

平成30年度 修士論文
高次摂動計算に基づく量子トンネル効果の解析

秋田大学大学院理工学研究科
数理・電気電子情報学専攻 数理科学コース
理論物理学研究室三角グループ

高畑祥平

目次

第1章	イントロダクション	1
第2章	量子力学	3
2.1	量子論とは何か	3
2.2	物理量と状態	3
2.3	時間発展	4
第3章	調和振動子系 (1次元自由スカラー場理論)	6
3.1	調和振動子	6
3.2	エネルギー準位	6
第4章	摂動論	8
第5章	経路積分	10
5.1	遷移振幅	10
5.2	経路積分	11
第6章	リサージェンス構造	13
第7章	2重井戸型量子力学系	15
7.1	2重井戸型ポテンシャル量子系	15
7.2	摂動計算	16
7.3	ボレル総和法	18
7.4	ユークリッド経路積分とインスタントン解	19
7.5	バイオン配位とリサージェンス構造	23
第8章	3重井戸型量子系	27
8.1	3重井戸型ポテンシャル量子系	27
8.2	摂動計算	28
8.3	ユークリッド経路積分とインスタントン解	31
8.4	バイオン配位とリサージェンス構造	34
第9章	4重井戸型量子力学系	38
9.1	4重井戸型ポテンシャル系	38
9.2	摂動計算	38
9.3	インスタントン解とバイオン寄与	40

第 10 章 5, 6, 7 重井戸型系と n 重井戸型量子系	43
10.1 5 重井戸型ポテンシャル	43
10.2 6 重井戸型ポテンシャル	44
10.3 7 重井戸型ポテンシャル	45
10.4 n 重井戸型量子力学系	47
第 11 章 まとめと展望	49

第1章 イントロダクション

微視的な現象を記述する量子論は科学技術の発展に必要な理論体系であり、これによってトランジスタや半導体を始めとする電子部品の開発・理解が進み、さらに昨今は量子コンピュータの実現の期待が高まる中、さらにその重要性を増している。また、極微や極大の世界の自然像を理解する学問である素粒子論や宇宙論においては場の量子論による記述が見事に現象を再現・予言することから、場の量子論は今や最も精緻な理論と呼ばれるまでになった。しかし、実際に解くことができる量子系は数少なく、実際の解析は近似法に頼っている面が大きい。

最も有効な近似法は「摂動論」と呼ばれるものであり、理論に含まれるパラメタ λ のべき展開級数として物理量を表す。

$$P(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q. \quad (1.1)$$

この手法は λ が小さい値をとる場合には大変有効で、特に量子電磁気学 (Quantum Electrodynamics = QED) などのゲージ場の量子論においては絶大な威力を発揮しており、電子の磁気モーメント (電子の磁石の強さ) は実験と 10 桁という高い精度で一致することが知られている。ところが、ある程度大きな λ ではこの手法が破綻してしまうことが量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) など漸近自由性を持つ場の量子論で示されており、これは摂動級数が高々漸近級数ではないことを示している。

一方、べき級数では表せない物理量への寄与や効果は「非摂動効果」と呼ばれ、代表的には以下のような指数関数で表される。

$$P(\lambda) = a e^{-b/\lambda}. \quad (1.2)$$

ただし、 $a, b \in \mathbb{R}$ である。確かにこのような寄与は決して λ のべき級数で表すことができない。例えば、量子論の特徴的な現象の一つであるトンネル効果はこのような非摂動効果の一例である。トンネル効果に主眼を置いて考えるならば、摂動論は壁の左右どちらかの周りだけでの量子効果を調べているに過ぎないため、詳細に記述するには何らかの非摂動的な手法 (WKB 近似や第一原理計算) が必要になると考えられている。

上で述べた 2 つの寄与、つまり「摂動的寄与」と「非摂動的寄与」は別々の寄与であり、状況によって適切な解析方法を選ぶ必要がある、というのが一般的な量子論の解析手法についての理解である。ところが、近年「リサージェンス理論」と呼ばれる理論体系を量子論に応用することで、これら 2 つの寄与が「リサージェンス構造」という構造の中で互いに強く関係しており、場合によっては一方からもう一方を導出することさえ可能であることがわかってきた [1, 2, 3, 4]。特に、理論のポテンシャルが縮退した真空を持つ場合 (これには多くの場の量子論系特に量子色力学などが含まれる) にはこの構造が顕著になるため、リサージェンス理論は新たな非摂動解析法として注目を集めている。

元々、リサージェンス理論は常微分方程式において漸近級数解から一般解を得るための手法とし

て開発された [5, 6, 7, 8, 9, 10] . 独立な解同士が非自明な関係を有しており, ある解の情報が異なる解の中に再登場 (resurgent) することからリサージェンス (resurgence) 理論と名付けられた. このような構造は実積分の積分経路をコーシーの定理に基づいて複素化し分解する際にも生じることが知られている. 例えば積分経路を最急降下法に基づいて分解した場合, それぞれの経路 (レフシェッツシンブル) 同士もリサージェンス構造によって関係付いている [11]. 量子論は経路積分により定式化できることを思い出すと, リサージェンス構造が量子論にも存在することは何ら不思議でない. これまでリサージェンス理論は, 量子力学はもちろんのこと [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], 2次元場の量子論 [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], 超弦理論 [29, 30, 31, 32, 33], 超対称場の量子論 [34, 35, 36, 37, 38, 39], 4次元ゲージ理論 [40, 41, 42, 43] に応用され, 多くの量子系においてリサージェンス構造が存在すること, そしてそれに基づく非摂動解析が可能であることが示されてきた.

本論文では, リサージェンス理論が最も顕著になる量子力学系である「縮退した古典真空を持つ系」に注目し, 主に2重井戸型, 3重井戸型, そして4-7重井戸型ポテンシャル系について詳細な解析を行った. 具体的には, (i) 高次摂動級数とボレル和の計算, (ii) 非摂動効果に対応するインスタントン解の導出とその寄与の計算, (iii) 摂動論と関係する非摂動効果であるバイオン寄与の計算, (iv) 摂動寄与と非摂動寄与が不定虚部を通して関係する様子の解明, をそれぞれの理論に関して行った. 2重, 3重井戸型系については, 摂動寄与と非摂動寄与を独立に計算し, その和において不定虚部が相殺されることを示しリサージェンス構造を確認した. 4重井戸型系については摂動計算から得られる不定虚部と非摂動的計算から得られる不定虚部の指数関数部分が一致することを示した上で, リサージェンス構造を仮定して非摂動寄与の係数を決定した. また5,6,7重井戸型系について高次摂動計算を行いリサージェンス理論に基づき非摂動寄与を導出した上で, これらの結果から一般の n 重井戸型ポテンシャル系の結果を推定した. これらの結果の中で, 2重井戸型系については近年理解されていた結果であるが, 3重, 4重井戸型系そして一般の n 重井戸型系に関してリサージェンス構造が示されたことやリサージェンス理論が適用されたのは初めてである. したがって, 本研究は量子非摂動解析法の研究に重要な寄与をすると考えられる.

第2章 量子力学

2.1 量子論とは何か

我々の身の回りにある総ての物質は 10^{-10}m ほどの大きさをもつ原子から成り立っており、この原子もまた原子核、電子によって構成されている。19世紀初頭までは、原子核の周りを粒子である電子が公転運動しているモデルが最も確からしいとされていた。しかしながら20世紀以降には電子や原子核に波動性を認める量子論が確立し、それまでの物を粒子としてのみ扱う理論は古典論と呼ばれるようになった。粒子性・波動性の両方を持つ対象を「量子」と呼び、量子力学はこれを数学的枠組みの中で定義した。このように電子はもちろん、原子核や光なども全て量子として扱うのが量子論とよばれる学問体系である。

粒子性と波動性の両方を持つとはどういう状況であろうか。例えば原子内において電子がどのように存在しているかを見るためには、何かしらの測定を行なってその存在を検証しなくてはならない。この測定という操作により、波動としての電子の位置が確定し粒子性が露わになる。一方、二重スリット実験など波動性の有無を調べる実験を行うと電子の波動性を確認することができる。

量子のもつ特徴的な性質の中に、「トンネル効果」というものがある。これは本研究においても特に重要な効果であり、平たく表現すると古典論では超えることのできないポテンシャルの壁を飛び越える(一般的に”染み出す”という)効果である。量子論では、量子の存在が広く分布しているという考え方をする。トンネル効果は、エネルギーの壁の向こうに存在する確率が少なからずあるために起こりうる効果なのである。

2.2 物理量と状態

量子論を解析的に取り扱うために整備された理論体系として、電子をはじめとした微視的な現象を記述する「量子力学」を導入する。古典力学においても様々な物理量が存在した。Aという人間がプロフィール欄に「身長」「体重」などを個別に考えて記入していくように、それぞれの物理量は独立に存在していた。これに対して量子力学では、物質の状態に関するあらゆる情報の全てを無限次元ベクトル(ヒルベルト空間の元)に集約して、このベクトルに位置演算子や運動量演算子などを作用させることで位置や運動量などの必要な物理量が得られる。先の例で言えば、Aという人間にすべての情報が含まれており、身長計を作用させれば身長を、体重計を作用させれば体重を知ることができるということと同じである。この性質こそ、2つの物理量を同時に確定させることができない、という不確定性関係の背景にある。時間が変化することにより量子状態も変化し、それに伴ってヒルベルト空間の元 ψ が変化の様式をシュレディンガー描像といい、時間変化に伴って位置演算子や運動量演算子などが変化の様式をハイゼンベルグ描像という。ここでは、無限次元のベクトルを $|\psi\rangle$ で定義する。 $|\psi\rangle$ と表記するものが無限次元の縦ベクトルであ

り、ケットベクトルと呼ぶ。このベクトルに対してエルミート共役（転置と複素共役）をとったものがブラベクトル $\langle\psi|$ であり、次のように表記する。

$$|\psi\rangle^\dagger \rightarrow \langle\psi| \quad (2.1)$$

状態を表す $|\psi\rangle$ はそれ自体はただの数学的対象にしか見えないが、その時点での状態に関する情報を過不足なく完全に含有したものである。例えば状態が位置演算子 X の固有状態であれば、その状態はある特定の位置という固有値を返す。一般に、位置演算子 X と位置固有値 x 、そして一固有状態 $|x\rangle$ は次の関係を満たす。

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad (2.2)$$

このように、系が固有状態にある場合には演算子を作用させることで固有値（観測量）が得られる。そして何よりも注目すべきことは、一般には、状態 $|\psi\rangle$ は複数の他の固有状態 $|x_n\rangle$ の重ね合わせになる。これはいわゆる「起こりうる状況の重ね合わせ」であり、位置などの情報がそもそも一意に決まる古典論と違って可能な位置の状態の重ね合わせとして状態を記述するのが状態ベクトルである。一般に、状態 $|\psi\rangle$ はエルミート演算子 A ($A^\dagger = A$ を満たす) の固有状態 $|\alpha\rangle$ と展開係数 c_a の重ね合わせで記述できて、

$$|\psi\rangle = \sum_a c_a |\alpha\rangle \quad (2.3)$$

と書ける。ただし、以下の性質を持つ。

$$c_a \equiv \langle a | \psi \rangle \quad (2.4)$$

$$\sum_a |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1 \quad (2.5)$$

$$\langle a' | a \rangle = \delta_{aa'} \quad (2.6)$$

複数ある可能性のうちどの固有状態が実現されるかは展開係数の絶対値の2乗で得られ、したがってその確率と期待値は、

$$P_a = |c_a|^2$$

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \sum_a a |c_a|^2 \quad (2.7)$$

と書ける。この確率解釈はコペンハーゲン解釈とも呼ばれており、いままでいかなる実験結果においても合致している信用性の高い解釈である。一般に、位置演算子に関する展開係数 c_a を波動関数と呼ぶ。

2.3 時間発展

さて、ここからは先に述べたシュレディンガー描像とハイゼンベルグ描像についてもう少し詳しく見ていこう。もう少し後の章になるが、経路積分法を導入するにあたって必要となる部分なのでしっかりと押さえておきたい。

まず、量子力学の基礎方程式としてハイゼンベルグ方程式を導入する。

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] \quad (2.8)$$

ここで、 H はハミルトニアン演算子であり、固有値としてエネルギーを返す。ハミルトニアン演算子があらわに時間 t によらないとき、このハイゼンベルグ方程式の解は、

$$A(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A(0) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (2.9)$$

である。このように、ハイゼンベルグ描像において演算子 A は時間発展によって変化するが、状態 $|\alpha\rangle$ は変化しない。

ここで、演算子 $A(t)$ の期待値を考えると、

$$\begin{aligned} \langle \alpha | A(t) | \alpha \rangle &= \langle \alpha | e^{\frac{iHt}{\hbar}} A(0) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha(t) | A(0) | \alpha(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

と書き換えることができる。 $A(0)$ は明らかに時間変化せず、状態 $|\alpha(t)\rangle$ のみが時間発展によって変化する様式であるから、シュレディンガー描像である。シュレディンガー描像での状態 $|\alpha(t)\rangle$ は次のシュレディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad (2.11)$$

このように、ある時刻における自然状態をハイゼンベルグ描像やシュレディンガー描像で表すことができた。我々が気になるのは固有値だけでなく、状態がある時間がたった後にどのような状態にいるかの確率であろう。そこで、シュレディンガー描像において、時刻 t_a での状態 $|\phi, t_a\rangle_S$ から時刻 t_b での状態 $|\psi, t_b\rangle_S$ への遷移を示す表現を次のように定義する。

$$Z(\psi, \phi)_S = \langle \psi, t_b | \phi, t_a \rangle \quad (2.12)$$

$Z(\psi, \phi)_S$ を遷移振幅と呼び、遷移振幅の 2 乗 $P = Z_S^2$ を遷移確率と呼ぶ。これらの状態の遷移については、もう少し後の章で「経路積分法」という手法を導入するにあたって詳しく見ていきたい。

第3章 調和振動子系 (1次元自由スカラー場理論)

3.1 調和振動子

原子同士が結合して分子として存在している場合など、微視的な世界ではいわゆる「ばね」のような単振動を行っている系が多く見られる。これらの系は調和振動子と呼ばれ、量子力学における最も基礎的なモデルである。本研究では井戸型のポテンシャルエネルギーを持つ系について解析していくため、この章でその基礎となる調和振動子の基礎について復習しておきたい。

3.2 エネルギー準位

量子力学においては、波動関数 (状態ベクトル) に演算子を作用させることで固有値を得ることができる。この演算子の中で最も重要になるのがハミルトニアン H である。ハミルトニアンを作用させると、エネルギー固有値が得られる。調和振動子のハミルトニアンは

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (3.1)$$

で与えられ、このハミルトニアン演算子の固有値であるエネルギー固有値は $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}^0$ となり、対応する固有ベクトルは $|n\rangle$ のように n でラベルされる。(以下では変数や共役運動量はすべて演算子として登場するのでわざわざ \hat{x} のような表記はしない。) この系のラグランジアンはルジャンドル変換を通して以下のようにあたえられる。

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = p\dot{x} - H = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (3.2)$$

ここで $\sqrt{m}x \rightarrow x$ の変数変換を施すと ($p \rightarrow p/\sqrt{m}$ と変換される), ハミルトニアンとラグランジアンは

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2}, \quad (3.4)$$

と書くことができる。このハミルトニアンとラグランジアンは質量 ω を持った1次元スカラー場理論のものと同じであり、量子力学系が1次元場の量子論系に帰着すること示している。この事実は後にユークリッド化された経路積分形式で量子力学系を扱う際に重要になる。この新しい変数 x (スカラー場) は質量次元 $[x] = -1 + 1/2 = -1/2$ を持っている。(質量次元とは長さの単位の数つまり質量やエネルギーの単位で見たときの次元を表し [...] という記号で表すことが多い。

$[m] = 1, [E] = 1, [\omega] = 1, [x] = -1, [t] = -1$ である.) 本論文では, さらに $\sqrt{\omega}x \rightarrow x$ ($p/\sqrt{\omega} \rightarrow p$) という変数変換を行うことで, 以下のようなハミルトニアンを扱うこととする.

$$H/\omega = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}. \quad (3.5)$$

この時点で x の質量次元は $[x] = -1 + 1/2 + 1/2 = 0$ となり右辺は完全に無次元のハミルトニアンに帰着した. 左辺は ω で割られているので $H/\omega \rightarrow H$ と変数変換を行い, $\hbar = 1$ の自然単位系を取ることで, 調和振動子のエネルギーが $E_n = (n + 1/2)$ という無次元量で表すことができるようになる. このプロセスでは時間 t も無次元化されたことになるため, 今後この論文で現れる変数やパラメータはすべて無次元のものだと思えば良い. もし質量次元を戻したければ, 今行った変数変換を逆にたどれば良い.

結局我々が扱う無次元ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}, \quad (3.6)$$

となる. 質量項 $x^2/2$ は最も簡単な 2 次のポテンシャルを表すが, この場合に限り, 変数を生成消滅演算子 $x = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ に置き換え $a^\dagger a$ の固有ベクトル $|n\rangle$ によってハミルトニアンを対角化可能である. またユークリッド化経路積分の立場で言うとガウス積分に帰着するため積分が容易に実行できる.

ところが一般にはポテンシャル $V(x)$ は 2 次よりも高次の項を含んでおり, 上記のような対角化やガウス積分は実行不可能である. 以下ではハミルトニアンとして

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x), \quad (3.7)$$

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + Agx^3 + Bg^2x^4 + Cg^3x^5, \dots, \quad (3.8)$$

のように書ける理論を扱う. ここで A, B, C, \dots は実数係数である. g は摂動パラメタ (場の理論では結合定数と呼ばれる) であり, $g \rightarrow 0$ の極限でこの系は調和振動子系に帰着する. したがって, $g \ll 1$ の場合には量子論における物理量を調和振動子の固有状態 $|n\rangle$ に基づき g の展開級数として求めることが適切だと考えられる. このような解析法こそが「摂動論」と呼ばれるものである. ところで, x^3, x^5 といった x の奇数次の項は生成消滅演算子 a, a^\dagger で書いた際に a と a^\dagger の数が一致しない項になる. このような項は摂動展開の際に偶数回登場して初めてゼロでない値を取る. (摂動展開とは端的に言うと, $e^{-V(x)}$ を g について展開することだと理解すれば良い.) したがって, べき展開する際に g の奇数次の係数は存在せず, g の偶数次の係数のみが現れる. そのため物理量 (例えばエネルギー準位) は

$$E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}, \quad (3.9)$$

と書くことができる. 摂動論とは結局この係数 a_q を求めていく作業である.

第4章 摂動論

前の章において、ハミルトニアンに摂動パラメタを導入することで摂動論とよばれる解析手法が可能であると話した。この章では具体的にどういった操作で解析ができるのかを見ていきたい。まず、以下のハミルトニアンを考える。

$$H = H_0 + \lambda H' \quad (4.1)$$

$\lambda \rightarrow 0$ とすると、このハミルトニアンは調和振動子のハミルトニアンに帰着する。 H_0 は完全に対角化されているので、エネルギー固有値 $E_n^{(0)}$ に対応する規格化された固有ベクトルを $|\psi_n^{(0)}\rangle$ として

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (4.2)$$

$$H_0 |\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.3)$$

と記述できる。 E_n と $|\psi_n\rangle$ をそれぞれ

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (4.4)$$

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots \quad (4.5)$$

と表すと、これらを代入することで式 (4.2) は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & (H_0 + \lambda H')(|\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots) \\ &= (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots)(|\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots) \end{aligned} \quad (4.6)$$

λ の次数が等しいものは恒等的に一致するから、

$$\lambda^0 : H_0 |\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.7)$$

$$\lambda^1 : H_0 |\psi_n^{(1)}\rangle + H' |\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.8)$$

$$\lambda^2 : H_0 |\psi_n^{(2)}\rangle + H' |\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)} |\psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.9)$$

⋮

式 (4.7) は λ が 0 のときの式であるから、調和振動子の固有方程式と同等であり、式 (4.3) と一致する。

まず λ の 1 次の場合を調べていこう。式 (4.8) を $|\psi_n\rangle$ について整理すると、

$$(E_n^{(0)} - H_0) |\psi_n^{(1)}\rangle = (H' - E_n^{(1)}) |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.10)$$

と記述できる．ここで， $\langle \psi_m^{(0)} |$ を左から作用させてみよう．

$$(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}) \langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = \langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle - E_n^{(1)} \delta_{mn} \quad (4.11)$$

$m = n$ のとき左辺が 0 となるので，

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle \quad (4.12)$$

が得られる． $m \neq n$ のときは $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} \neq 0$ であるから，両辺を $E_n^{(0)} - E_m^{(0)}$ で割って，

$$\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} \quad (m \neq n) \quad (4.13)$$

が得られる．この式を満たす $|\psi_n^{(1)}\rangle$ は一般に，

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m(\neq n)} |\psi_m^{(0)}\rangle \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} + c_n^{(1)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.14)$$

で表される．

次に， λ に関する 2 次も調べていきたい．式 (4.9) を $|\psi_n\rangle$ について整理して，

$$(E_n^{(0)} - H_0) |\psi_n^{(2)}\rangle = (H' - E_n^{(1)}) |\psi_n^{(1)}\rangle - E_n^{(2)} |\psi_n^{(0)}\rangle \quad (4.15)$$

$\langle \psi_m^{(0)} |$ を左から作用させて内積をとると，

$$(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}) \langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(2)} \rangle = \langle \psi_m^{(0)} | (H' - E_n^{(1)}) | \psi_n^{(1)} \rangle - E_n^{(2)} \delta_{mn} \quad (4.16)$$

$m = n$ のとき，

$$E_n^{(2)} = \langle \psi_n^{(0)} | (H' - E_n^{(1)}) | \psi_n^{(1)} \rangle \quad (4.17)$$

式 (4.14) を代入して整理すると，

$$E_n^{(2)} = \sum_{m(\neq n)} \frac{\langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_m^{(0)} \rangle \langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (4.18)$$

これらが，1 次摂動および 2 次摂動の効果である．3 次摂動以降についても同様に求めることができる．

第5章 経路積分

5.1 遷移振幅

これまで述べてきたように，自然現象をヒルベルト空間の状態ベクトルと物理量に対応する演算子によって表現する量子力学は微小な現象を解析する手段として有効である．その反面，それまで物理現象を表してきた古典論との対応はわかりにくく，これらを結びつける手法が必要とされる．そこで，1940年代にファインマンが提唱した経路積分法を見てみよう．

経路積分の本題に入る前に，時刻 t_a における物質の状態が時刻 t_b においてどのように変化しているかについて，先に述べた演算子形式の量子論を復習しながら見ていこう．まず，シュレディンガー描像では物質の状態が時々刻々と変化するにつれて，状態ベクトル $|\psi\rangle_S$ も変化するという定義であった．物理量を算出する演算子はいつ何時も変わらない形をしており，その時の状態 $|\psi\rangle_S$ に対して等しく作用して状態 $|\psi\rangle_S$ の違いによって異なる期待値を与える．それに対し，ハイゼンベルグ描像では状態ベクトル $|\psi\rangle_H$ は時間に依存しない．時刻 t_a でも時刻 t_b でも変わらない状態ベクトル $|\psi\rangle_H$ を持ち，時間変化する演算子によってその時刻での期待値が得られる．

まず，ハイゼンベルグ描像において時刻 t での固有状態を以下のように表す．すなわち，ある物理量に対応する演算子 $Q(t)$ とその固有方程式は次のように表される．

$$|q, t\rangle = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |q\rangle \quad (5.1)$$

$$Q(t) |q, t\rangle = q |q, t\rangle \quad (5.2)$$

$|q, t\rangle$ は状態 $|q\rangle$ に対して上式で定められる時間 t での固有状態であることを念頭に置いておこう．これに対して，シュレディンガー表示では時刻 t において状態 $|\psi, t\rangle$ が一意に決まる．

さて，この章でまず始めに理解したいのは「時刻 t_a での状態から時刻 t_b での状態への遷移」を見ることであった．そこで，以前の章で定義した遷移振幅を思い出そう．時刻 t_a における状態 $|\phi, t_a\rangle_S$ から時刻 t_b における状態 $|\psi, t_b\rangle_S$ への遷移振幅は，

$$Z(\psi, \phi)_S = \langle \psi, t_b | \phi, t_a \rangle \quad (5.3)$$

と表される．一方，ハイゼンベルグ表示でも同じような内積をとると，

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b)_H = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \quad (5.4)$$

が得られる．結局シュレディンガー表示での遷移振幅は，

$$\begin{aligned} & \langle \psi, t_b | \phi, t_a \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a dq_b \langle \psi, t_b | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | \phi, t_a \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a dq_b \psi^*(q_b) \phi(q_a) Z(q_a, t_a, q_b, t_b)_H \end{aligned} \quad (5.5)$$

と得られる．このように，時間変化前と変化後の状態を $\psi(q)$ ， $\phi(q)$ で定めると，関数 Z_H によって時間発展を記述することができる．そのためこの関数 Z_H はプロパゲーターとも呼ばれる．

5.2 経路積分

さて，ここまで演算子形式で t_a から t_b までの時間発展する様子を演算子形式で見えてきたが，改めて経路積分の本題に入っていこうと思う．経路積分法では，この時間発展を無限小まで区切って考えていく．まずプロパゲーターについて，時間間隔 $t_b - t_a$ を無限小に N 等分して，時間間隔を $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ としてみよう．

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b)_H = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q_b, t_b | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \\ \times \langle q_{N-1}, t_{N-1} | \cdots | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle \quad (5.6)$$

ただし $N \rightarrow \infty$ かつ，それぞれの固有状態の時刻は $t_n = t_a + n\epsilon$ で表すものとする．ここまでの議論だけ見ると，ただ古典的な経路を細かく区分して見ているだけのように思えるかもしれないが，この式のみ注目すると，始点と終点のみを定めただけでその地点が合致していれば経路については一切指定をしていない．あとで出てくるように，この経路積分は作用積分で表現することができる．そこでは，作用積分を指数関数に乗せたものを重みとして，考えうるすべての経路の足し合わせとして得られる．すなわち経路積分法とは，言葉の通り「可能なすべての経路について作用積分で表される比重をかけて積分を行う」ということに他ならない．こうした解釈を，始点から終点までの履歴を足し合わせるとい意味で履歴総和と呼ぶ．当然，古典論の結果と経路積分法による「最も重みの大きな経路」は一致する．こういった点で，経路積分法は古典論と量子論の橋渡しをする手法と位置付けることができる．

さて，このプロパゲーターをさらに計算しやすくするために，より詳細に見ていこう．区分した経路のうち j 項目から $j+1$ 項目への遷移は，

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} | q_j \rangle \quad (5.7)$$

で与えられる．完備性を挟んで，

$$\langle q_{j+1} | e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} | q_j \rangle \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-i\epsilon H(P,Q)/\hbar} | q_j \rangle \\ \approx \int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{-i\epsilon H(p_j, q_j)/\hbar} \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \quad (5.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon [p_j q_j - H(p_j, q_j)] \right] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \epsilon \mathcal{L}(p_j, q_j) \right] \quad (5.9)$$

ただし, $\mathcal{L}(p, q)$ は古典力学系のハミルトン形式におけるラグランジアン密度であり,

$$\langle q_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|q_j\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar} \quad (5.10)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}(q_{j+1} - q_j) = \frac{dq_j}{dt} \equiv \dot{q}_j \quad (5.11)$$

を用いた. この式を用いると, プロパゲーターは以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} & \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \mathcal{L}(p_j, q_j) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

ただし, $q_0 = q_a, q_N = q_b$ である. 本論文においては, プロパゲーター $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ を分配関数 Z として扱う.

指数関数の引数はリーマン和の形をしており, 以下の書き換えができる.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \mathcal{L}(p_j, q_j) = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(p, q) = S[p(t), q(t), t_a, t_b] \quad (5.13)$$

さて, 本研究では実時間 t ではなく, 虚時間 τ を用いた経路積分を実行する. 実時間 t のまま計算を行うと激しく振動する関数が積分に含まれてしまうため, 計算の簡便化を図る目的でこれを導入する. 虚時間の導入はユークリッド化とよばれ, $t \rightarrow i\tau$ と変数変換するウィック回転という操作を行うことで行われる. ユークリッド化していないラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (5.14)$$

であるから, 作用積分 $S[x]$ にウィック回転を施すと次のようになる.

$$\begin{aligned} S[x] &= \int \mathcal{L} dt = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt \\ &= i \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] d\tau \\ &= i S_E \end{aligned} \quad (5.15)$$

したがって, ユークリッド化した経路積分は, 式 (5.12) より,

$$Z_E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_q e^{(-\frac{1}{\hbar} S_E)} \quad (5.16)$$

と表される.

第6章 リサージェンス構造

さて、ここまでの議論で量子論における物理量もしくはそれらを含む汎関数である分配関数はユークリッド化経路積分で表されることがわかった。実は、一般に次のような積分形、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S(x)} dx \quad (6.1)$$

について、冒頭でも触れたリサージェンス構造を見出すことができる。具体的な井戸型ポテンシャル量子力学系におけるリサージェンス構造は後の章で見えていくが、この章では積分に関するリサージェンス構造について見てみよう。

まずこの構造を見るにあたって、最急降下経路というものを考えたい。一般的に式 (6.1) のような指数関数形の積分を複素数領域に拡張したとしよう ($x \rightarrow z \in \mathbb{C}$)。すると、 z の複素平面上に、

$$\frac{dS(z)}{dz} = 0 \quad (6.2)$$

となるような停留点 $z = z^*$ が存在する。この点では $S(z)$ が極小値をとるため、 $e^{-S(z)}$ が極大値をとるため積分への寄与も非常に大きくなる。このような停留点を通る積分経路のうち、停留点から離れるにつれて $S(z)$ の実部が最も急激に大きくなる (積分への寄与が最も急激に小さくなる) 経路を「最急降下経路」と呼ぶ。複素関数の解析性からこの経路は $S(z)$ の虚部が一定の経路であることがわかる。コーシーの積分定理が保証することは、複素平面上に特異点がない限りは、 $(-\infty, \infty)$ という元の積分経路が最急降下経路に分解できる、ということである [図 6.1]。

ここで、 $S(z)$ にある実パラメータ g が含まれていたとしよう。このパラメータの複素位相 θ ($g = |g|e^{i\theta}$) が特定の値を跨ぐ際に、上記の最急降下経路への分解のされ方は不連続に変化する [図 6.1(b)(c) 参照]。このような現象を「ストークス現象」、現象が生じる境目となる θ の値を「ストークス線」という。さて、各最急降下経路からの寄与はこの θ の値の前後で、虚部の符号が反転する形で不連続に変化する。つまり最急降下経路に沿った積分には不定虚部が生じる。このようにそれぞれの経路について積分を行うと、本来の経路では実数値となるはずだった積分に不定虚部が現れる。ところが、それぞれの経路についての積分を足し合わせるとこの不定虚部は相殺し合って、無事の実数値としての積分結果が得られる。このような不定虚部の相殺構造をリサージェンス構造という。本研究では「摂動寄与と非摂動寄与」の間に非自明なリサージェンス構造が存在することを主張するが、元々量子論の物理量自体が経路積分という特殊な積分で定式化されており、摂動寄与や非摂動寄与を最急降下経路寄与だと解釈すれば、これは当然のことである。

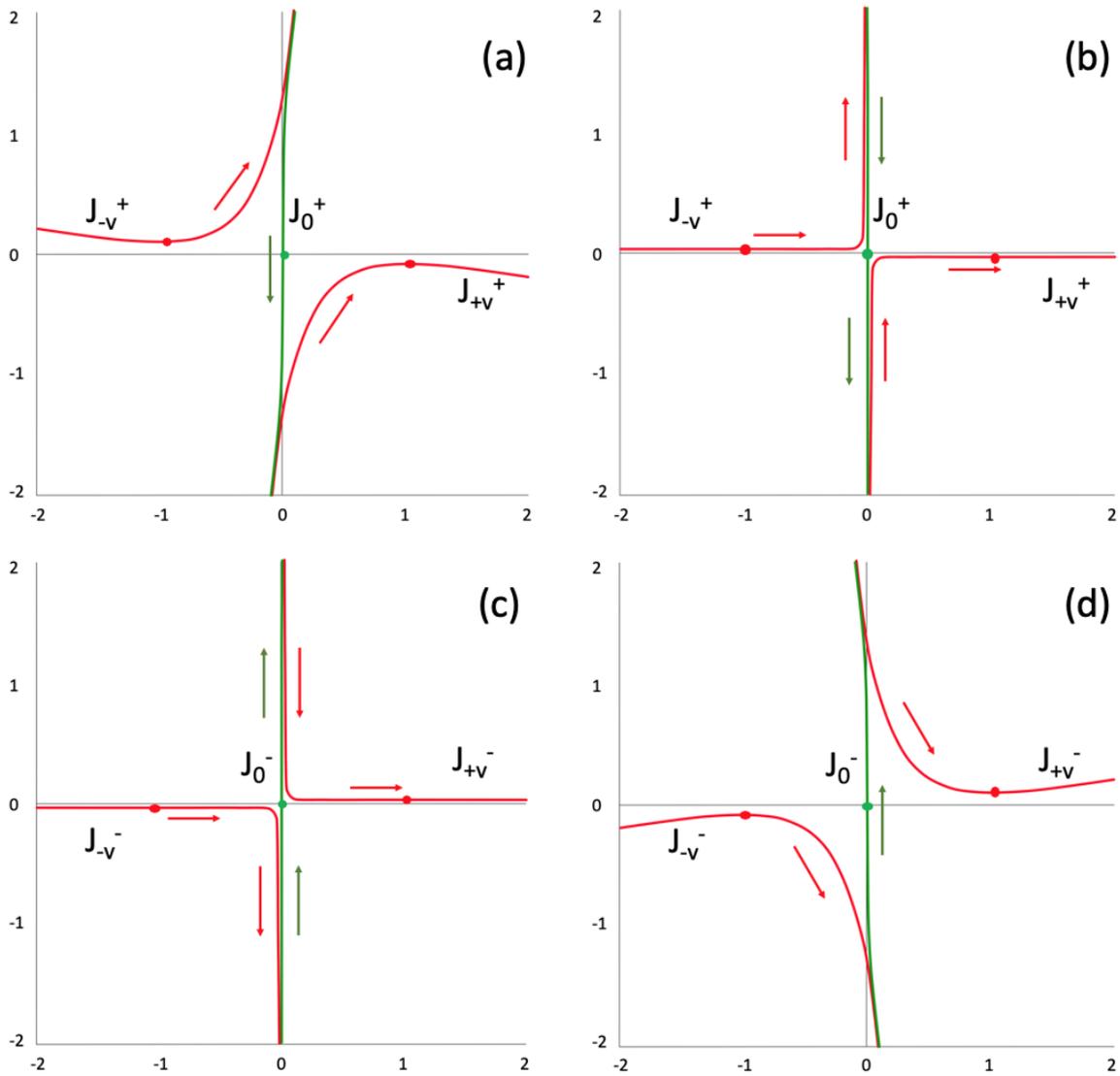


図 6.1: $S(x) = \frac{g}{2}(x^2 - \frac{1}{2g})^2$ を複素平面上において経路分解した図．赤点および緑点が停留点を示す． $\arg[g]$ を, (a) $\arg[g] \gg 0$, (c) $\arg[g] \rightarrow +0$, (d) $\arg[g] \rightarrow -0$, (b) $\arg[g] \ll 0$ と変えることで虚部の不定性を視認できる．

第7章 2重井戸型量子力学系

7.1 2重井戸型ポテンシャル量子系

まずは既によく知られている2重井戸型量子力学系のリサーチ構造について議論しよう [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] . この系のポテンシャルは図 7.1 のように2つの古典真空を持つ . したがって , 真空間を行き来する非摂動量子効果が必ず存在する . 具体的にはこの系のハミルトニアンは以下で与えられる .

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2} + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1 - gx)^2 \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} - gx^3 + \frac{g^2x^4}{2} \\ &= H_0 + H_{\text{DW}} . \end{aligned} \tag{7.1}$$

この系のポテンシャルは $V(x) = \frac{x^2}{2}(1 - gx)^2$ であるが , 調和振動子ハミルトニアンと摂動ハミルトニアンに分離すると , $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ と $H_{\text{DW}} = -gx^3 + \frac{g^2x^4}{2}$ に分離できる . ここで H_0 は調和振動子系のハミルトニアンであり , 摂動論ではこのハミルトニアンの固有状態に基づいて g^2 についての展開として物理量と求める . 特に基底状態のエネルギー準位 $E_0 \equiv E$ に注目し ,

$$E_0 \equiv E = E^{(0)} + g^2E^{(1)} + g^4E^{(2)} + g^6E^{(3)} + \dots, \tag{7.2}$$

のように g^2 を展開係数として二重井戸型系のエネルギー準位を求める . 実際に摂動計算を進めて , この系のエネルギー準位を算出していこう .

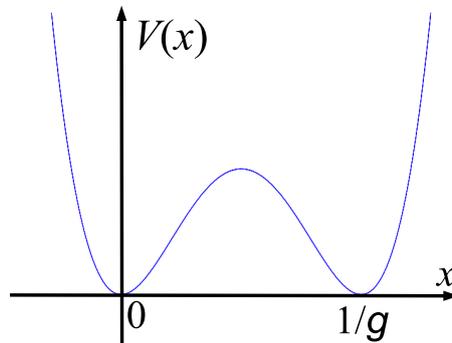


図 7.1: 二重井戸型ポテンシャル

7.2 摂動計算

変数 x を生成消滅演算子で表すと

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \quad (7.3)$$

となる．ただし，生成消滅演算子は，

$$\begin{aligned} a &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \\ a^\dagger &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

で定義され，交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす演算子である．さて，式 (7.3) を摂動ポテンシャル $H_{\text{DW}} = -gx^3 + \frac{g^2 x^4}{2}$ に代入して摂動計算を進めよう．

まず，1次摂動は以下のように計算される．

$$\langle 0|H_{\text{DW}}|0\rangle = \frac{g^2}{2} \langle 0|x^4|0\rangle = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \langle 0|(a^\dagger + a)^4|0\rangle = \frac{3g^2}{8}. \quad (7.5)$$

2次摂動は

$$\sum_{m \neq n} \frac{\langle 0|H_{\text{DW}}|n\rangle \langle n|H_{\text{DW}}|0\rangle}{E_0 - E_n} = -\frac{11}{8}g^2 - \frac{21}{32}g^4, \quad (7.6)$$

のように計算され，ここまでの結果により g^2 の1次の摂動級数が以下のように求められる．

$$g^2 E^{(1)} = \frac{3g^2}{8} - \frac{11g^2}{8} = -g^2, \quad (7.7)$$

3次摂動までの計算を実行すると g^4 までの摂動級数が求まり，

$$g^4 E^{(2)} = -\frac{9}{2}g^4, \quad (7.8)$$

となる．したがって，この次数までの基底状態のエネルギー準位は

$$E = \frac{1}{2} - g^2 - \frac{9}{2}g^4 + \mathcal{O}(g^6), \quad (7.9)$$

となる．

このように演算子法による摂動計算 (ファインマン図を用いた摂動計算でも同様) は次数が上がると計算が複雑になり，この操作では高次まで計算することが困難である．そこで本論文では Bender-Wu method と呼ばれる漸化式に基づく摂動計算手法を用いる．まず簡単のため完備性関係式 $\int dx |x\rangle \langle x| = 1$ を挿入して位置座標表示に移行すると，シュレディンガー方程式 $H|\psi\rangle = \epsilon|\psi\rangle$ は以下のように書ける．(ここではエネルギーを ϵ と表記する．)

$$-\frac{1}{2}\psi'' + \frac{1}{g^2}v(gx)\psi(x) = \epsilon\psi(x). \quad (7.10)$$

この式は, $v(x) = x^2(1-x)^2/2$ のとき 2重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2 = \frac{1}{g^2}v(gx)$ に帰着する. ここでは, まず,

$$\psi(x) = u(x)e^{-\frac{\omega x^2}{2}}, \quad (\omega^2 = v''(0)) \quad (7.11)$$

として, ガウス関数部分を取り除いた状態関数 $u(x)$ を考えよう. するとシュレディンガー方程式は以下のように書き換えられる.

$$-u''(x) + 2\omega x u'(x) + \frac{2}{g^2}\tilde{v}(gx)u(x) = 2\left(\epsilon - \frac{\omega}{2}\right)u \quad (7.12)$$

$$\frac{\tilde{v}(gx)}{g^2} \equiv \frac{v(gx)}{g^2} - \frac{\omega^2}{2}x^2. \quad (7.13)$$

ここで $u(x)$ を g の級数の形で以下のように表そう.

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(x)g^l. \quad (7.14)$$

ポテンシャルとエネルギーについても g でのべき展開の形を想定する. (我々が扱う理論では当然ポテンシャルは g のべき展開可能である.)

$$\frac{\tilde{v}(gx)}{g^2} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n g^n x^{n+2}, \quad \epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n g^n. \quad (7.15)$$

ただし, 無摂動状態のエネルギー準位は調和振動子型の $\epsilon_0 = (\nu + 1/2)$, ($\nu \in \mathbb{N}^0$) とする. これらをシュレディンガー方程式に代入すると,

$$-u_l''(x) + 2\omega x u_l'(x) + 2 \sum_{n=1}^l v_n x^{n+2} u_{l-n}(x) = 2 \sum_{n=0}^l (\epsilon_n - \delta_{n0}\omega/2) u_{l-n}(x) \quad (7.16)$$

が得られる. さらに $u_l(x)$ を x のべき級数として $u_l(x) = \sum_{k=0}^{K_l} A_l^k x^k$ のように置き, 上記の方程式に代入して式変形を行うと以下のような漸化式が得られる. (ここで K_l は l に応じて決まる次数で $K_l \leq \nu + 3l$ を満たす.)

$$A_l^k = \frac{1}{2\omega(k-\nu)} \left[(k+2)(k+1)A_l^{k+2} + 2 \sum_{n=1}^l \epsilon_n A_{l-n}^k - 2 \sum_{n=1}^l v_n A_{l-n}^{k-n-2} \right]. \quad (7.17)$$

漸化式に基づき波動関数はもちろんエネルギー準位の摂動級数展開が得られる. 2重井戸型ポテンシャルの場合にこの手法を適用して g^2 についての高次計算を行うと,

$$E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}, \quad (7.18)$$

$$a_q = -\frac{3^{q+1}}{\pi} q! \quad (q \rightarrow \infty), \quad (7.19)$$

が得られる. 本研究では実際に 200 次までの摂動計算を実行し (Mathematica Bender-Wu package 使用), 図 7.2 に示したように確かに $q \rightarrow \infty$ でこの結果が厳密になることを確かめた.

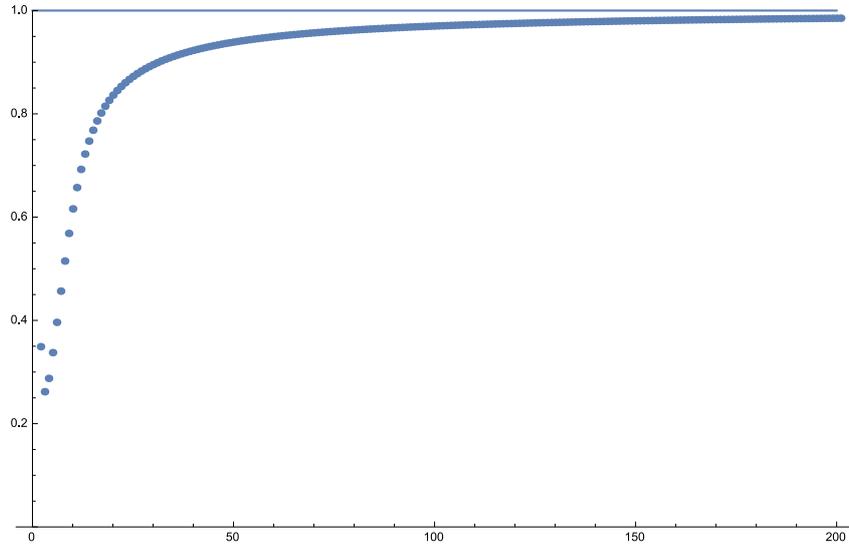


図 7.2: $a_q / (-\frac{3^{q+1}}{\pi} q!)$ を横軸を次数 q として $q = 200$ までプロットした．確かに大きい q で 1 に漸近していく．

7.3 ボレル総和法

さて，ここまでの議論で求めたいエネルギーの摂動級数展開を得ることはできたが，この級数は残念ながら階乗発散しており，意味のある量を抽出することが困難に見えるかもしれない．しかしこのような発散級数が g^2 の解析関数の漸近級数である可能性は高いといえる．そこで，「ボレル総和法」という手法を用いてこの発散級数を漸近級数として持つ解析関数を構成してみよう．まず始めに，「ボレル変換」という量を新たなパラメータ t の級数として

$$BE[t] \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{q!} t^q = \frac{1}{\pi t - 1/3}, \quad (7.20)$$

で定義しよう．これは有限な収束半径を持つ級数であるが，実軸上収束半径の位置 $t = 1/3$ に特異点 (極) を持つ．この級数に一種のラプラス変換を施すことで得られるものを「ボレル和」といい，以下のように t 平面 (ボレル平面) の正実軸上の積分で与えられる．

$$\mathbb{E}(g^2) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{g^2} e^{-t/g^2} BE[t]. \quad (7.21)$$

級数が収束する場合にはボレル和の中で積分と和の順序を入れ替えることが可能であり，その場合には元の級数に戻ることを容易に確かめることができる．しかし，上で得られたボレル変換を見るとボレル平面の正の実軸上に特異点 (極) が存在し，この積分を実行できない [図 7.3]．そこで積分経路をわずかに実軸上側もしくは下側に変更 (これは $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ という操作に等しい) し，積分を実行してみよう [図 7.3]．その結果，摂動的ボレル和として，

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{i}{g^2} e^{-\frac{1}{3g^2}} \quad (7.22)$$

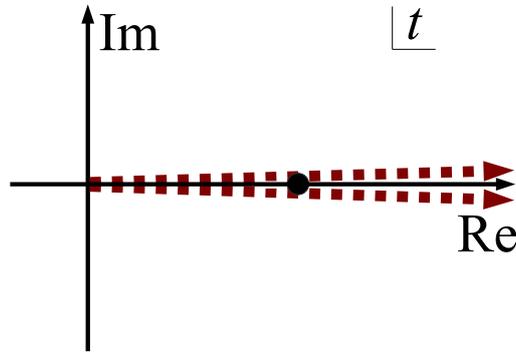


図 7.3: ボレル平面上的の特異点．赤点線は特異点を避けてボレル和を取る場合の積分経路．

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる．(この不定虚部は極の留数の半分の値として容易に求められる．)

下からバウンドされたポテンシャルの基底状態エネルギーは実数値をとるはずであり，また不定性が生じることもないはずなため，実査にこれまで計算手法が破綻している可能性が示唆されてきた．しかし，近年「リサージェンス理論」の発展によりこの不定虚部は計算手法の破綻を表すのではなく，取り入れるべき非摂動的寄与の存在 ($\approx e^{-1/(3g^2)}$) を示すことがわかってきた．具体的には「バイオン」と呼ばれるインスタントン-反インスタントン配位からのエネルギーへの寄与には同じ大きさで符号が逆になった不定虚部が存在し，この寄与を摂動的ボレル和の結果に加えることで最終的に不定虚部のない物理量が得られる．このバイオン配位は古典真空間のトンネル効果を表す完全に非摂動的な寄与であり，摂動級数を調べるだけで不定虚部を通してこのような非摂動効果の情報を抽出できることは驚くべきことである．このような摂動-非摂動寄与の非自明な関係に基づく解析手法は「リサージェンス理論」，このような摂動-非摂動関係のことは「リサージェンス構造」と呼ばれる．

次節では具体的にバイオン非摂動寄与を計算して，摂動的ボレル和の不定虚部を相殺する不定虚部が現れることを確認してみよう．

7.4 ユークリッド経路積分とインスタントン解

ここでは非摂動効果を議論するためにユークリッド化された経路積分形式で話を進めよう．ユークリッド化された理論形式では，形式的にはちょうどポテンシャルが上下反転した系を扱うことになり，この形式での古典解がそのまま真空間遷移を表す非摂動量子効果を記述する．そのようなユークリッド形式での古典解は「インスタントン解」と呼ばれ，真空を逆に遷移する解は「反インスタントン解」と呼ばれる．

さて，2重井戸型量子系のユークリッド化ラグランジアンは

$$L_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x), \quad (7.23)$$

のようになる．この系のオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = x - 3gx^2 + 2g^2x^3, \quad (7.24)$$

となる．この方程式を解くことで真空間遷移に対応するインスタントン解が得られるはずである．実はインスタントン解はユークリッド化エネルギー E_E がゼロという特徴を持ち，そのような解はBPS(Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield) 解と呼ばれる．ユークリッド化エネルギーがゼロであるという事実は，この解が一方の山からもう一方の山へエネルギー損失なく転がる状況を表すことを思い出すとよく分かるであろう．したがって，上の方程式を解く代わりに以下のBPS方程式を解くことで解が得られる．

$$E_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) = 0. \quad (7.25)$$

この方程式を解くと，下のような解が得られる．

$$x(\tau) = \frac{1}{2g} \left[1 + \tanh \left(\pm \frac{\tau - \tau_0}{2} \right) \right]. \quad (7.26)$$

±の符号はそれぞれインスタントン解，反インスタントン解を表す．ここで τ_0 は解のモジュライパラメータと呼ばれるもので真空遷移が起きる虚時間を表している．図7.4に示されているようにインスタントン解の場合，双曲関数の性質から $\tau = \tau_0$ で急激に $x = 0$ から $x = 1/g$ という真空に遷移することがわかるであろう．もちろん反インスタントン解はその逆になる．

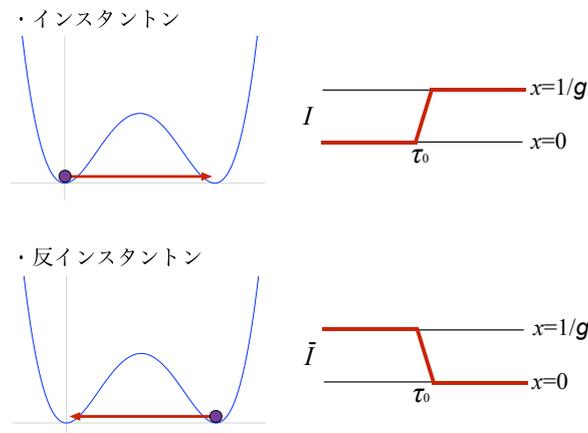


図 7.4: 2重井戸型量子系をユークリッド経路積分形式で考えた場合のインスタントン解と反インスタントン解の真空遷移の様子．

さて，この解の作用積分 S_I を求めることが出来ればこの解からの寄与を経路積分に基づいて計算できる．そこでまずBPS方程式を用いてこの解を代入したユークリッド化ラグランジアンを以下のように表そう．

$$L_E = \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{16\lambda} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{2} \right) \right]^2. \quad (7.27)$$

するとインスタントン解の作用積分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
S_I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{dx}{d\tau} \\
&= \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{1}{4g} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{2} \right) \right] \\
&= \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{1}{4g} \left[1 - 4g^2 \left(x - \frac{1}{2g} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{6g^2}.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

これは反インスタントン解でも共通である．経路積分法では，すべての物理量は作用積分を指数関数の肩に乗せたものをすべての可能な経路（配位）について積分することで得られる．あらゆる物理量は分配関数 Z から導出可能なので，分配関数へのインスタントンからの寄与を計算しておけばよい．ユークリッド形式の分配関数は S_E を一般のユークリッド作用積分として

$$Z = \int \mathcal{D}x e^{-S_E}, \tag{7.29}$$

という経路積分で表される．ただし，これは虚時間の最初の時間と最後の時間で，同じ配位になるような経路についての足し上げを意味する．摂動的真空（調和振動子周りの量子揺らぎを含む）からの寄与を Z_0 ，インスタントンからの寄与を Z_I と書き，それらの比 Z_I/Z_0 を求めよう．このようなインスタントンからの寄与は上記で求めた作用積分を指数の肩に乗せて， τ_0 について積分することで得られる．

$$\frac{Z_I}{Z_0} = A \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau_0 e^{-S_I}. \tag{7.30}$$

ここで虚時間方向の積分範囲を一旦 $[-\beta/2, \beta/2]$ として最後に $\beta \rightarrow \infty$ の極限を取る． A は 1 ループ行列式と呼ばれる係数であり，ラグランジアンをインスタントン解の配位の周りで 2 次まで展開してガウス積分を実行することで得られる．これは正確に言うと，ポテンシャルがない場合の 1 ループ行列式とポテンシャルがある場合の 1 ループ行列式との比である． A についてはよく知られた公式があり，そこでは $\frac{dx}{d\tau}$ の $\tau \rightarrow \pm\infty$ での振る舞いから完全に A を決めることができる．具体的には

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{cases} q^+ e^{-m\tau} & (\tau \rightarrow \infty) \\ q^- e^{+m\tau} & (\tau \rightarrow -\infty) \end{cases}, \tag{7.31}$$

のように振る舞う場合に，1 ループ行列式 A は

$$A = \sqrt{\frac{m^3 q^+ q^-}{\pi}}, \tag{7.32}$$

と求まる．今の場合には $m = 1$ ， $q^+ = q^- = 1/g$ となるので， $A = 1/\sqrt{\pi g^2}$ となる．したがってインスタントンからの寄与は

$$\frac{Z_I}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi g^2}} \beta e^{-\frac{1}{6g^2}}, \tag{7.33}$$

で得られる． τ_0 についての積分を実行した結果 β が係数としてかかった．もちろん隣の古典真空を基準にしたインスタントンつまり反インスタントンからの寄与でも同じである．ところで，全体の分配関数 $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$ は経路積分の経路について $\tau = 0$ と $\tau = \beta$ での配位が同じになるものを足し合わせたものなので，インスタントン寄与そのものではなくインスタントン-反インスタントンの組み合わせが分配関数に含まれているはずである．そこでインスタントンと反インスタントンの組（これ以降をバイオンと呼ぶ [44, 45]）が n 個入っている配位を考えよう．すると，分配関数への寄与 Z_{2n} として近似的に以下のようなものを得ることができる．

$$Z_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{Z_I}{Z_0} \right)^{2n} Z_0 \quad (7.34)$$

これは n 個のインスタントンと n 個の反インスタントンが存在する配位について，インスタントン間の相互作用を無視して Dilute Instanton Gas Approximation (DIGA) と呼ばれる手法で計算した寄与である． $(2n)!$ で割っているのは，一度配位を決めると自由にインスタントンを入れ替えられないことから，二重勘定を防ぐためである．もちろんこの中には $n = 0$ つまり摂動的真空（調和振動子）からの寄与も含まれている．したがって，最終的な分配関数は，これをすべての n について足し上げた上で，2 つの古典真空を考慮して全体を 2 倍することで得られる．

$$Z = 2 \sum_{n=0}^{\infty} Z_{2n} = 2Z_0 \cosh \frac{Z_I}{Z_0}. \quad (7.35)$$

基底状態のエネルギーは $Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{k=0} e^{-\beta E_k}$ という分配関数の定義より， $E \equiv E_0 = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} (1/\beta) \log Z$ で得られる．したがって基底状態のエネルギー準位は

$$\begin{aligned} E &= -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z \\ &= -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} (\log Z_0 + \log(e^{Z_I/Z_0} + e^{-Z_I/Z_0}) \dots) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log e^{Z_I/Z_0} (1 + e^{-2Z_I/Z_0}) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \left(\frac{Z_I}{Z_0} + \log(1 + e^{-2Z_I/Z_0}) \right) \\ &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi g^2}} e^{-\frac{1}{6g^2}} \end{aligned} \quad (7.36)$$

のように計算できる．ここで調和振動子の基底エネルギー $-\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z_0 = 1/2$ を用いた．また， Z_I/Z_0 にはモジュライ積分の結果として β が係数としてかかっており， Z_I/Z_0 が大きい値を持つ事実に基づき展開を行った．

この結果は真空間の遷移によって，縮退していた 2 つの真空エネルギーの組み換えが生じ，真の基底状態のエネルギーと真の第一励起状態のエネルギーに分離したことを意味する．実際有効ハミルトニアンに対角化によってもここでの議論を繰り返すことができる．基底状態のエネルギーが $E = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z$ と書けることを思い出すと， $-\frac{1}{\beta} \log(1 + Z_I/Z_0) \approx -\frac{1}{\beta} Z_I/Z_0$ は大まかに有効ハミルトニアンの非対角成分を表すことがわかる．したがって，2 つの古典真空周りのそれぞれの基底状態についての有効ハミルトニアンは

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} \\ -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

となる．これを対角化したエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{\pi g^2}} e^{-\frac{1}{6g^2}}, \quad (7.38)$$

となり，確かに上記の基底状態エネルギーが導出できた．

7.5 バイオン配位とリサージェンス構造

前節で示した計算手法はシュレディンガー方程式を数値的に解いた結果とも矛盾がなく近似法として成功しているが，バイオン配位内のインスタントン間の相互作用を無視しているため不完全であり，本来は相互作用を取り入れた計算を行うことでより厳密な非摂動的結果を出すべきである．左の真空 $x = 0$ を基準にすると，インスタントン-反インスタントンはある虚時間で左から右の真空 $x = 1/g$ への遷移が起こり，しばらく後の虚時間で右から左の真空への遷移を起こす配位を表す [図 7.5]．このようなインスタントン-反インスタントン間の相互作用を取り入れるには，それらが τ_R だけ離れて共存する配位の作用積分 $S_{I\bar{I}}(\tau_R)$ を求め，その寄与を τ_R について経路積分すれば良い．この作用は 2 重井戸型量子力学系においては以下ようになる．

$$S_{I\bar{I}}(\tau_R) = \frac{1}{3g^2} - \frac{2}{g^2} e^{-\tau_R} + \varepsilon \tau_R. \quad (7.39)$$

第 1 項は正反インスタントンが独立に存在する場合の作用積分の和 $2S_I = 1/(3g^2)$ であり，第 2 項が共存していることに起因する引力ポテンシャルに対応する．つまりこの作用を τ_R で微分してマイナス符号を付けたものが正反インスタントン間に働く有効的な力に当たるが，それは今の場合， $-\frac{2}{g^2} e^{-\tau_R}$ となって確かに引力になる．この第 1, 2 項が正しいことは，図 7.6 に示したように実際の作用の値と並べて描くことで確かめることができる．一方，第 3 項はこの作用に関する経路積分を収束させるために導入した項であり，二重井戸型ポテンシャルに小さな傾きを導入していることに対応し (左を低く右を高くする効果)，計算の最後には $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限操作を行う．

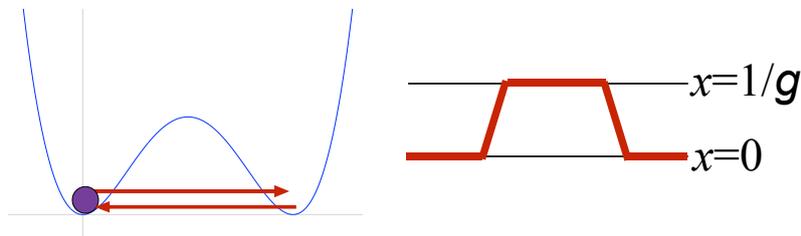


図 7.5: 二重井戸型ポテンシャルにバイオンの真空遷移の様子．

この作用積分は $\tau_R \gg 0$ で成り立つ有効的な作用ではあるが，これを積分することでインスタントン-反インスタントンの寄与 (バイオンという) を求めることができる．しかし，実際に τ_R に

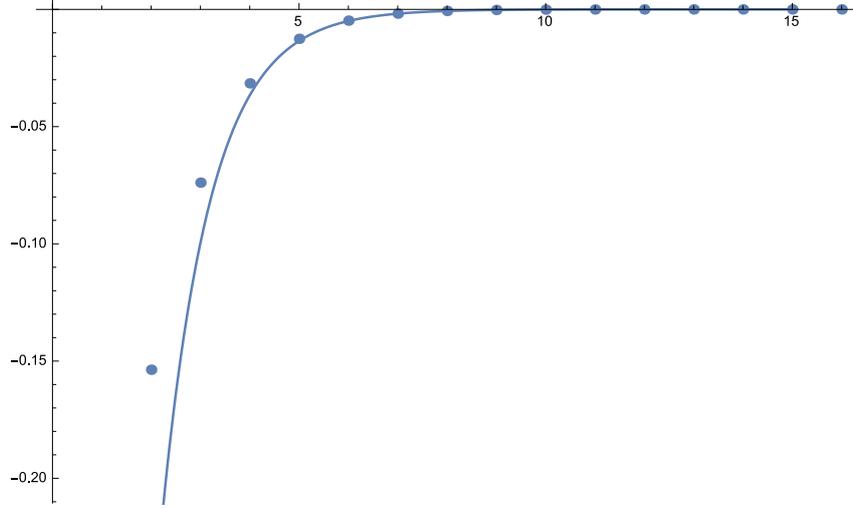


図 7.6: 二重井戸型ポテンシャル系でのパイオンの作用積分 $S_I - 1/(3g^2)$ を横軸を τ_R としてプロットしたもの (ここでは点で表されている) . また $-\frac{2}{g^2}e^{-\tau_R}$ は実線で描いた . ある程度 τ_R が大きいところで一致することが確かめられる . ($g^2 = 1$)

ついで積分を実行しようとするとき、 g^2 が小さい場合 (摂動計算が有効な領域) に積分が収束しないことがわかる . これはインスタントン-反インスタントン間に引力が働いていることに起因しており、インスタントン同士であれば斥力が働くためにこの問題は生じないはずである . そこで計算途中では $-g^2$ を正の値のパラメタとして扱い、計算の最後に解析接続 $-g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ を行う方針を取る . ここでの \pm の符号は g^2 を $g^2 = g^2 e^{\pm i\epsilon}$ のように僅かに複素化した際の符号とみなすこともできる . この処方 は BZJ 処方 (Bogomolnyi-Zinn-Justin 処方) と呼ばれる . 具体的には以下のように計算することができる .

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} &= \beta \left(\frac{1}{\sqrt{\pi g^2}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_R e^{-S_{I\bar{I}}} \\
&= \beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_R \exp \left[-\frac{2}{-g^2} e^{-\tau_R} - \epsilon \tau_R \right] \\
&= \beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s} \left(\frac{-g^2}{2} s \right)^\epsilon \quad \left(s \equiv \frac{2}{-g^2} e^{-\tau_R} \right) \\
&= \beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \Gamma(\epsilon) \left(\frac{-g^2}{2} \right)^\epsilon \\
&= -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \left[\gamma + \log \frac{2}{-g^2} + \mathcal{O}(\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right]. \tag{7.40}
\end{aligned}$$

インスタントンと反インスタントンそれぞれに 1 ループ行列式があるので $A^2 = 1/(\pi g^2)$ が掛かっており、パイオンそのものの重心位置についてのモジュライ積分により全体に β が掛かる . また τ_R は単に距離を表すだけでなく本来は配位空間の自由なパラメータを表すことから、その積分範囲は $[0, \infty]$ ではなく $[-\infty, \infty]$ とした . 最後の結果には $1/\epsilon$ という項が現れる . しかし、分配関数全体を考えた場合には左の真空から右の真空そしてまた左の真空への遷移を起こすパイオンとそ

の逆で右左右という遷移を起こすパイオンの両方の寄与が存在し、それぞれの作用積分において ε の入り方は正負逆になる (ε はポテンシャルを傾ける項に対応することを思い出そう)。したがって、この項は分配関数全体の中では相殺して消えているため無視できる。最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限を取り、 $-g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ ($g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$) という解析接続を行うことで

$$\frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} = -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \left[\gamma + \log \frac{2}{-g^2} \right] = -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \left[\gamma + \log \frac{2}{g^2} \mp i\pi \right]$$

が得られる。驚くべきことに DIGA を超える解析を行った結果、非摂動寄与に不定虚部が現れてしまった。実は、この不定虚部こそが摂動的ボレル和において現れた不定虚部 (7.22) を相殺するのである。実際、このパイオン寄与から基底エネルギーへの寄与は

$$\log(Z_0 + Z_{I\bar{I}} + \dots) = \log Z_0 + \log\left(1 + \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0}\right) + \dots = \log Z_0 + \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} + \dots, \quad (7.41)$$

を用いると、

$$E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\pi}) = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} = \frac{e^{-2S_I}}{\pi g^2} \left[\gamma + \log \frac{2}{g^2} \mp i\pi \right], \quad (7.42)$$

のように得られる。この不定虚部と摂動的ボレル和の不定虚部 (7.22) は確かに大きさが同じで符号がちょうど逆になっており、2つの寄与を足し合わせたものは不定性のないエネルギーになっている。ここで示された摂動的ボレル和と非摂動的パイオン寄与との非自明な関係

$$\text{Im} [\mathbf{E}(g^2 e^{\pm i\pi})] + \text{Im} [E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\pi})] = 0, \quad (7.43)$$

はリサージェンス構造と呼ばれており、摂動級数の中にはすでに非摂動寄与の情報が含まれていることを示している。この構造に基づいて、摂動論からパイオン寄与のような非摂動寄与を見出す、あるいは逆に非摂動寄与から高次摂動級数を見出すことが可能であり、このような手法に基づく量子系の非摂動解析手法はリサージェンス理論と呼ばれている。この構造は、元々は最急降下法で分解された積分経路間の非自明な関係、あるいは非線形常微分方程式の解の間の非自明な関係において発見されたが、この結果は量子系もしくは経路積分においても同様の構造があることが強く示唆されている。

この節ではパイオンの分配関数とエネルギーへの寄与を求めたが、1つ強調しておくべきことがある。すべての物理量の源泉である分配関数を求める式 (7.35) は、まさしくパイオンが $n = 0$ から $n = \infty$ 個ある場合の寄与の和であり、それを式 (7.35) では無理やりインスタントン寄与 Z_I を用いて書いていただけのことであった。したがって、分配関数は本来パイオン寄与 $Z_{I\bar{I}}, Z_{II\bar{I}\bar{I}}, \dots$ を用いて、

$$Z = 2(Z_0 + Z_{I\bar{I}} + Z_{II\bar{I}\bar{I}} + \dots), \quad (7.44)$$

のように表される。重要な点は摂動的寄与 (Z_0 に含まれる) と準モジュライ積分 ($Z_{I\bar{I}}$ などパイオン寄与に含まれる) には不定虚部が生じており、分配関数 Z 全体においてはそれらの不定虚部がすべて相殺しているということである。ここでは Z_0 と $Z_{I\bar{I}}$ の間の不定虚部相殺だけを見たわけだが、より高い精度での相殺を調べるためには $Z_{II\bar{I}\bar{I}}$ やそれ以上のパイオン寄与から生じる不定虚部を計算する必要がある。したがって、

$$\text{Im} [Z_0 + Z_{I\bar{I}} + Z_{II\bar{I}\bar{I}} + \dots] = 0, \quad (7.45)$$

という式が完全な不定虚部相殺を表すリサージェンス関係式になる．式 (7.44) のように異なる g^2 の指数関数寄与を足し合わせることで不定虚部が相殺された物理量の形式は「トランス級数」と呼ばれており，量子力学系や場の量子論において厳密な物理量がこの形式で表されることがわかってきている．次節ではリサージェンス理論の立場から未だ詳しく解析されていない3重井戸型ポテンシャル量子力学系について見ていこう．

第8章 3重井戸型量子系

8.1 3重井戸型ポテンシャル量子系

前章では2重井戸型量子力学系についてのリサーチエンス構造を解析した．現在リサーチエンス構造は，2重井戸型量子力学をはじめとして，サイン-ゴルドン量子力学など数多くの理論において研究が進んでいる．一方，量子力学系には2重井戸型ポテンシャルや \sin ポテンシャルの理論だけではなく，3重井戸型，4重井戸型模型そして一般に n 重井戸型模型が存在し，それらについてのリサーチエンス構造は未だ詳しく調べられていない．そこで，この章では3重井戸型ポテンシャル量子力学系 [46, 47, 48] に注目し，摂動的ボレル和とその不定虚部の計算，インスタントン解の導出，バイオン寄与とその不定虚部の計算を進める．文献 [48] の一部ではリサーチエンス理論とは異なる観点から不定虚部の相殺について議論されていることを注記しておく．

まず，3重井戸型量子力学系のハミルトニアンを以下に示そう．

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2} + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2 \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3g}{2}x^3 + \frac{13g^2}{8}x^4 - \frac{3g^3}{4}x^5 + \frac{g^4}{8}x^6 \\ &= H_0 + H_{\text{TW}}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

ここでも再び $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ と $H_{\text{TW}} = -\frac{3g}{2}x^3 + \frac{13g^2}{8}x^4 - \frac{3g^3}{4}x^5 + \frac{g^4}{8}x^6$ と分離して基底状態エネルギーについての摂動計算を行う．3重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2$ を図 8.1 に示しておく．ここで注意しておきたいのは，この3重井戸型ポテンシャル以降については山と谷の形がそれぞれ異なる点である．これらが正弦波のように等しい形をしている，いわゆる”チェビシェフ型”とよばれる井戸型ポテンシャルについてはバイオンの寄与を考えるのが非常に楽であるため，すでにリサーチエンス構造が確認されているが，ハミルトニアンが複雑であることから高次摂動まで計算を行うことが非常に困難である．それに対して本研究で取り扱う井戸型ポテンシャルは，ハミルトニアンが簡単なため高次摂動まで計算を行うことが可能である反面，バイオンの寄与を考えると複雑となる．これについては摂動効果を見たあとでまた説明したいと思う．

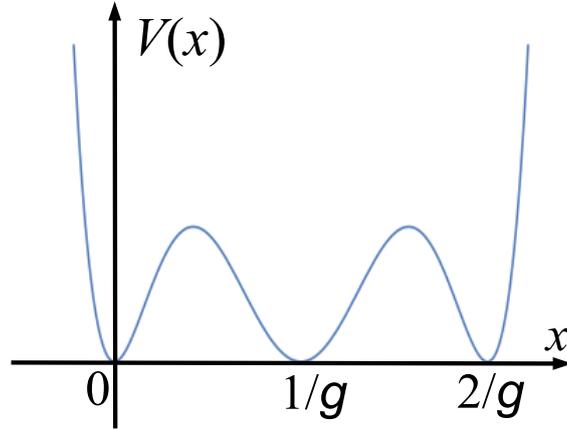


図 8.1: 3重井戸型ポテンシャル

8.2 摂動計算

ここでは $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a)$ を用いて, 演算子形式での摂動計算を進める. 摂動項は $H_{\text{TW}} = -\frac{3g}{2}x^3 + \frac{13g^2}{8}x^4 - \frac{3g^3}{4}x^5 + \frac{g^4}{8}x^6$ で与えられており, 1次摂動は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \langle 0|H_{\text{TW}}|0\rangle &= \frac{13g^2}{8}\langle 0|x^4|0\rangle + \frac{g^4}{8}\langle 0|x^4|0\rangle \\ &= \frac{13g^2}{8} \cdot \frac{1}{4}\langle 0|(a^\dagger + a)^4|0\rangle + \frac{g^4}{8} \cdot \frac{1}{8}\langle 0|(a^\dagger + a)^6|0\rangle = \frac{39g^2}{32} + \mathcal{O}(g^4). \end{aligned} \quad (8.2)$$

2次摂動は

$$\sum_{m \neq n} \frac{\langle 0|H_{\text{TW}}|n\rangle \langle n|H_{\text{TW}}|0\rangle}{E_0 - E_n} = -\frac{99}{32}g^2 + \mathcal{O}(g^4), \quad (8.3)$$

のように計算され, ここまでの結果により g^2 の1次の摂動級数が以下のようにもとまる.

$$g^2 E^{(1)} = \frac{39g^2}{32} - \frac{99g^2}{32} = -\frac{15g^2}{8}. \quad (8.4)$$

3次摂動までの計算を実行すると g^4 までの摂動級数が求まり,

$$g^4 E^{(2)} = -\frac{45g^4}{4}, \quad (8.5)$$

となる. したがって, この次数までの基底状態のエネルギー準位は

$$E = \frac{1}{2} - \frac{15g^2}{8} - \frac{45g^4}{4} + \mathcal{O}(g^6), \quad (8.6)$$

となる.

高次摂動級数を求めるために再び Bender-Wu method に基づいた計算を行う, $v(x) = \frac{x^2}{2}(1-x)^2(1-x/2)^2$ を式 (7.10) に導入し, 漸化式 (7.17) を Mathematica Bender-Wu package を用いて解く. 基底エネルギーの摂動級数

$$E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}, \quad (8.7)$$

について、500 次までの結果が得られた [4]。高次での振る舞いを決定するため、まず各次数での結果の比 a_q/a_{q-1} をプロットしよう。横軸を次数 q 、縦軸を a_q/a_{q-1} として図 8.2 に示した。結果が線形になっていることからわかるように、この級数は確かに階乗発散している。さてこのプロットの傾きから具体的にこの級数比の値を見てみると、

$$\frac{a_q}{a_{q-1}} \approx 4(q + 1/2), \quad (8.8)$$

となっていることがわかる。ここから推定されるのは $a_q \propto \Gamma(q + 3/2)4^{q+1}$ という結果である。係数まで含めてフィットを行うと、最終的に以下のような結果が得られる。

$$a_q = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\Gamma(q + 3/2)4^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty). \quad (8.9)$$

図 8.3 には、横軸を次数 q として縦軸に $a_q/(-\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\Gamma(q + 3/2)4^{q+1})$ をプロットした結果を示した。 q が大きくなるにつれ式 (8.9) が厳密になる様子が見えるであろう。このとき、150 次以下の低次では推定した解析式のフィッティングが適正でないようにも見えるが、すべてのインスタントの寄与を取り入れた場合は低次においてもこの推定式のまま十分な近似性を確認できることがわかっていく。また、井戸型ポテンシャルの形状が同型の繰り返しであるチェビシェフ型では、本章と同様に 1 つ目のバイオンのみ寄与でも十分な近似が得られる。

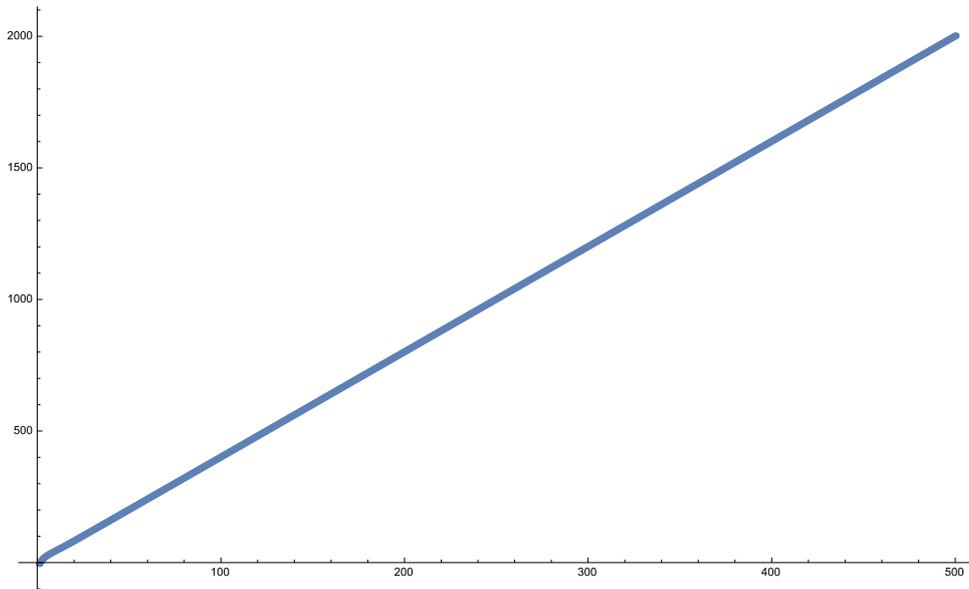


図 8.2: 3 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数の比 a_q/a_{q-1} を横軸を次数 q で 500 次までプロットしたもの。

次にボレル総和法を用いてこの発散級数を漸近級数として持つ解析関数を構成する。しかし、今の場合の級数には単純な階乗ではなくガンマ関数で一般化された階乗 $\Gamma(q + 3/2)$ が含まれるた

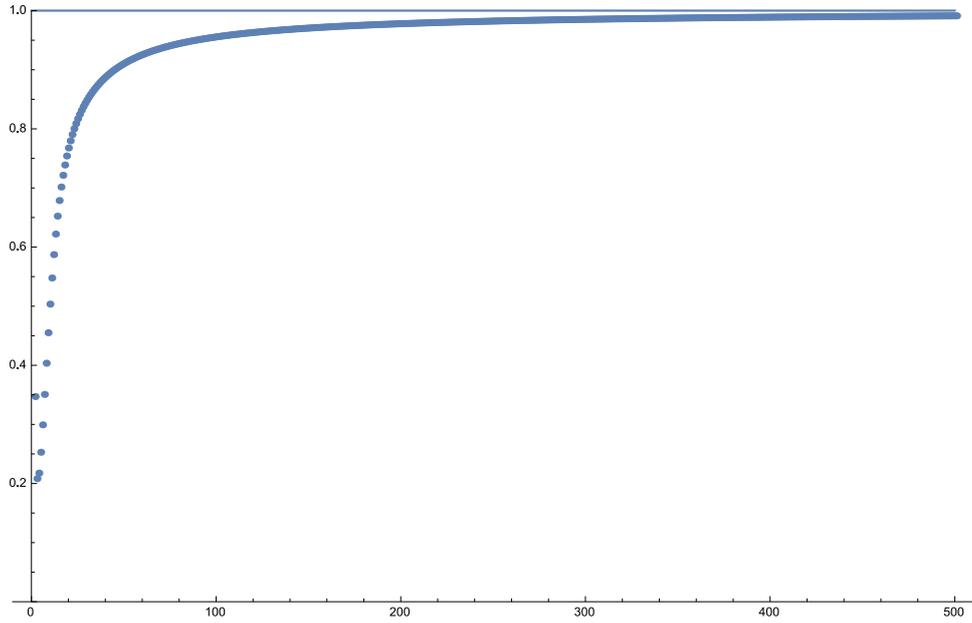


図 8.3: 3 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数と推定される解析式の比 $a_q / (-\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \Gamma(q + 3/2) 4^{q+1})$ をを横軸を次数 q で 500 次までプロットしたもの .

め，ボレル総和法も以下のように一般化されたものを考えて用いることにする .

$$BE[t] \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q + \alpha)} t^{q+\alpha-1}, \quad (8.10)$$

$$\mathbb{E}(g^2) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{g^{2\alpha}} e^{-t/g^2} BE[t]. \quad (8.11)$$

この形のボレル和についても，級数が収束する場合にはボレル和の中で積分と和の順序を入れ替えることが可能であり，その場合には元の級数に戻ることを容易に確かめることができる . 今の 3 重井戸型系の結果 (8.9) には $\alpha = 3/2$ として計算を進めると便利である . ボレル変換は，新たなパラメータ t の級数として

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q + 3/2)} t^{q+3/2-1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{t}}{t - 1/4}, \quad (8.12)$$

が得られ， $t = 1/4$ に極を持つことがわかる . そのため，2 重井戸型系の場合と同様に，ボレル和は積分経路をわずかに実軸上側もしくは下側に変更，もしくは同じことだが $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ として

計算することになる．このボレル和の虚部は $t = 1/4$ での留数から容易に計算することができて，

$$\begin{aligned} i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \oint_{t=1/4} \frac{dt}{g^3} e^{-t/g^2} \frac{\sqrt{t}}{t-1/4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{1}{g^3} \frac{2\pi i}{2} e^{-\frac{1}{4g^2}} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}g^3} e^{-\frac{1}{4g^2}}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

が得られる．結局，

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}g^3} e^{-\frac{1}{4g^2}}, \quad (8.14)$$

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる．さて，2重井戸型ポテンシャル系での経験から言うところでは現れた不定虚部は，インスタントン-反インスタントン配位つまりバイオン寄与の不定虚部と相殺され，全体として不定虚部のないエネルギーが得られるはずである．そこで次節以降では具体的にバイオン寄与を計算してこのような摂動-非摂動関係つまりリサージェンス構造を示す．

8.3 ユークリッド経路積分とインスタントン解

3重井戸型量子系のユークリッド化ラグランジアンは

$$L_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x), \quad (8.15)$$

で与えられ，対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ &= x - \frac{9g}{2}x^2 + \frac{13g^2}{2}x^3 - \frac{15g^3}{4}x^4 + \frac{3g^4}{4}x^5, \end{aligned} \quad (8.16)$$

となる．2重井戸型の場合と同様に，上の方程式を解く代わりに以下のBPS方程式を解くことでインスタントン解が得られる．

$$E_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) = 0. \quad (8.17)$$

この方程式を解くと，下のような解が得られる．

$$x(\tau) = \frac{1}{g} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\pm(\tau-\tau_0)}}} \right) \quad (8.18)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{g} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\pm(\tau-\tau_0)}}} \right) \quad (8.19)$$

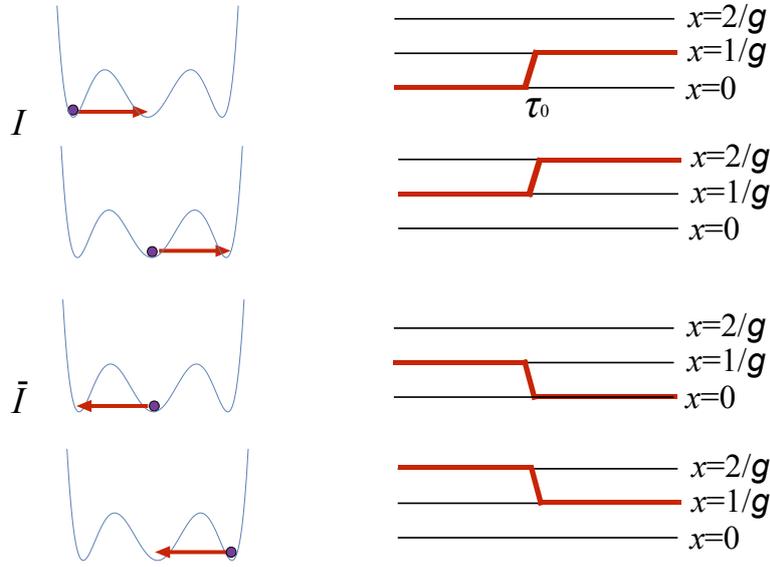


図 8.4: 3 重井戸型量子系をユークリッド経路積分形式で考えた場合のインスタントン解と反インスタントン解の真空遷移の様子 .

この理論では古典的真空が 3 種類あり，そのためインスタントンは 2 つ，反インスタントンも 2 つ存在する．ここでも \pm の符号はそれぞれインスタントン解，反インスタントン解を表す． τ_0 は解の位置を表すモジュライパラメタである．3 つの真空 $x = 0, 1/g, 2/g$ の間をそれぞれの解がどのように繋いでいるかを図 8.4 に表した．

これらの解の作用積分 S_I を求めて経路積分に基づいて寄与を計算しよう．ちなみに S_I は 4 つの解すべてについて共通であるので， $x = 0$ から $x = 1/g$ に遷移するインスタントン解のみに注目する．BPS 方程式を用いてこの解を代入したユークリッド化ラグランジアンを以下のように表す．

$$L_E = \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \left[\frac{1}{2g} \frac{e^{\tau-\tau_0}}{(1 + e^{\tau-\tau_0})^{3/2}} \right]^2, \quad (8.20)$$

するとユークリッド化作用積分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} S_I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{dx}{d\tau} \\ &= \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{1}{2g} \frac{e^{\tau-\tau_0}}{(1 + e^{\tau-\tau_0})^{3/2}} \\ &= \int_0^{\frac{1}{g}} dx \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{(1 - gx)^2} - 1 \right) (1 - gx)^3 \\ &= \frac{1}{8g^2}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

さてユークリッド形式の分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}x e^{-S_E}, \quad (8.22)$$

を計算するため、摂動的真空 (調和振動子) からの寄与を Z_0 、インスタントンからの寄与を Z_I と書き、それらの比 Z_I/Z_0 を以下のように計算する。

$$\frac{Z_I}{Z_0} = A \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau_0 e^{-S_I}. \quad (8.23)$$

ここでも虚時間方向の積分範囲を一旦 $[-\beta/2, \beta/2]$ として最後に $\beta \rightarrow \infty$ の極限を取る。1 ループ行列式 A は

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{cases} q^+ e^{-m\tau} & (\tau \rightarrow \infty) \\ q^- e^{+m\tau} & (\tau \rightarrow -\infty) \end{cases}, \quad (8.24)$$

$$A = \sqrt{\frac{m^3 q^+ q^-}{\pi}}, \quad (8.25)$$

から計算することが可能であり、今の場合には $m = 1$, $q^+ = q^- = 1/(2g)$ となるので、 $A = 1/\sqrt{4\pi g^2}$ となる。したがってインスタントンからの寄与は

$$\frac{Z_I}{Z_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi g^2}} \beta e^{-\frac{1}{8g^2}}, \quad (8.26)$$

と計算できる。他の真空間遷移を表すインスタントンや反インスタントンからの寄与も同じである。

2 重井戸型理論でそうであったように全体の分配関数 $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$ は経路積分の経路について $\tau = 0$ と $\tau = \beta$ での配位が同じになるものを足し合わせたものなので、インスタントンではなくバイオン寄与を含む。もちろん、インスタントン間の相互作用を無視することで Dilute Instanton Gas Approximation (DIGA) を適用して、基底状態のエネルギーを近似的に計算することがこの場合も可能であるが、この論文の本論は DIGA を越えた解析方法について議論することであり、DIGA について議論することでは紙面を消費する必要はないであろう。そこで、ここでは有効ハミルトニアンに対角化によって、3 つの古典真空での基底状態について組み換えが起こって真の基底状態が定まる様子を見ることにしよう。まず、2 重井戸型理論の場合と異なり、左右の古典真空 ($x = 0, 2/g$) と真ん中の古典真空 ($x = 1/g$) ではそれらの点の周りで展開したときに現れる調和振動子系の振動数が 2 倍だけ異なることに注意しよう。したがって、左右の真空では基底状態エネルギーは $1/2$ であるのに対し、真ん中の真空では $1/4$ となる。これは 3 重井戸型ポテンシャル $V(x)$ を $x = 0$ と $x = 1/g$ の周りで展開して 2 次まで見てみると容易にわかる。さて、 $E = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z$ を思い出すと、3 つの古典真空周りのそれぞれの基底状態についての有効ハミルトニアンは

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} & 0 \\ -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} \\ 0 & -\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

となる．これを対角化して得られるエネルギーは

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \left[3 \pm \sqrt{1 + 128 \left(\frac{1}{\beta} \frac{Z_I}{Z_0} \right)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \left[3 \pm \sqrt{1 + \frac{32}{\pi g^2} e^{-\frac{1}{4g^2}}} \right], \tag{8.28}
 \end{aligned}$$

となる．したがって真の基底状態エネルギーはこの近似の範囲内で

$$E_0 = \frac{1}{8} \left[3 - \sqrt{1 + \frac{32}{\pi g^2} e^{-\frac{1}{4g^2}}} \right], \tag{8.29}$$

のように得られる．

8.4 バイオン配位とリサージェンス構造

次に，より精緻な解析方法としてインスタントン間の相互作用を導入してバイオン寄与を求めよう．ここでは最も簡単な場合，つまりある虚時間で $x = 0$ から $x = 1/g$ の真空への遷移が起こり，しばらく後の虚時間で逆の遷移を起こすバイオン配位を考える [図 8.5]．このようなインスタントン-反インスタントンが τ_R (準モジュライ) だけ離れて共存する配位の作用積分 $S_{II}(\tau_R)$ は今の理論では以下のようなになる．

$$S_{II}(\tau_R) = \frac{1}{4g^2} - \frac{1}{g^2} e^{-\tau_R/2} + \varepsilon \tau_R. \tag{8.30}$$

第 1 項は正反インスタントンが独立に存在する場合の作用積分の和 $2S_I = 1/(4g^2)$ であり，第 2 項が共存していることに起因する引力ポテンシャルに対応する．実際，インスタントン-反インスタントンが共存する配位の作用積分の値を横軸を τ_R としてプロットしたものが図 8.6 であり，確かにこの第 2 項が正しいことがわかる．第 3 項はこの作用に関する経路積分を収束させるために導入した項であり，3 重井戸型ポテンシャルに小さな傾きを導入していることに対応し，計算の最後には $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限操作を行う．

この作用積分を指数の肩に乗せたものを積分することでバイオン寄与を求めることができる．しかし，ここでも τ_R についての積分を実行しようとするとき， g^2 が小さい領域で積分が収束しないことがわかる．そこで $-g^2$ を正の値をとるパラメタとして計算を行い，計算の最後に解析接続

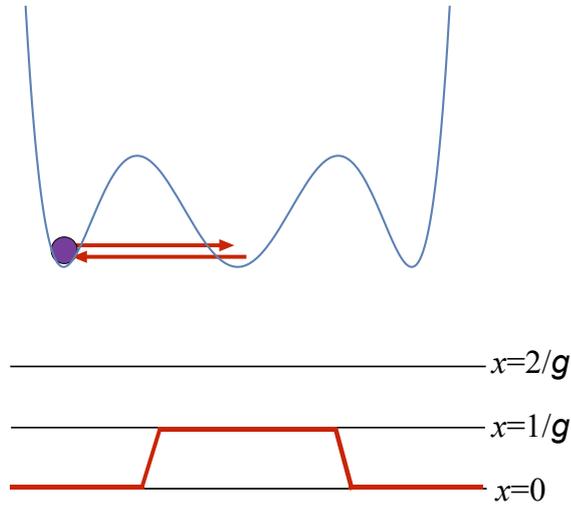


図 8.5: 3 重井戸型量子系のバイオン配位の真空遷移の様子 .

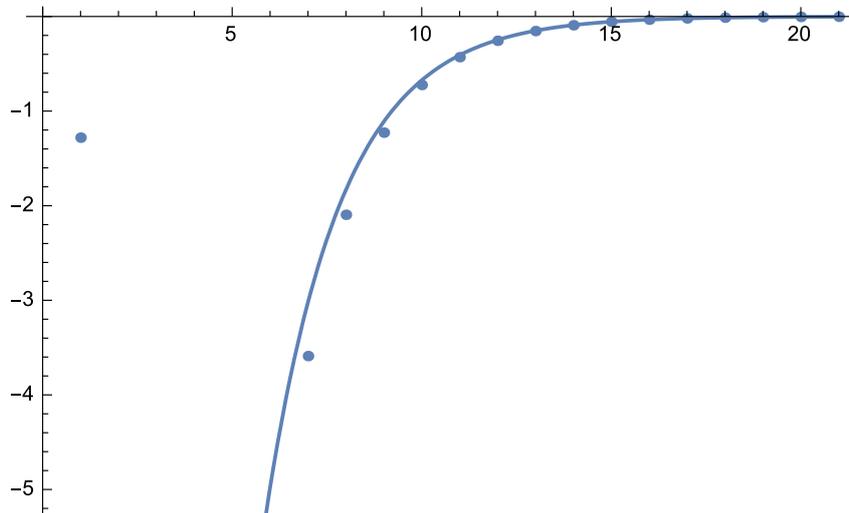


図 8.6: 3 重井戸型量子系のバイオンの作用積分 $S_I - 1/(4g^2)$ を横軸を τ_R としてプロットしたもの (ここでは点で表されている) . また $-\frac{1}{g^2}e^{-\tau_R/2}$ は実線で描いた . ある程度 τ_R が大きいところで一致することが確かめられる . ($g^2 = 0.1$)

$-g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ ($g^2 = g^2 e^{\pm i\epsilon}$) を行う BZJ 処方を適用する .

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} &= \beta \sqrt{\frac{2}{\pi g^2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi g^2}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_R e^{-S_{I\bar{I}}} \\
&= \beta \frac{\sqrt{2} e^{-2S_I}}{4(\pi g^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_R \exp \left[-\frac{e^{-\tau_R/2}}{-g^2} - \varepsilon \tau_R \right] \\
&= \beta \frac{\sqrt{2} e^{-2S_I}}{4(\pi g^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} 2e^{-s} (-g^2 s)^{2\varepsilon} \quad \left(s \equiv \frac{e^{-\tau_R/2}}{-g^2} \right) \\
&= \beta \frac{e^{-2S_I}}{\sqrt{2}(\pi g^2)^{\frac{3}{2}}} \Gamma(2\varepsilon) (-g^2)^{2\varepsilon} \\
&= -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\sqrt{2}(\pi g^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\gamma + \log \frac{1}{-g^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon} \right]. \tag{8.31}
\end{aligned}$$

インスタントンと反インスタントンそれぞれに 1 ループ行列式があるので $A^2 = \frac{1}{4\pi g^2}$ がかかっており, バイオンそのものの重心位置についてのモジュライ積分により全体に β が掛かる . $\sqrt{2/(\pi g^2)}$ というファクターは, 2 重井戸型系の場合とは異なり 3 重井戸型系では異なる曲率を持つ真空間 ($x=0$ と $x=1/g$) の遷移を計算しているため, その補正として現れるものである . ε の入り方は正負逆になる寄与が分配関数の中に必ず存在するため, $1/\varepsilon$ の項は分配関数全体の中では相殺して消えるため無視して良い . 最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限を取り, $-g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ ($g^2 = g^2 e^{\pm i\epsilon}$) という解析接続を行うことで

$$\frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} = -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}g^3} \left[\gamma + \log \frac{1}{-g^2} \right] = -\beta \frac{e^{-2S_I}}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}g^3} \left[\gamma + \log \frac{1}{g^2} \mp i\pi \right],$$

が得られる . この不定虚部こそが摂動的ボレル和において現れた不定虚部 (8.14) を相殺する . 実際, このバイオン寄与から基底エネルギーへの寄与は

$$\log(Z_0 + Z_{I\bar{I}} + \dots) = \log Z_0 + \log\left(1 + \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0}\right) + \dots = \log Z_0 + \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} + \dots, \tag{8.32}$$

を用いると,

$$E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{Z_{I\bar{I}}}{Z_0} = \frac{e^{-2S_I}}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}g^3} \left[\gamma + \log \frac{1}{g^2} \mp i\pi \right], \tag{8.33}$$

のように得られる . この不定虚部と摂動的ボレル和の不定虚部 (8.14) は確かに大きさが同じで符号がちょうど逆になっており, 2 つの寄与を足し合わせたものは不定性のないエネルギーになっている ($2S_I = 1/(4g^2)$ に注意) . したがってここでも摂動的ボレル和と非摂動的バイオン寄与との非自明な関係

$$\text{Im} [\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon})] + \text{Im} [E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon})] = 0, \tag{8.34}$$

つまりリサージェンス構造が示された .

2 重井戸型系と 3 重井戸型系は一見似た理論であるため, 両方にリサージェンス構造があることは自然に思うかもしれないが, 実はこの 2 つの理論には大きな違いがある . 例えば, 2 重井戸型においては左端からのインスタントンと右端からのインスタントンは解析的に等価であるのに

対し，3重井戸型では左端から中央へのインスタントンと違って中央からのインスタントン寄与は左端と右端とに分かれてしまうため，インスタントンと反インスタントンが同等でない．他にも，超対称模型の構成などを見たときに性質が異なることが示唆されている．このような相異なる理論の両方においてリサージェンス構造が示されたということは，かなり広い量子系におけるリサージェンス構造を示唆しており，今後の研究への期待が高まる．

第9章 4重井戸型量子力学系

9.1 4重井戸型ポテンシャル系

ここでの議論は大部分が3重井戸型ポテンシャルの場合と並行しているため、重要な結果だけを順番に示していく。まず、4重井戸型量子力学系のハミルトニアンを以下に示そう。

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2} + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2(1-gx/3)^2 \\ &= H_0 + H_{\text{QW}}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

4重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2(1-gx/3)^2$ を図 9.1 に示しておく。

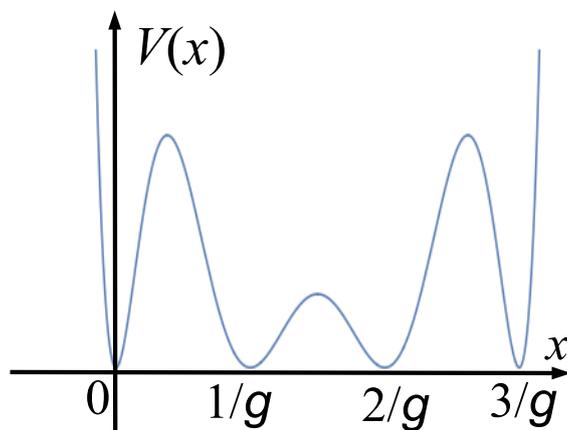


図 9.1: 4重井戸型ポテンシャル

9.2 摂動計算

高次摂動級数を求めるために Bender-Wu method に基づいた計算を行う、 $v(x) = \frac{x^2}{2}(1-x)^2(1-x/2)^2(1-x/3)^2$ を式 (7.10) に導入し、漸化式 (7.17) を Mathematica Bender-Wu package を用いて解く。基底エネルギーの摂動級数

$$E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}, \tag{9.2}$$

について 300 次までの結果が得られた．高次での振る舞いを決定するため，まず各次数での結果の比 a_q/a_{q-1} をプロットしよう．横軸を次数 q ，縦軸を a_q/a_{q-1} として図 9.2 に示した．結果が線形になっていることからわかるように，この級数は確かに階乗発散している．さてこのプロットの傾きから具体的にこの級数比の値を見てみると，

$$\frac{a_q}{a_{q-1}} \approx 4.73686(q+1), \quad (9.3)$$

となっていることがわかる．ここから推定されるのは $a_q \propto \Gamma(q+2)(4.73686)^{q+1}$ という結果である．係数まで含めてフィットを行うと，最終的に以下のような結果が得られる．

$$a_q = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi^2} \Gamma(q+2)(4.73686)^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty). \quad (9.4)$$

図 9.3 には，横軸を次数 q として縦軸に $a_q/(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi^2} \Gamma(q+2)(4.73686)^{q+1})$ をプロットした結果を示した． q が大きくなるにつれ式 (9.4) が厳密になる様子が見える．4.73686 という値の出現はこの系のインスタントン作用の大きさが $1/(6g^2)$ や $1/(8g^2)$ のような形ではなく，既約分数では表せないことを示唆している．

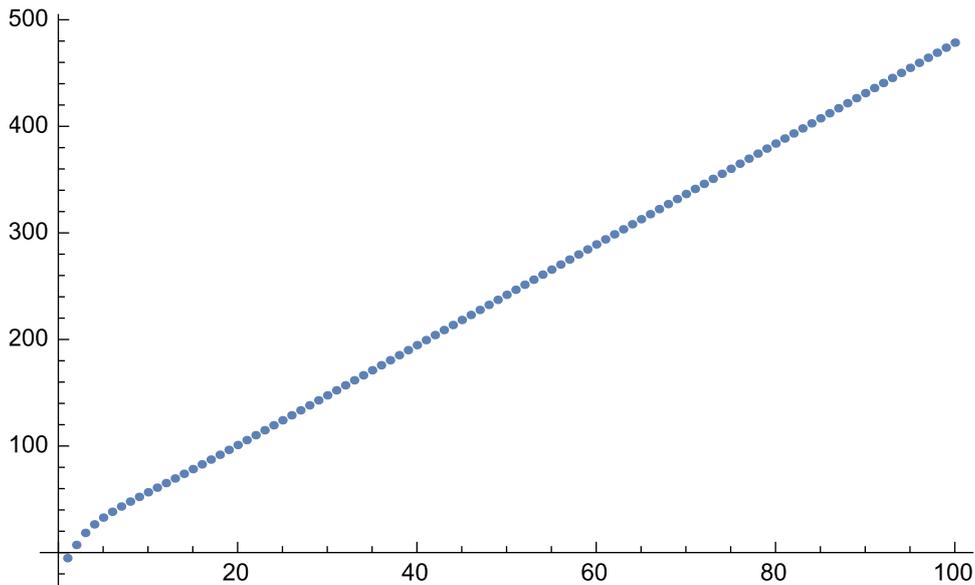


図 9.2: 4 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数の比 a_q/a_{q-1} を横軸を次数 q で 100 次までプロットしたもの．

次にボレル再和法を用いてこの発散級数を漸近級数として持つ解析関数を構成する．4 重井戸型系の摂動級数 (8.9) についても，一般化されたボレル和 (この場合は $\alpha = 2$) を適用して計算を進める．ボレル変換は，

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q+2)} t^{q+2-1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi^2} \frac{t}{t - 1/4.73686}, \quad (9.5)$$

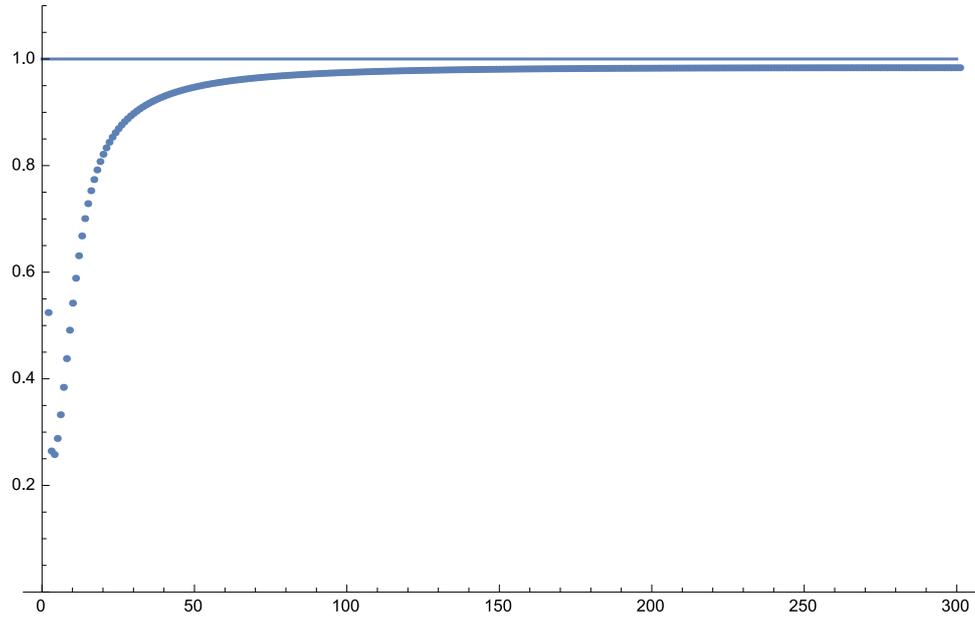


図 9.3: 4 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数と推定される解析式の比 $a_q / (-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi^2} \Gamma(q+2)(4.73686)^{q+1})$ を横軸を次数 q で 300 次までプロットしたもの。

のように得られ, $t = 1/4.73686$ に極を持つことがわかる. ボレル和は積分経路をわずかに実軸上側もしくは下側に変更, もしくは同じことだが $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ として計算する. このボレル和の虚部は $t = 1/4.73686$ での留数から容易に計算することができて,

$$i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) = \frac{i\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi g^4} \frac{1}{4.73686} e^{-\frac{1}{4.73686g^2}} \quad (9.6)$$

が得られる. 結局,

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{i\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi g^4} \frac{1}{4.73686} e^{-\frac{1}{4.73686g^2}} \quad (9.7)$$

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる. この不定虚部はインスタントン-反インスタントン配位つまりバイオン寄与の不定虚部と相殺され, 全体として不定虚部のないエネルギーが得られると考えられる. 以下ではそれを見てみよう.

9.3 インスタントン解とバイオン寄与

4 重井戸型量子系のユークリッドラグランジアンは

$$L_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x), \quad (9.8)$$

で与えられ, 対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad (9.9)$$

となる．もちろん以下の BPS 方程式を解くことでインスタントン解が得られる．

$$E_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) = 0. \quad (9.10)$$

この方程式を解くと，下のような解が得られる．

$$gx(\tau) = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2^{2/3} e^{\frac{t}{3}}}{\sqrt[3]{-e^{2t} - 2e^t - 1}}} + 1} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{16(5e^t+4)}{e^t+1} - 72}{4\sqrt{\frac{2^{2/3} e^{\frac{t}{3}}}{\sqrt[3]{-e^{2t} - 2e^t - 1}}} + 1}} - \frac{2^{2/3} e^{\frac{t}{3}}}{\sqrt[3]{-e^{2t} - 2e^t - 1}} + 2} \quad (9.11)$$

ここでも \pm の符号はそれぞれ順不同でインスタントン解，反インスタントン解を含んでいる．ここでは煩雑さを避けるためモジュライパラメタ τ_0 は省略した．3 つの真空 $x = 0, 1/g, 2/g, 3/g$ の間をそれぞれの解がどのように繋いでいるかは図 9.1 から見て取れるであろう．これらの解の作用積分 S_I を $x = 0$ から $x = 1/g$ に遷移するインスタントン解のみに注目して求めてみる．

$$S_I = 0.105555 \frac{1}{g^2} \approx \frac{1}{2 \cdot 4.73686 g^2}. \quad (9.12)$$

ここで摂動的ボレル和に現れた 4.73686 が出現した！

早速，インスタントン間の相互作用を導入してバイオン寄与を考えよう．ここでは最も簡単な場合，つまりある虚時間で $x = 0$ から $x = 1/g$ の真空への遷移が起こり，しばらく後の虚時間で逆の遷移を起こすバイオン配位を考える．このようなインスタントン-反インスタントンが τ_R (準モジュライ) だけ離れて共存する配位の作用積分 $S_{II}(\tau_R)$ は今の理論では以下ようになる．

$$S_{II}(\tau_R) = \frac{1}{4.73686 g^2} - \frac{2}{g^2} e^{-\tau_R/2} + \varepsilon \tau_R. \quad (9.13)$$

第 1 項は正反インスタントンが独立に存在する場合の作用積分の和 $2S_I = 1/(4.73686 g^2)$ であり，第 2 項が共存していることに起因する引力ポテンシャルに対応する．第 3 項はこの作用に関する経路積分を収束させるために導入した項であり，計算の最後には $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限操作を行う．図 9.4 にはこれまでと同様にこの作用積分についてのフィッティングを示した．

ここでも， $-g^2$ を正の値をとるパラメタとして計算を行い，計算の最後に解析接続 $-g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ を行う BZJ 処方を適用して，この作用積分からバイオン寄与を計算できる．ただし，ここでは 1 ループ行列式などからくる係数をまとめて C と表記して大まかな結果を示す．

$$\frac{Z_{II}}{Z_0} \approx -\beta C e^{-2S_I} \left[\gamma + \log \frac{2}{-g^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon} \right]. \quad (9.14)$$

ここでも $1/\varepsilon$ の項は分配関数全体の中では相殺して消えるため無視して良い．最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限を取り， $g^2 = g^2 e^{\pm i\pi}$ という解析接続を行うことで

$$\frac{Z_{II}}{Z_0} = -\beta C e^{-2S_I} \left[\gamma + \log \frac{2}{g^2} \mp i\pi \right], \quad (9.15)$$

が得られる．この不定虚部の指数部分を見てみると， $e^{-2S_I} = e^{-1/(4.73686 g^2)}$ であり，摂動的ボレル和において現れた不定虚部を相殺する．実際このバイオン寄与から基底エネルギーへの寄与は

$$E^{II}(g^2 e^{\pm i\pi}) = C e^{-2S_I} \left[\gamma + \log \frac{2}{g^2} \mp i\pi \right], \quad (9.16)$$

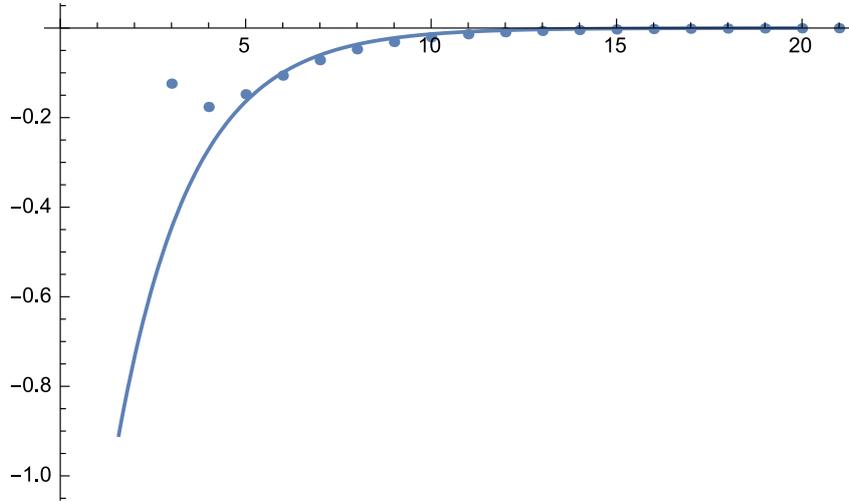


図 9.4: 4 重井戸型量子系のパイオンの作用積分 $S_I - 1/(4.73686g^2)$ を横軸を τ_R としてプロットしたもの (ここでは点で表されている) . また $-\frac{2}{g^2}e^{-\tau_R/2}$ は実線で描いた . ある程度 τ_R が大きいところで一致することが確かめられる . ($g^2 = 1$)

のように得られる . 摂動論を見るだけで , インスタントン作用の大きさ $S_I = 1/(2 \cdot 4.73686g^2)$ が完璧に推定できたという事実は , リサージェンス理論の威力をまざまざと見せつけている .

最後に , これまでの議論の流れを逆にしてリサージェンス構造を仮定して , ここでのパイオン寄与の係数 C を求めてみよう (普通リサージェンス理論を適用して非摂動効果を求めるときにはこのような議論を行う) . 摂動的ボレル和とパイオン寄与の不定虚部は相殺するはずなので ,

$$\text{Im} [\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon})] + \text{Im} [E^{II}(g^2 e^{\pm i\epsilon})] = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi g^4} \frac{1}{4.73686} e^{-\frac{1}{4.73686g^2}} \mp C\pi e^{-\frac{1}{4.73686g^2}} = 0, \quad (9.17)$$

が成り立つ . したがって , 係数 C は

$$C = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\pi^2 g^4} \frac{1}{4.73686}, \quad (9.18)$$

のように求めることができた . 4 重井戸型量子系にリサージェンス理論が応用され , 非摂動効果が解析された例はこれが初めてである .

第10章 5, 6, 7重井戸型系と n 重井戸型量子系

10.1 5重井戸型ポテンシャル

5重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2(1-gx/3)^2(1-gx/4)^2$ についても高次摂動計算を行った結果, 基底状態エネルギー $E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$ について以下の結果が得られた.

$$a_q = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma(q+5/2) (5.33081)^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty). \quad (10.1)$$

図 10.1 には, 横軸を次数 q として縦軸に $a_q / (-\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma(q+5/2) (5.33081)^{q+1})$ をプロットした結果を示した. q が大きくなるにつれ式 (10.1) が厳密になる様子が見える.

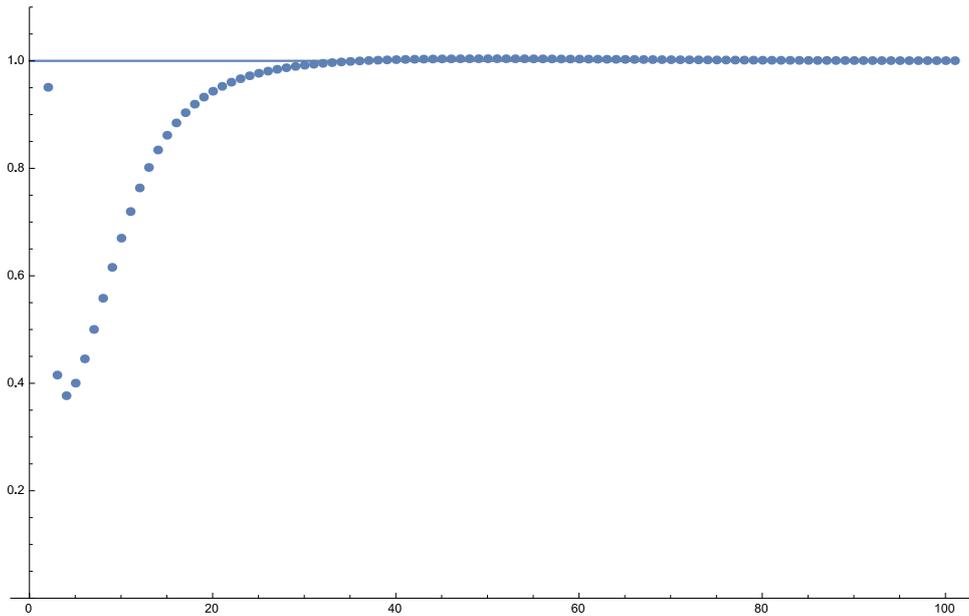


図 10.1: 5重井戸型ポテンシャル系の摂動級数と推定される解析式の比 $a_q / (-\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma(q+5/2) (5.33081)^{q+1})$ を横軸を次数 q で 100 次までプロットしたもの.

この摂動級数のボレル変換は $\alpha = 5/2$ として,

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q+5/2)} t^{q+5/2-1} = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{5/2}} \frac{t^{3/2}}{t - 1/5.33081}, \quad (10.2)$$

のように得られ, $t = 1/5.33081$ に極を持つことがわかる. ボレル和はこれまでと同様 $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ として計算することができる. 特に不定虚部は $t = 1/5.33081$ での留数から容易に計算できて,

$$i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) = i\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{3/2} g^5} \frac{1}{(5.33081)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5.33081 g^2}}, \quad (10.3)$$

が得られる. 結局,

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm i\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{3/2} g^5} \frac{1}{(5.33081)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5.33081 g^2}}, \quad (10.4)$$

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる. 2,3,4 重井戸型系と同様のリサージェンス構造を仮定すると, 上記の摂動的ボレル和の不定虚部とバイオン寄与の不定虚部が相殺することになる. したがって, 非摂動的なバイオン寄与の不定虚部が

$$\text{Im} [E^{II}(g^2 e^{\pm i\epsilon})] = \mp \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\pi^{3/2} g^5} \frac{1}{(5.33081)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5.33081 g^2}}, \quad (10.5)$$

として得られる. また, この結果の指数部分は e^{-2S_I} と書けるはずなので, この系のインスタントン作用は $S_I = 1/(10.66162g^2)$ と推定できる. すると実数部分も含めて,

$$E^{II}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{\sqrt{\pi} g^2} (2g^2 S_I)^{3/2} e^{-2S_I} \left(\gamma + \log \frac{A}{g^2 e^{\pm i\pi}} \right), \quad (10.6)$$

という形が得られ, 対数の中の値 A を除いてバイオン非摂動寄与が推定できたことになる. 特に, $1/(\sqrt{\pi} g^2)^5$ という係数は 1 ループ行列式のファクター $1/\sqrt{\pi} g^2$ がこの系のバイオン寄与には 5 乗で現れることを示している.

10.2 6 重井戸型ポテンシャル

6 重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2(1-gx/3)^2(1-gx/4)^2(1-gx/5)^2$ についても高次摂動計算を行った結果, 基底状態エネルギー $E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$ について以下の結果が得られた.

$$a_q = -\frac{1}{\sqrt{10}\pi^3} \Gamma(q+3)(5.83094)^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty). \quad (10.7)$$

図 10.2 には, 横軸を次数 q として縦軸に $a_q / (-\frac{1}{\sqrt{10}\pi^3} \Gamma(q+3)(5.83094)^{q+1})$ をプロットした結果を示した. q が大きくなるにつれ式 (10.7) が厳密になる様子が見える.

この摂動級数のボレル変換は $\alpha = 3$ として,

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q+3)} t^{q+3-1} = \frac{1}{\sqrt{10}\pi^3} \frac{t^2}{t - 1/5.83094}, \quad (10.8)$$

のように得られ, $t = 1/5.83094$ に極を持つことがわかる. ボレル和はこれまでと同様 $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ として計算することができる. 特に不定虚部は $t = 1/5.83094$ での留数から容易に計算できて,

$$i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) = \frac{i}{\sqrt{10}\pi^2 g^6} \frac{1}{(5.83094)^2} e^{-\frac{1}{5.83094 g^2}}, \quad (10.9)$$

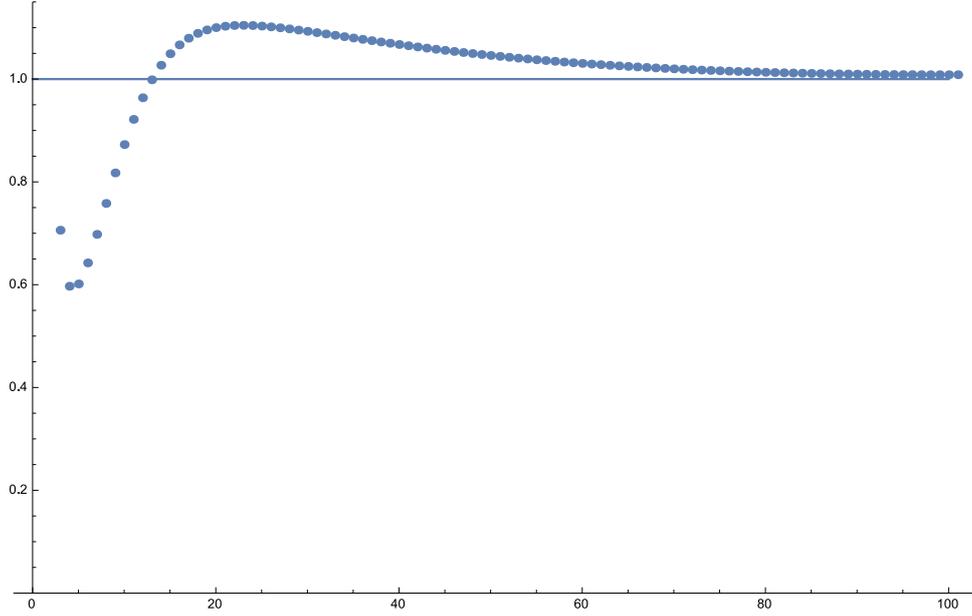


図 10.2: 6 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数と推定される解析式の比 $a_q / (-\frac{1}{\sqrt{10}\pi^3}\Gamma(q+3)(5.83094)^{q+1})$ を横軸を次数 q で 100 次までプロットしたもの。

が得られる。結局，

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{i}{\sqrt{10}\pi^2 g^6 (5.83094)^2} e^{-\frac{1}{5.83094 g^2}}, \quad (10.10)$$

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる。リサージェンス構造を仮定すると，上記の摂動的ボレル和の不定虚部とバイオン寄与の不定虚部が相殺することになる。したがって，非摂動的なバイオン寄与の不定虚部が

$$\text{Im} \left[E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{10}\pi^2 g^6 (5.83094)^2} e^{-\frac{1}{5.83094 g^2}}, \quad (10.11)$$

として得られる。また，この結果の指数部分は e^{-2S_I} と書けるはずなので，この系のインスタントン作用は $S_I = 1/(11.66188g^2)$ と推定できる。すると実数部分も含めて，

$$E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{\pi g^2}^6} (2g^2 S_I)^2 e^{-2S_I} \left(\gamma + \log \frac{A}{g^2 e^{\pm i\pi}} \right), \quad (10.12)$$

という形が得られ，対数の中の値 A を除いてバイオン非摂動寄与が推定できたことになる。特に， $1/(\sqrt{\pi g^2})^6$ という係数は 1 ループ行列式のファクター $1/\sqrt{\pi g^2}$ がこの系のバイオン寄与には 6 乗で現れることを示している。

10.3 7 重井戸型ポテンシャル

7 重井戸型ポテンシャル $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2(1-gx/3)^2(1-gx/4)^2(1-gx/5)^2(1-gx/6)^2$ についても高次摂動計算を行った結果，基底状態エネルギー $E = \sum_{q=0}^{\infty} a_q g^{2q}$ について以

下の結果が得られた .

$$a_q = -\frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{7/2}}\Gamma(q+7/2)(6.27264)^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty). \quad (10.13)$$

図 10.3 には , 横軸を次数 q として縦軸に $a_q/(-\frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{7/2}}\Gamma(q+7/2)(6.27264)^{q+1})$ をプロットした結果を示した . q が大きくなるにつれ式 (10.13) が厳密になる様子が見える .

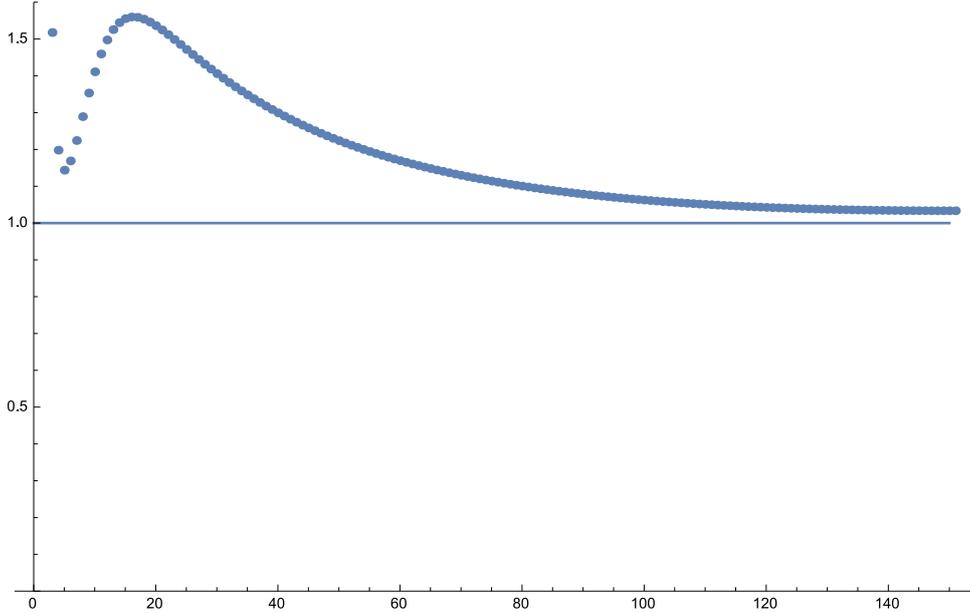


図 10.3: 7 重井戸型ポテンシャル系の摂動級数と推定される解析式の比 $a_q/(-\frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{7/2}}\Gamma(q+7/2)(6.27264)^{q+1})$ を横軸を次数 q で 100 次までプロットしたもの .

この摂動級数のボレル変換は $\alpha = 7/2$ として ,

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q+7/2)} t^{q+7/2-1} = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{7/2}} \frac{t^{5/2}}{t - 1/6.27264}, \quad (10.14)$$

のように得られ , $t = 1/6.27264$ に極を持つことがわかる . ボレル和はこれまでと同様 $g^2 \rightarrow g^2 e^{\pm i\epsilon}$ として計算することができる . 特に不定虚部は $t = 1/6.27264$ での留数から容易に計算できて ,

$$i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) = \frac{i}{6\sqrt{2}\pi^{5/2}g^7} \frac{1}{(6.27264)^{5/2}} e^{-\frac{1}{6.27264g^2}}, \quad (10.15)$$

が得られる . 結局 ,

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{i}{6\sqrt{2}\pi^{5/2}g^7} \frac{1}{(6.27264)^{5/2}} e^{-\frac{1}{6.27264g^2}}, \quad (10.16)$$

という虚部不定性を持つ基底状態エネルギーが得られる . リサージェンス構造を仮定すると , 上記の摂動的ボレル和の不定虚部とバイオン寄与の不定虚部が相殺することになる . したがって , 非

摂動的なバイオン寄与の不定虚部が

$$\text{Im} \left[E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) \right] = \mp \frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{5/2}g^7} \frac{1}{(6.27264)^{5/2}} e^{-\frac{1}{6.27264g^2}}, \quad (10.17)$$

として得られる．また，この結果の指数部分は e^{-2S_I} と書けるはずなので，この系のインスタントン作用は $S_I = 1/(12.54528g^2)$ と推定できる．すると実数部分も含めて，

$$E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \frac{1}{(\pi g^2)^{7/2}} (2g^2 S_I)^{5/2} e^{-2S_I} \left(\gamma + \log \frac{A}{g^2 e^{\pm i\pi}} \right), \quad (10.18)$$

という形が得られ，対数の中の値 A を除いてバイオン非摂動寄与が推定できたことになる．特に， $1/(\sqrt{\pi g^2})^7$ という係数は 1 ループ行列式のファクター $1/\sqrt{\pi g^2}$ がこの系のバイオン寄与には 7 乗で現れることを示している．

10.4 n 重井戸型量子力学系

ここまでの結果から， n 重井戸型量子力学系 $V(x) = \frac{x^2}{2}(1-gx)^2(1-gx/2)^2 \cdots (1-gx/(n-1))^2$ での大まかな摂動計算，非摂動寄与の結果を推測することができる．まず高次摂動級数は

$$a_q = -\frac{C_n}{\pi^{n/2}} \Gamma(q+n/2) \left(\frac{1}{2g^2 S_I} \right)^{q+1}, \quad (q \rightarrow \infty), \quad (10.19)$$

と推定でき， S_I はこの系のインスタントン作用 ($\propto 1/g^2$)， $C_n \in \mathbb{R}^+$ は何らかの正の実数である．この摂動級数のボレル変換は $\alpha = n/2$ として，

$$BE[t] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{\Gamma(q+n/2)} t^{q+n/2-1} = \frac{C_n}{\pi^{n/2}} \frac{t^{n/2-1}}{t - 2g^2 S_I}, \quad (10.20)$$

のように得られ， $t = 2g^2 S_I$ に極を持つことがわかる．ボレル和の不定虚部は留数から容易に計算できて，

$$i\text{Im}\mathbb{E}(g^2) = \frac{iC_n}{\pi^{n/2-1}g^n} (2g^2 S_I)^{n/2-1} e^{-2S_I}, \quad (10.21)$$

が得られる．結局，

$$\mathbb{E}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \text{Re}[\mathbb{E}] \pm \frac{iC_n}{\pi^{n/2-1}g^n} (2g^2 S_I)^{n/2-1} e^{-2S_I}, \quad (10.22)$$

という虚部不定性を持つ摂動的基底状態エネルギーが得られる．リサージェンス構造を仮定すると，上記の摂動的ボレル和の不定虚部とバイオン寄与の不定虚部が相殺することから，非摂動的なバイオン寄与の不定虚部が

$$\text{Im} \left[E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) \right] = \mp \frac{C_n}{\pi^{n/2-1}g^n} (2g^2 S_I)^{n/2-1} e^{-2S_I}, \quad (10.23)$$

として得られる．最終的には実数部分も含めて，

$$E^{I\bar{I}}(g^2 e^{\pm i\epsilon}) = \frac{C_n}{(\pi g^2)^{n/2}} (2g^2 S_I)^{n/2-1} e^{-2S_I} \left(\gamma + \log \frac{A}{g^2 e^{\pm i\pi}} \right), \quad (10.24)$$

という形が得られる．この形はこれまで得られた非摂動的寄与と一致しており， n 重井戸型系の C_n は $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の場合に

$$C_2 = 1, \quad C_3 = \sqrt{2}, \quad C_4 = \sqrt{\frac{6}{5}}, \quad C_5 = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad C_6 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad C_7 = \frac{1}{6\sqrt{2}}, \quad (10.25)$$

となっている．

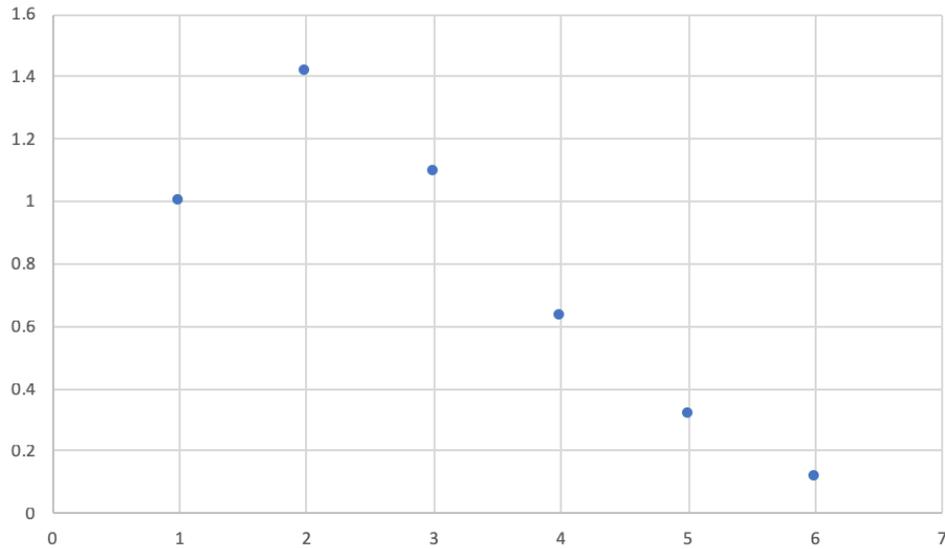


図 10.4: 横軸を $n-1$ ，縦軸を C_n としてプロットしたもの．

このようにリサージェンス構造を仮定することで，一般の n 重ポテンシャル量子力学系についても摂動級数から非摂動寄与を推定することに成功した．

第11章 まとめと展望

本研究では、まず量子論や摂動論、経路積分法など多角的な視点で自然の状態がどのように記述されるかを踏まえたのち、冪級数で表される古典真空まわりでの摂動効果と冪級数で表すことのできない古典真空間の量子トンネル効果について、一見無関係と思われるこれらのエネルギーに対する寄与の間にリサージェンス構造という形の関係性があることを確認し、それを応用することで非摂動効果による寄与の推定を行った。すなわち、2重井戸型ポテンシャル量子系についても高次摂動級数のボレル和として得られる摂動寄与とインスタントンやパイオンから表現されるトンネル効果などの非摂動寄与が不定虚部を介して関係付けられているというリサージェンス構造が成り立つことを再度確認したのち、未だ解析が成されていなかった非チェビシェフ型の3重井戸型ポテンシャル量子系についてもパイオン寄与についてうまく処理することによってほぼ同様の手法でリサージェンス構造を証明した。また、2重および3重井戸型ポテンシャル量子系においてこの構造が成り立つということが確認できたため、4重井戸型ポテンシャル量子系についても同じようにリサージェンス構造が成立するという前提のもと、摂動効果と不定虚部の相殺から逆算することで、計算することが厄介な4重以降の井戸型ポテンシャル量子系における非摂動効果の寄与の推定を行った。また、これを応用して一般的な n 重井戸型ポテンシャル量子系の非摂動効果の導出式を求めた。チェビシェフ型でない3重井戸型ポテンシャル量子系のリサージェンス構造を確認したのは初の試みであり、4重以降のポテンシャル量子系についてこのようにリサージェンス構造を前提とした非摂動効果の推定が行われたこともまた初の試みであろう。

今後の展望としては、4重以降の井戸型ポテンシャル量子系についてリサージェンス構造が成り立つことを証明することや井戸の数に応じたリサージェンス構造の特徴などの解析が求められる。また、ここでの1次元場の量子論の解析を2次元以上に拡張し、場の量子論に特有のリサージェンス構造の理解を進めることなどが考えられる。ゲージ理論やシグマ模型などの場の量子論におけるリサージェンス理論研究は活発に行われているが、単純な4次元スカラー場の理論での研究は未だなされていないため、こちらも有望な研究だと考えられる。今後の方向性としてこれらの研究を提案してこの論文を終えることとする。

謝辞

この場をお借りして，三角研でのゼミ，共同研究，修士論文執筆，発表スライド作成においてご指導くださった三角樹弘先生に深く感謝申し上げます．また，数理科学コースにおける勉学全般について幾度も助言してくださった小野田勝先生にも感謝申し上げます．転専攻の際には，河上肇先生，山村明弘先生にも多大なご協力をいただき，無事数理科学コースでの勉強を進められたことをありがたく思います．最後に，共に勉学に励んだ三角研の M1，B4 のメンバーに感謝致します．

関連図書

- [1] 藤森俊明, 三角樹弘, 坂井典佑, “リサージェンス理論：摂動論から非摂動効果を理解する”, 日本物理学会誌, 解説, 2018年6月号.
- [2] 三角樹弘, “摂動級数の発散と非摂動効果：リサージェンス理論の量子論への応用”, 数理学「特集：摂動論を考える」サイエンス社 第54巻9号 2016年9月号.
- [3] 居石直久, “量子論における Resurgence と非摂動効果”, 名古屋大学大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻 2017年度修士論文.
- [4] 李韜瀚, “経路積分法と摂動計算に基づく量子系の解析”, 秋田大学工学資源学部 電気電子工学科 理論物理学研究室 2016年度卒業論文.
- [5] J. Ecalle, “Les Fonctions Resurgentes,” Vol. I - III (Publ. Math. Orsay, 1981).
- [6] F. Pham, “Vanishing homologies and the n variable saddle point method,” Proc. Symp. Pure Math 2 (1983), no. 40 319-333.
- [7] M. V. Berry and C. J. Howls, “Hyperasymptotics for integrals with saddles,” Proceedings of the Royal Society of London A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences 434 (1991), no. 1892 657-675.
- [8] C. J. Howls, “hyperasymptotics for multidimensional integrals, exact remainder terms and the global connection problem,” Proc. R. Soc. London, 453 (1997) 2271.
- [9] E. Delabaere and C. J. Howls, “Global asymptotics for multiple integrals with boundaries,” Duke Math. J. 112 (04, 2002) 199-264.
- [10] O. Costin, “Asymptotics and Borel Summability,” Chapman Hall, 2008.
- [11] E. Witten, “Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory,” AMS/IP Stud. Adv. Math. **50**, 347 (2011) [arXiv:1001.2933 [hep-th]].
- [12] E. B. Bogomolny, “Calculation Of Instanton - Anti-instanton Contributions In Quantum Mechanics,” Phys. Lett. B **91**, 431 (1980).
- [13] J. Zinn-Justin, “Multi - Instanton Contributions in Quantum Mechanics,” Nucl. Phys. B **192**, 125 (1981).
- [14] G. V. Dunne and M. Ünsal, “Generating Non-perturbative Physics from Perturbation Theory,” Phys. Rev. D **89**, 041701 (2014) [arXiv:1306.4405 [hep-th]].

- [15] T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Resurgence in sine-Gordon quantum mechanics: Exact agreement between multi-instantons and uniform WKB,” *JHEP* **1509**, 157 (2015) [arXiv:1507.00408 [hep-th]].
- [16] A. Behtash, G. V. Dunne, T. Schafer, T. Sulejmanpasic and M. Unsal, “Complexified path integrals, exact saddles and supersymmetry,” *Phys. Rev. Lett.* **116**, no. 1, 011601 (2016) [arXiv:1510.00978 [hep-th]].
- [17] T. Fujimori, S. Kamata, T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Nonperturbative contributions from complexified solutions in $\mathbb{C}P^{N-1}$ models,” *Phys. Rev. D* **94**, no. 10, 105002 (2016) [arXiv:1607.04205 [hep-th]].
- [18] T. Sulejmanpasic and M. Unsal, “Aspects of perturbation theory in quantum mechanics: The BenderWu Mathematica package,” *Comput. Phys. Commun.* **228**, 273 (2018) [arXiv:1608.08256 [hep-th]].
- [19] T. Fujimori, S. Kamata, T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Exact Resurgent Trans-series and Multi-Bion Contributions to All Orders,” *Phys. Rev. D* **95**, no. 10, 105001 (2017) arXiv:1702.00589 [hep-th].
- [20] T. Fujimori, S. Kamata, T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Resurgence Structure to All Orders of Multi-bions in Deformed SUSY Quantum Mechanics,” *PTEP* **2017**, no. 8, 083B02 (2017) [arXiv:1705.10483 [hep-th]].
- [21] G. V. Dunne and M. Ünsal, “Resurgence and Trans-series in Quantum Field Theory: The CP(N-1) Model,” *JHEP* **1211**, 170 (2012) [arXiv:1210.2423 [hep-th]].
- [22] A. Cherman, D. Dorigoni, G. V. Dunne and M. Ünsal, “Resurgence in QFT: Unitons, Fractons and Renormalons in the Principal Chiral Model,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 021601 (2014) [arXiv:1308.0127 [hep-th]].
- [23] T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Neutral bions in the $\mathbb{C}P^{N-1}$ model,” *JHEP* **1406**, 164 (2014) [arXiv:1404.7225 [hep-th]].
- [24] T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Classifying bions in Grassmann sigma models and non-Abelian gauge theories by D-branes,” *PTEP* **2015**, 033B02 (2015) [arXiv:1409.3444 [hep-th]].
- [25] T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Neutral bions in the $\mathbb{C}P^{N-1}$ model for resurgence,” *J. Phys. Conf. Ser.* **597**, no. 1, 012060 (2015). [arXiv:1412.0861 [hep-th]].
- [26] A. Behtash, T. Sulejmanpasic, T. Schafer and M. Unsal, “Hidden topological angles and Lefschetz thimbles,” *Phys. Rev. Lett.* **115**, no. 4, 041601 (2015) [arXiv:1502.06624 [hep-th]].
- [27] T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Non-BPS exact solutions and their relation to bions in $\mathbb{C}P^{N-1}$ models,” *JHEP* **1605**, 057 (2016) [arXiv:1604.00839 [hep-th]].

- [28] T. Fujimori, S. Kamata, T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Bion non-perturbative contributions versus infrared renormalons in two-dimensional $\mathbb{C}P^{N-1}$ models,” arXiv:1810.03768 [hep-th].
- [29] M. Marino, “Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory,” JHEP **0803**, 060 (2008) [hep-th/0612127].
- [30] M. Marino, R. Schiappa and M. Weiss, “Nonperturbative Effects and the Large-Order Behavior of Matrix Models and Topological Strings,” Commun. Num. Theor. Phys. **2**, 349 (2008) [arXiv:0711.1954 [hep-th]].
- [31] M. Marino, “Nonperturbative effects and nonperturbative definitions in matrix models and topological strings,” JHEP **0812**, 114 (2008) [arXiv:0805.3033 [hep-th]].
- [32] M. Marino, R. Schiappa and M. Weiss, “Multi-Instantons and Multi-Cuts,” J. Math. Phys. **50**, 052301 (2009) [arXiv:0809.2619 [hep-th]].
- [33] S. Pasquetti and R. Schiappa, “Borel and Stokes Nonperturbative Phenomena in Topological String Theory and $c=1$ Matrix Models,” Annales Henri Poincare **11**, 351 (2010) [arXiv:0907.4082 [hep-th]].
- [34] I. Aniceto, J. G. Russo and R. Schiappa, “Resurgent Analysis of Localizable Observables in Supersymmetric Gauge Theories,” JHEP **1503**, 172 (2015) [arXiv:1410.5834 [hep-th]].
- [35] M. Honda, “Borel Summability of Perturbative Series in 4D $N = 2$ and 5D $N=1$ Supersymmetric Theories,” Phys. Rev. Lett. **116**, no. 21, 211601 (2016) [arXiv:1603.06207 [hep-th]].
- [36] M. Honda, “How to resum perturbative series in 3d $N=2$ Chern-Simons matter theories,” Phys. Rev. D **94**, no. 2, 025039 (2016) arXiv:1604.08653 [hep-th].
- [37] M. Honda, “Supersymmetric solutions and Borel singularities for $N=2$ supersymmetric Chern-Simons theories,” Phys. Rev. Lett. **121**, no. 2, 021601 (2018) [arXiv:1710.05010 [hep-th]].
- [38] M. Honda and D. Yokoyama, “Resumming perturbative series in the presence of monopole bubbling effects,” arXiv:1711.10799 [hep-th].
- [39] T. Fujimori, M. Honda, S. Kamata, T. Misumi and N. Sakai, “Resurgence and Lefschetz thimble in 3d $N=2$ supersymmetric Chern-Simons matter theories,” arXiv:1805.12137 [hep-th].
- [40] P. Argyres and M. Ünsal, “A semiclassical realization of infrared renormalons,” Phys. Rev. Lett. **109**, 121601 (2012) [arXiv:1204.1661 [hep-th]].
- [41] G. V. Dunne and M. Unsal, “What is QFT? Resurgent trans-series, Lefschetz thimbles, and new exact saddles,” arXiv:1511.05977 [hep-lat].

- [42] G. V. Dunne and M. Unsal, “New Methods in QFT and QCD: From Large-N Orbifold Equivalence to Bions and Resurgence,” arXiv:1601.03414 [hep-th].
- [43] M. Yamazaki and K. Yonekura, “From 4d Yang-Mills to 2d $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ model: IR problem and confinement at weak coupling,” JHEP **1707**, 088 (2017) [arXiv:1704.05852 [hep-th]].
- [44] M. Ünsal, “Abelian duality, confinement, and chiral symmetry breaking in QCD(adj),” Phys. Rev. Lett. **100**, 032005 (2008) [arXiv:0708.1772 [hep-th]].
- [45] T. Misumi and T. Kanazawa, “Adjoint QCD on $\mathbb{R}^3 \times S^1$ with twisted fermionic boundary conditions,” JHEP **1406**, 181 (2014) [arXiv:1405.3113 [hep-ph]].
- [46] S. Y. Lee, J. R. Kahng, S. K. Yoo, D. K. Park, C. H. Lee, C. S. Park, and E. S. Yim, Mod. Phys. Lett. A12, 1803 (1997), [arXiv:quant-ph/9608015].
- [47] J. Casahorran, “Analysis of nonperturbative fluctuations in a triple-well potential,” Phys. Lett. A283, 285 (2001), [arXiv:quant-ph/0103010].
- [48] M. Sato, T. Tanaka, “N-fold Supersymmetry in Quantum Mechanics -Analyses of Particular Models-”, J. Math. Phys. 43, 3484 (2002), [arXiv:hep-th/0109179].