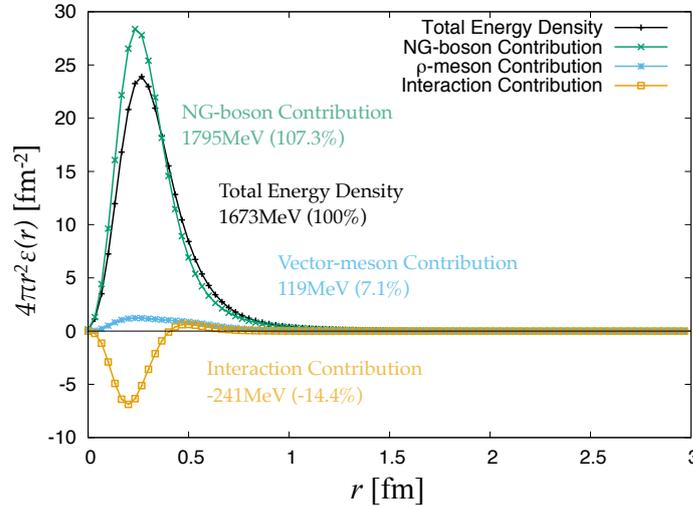


図 4.3 エネルギー密度の各部分の寄与の内訳。ここではその積分値と、それが全エネルギーに対して占める割合も併記している。

このエネルギー密度を積分することで、カイラル極限での H ダイバリオンの質量を求めることができる。上で求めた $SO(3)$ ソリトン解は static soliton であり、そのエネルギー密度の積分によって与えられるエネルギーは静止質量に等しい。よってホログラフィック QCD におけるカイラル極限での H ダイバリオンの静止質量は、バリオン数 $B = 2$ の $SO(3)$ ソリトン解の静止質量として

$$M_H \equiv M_{B=2}^{SO(3)} \simeq 1673\text{MeV} \quad (4.1.35)$$

と求まる。併せてここで、図 4.3 に示したエネルギー密度の各部分の、全エネルギーに対する寄与の内訳を以下の表にまとめておく。

	エネルギー	割合 (%)
全エネルギー	1673MeV	100%
NG ボソン部分	1795MeV	107.3%
ρ 中間子部分	119MeV	7.1%
相互作用部分	-241MeV	-14.4%

またこのとき、H ダイバリオンの半径を計算することもできる。上で得たエネルギー密度を

*3 エネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ そのものは原点付近での振る舞いがやや不安定であり、かつエネルギーの表式における被積分関数は実際 $\mathcal{E}(r)$ ではなく $4\pi r^2 \mathcal{E}(r)$ であるため、プロットする上で興味があるのはむしろ $4\pi r^2 \mathcal{E}(r)$ の方である。

用いて SO(3) ソリトン解の平均二乗半径

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty dr r^2 \cdot r^2 \mathcal{E}(r)}{\int_0^\infty dr r^2 \mathcal{E}(r)} \quad (4.1.36)$$

を計算することができるが、これを H ダイバリオンの半径 r_H の二乗と定義すると、ホログラフィック QCD における H ダイバリオンの半径は、カイラル極限で

$$r_H \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq 0.413 \text{fm} \quad (4.1.37)$$

と与えられる。

4.2 ベクトル中間子の効果

ホログラフィック QCD における H ダイバリオンについて幾つかの情報を得たので、種々の比較を行うことでこの結果についてより詳しく調べていく。初めに以下ではホログラフィック QCD での H ダイバリオンの記述を、同じくソリトン描像を用いた Skyrme 模型による H ダイバリオンの記述と比較する。

ホログラフィック QCD と Skyrme 模型との最大の違いは、ベクトル中間子の有無である。第 2 章でも述べたようにホログラフィック QCD は、パイ中間子の自由度のみで記述された Skyrme 模型にベクトル中間子の自由度を加えることで Skyrme 模型を拡張した模型とみなすことができる。そのためホログラフィック QCD での結果を Skyrme 模型での結果と比較することにより、ホログラフィック QCD においてベクトル中間子がどのような働きをしているのかを明らかにすることができる。ベクトル中間子の有無がバリオンの記述にどう影響するかを以下に見ていこう。

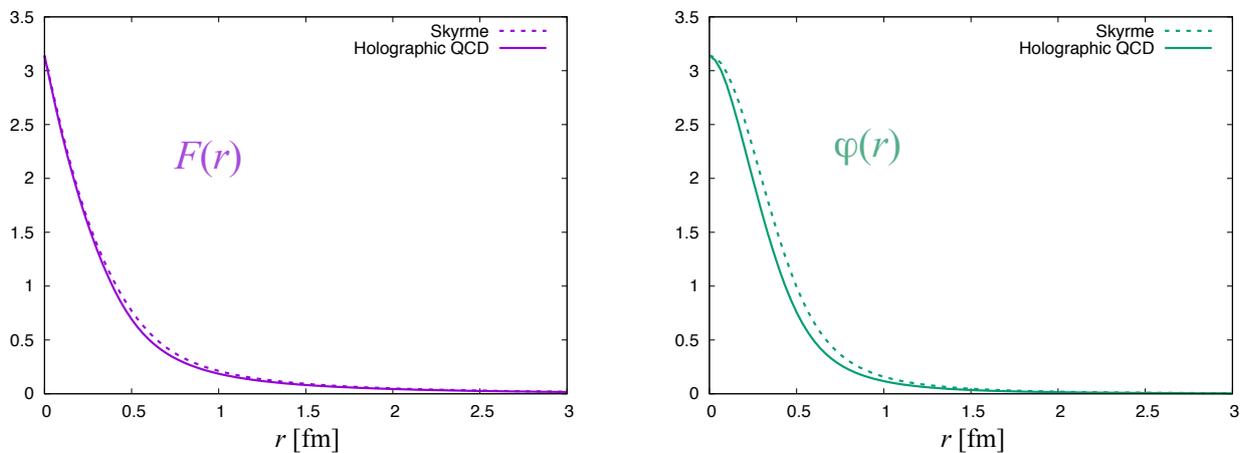


図 4.4 ρ 中間子の有無による chiral profile function $F(r), \varphi(r)$ の差異。Skyrme 模型での profile は破線で、ホログラフィック QCD での profile は実線でそれぞれ描かれており、ベクトル中間子の存在によって破線から実線へと変化する。

ρ 中間子の有無による chiral profile function $F(r), \varphi(r)$ の違いは図 4.4 のようになる。これらの図から、chiral profile function はベクトル中間子の有無によってあまり変化せず、ベクトル中間子の存在によってほんの少しだけ形がしぼむことが見て取れる。

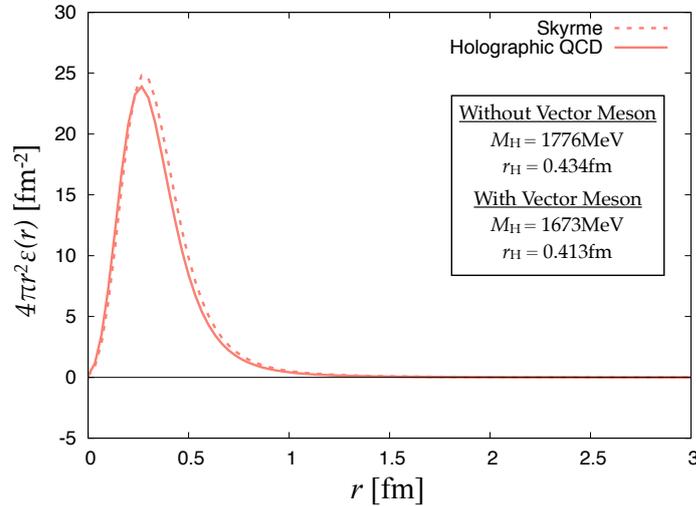


図 4.5 ρ 中間子の有無によるエネルギー密度の差異。Skyrme 模型での profile は破線で、ホログラフィック QCD での profile は実線でそれぞれ描かれており、ベクトル中間子の存在によって破線から実線へと変化する。またそれぞれのエネルギー密度から計算される H ダイバリオンの質量と半径も併記した。

またベクトル中間子の有無によるエネルギー密度の差異を図 4.5 に示す。これについてもまた ρ 中間子の存在による変化はほとんどなく、僅かに形がしぼむ程度である。しかしながら両者のエネルギーを比較してみると、ベクトル中間子の存在によって H ダイバリオンの質量が 100 MeV 程度減少していることがわかる。ここで図 4.3 でのエネルギーの内訳についても併せて考えると、この質量の減少は H ダイバリオン内部での NG ボソンとベクトル中間子の相互作用によって生じているものと考えることができる。またエネルギー密度がしぼんだ結果、半径についてもわずかに小さくなることがわかる。

4.3 バリオンとの比較

次に、ホログラフィック QCD での H ダイバリオンを、同じくホログラフィック QCD において解析されたバリオンの結果と比較する。ホログラフィック QCD でのバリオンについては先行の研究によって既に調べられており [41, 42]、これらの結果を用いて H ダイバリオンとバリオンとをホログラフィック QCD の枠組みにおいて比較することができる。ホログラフィック QCD でのバリオンについての幾つかの先行研究のうち本研究と同様の枠組みを用いているのは、2.3 節の記述の元となった文献 [41] での研究であり、ここでは文献 [41] の結果を本研究での結果と比較することにより H ダイバリオンとバリオンとの比較を行うこととする。そのた

めにまず文献 [41] の結果を以下に示そう。

2.3 節に述べた通り、文献 [41] において、ホログラフィック QCD でのバリオンはバリオン数 $B = 1$ の $SU(2)$ ヘッジホッグ解によって記述された。そして本研究と同様にホログラフィック QCD から $SU(2)$ ソリトンに対する有効作用を導出し、それを数値的に解くことでバリオンの質量や半径が計算された。以下にその結果を示す際、文献 [41] で行った数値計算を繰り返すことは当然可能であるが、一方で我々はこれまで手に入れた道具を用いてそれを行う簡便法を知っている。すなわち前章 3.4 節において述べた $SO(3)$ ソリトンと $SU(2)$ ソリトンそれぞれの作用の間に成り立つ関係式 (3.4.1) を用いることで、上で行った $SO(3)$ ソリトン解に対する数値解析と同様の計算により文献 [41] での $SU(2)$ ソリトン解に対する結果を再現することができるのである。この簡便法についてもう少し具体的に述べておく。まず関係式 (3.4.1) から、エネルギー密度についてもまた同様の関係式

$$\tilde{\mathcal{E}}_{SU(2)}(\tilde{F}(r), \tilde{G}(r)) = \frac{1}{4} \mathcal{E}_{SO(3)}(F(r) = 2\tilde{F}(r), \varphi(r) = 0, G(r) = 2\tilde{G}(r)) \quad (4.3.1)$$

が成り立つ。これにより、4.1.1 で述べた $SO(3)$ ソリトンに対する数値的手法において $Y_I \equiv 0$ とし、初期条件を 2 倍にしてエネルギーを最小化する profile function の配位を求め、得られた結果 $\{X_I, Z_I, \mathcal{E}_I\}$ に対し

$$\tilde{X}_I \equiv \frac{X_I}{2} \quad \tilde{Z}_I \equiv \frac{Z_I}{2} \quad \tilde{\mathcal{E}}_I \equiv \frac{\mathcal{E}_I}{4} \quad (4.3.2)$$

とすることで、 $SU(2)$ ソリトン解の配位とエネルギー密度 $\{\tilde{X}_I, \tilde{Z}_I, \tilde{\mathcal{E}}_I\}$ を求めることができる。この手続きによって実際に求めた $SU(2)$ ソリトン解についての結果を図 4.6、図 4.7 に示す。またこの解から計算される $B = 1$ ヘッジホッグバリオンのカイラル極限での質量と半径は

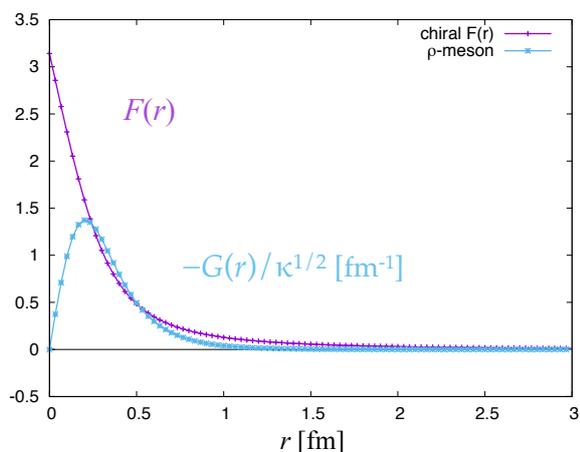


図 4.6 エネルギーを最小化するバリオン数 $B = 1$ $SU(2)$ ソリトンの profile function $F(r)$, $G(r)$ の配位。ここで $G(r)$ は先と同様に符号を反転してスケールを変えてある。

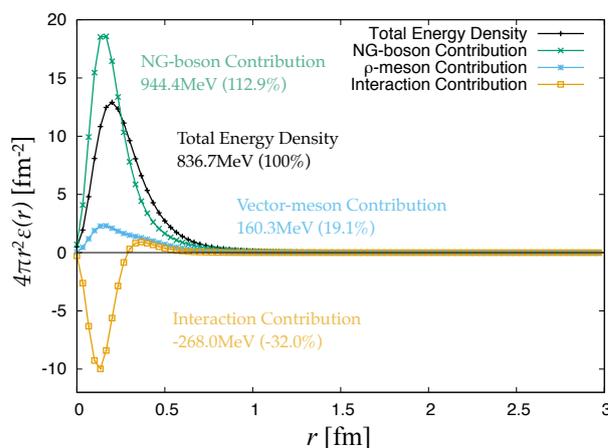


図 4.7 $SU(2)$ ソリトン解のエネルギー密度の各部分の寄与の内訳。ここではその積分値と、それが全エネルギーに対して占める割合も併記している。

$$M_{B=1}^{\text{SU}(2)} \simeq 836.7 \text{MeV} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq 0.362 \text{fm} \quad (4.3.3)$$

となる*4。

この結果を 4.1.3 で得た H ダイバリオンについての結果と比較しよう。まず半径について、(4.1.37)、(4.3.3) 式を比較すると、H ダイバリオンは $B = 1$ ヘッジホッグバリオンよりも半径が大きいことがわかる。3つのクォークからなるバリオンに対し、H ダイバリオンは6つのクォークからなるので、これは自然な結果であろう。

次に質量について比較する。これはカイラル極限での H ダイバリオンの安定性を議論する上で重要である。(4.1.35)、(4.3.3) 式より、H ダイバリオンの質量と $B = 1$ ヘッジホッグバリオン質量については

$$M_H \simeq 2.00 M_{B=1}^{\text{SU}(2)} \quad (4.3.4)$$

なる関係があることがわかる。すなわちホログラフィック QCD において、カイラル極限での H ダイバリオンの質量は SU(2) ヘッジホッグバリオン質量のほぼ2倍である。またこの結果は、カイラル極限での H ダイバリオンの質量が2核子質量よりも小さいことを示唆している。というのも、ホログラフィック QCD における核子は、同じくヘッジホッグ解を用いた Skyrme 模型での核子の記述と同様に、集団座標量子化によりヘッジホッグ配位を回転させて得られるはずである。よってその質量は、ヘッジホッグ配位の慣性モーメント \mathcal{J} を用いて、ヘッジホッグ質量に回転エネルギーを加えたもの

$$M_N = M_{B=1}^{\text{SU}(2)} + \frac{I(I+1)}{2\mathcal{J}} \quad (I = 1/2) \quad (4.3.5)$$

として与えられ、これはヘッジホッグ質量よりも大きく、そのため上の関係 (4.3.4) から

$$M_H < 2M_N \quad (4.3.6)$$

が成り立つと考えられるからである。よって以上の考察から、カイラル極限での H ダイバリオンは強い相互作用に対して安定な束縛状態である、というのが本研究の主張するところである。

念のため上の言葉遣いについて幾つか注意しておく。まずここではカイラル極限に限って話をしているので、上でいう「核子」とはバリオン8重項の総称である。カイラル極限、あるいはより一般に SU(3) フレーバー対称な場合には、バリオン8重項の中での質量差がなくなるため、核子 N も Λ も Σ 、 Ξ も皆同じ質量を持つ。すなわち H ダイバリオン質量と $\Lambda\Lambda$ の閾値とをカイラル極限で比較する際には、H ダイバリオンの質量と2核子質量、すなわち2倍のバリオン8重項質量との比較を行うことになる。またこの事情は当然バリオン10重項について

*4 ここでの値は上の解析を行った原論文 [41] での値とほんの少しずれているが、このずれは主に数値計算の際に用いた R や A などの違いによって生じる計算上の誤差である。H ダイバリオンとの比較を行う際には、原論文 [41] での値よりもむしろ本研究での H ダイバリオンと全く同じパラメータ設定の下で計算された値 (4.3.3) を用いるべきであり、本節ではそのようにして比較を行う。

も同様であり、カイラル極限において Δ 、 Σ^* 、 Ξ^* 、 Ω はそれぞれ同じ質量

$$M_{10} = M_{B=1}^{\text{SU}(2)} + \frac{I(I+1)}{2\mathcal{J}} \quad (I = 3/2) \quad (4.3.7)$$

を持つ。

第 5 章

結論と展望

本研究では、一般のクォーク質量領域における H ダイバリオンについての研究として、中でも格子 QCD による数値解析が適用できない領域の一つであるカイラル極限 ($m_u = m_d = m_s = 0$) での H ダイバリオンを対象に、QCD の非摂動領域に対する解析的な手法であるホログラフィック QCD を用いて解析を行った。

まず、ホログラフィック QCD から導かれる中間子の有効理論に基づいて H ダイバリオンの有効理論を構築するために、Skyrme 模型における H ダイバリオンの記述にならって、カイラル場とベクトル中間子場に対して SO(3) ヘッジホッグ解を採用し、その解に対する有効作用 (3.2.98) を具体的な計算によって導出した。また併せて、ここで導出した SO(3) ヘッジホッグ解に対する有効作用と、バリオン数 $B = 1$ のバリオンを記述する SU(2) ヘッジホッグに対する有効作用との間に成り立つ関係式 (3.4.1) を示し、SO(3) ソリトンの枠組みを用いて SU(2) ソリトン解についての解析を行うことが可能であることを明らかにした。

そして、導出したホログラフィック QCD における H ダイバリオンの有効作用に基づいて数値解析を行い、カイラル極限での H ダイバリオンの性質をホログラフィック QCD の枠組みにおいて調べた。そこではまず数値計算でヘッジホッグ解を求めるための枠組みを構築し、それを用いて H ダイバリオンを記述するソリトン解を数値的に求めた。そしてそのソリトン解のエネルギー密度関数をプロットし、そこからカイラル極限における H ダイバリオンの質量と半径を数値的に計算した。

またホログラフィック QCD におけるカイラル極限での H ダイバリオンの持つ諸性質を調べるために、この数値的結果を用いて他の結果との比較を行った。一つは Skyrme 模型における解析結果との比較である。ホログラフィック QCD から導かれる中間子の有効理論は Skyrme 模型にベクトル中間子の寄与を加えたものとなっているため、この比較からベクトル中間子の存在が H ダイバリオンにどう影響しているかを調べることができる。その比較の結果、ベクトル中間子の存在によって H ダイバリオンはほんの少ししぼみ、またその質量も 100MeV 程度減少することが明らかとなった。各中間子のエネルギーに対する寄与の分析から、この質量の減少は H ダイバリオン内部での擬スカラー中間子とベクトル中間子との相互作用により生じて

いることが判明した。

そして最後に、ホログラフィック QCD において SU(2) ヘッジホッグ解を用いて解析されたバリオンに関する結果との比較を行った。これはカイラル極限における H ダイバリオンの存在性を検証する上で重要な考察であるが、その比較から、ホログラフィック QCD においては、H ダイバリオンの質量はバリオン数 $B = 1$ の SU(2) ヘッジホッグバリオン質量のほぼ 2 倍であることを数値的に示した。なおソリトン描像におけるヘッジホッグ解に関して、カイラル極限におけるバリオン 8 重項の質量はそのヘッジホッグ質量に回転エネルギーを加えたものであるため、バリオン 8 重項の質量はヘッジホッグバリオン質量よりも大きくなる。よってここで得た結果は、カイラル極限において、H ダイバリオンの質量がバリオン 8 重項の質量の 2 倍よりも小さくなることを示唆するものと考えられる。この考察から、本研究においてはカイラル極限での H ダイバリオンは強い相互作用に対して安定な束縛状態であることを結論した。

今後の展望について幾つか述べる。まず本研究においては少なくとも 2 つの課題が残されている。一つは、SO(3) ソリトン作用と SU(2) ソリトン作用との間に成り立つ関係式 (3.4.1) に対し、より上流の理論から演繹的な証明を与えることである。これらのソリトン作用はいずれも同じ中間子有効作用にその起源を持っており、この観点から、そのソリトン作用の間には各々のヘッジホッグ解の違いを反映した何らかの関係式が存在すると考えるのは自然なことである。実際その関係式自体は本研究において作用の具体的な比較により発見的に示された。しかしながらこれは中間子有効作用に対して用いたヘッジホッグ解の差異に基づいて演繹的に証明されたわけではないため、そのような証明が待たれる。

またもう一つの課題は、H ダイバリオン質量と SU(2) ヘッジホッグバリオン質量との間に成り立つ関係 $M_H \simeq 2M_{B=1}^{\text{SU}(2)}$ の起源の理論的説明である。質量に関するこの関係は本研究において数値的に発見されたが、これを偶然と見るには少し数値の精度が良すぎるため、何らかの理論的な説明が与えられる可能性を視野に入れるべきであると考えられる。SO(3) ソリトンと SU(2) ソリトンとの作用間との関係式ともあるいは関係があるかもしれない。

本研究に直接基づいた今後の研究の可能性としては、例えばここでの枠組みにクォーク質量を導入することが考えられる。ただしここでいうクォーク質量の導入とは、massive クォークを含む QCD の holographic dual を用いるというよりも、むしろカイラル有効理論におけるクォーク質量項を現象論的に導入するということである。また全てのクォークが質量を持つような領域の計算には格子 QCD を用いた第一原理計算を行えばよいので、ホログラフィック QCD を用いた計算が有用なのは、とりわけ s クォークにのみ質量を導入して u, d クォークについては依然 massless とするような領域を対象とした場合などである。

また本研究での H ダイバリオンの安定性に関する結論をより正確に述べるための研究として、ホログラフィック QCD において SU(2) ヘッジホッグ解を用いたバリオン 8 重項の研究がある。従来のソリトン描像を用いた解析と同様、ホログラフィック QCD においても、バリオン 8 重項はヘッジホッグ解を集団座標量子化することで与えられると考えられる。この量子化によってバリオン 8 重項は回転エネルギーを獲得し、ヘッジホッグバリオンよりも重くなる。

その考えに基づき本研究ではカイラル極限における H ダイバリオンの安定性を議論したが、このことは実のところ自明ではない。というのも、ここではラージ N_c 極限を考えており、かつ Skyrme 模型での結果から類推されるこの場合のソリトンの回転エネルギーはラージ N_c の高次項であるため、本研究の枠組みにおいてバリオン 8 重項の質量はヘッジホッグバリオン質量とほとんど差がない可能性も考えられるからである。そのため、本研究での結論をより正確に述べようとした場合には、やはり同じ枠組みにおけるバリオン 8 重項の研究が必要であると考ええる。

以上が本研究のまとめ及び今後の展望である。本研究で用いたホログラフィック QCD は、QCD と等価な D ブレーン系を用いる点で QCD に基づくものであり、その非摂動領域に対する強力な解析的アプローチを与えるものと考えられる。これは一般のクォーク質量領域におけるハドロンの性質を調べる上で、同じく QCD に直接基づく格子 QCD を用いた数値的手法と相補的な関係にある。すなわち、クォーク質量がいずれも 0 でない領域では格子 QCD による解析を行い、一方 massless クォークを含む領域においては格子 QCD の代わりにホログラフィック QCD を用いた解析を行うことで、格子 QCD の弱点を補うことができる。QCD に基づくこれらの手法を相補的に用いることで、一般のクォーク質量領域におけるハドロンの性質、ひいてはハドロン物理学に対する理解がより深まるものと期待される。

謝辞

本修士論文を執筆するにあたり、また本研究を進めてゆく上で、多くの方々のご指導を賜りました。特に指導教官である菅沼秀夫准教授には、丁寧かつ熱心なご指導を頂きました。ここに深く感謝いたします。またレビュー部分の執筆にあたり、ホログラフィック QCD についてご教授くださった杉本茂樹教授に感謝申し上げます。また兵藤哲雄助教には、国際会議において大変お世話になりました。ここに感謝申し上げます。そして最後に、研究生活を支えてくださった研究室や基礎物理学研究所の皆様感謝します。ありがとうございました。

補遺

補遺 A 記法

4次元 Minkowski 計量

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +) \quad (\text{A.1})$$

添字

- ラテン文字 $i, j, k, l, m, n, \dots \rightarrow 1, 2, 3$
- ギリシャ文字 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots \rightarrow 0, 1, 2, 3$

ゲージ場

ゲージ場 A_M は常にエルミートに取る。

特に SU(3) ゲージ場に対しては、

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad T^a = \frac{\lambda_a}{2} \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{A.2})$$

ただし λ_a ($a = 1, \dots, 8$) は Gell-Mann 行列 (1.1.2)。

γ 行列

エルミートに取る。

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_4 \quad (\text{A.3})$$

補遺 B Skyrme 模型における SO(3) ヘッジホッグ解の作用

ここでは Skyrme 模型を用いた H ダイバリオンの解析 [16, 17] において用いられる SO(3) ヘッジホッグ解の作用の導出を行う。ここでの計算は本研究における計算の基礎となるものである。

Skyrme 模型の作用は

$$S_{\text{Skyrme}} = \int d^4x \left\{ -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 \right\} \quad \left(L_\mu \equiv \frac{1}{i} U^\dagger \partial_\mu U \right) \quad (\text{B.1})$$

であり、 L_μ を用いて表された。この下でカイラル場に対し SO(3) ヘッジホッグ解

$$U(\mathbf{x}) = e^{i\{(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})F(r) + ((\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 2/3)\varphi(r)\}} \quad (\text{B.2})$$

を用いて H ダイバリオンを記述する。そのときヘッジホッグ解に対する作用は profile function $F(r), \varphi(r)$ によって表される。以下ではこれを導出するが、そのためにまず SO(3) ヘッジホッグ解に対する L_μ の表式を求める。

B.1 L_μ の計算

L_μ についての計算を始める前に、カイラル場に対する SO(3) ヘッジホッグ解が

$$U(\mathbf{x}) = f_0(r) + f_1(r)(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + f_2(r)(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \quad (\text{B.3})$$

$$f_0(r) = e^{-i\frac{2}{3}\varphi(r)} \quad (\text{B.4})$$

$$f_1(r) = ie^{i\frac{1}{3}\varphi(r)} \sin F(r) \quad (\text{B.5})$$

$$f_2(r) = e^{i\frac{1}{3}\varphi(r)} \cos F(r) - e^{-i\frac{2}{3}\varphi(r)} \quad (\text{B.6})$$

の形に表せることを注意しておく。以下ではもっぱらこの表式を用いて計算を進めていく。先に計算の方針を述べておくと、SO(3) ソリトンに対して 3×3 行列となる L_μ について、多少力づくではあるが、その行列成分の表式を計算する。(ここで求めた L_μ は最終的に作用においてトレースの中に現れるため、何らかの trace technology を開発しておくことでよりスマートに計算を行えるかもしれない。)

上の static soliton 解に対し、 L_μ の時間成分は

$$L_0 = \frac{1}{i} U^\dagger \partial_0 U = 0 \quad (\text{B.7})$$

であるので、ここでは空間成分 L_i のみを計算すれば良い。上の (B.3) 式を代入すると、

$$L_i = \frac{1}{i} U^\dagger \partial_i U \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{1}{i} (f_0^* + f_1^*(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + f_2^*(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2) \partial_i (f_0 + f_1(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + f_2(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2) \quad (\text{B.9})$$

となるが、ここで $\partial_i U$ は

$$\widehat{\delta}^{ij} \equiv \delta^{ij} - \hat{x}^i \hat{x}^j \quad (\text{B.10})$$

を用いて

$$\begin{aligned} \partial_i U &= \partial_i f_0 + \partial_i f_1 (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + \partial_i f_2 (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \\ &\quad + f_1 \frac{1}{r} \widehat{\delta}^{ij} \Lambda_j + f_2 \frac{1}{r} \widehat{\delta}^{ij} \{ \Lambda_j (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \Lambda_j \} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

と表せるので、 L_i は

$$\begin{aligned} iL_i &= f_0^* \partial_i f_0 \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) (f_0^* \partial_i f_1 + f_1^* \partial_i f_0 + f_1^* \partial_i f_2 + f_2^* \partial_i f_1) \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 (f_0^* \partial_i f_2 + f_2^* \partial_i f_0 + f_1^* \partial_i f_1 + f_2^* \partial_i f_2) \\ &\quad + \Lambda_j \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} f_0^* f_1 \\ &\quad + \Lambda_j (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} f_0^* f_2 \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \Lambda_j \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} (f_0^* f_2 + |f_1|^2 + |f_2|^2) \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \Lambda_j (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} f_1^* f_2 \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \Lambda_j \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} (f_1^* f_2 + f_2^* f_1) \\ &\quad + (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \Lambda_j (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \cdot \widehat{\delta}^{ij} \frac{1}{r} |f_2|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

と書かれる。これを行列表示する。

今考えている Λ_i は $\mathfrak{so}(3)$ の生成子であるため、その 3×3 行列の成分は

$$(\Lambda_i)_{mn} = -i \varepsilon_{imn} \quad (i, m, n = 1, 2, 3) \quad (\text{B.13})$$

と表される。これらの積もまた成分で表すと

$$(\Lambda_i \Lambda_j)_{mn} = \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k)_{mn} &= -i (\delta_{ij} \varepsilon_{kmn} - \delta_{jm} \varepsilon_{kin}) \\ &= -i (\delta_{jk} \varepsilon_{imn} - \delta_{jn} \varepsilon_{kim}) \\ &= -\frac{i}{2} (\delta_{ij} \varepsilon_{kmn} + \delta_{jk} \varepsilon_{imn} + \delta_{jm} \varepsilon_{nik} + \delta_{jn} \varepsilon_{mik}) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

であり、これらを用いて (B.12) 式に現れる各行列の成分表示は

$$(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})_{mn} = -i\varepsilon_{jmn}\hat{x}^j \quad (\text{B.16})$$

$$(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})_{mn}^2 = \widehat{\delta}^{mn} \quad (\text{B.17})$$

$$(\Lambda_j)_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = -i\varepsilon_{jmn}\widehat{\delta}^{ij} \quad (\text{B.18})$$

$$[\Lambda_j(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = -\hat{x}^m\widehat{\delta}^{in} \quad (\text{B.19})$$

$$[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})\Lambda_j]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = -\hat{x}^n\widehat{\delta}^{im} \quad (\text{B.20})$$

$$[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})\Lambda_j(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2\Lambda_j]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} &= -i(\widehat{\delta}^{ij}\varepsilon_{jmn} + \varepsilon_{nki}\hat{x}^k\hat{x}^m) \\ &= -\frac{i}{2}(\widehat{\delta}^{ij}\varepsilon_{jmn} + \varepsilon_{nki}\hat{x}^k\hat{x}^m + \varepsilon_{mki}\hat{x}^k\hat{x}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$[(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2\Lambda_j(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = [(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})\Lambda_j(\mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{x}})]_{mn}\widehat{\delta}^{ij} = 0 \quad (\text{B.23})$$

となる。ただしここで

$$\hat{x}^j\widehat{\delta}^{ij} = 0 \quad (\text{B.24})$$

を用いた。これらの成分表示と、 f_0, f_1, f_2 の間の関係式

$$f_0f_1^* + f_0^*f_1 + f_1f_2^* + f_1^*f_2 = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_0f_2^* + f_0^*f_2 = 0 \quad (\text{B.26})$$

及び

$$f_0^*\partial_i f_0 = -i\frac{2}{3}\varphi'\hat{x}^i \quad (\text{B.27})$$

$$f_0^*\partial_i f_1 + f_1^*\partial_i f_0 + f_1^*\partial_i f_2 + f_2^*\partial_i f_1 = iF'\hat{x}^i \quad (\text{B.28})$$

$$f_0^*\partial_i f_2 + f_2^*\partial_i f_0 + f_1^*\partial_i f_1 + f_2^*\partial_i f_2 = i\varphi'\hat{x}^i \quad (\text{B.29})$$

を用いると、 L_i の行列成分は

$$\begin{aligned} (L_i)_{mn} &= \hat{x}^i \left(-\delta^{mn}\frac{2}{3}\varphi' + \widehat{\delta}^{mn}\varphi' - i\varepsilon_{jmn}\hat{x}^j F' \right) \\ &\quad - \frac{i}{r}(\widehat{\delta}^{im}\hat{x}^n f_0 f_2^* - \widehat{\delta}^{in}\hat{x}^m f_0^* f_2) \\ &\quad - \frac{1}{r}(\varepsilon_{ijm}\hat{x}^j \hat{x}^n f_0 f_1^* + \varepsilon_{ijn}\hat{x}^j \hat{x}^m f_0^* f_1) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

と表される。ここで後の計算のために、行列 $L_i L_j$ の成分表示についても計算しておこう。

$(L_i)_{mn}$ の積をとって愚直に計算すると、

$$\begin{aligned}
(L_i L_j)_{mn} = & \hat{x}^i \hat{x}^j \left[\delta^{mn} \frac{4}{9} \varphi'^2 + \widehat{\delta}^{mn} \left(F'^2 - \frac{1}{3} \varphi'^2 \right) - i \varepsilon_{mnk} \hat{x}^k \frac{2}{3} F' \varphi' \right] \\
& + \frac{\hat{x}^i}{r} \left[-i \widehat{\delta}^{jm} \hat{x}^n \left(F' f_0 f_1^* + \frac{1}{3} \varphi' f_0 f_2^* \right) - i \widehat{\delta}^{jn} \hat{x}^m \frac{2}{3} \varphi' f_0^* f_2 \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon_{jkm} \hat{x}^k \hat{x}^n \left(F' f_0 f_2^* + \frac{1}{3} \varphi' f_0 f_1^* \right) + \varepsilon_{jkn} \hat{x}^k \hat{x}^m \frac{2}{3} \varphi' f_0^* f_1 \right] \\
& + \frac{\hat{x}^j}{r} \left[i \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m \left(F' f_0^* f_1 + \frac{1}{3} \varphi' f_0^* f_2 \right) + i \widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n \frac{2}{3} \varphi' f_0 f_2^* \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon_{ikn} \hat{x}^k \hat{x}^m \left(F' f_0^* f_2 + \frac{1}{3} \varphi' f_0^* f_1 \right) + \varepsilon_{ikm} \hat{x}^k \hat{x}^n \frac{2}{3} \varphi' f_0 f_1^* \right] \\
& + \frac{i}{r^2} \left[\widehat{\delta}^{im} \varepsilon_{jkn} \hat{x}^k f_1 f_2^* - \widehat{\delta}^{jn} \varepsilon_{ikm} \hat{x}^k f_1^* f_2 - \varepsilon_{ijk} \hat{x}^k \hat{x}^m \hat{x}^n (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) \right] \\
& + \frac{1}{r^2} \left[\widehat{\delta}^{im} \widehat{\delta}^{jn} |f_2|^2 + \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \hat{x}^k \hat{x}^l |f_1|^2 + \widehat{\delta}^{ij} \hat{x}^m \hat{x}^n (|f_1|^2 + |f_2|^2) \right] \quad (B.31)
\end{aligned}$$

という表式を得る。ここで (B.24) 式と

$$\widehat{\delta}^{mp} \widehat{\delta}^{pn} = \widehat{\delta}^{mn} \quad \varepsilon_{kmp} \varepsilon_{lnp} \hat{x}^k \hat{x}^l = \widehat{\delta}^{mn} \quad \widehat{\delta}^{mp} \varepsilon_{pnk} \hat{x}^k = \varepsilon_{mnk} \hat{x}^k \quad (B.32)$$

などを用いた。

上の (B.31) 式から導かれる $(L_i L_j)_{mn}$ についての性質を以下にまとめておく。まず、 L_i のエルミート性から

$$(L_i L_j)_{mn} = (L_j L_i)_{nm}^* \quad (B.33)$$

が成立する。また $(L_i L_j)_{mn}$ を

$$(L_i L_j)_{mn} = (L_i L_j)_{mn}^{(1)} + (L_i L_j)_{mn}^{(2)} + (L_i L_j)_{mn}^{(3)} + (L_i L_j)_{mn}^{(4)} + (L_i L_j)_{mn}^{(5)} \quad (B.34)$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(1)} = \hat{x}^i \hat{x}^j \left[\delta^{mn} \frac{4}{9} \varphi'^2 + \widehat{\delta}^{mn} \left(F'^2 - \frac{1}{3} \varphi'^2 \right) - i \varepsilon_{mnk} \hat{x}^k \frac{2}{3} F' \varphi' \right] \quad (B.35)$$

$$\begin{aligned}
(L_i L_j)_{mn}^{(2)} = & \frac{\hat{x}^i}{r} \left[-i \widehat{\delta}^{jm} \hat{x}^n \left(F' f_0 f_1^* + \frac{1}{3} \varphi' f_0 f_2^* \right) - i \widehat{\delta}^{jn} \hat{x}^m \frac{2}{3} \varphi' f_0^* f_2 \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon_{jkm} \hat{x}^k \hat{x}^n \left(F' f_0 f_2^* + \frac{1}{3} \varphi' f_0 f_1^* \right) + \varepsilon_{jkn} \hat{x}^k \hat{x}^m \frac{2}{3} \varphi' f_0^* f_1 \right] \quad (B.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_i L_j)_{mn}^{(3)} = & \frac{\hat{x}^j}{r} \left[i \widehat{\delta}^{in} \hat{x}^m \left(F' f_0^* f_1 + \frac{1}{3} \varphi' f_0^* f_2 \right) + i \widehat{\delta}^{im} \hat{x}^n \frac{2}{3} \varphi' f_0 f_2^* \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon_{ikn} \hat{x}^k \hat{x}^m \left(F' f_0^* f_2 + \frac{1}{3} \varphi' f_0^* f_1 \right) + \varepsilon_{ikm} \hat{x}^k \hat{x}^n \frac{2}{3} \varphi' f_0 f_1^* \right] \quad (B.37)
\end{aligned}$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(4)} = \frac{i}{r^2} \left[\widehat{\delta}^{im} \varepsilon_{jkn} \hat{x}^k f_1 f_2^* - \widehat{\delta}^{jn} \varepsilon_{ikm} \hat{x}^k f_1^* f_2 - \varepsilon_{ijk} \hat{x}^k \hat{x}^m \hat{x}^n (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) \right] \quad (B.38)$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(5)} = \frac{1}{r^2} \left[\widehat{\delta}^{im} \widehat{\delta}^{jn} |f_2|^2 + \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \hat{x}^k \hat{x}^l |f_1|^2 + \widehat{\delta}^{ij} \hat{x}^m \hat{x}^n (|f_1|^2 + |f_2|^2) \right] \quad (B.39)$$

と分けて書くと、(B.33) 式より各項について

$$(L_i L_j)_{mn}^{(2)} = (L_j L_i)_{nm}^{(3)*} \quad (\text{B.40})$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(a)} = (L_j L_i)_{nm}^{(a)*} \quad (a = 1, 4, 5) \quad (\text{B.41})$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(5)} = (L_i L_j)_{mn}^{(5)*} \quad (\text{B.42})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(a)} = 0 \quad (a = 2, 3; i \text{ について和}) \quad (\text{B.43})$$

が成り立つ。またトレース計算の上で有用な式として

$$\text{tr}[(L_i L_j)^{(a)}(L_i L_j)^{(b)}] = (L_i L_j)_{mn}^{(a)}(L_i L_j)_{nm}^{(b)} = 0 \quad (a \neq b) \quad (\text{B.44})$$

$$\text{tr}[(L_i L_j)^{(3)}(L_i L_j)^{(3)}] = \text{tr}[(L_i L_j)^{(2)}(L_i L_j)^{(2)}]^* \quad (\because (\text{B.40}) \text{ 式}) \quad (\text{B.45})$$

が成立する。

以上の結果を用いて SO(3) ヘッジホッグ解に対する Skyrme 作用を計算する。

B.2 chiral term

まず、作用 (B.1) の chiral term (第 1 項) について計算する。Static soliton に対しては $L_0 = 0$ より

$$-\frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \text{tr}(L_\mu L^\mu) = -\frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \text{tr}(L_i L_i) \quad (\text{B.46})$$

ここで、前に計算した L_i の積 (B.31) 式の結果を用いると、

$$\text{tr}(L_i L_i) = (L_i L_i)_{mm} = (L_i L_i)_{mm}^{(1)} + (L_i L_i)_{mm}^{(5)} \quad (\text{B.47})$$

$$(L_i L_i)_{mm}^{(1)} = 2F'^2 + \frac{2}{3}\varphi'^2 \quad (\text{B.48})$$

$$(L_i L_i)_{mm}^{(5)} = \frac{4}{r^2}(|f_1|^2 + |f_2|^2) \quad (\text{B.49})$$

また (B.26) 式から

$$\begin{aligned} |f_1|^2 + |f_2|^2 &= -(f_0 f_2^* + f_0^* f_2) \\ &= 2(1 - \cos F \cos \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

より、chiral term は

$$-\frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \text{tr}(L^\mu L_\mu) = -\frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \left[2F'^2 + \frac{2}{3}\varphi'^2 + \frac{8}{r^2}(1 - \cos F \cos \varphi) \right] \quad (\text{B.51})$$

と表される。

B.3 Skyrme term

作用 (B.1) の Skyrme term (第 2 項) は、static soliton に対して

$$\frac{1}{32e^2} \int d^4x \operatorname{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 = \frac{1}{32e^2} \int d^4x \operatorname{tr}[L_i, L_j]^2 \quad (\because L_0 = 0) \quad (\text{B.52})$$

ここで積分の中のトレースは

$$\operatorname{tr}[L_i, L_j]^2 = 2 \operatorname{tr}(L_i L_j L_i L_j) - 2 \operatorname{tr}(L_i L_i L_j L_j) \quad (\text{B.53})$$

と表される。以下それぞれ計算する。

第 1 項のトレースは (B.34) 式より

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(L_i L_j L_i L_j) &= (L_i L_j)_{mn} (L_i L_j)_{nm} \\ &= \sum_{a=1}^5 (L_i L_j)_{mn}^{(a)} (L_i L_j)_{nm}^{(a)} + \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^5 (L_i L_j)_{mn}^{(a)} (L_i L_j)_{nm}^{(b)} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

と表されるが、ここでの第 2 項は前に述べた有用な関係式 (B.44) 式によって 0 になる。残る第 1 項の各項は (B.31) 式から計算すると

$$(L_i L_j)_{mn}^{(1)} (L_i L_j)_{nm}^{(1)} = 2F'^4 + \frac{2}{9}\varphi'^4 + \frac{4}{3}F'^2\varphi'^2 \quad (\text{B.55})$$

$$\begin{aligned} (L_i L_j)_{mn}^{(2)} (L_i L_j)_{nm}^{(2)} &= (L_i L_j)_{mn}^{(3)} (L_i L_j)_{nm}^{(3)} \quad (\because (\text{B.45 式})) \\ &= -\frac{2}{r^2} \left\{ \frac{4}{9}\varphi'^2(|f_1|^2 + |f_2|^2) + \frac{4}{3}F'\varphi'(f_1 f_2^* + f_1^* f_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(4)} (L_i L_j)_{nm}^{(4)} = -\frac{4}{r^4} \left\{ (f_1 f_2^*)^2 + (f_1^* f_2)^2 \right\} \quad (\text{B.57})$$

$$(L_i L_j)_{mn}^{(5)} (L_i L_j)_{nm}^{(5)} = \frac{4}{r^4} (|f_1|^4 + |f_2|^4) \quad (\text{B.58})$$

第 2 項のトレースも

$$(L_i L_i)_{mn} = (L_i L_i)_{mn}^{(1)} + (L_i L_i)_{mn}^{(4)} + (L_i L_i)_{mn}^{(5)} \quad (\text{B.59})$$

を用いて

$$\operatorname{tr}(L_i L_i L_j L_j) = \sum_{a,b=1,4,5} (L_i L_i)_{mn}^{(a)} (L_j L_j)_{nm}^{(b)} \quad (\text{B.60})$$

となり、和に現れる各項は (B.31) 式より

$$(L_i L_i)_{mn}^{(1)} (L_j L_j)_{nm}^{(1)} = (L_i L_j)_{mn}^{(1)} (L_i L_j)_{nm}^{(1)} \quad (\text{B.61})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(4)} (L_j L_j)_{nm}^{(4)} = \frac{2}{r^4} (f_1 f_2^* + f_1^* f_2)^2 \quad (\text{B.62})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(5)} (L_j L_j)_{nm}^{(5)} = \frac{6}{r^4} (|f_1|^2 + |f_2|^2)^2 \quad (\text{B.63})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(1)} (L_j L_j)_{nm}^{(4)} = \frac{4}{3r^2} F' \varphi' (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) \quad (\text{B.64})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(1)} (L_j L_j)_{nm}^{(5)} = \frac{2}{r^2} \left(F'^2 + \frac{5}{9} \varphi'^2 \right) (|f_1|^2 + |f_2|^2) \quad (\text{B.65})$$

$$(L_i L_i)_{mn}^{(4)} (L_j L_j)_{nm}^{(5)} = 0 \quad (\text{B.66})$$

と求まる。

以上の結果から、トレース (B.53) 式は

$$\begin{aligned} \text{tr}[L_i, L_j]^2 &= -\frac{8}{r^2} \left\{ (F'^2 + \varphi'^2) (|f_1|^2 + |f_2|^2) + 2F' \varphi' (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) \right\} \\ &\quad - \frac{4}{r^4} \left\{ (|f_1|^2 + |f_2|^2)^2 + 3(f_1 f_2^* + f_1^* f_2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

となり、

$$|f_1|^2 + |f_2|^2 = 2(1 - \cos F \cos \varphi) \quad (\text{B.68})$$

$$f_1 f_2^* + f_1^* f_2 = 2 \sin F \sin \varphi \quad (\text{B.69})$$

を用いて Skyrme term は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{32e^2} \int d^4x \text{tr}[L_\mu, L_\nu]^2 \\ &= -\frac{1}{32e^2} \int d^4x \frac{16}{r^2} \left[(F'^2 + \varphi'^2) (1 - \cos F \cos \varphi) + 2F' \varphi' \sin F \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left\{ (1 - \cos F \cos \varphi)^2 + 3 \sin^2 F \sin^2 \varphi \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

と表される。

B.4 SO(3) ヘッジホッグ解に対する Skyrme 作用

以上より、SO(3) ヘッジホッグ解に対する Skyrme 作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{SO}(3)} &= - \int d^4x \left\{ \frac{f_\pi^2}{4} \left[2F'^2 + \frac{2}{3} \varphi'^2 + \frac{8}{r^2} (1 - \cos F \cos \varphi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{32e^2} \frac{16}{r^2} \left[(F'^2 + \varphi'^2) (1 - \cos F \cos \varphi) + 2F' \varphi' \sin F \sin \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} \left\{ (1 - \cos F \cos \varphi)^2 + 3 \sin^2 F \sin^2 \varphi \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

と与えられる。

参考文献

- [1] Particle Data Group, C. Patrignani *et al.*, Chin. Phys. **C40**, 100001 (2016).
- [2] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [3] G. Zweig, CERN-TH-401 (1964).
- [4] G. Zweig, CERN-TH-412 (1964).
- [5] Belle, S. K. Choi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 262001 (2003), arXiv:hep-ex/0309032.
- [6] BaBar, B. Aubert *et al.*, Phys. Rev. **D71**, 071103 (2005), arXiv:hep-ex/0406022.
- [7] R. L. Jaffe, Phys. Rev. Lett. **38**, 195 (1977), [Erratum: Phys. Rev. Lett.38,617(1977)].
- [8] T. Nakano and K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **10**, 581 (1953).
- [9] M. Gell-Mann, Nuovo Cim. **4**, 848 (1956).
- [10] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics* (Westview Press, 1999).
- [11] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories: An Introduction* (World Scientific, 1992).
- [12] A. W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. **13**, 1 (1984).
- [13] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, Phys. Rev. **D10**, 2599 (1974).
- [14] T. A. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. E. Kiskis, Phys. Rev. **D12**, 2060 (1975).
- [15] R. L. Jaffe, Phys. Rev. **D15**, 281 (1977).
- [16] A. P. Balachandran, F. Lizzi, V. G. J. Rodgers, and A. Stern, Nucl. Phys. **B256**, 525 (1985).
- [17] R. L. Jaffe and C. L. Korpa, Nucl. Phys. **B258**, 468 (1985).
- [18] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. **A260**, 127 (1961).
- [19] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. **A262**, 237 (1961).
- [20] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [21] S. Scherer and M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory* (Springer, 2012).
- [22] H. Takahashi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 212502 (2001).
- [23] R. H. Dalitz *et al.*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A426**, 1 (1989).
- [24] M. Danysz *et al.*, Nucl. Phys. **49**, 121 (1963).
- [25] S. Aoki *et al.*, Prog. Theor. Phys. **85**, 1287 (1991).

-
- [26] C. B. Dover, D. J. Millener, A. Gal, and D. H. Davis, Phys. Rev. **C44**, 1905 (1991).
- [27] Y. Yamaguchi and T. Hyodo, Phys. Rev. **C94**, 065207 (2016), arXiv:1607.04053.
- [28] Belle, B. H. Kim *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 222002 (2013), arXiv:1302.4028.
- [29] ALICE, J. Adam *et al.*, Phys. Lett. **B752**, 267 (2016), arXiv:1506.07499.
- [30] Y. Han *et al.*, JPS Conf. Proc. **8**, 021002 (2015).
- [31] NPLQCD, S. R. Beane *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 162001 (2011), arXiv:1012.3812.
- [32] HAL QCD, T. Inoue *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 162002 (2011), arXiv:1012.5928.
- [33] HAL QCD, T. Inoue *et al.*, Nucl. Phys. **A881**, 28 (2012), arXiv:1112.5926.
- [34] T. Sakai and S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005).
- [35] T. Sakai and S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2005).
- [36] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999), arXiv:hep-th/9711200, [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [37] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998).
- [38] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond* (Cambridge University Press, 2007).
- [39] 夏梅誠, 『超弦理論の応用 – 物性諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方』 (サイエンス社, 2012).
- [40] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters, J. High Energy Phys. **05**, 041 (2004).
- [41] K. Nawa, H. Suganuma, and T. Kojo, Phys. Rev. **D75**, 086003 (2007).
- [42] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto, and S. Yamato, Prog. Theor. Phys. **117**, 1157 (2007).
- [43] R. Rajaraman, *SOLITONS AND INSTANTONS. AN INTRODUCTION TO SOLITONS AND INSTANTONS IN QUANTUM FIELD THEORY* (North-Holland, 1982).
- [44] Y. Igarashi *et al.*, Nucl. Phys. **B259**, 721 (1985).
- [45] E. Witten, Nucl. Phys. **B160**, 57 (1979).
- [46] K. Matsumoto, Y. Nakagawa, and H. Suganuma, JPS Conf. Proc. **13**, 020014 (2017), arXiv:1610.00475.