

YITP-W-11-14

# 熱場の量子論とその応用

Thermal Quantum Field Theory and Their Applications

2011年8月22日(月)－24日(水)

京都大学 基礎物理学研究所 パナソニック国際交流ホール

(2011年11月29日受理)

本研究会「熱場の量子論とその応用」は、熱場の理論を道具とする、さまざまな分野の研究者が集まる分野横断型研究会である。前身のモレキュール型研究会から数えて17回目の開催となり、今回も素粒子・原子核・宇宙物理から統計物理・物性物理・量子光学まで、100人を越える幅広い分野の方々に参加していただいた。

2010年に CERN で始まった LHC での重イオン衝突実験をはじめ、グラフェン、非平衡系、冷却フェルミ原子気体、汎関数繰りこみ群など、最近話題の多種多様な講演を盛り込み、熱場の理論に関する活発な議論が行われた。講演のスライドは研究会のホームページに掲載されています。

<http://www.riise.hiroshima-u.ac.jp/TQFT/>

活発な議論で研究会を盛り上げてくださった参加者の皆さんに感謝するとともに、基研からのサポートに対しても深く感謝したい。

世話人

浅川正之(大阪大)、阿部純義(三重大)、飯田圭(高知大)、稲垣知宏(広島大)、  
江尻信司(新潟大、連絡係)、大西明(京大)、奥村雅彦(原子力機構)、  
阪上雅昭(京大)、橘基(佐賀大)、野中千穂(名古屋大)、  
峰真如(早大本庄学院)、室谷心(松本大、代表)(50音順)

## 基研研究会「熱場の量子論とその応用」

日程：2011年8月22-24日

場所：京都大学 基礎物理学研究所 湯川記念館 Panasonic 国際交流ホール

### 8月22日(月)

10:00-10:05 世話人代表より、開会のあいさつ、連絡事項など

座長：野中【QGP】

10:05-11:05 志垣賢太（広大院理）

LHC における高エネルギー原子核衝突実験

11:05-11:20 藤井宏次（東大総合）

Spectral function from 2PI effective action

11:20-11:35 赤松幸尚（名大 KMI）

クォーク・グルーオン・プラズマにおける輸送過程に伴う電磁放射

11:35-11:50 横田浩（奈良大）

Dyson-Schwinger 方程式を用いた熱準粒子の構造の解析

11:50-13:00 昼食

座長：浅川【グラフェン】

13:00-14:00 初貝安弘（筑波大）

グラフェンの特異な物性とカイラル対称性

【QCD 相図 1】

14:00-14:15 北沢正清（阪大理）

QCD 相図の実験的検証における、陽子およびバリオン数ゆらぎの役割について

14:15-14:30 日高義将（理研）

An effective matrix model for deconfinement

14:30-14:45 森田健司（京大基研）

PQM 模型における  $\theta$  および虚数化学ポテンシャルにおける相転移

14:45-15:05 休憩

【QCD 相図 2】

15:05-15:20 木村大自（広大教育）

次元正則化を用いた有限温度 NJL 模型におけるメソンの振舞い

15:20-15:35 境祐二（九大理）

Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration

### 学生講演

15:35-16:15 3分講演（発表者リストは最後に）

16:15-18:30 ポスターセッション

19:00-21:00 懇親会（ほくとにて）

## 8月23日(火)

座長：稲垣【非平衡1】

9:00-10:00 中村祐介（早大理工）

非平衡 Thermo Field Dynamics による量子輸送方程式

10:00-10:15 水谷友一（広大理）

非平衡 Thermo Field Dynamics における正準量子化に基づいた相対論的中性スカラー場

10:15-10:35 休憩

【非平衡2】

10:35-10:50 八田佳孝（筑波大）

グルオンプラズマの非平衡発展について

10:50-11:05 西山陽大（筑波大）

Kadanoff-Baym Approach to Thermalization of Gluonic Matter

11:05-11:20 岩崎 愛一（二松学舎大）

散逸がある系での Schwinger 機構とグラズマの崩壊

11:20-11:35 丹治直人（KEK）

ブースト不変に膨張する電場のもとでの Schwinger 機構

11:35-11:50 南佑樹（京大理）

相対論的流体力学におけるオンサーガー関係

11:50-12:05 中村真（京大理）

AdS/CFT 対応を用いた非線形電気伝導の系統的分析

12:05-13:20 昼食

座長：橘【ゲージ理論】

13:20-13:35 飯田英明（理研）

Q-ball による chiral magnetic effect

13:35-13:50 幡中久樹（阪大院理）

ランドール・サンドラム時空上のゲージ - ヒッグス統合モデルの熱相転移

【冷却原子・凝縮体1】 13:50-14:50

13:50-14:50 土屋俊二（東京理科大）

冷却フェルミ原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域における擬ギャップ状態

14:50-15:10 休憩

座長：飯田【冷却原子・凝縮体2】

15:10-15:25 西村拓史（お茶大）

原子分子混在量子気体の動力学

15:25-15:40 松尾衛（京大基研）

加速系におけるスピン軌道相互作用とスピン流生成

## 【光学格子】

- 15:40-15:55 一瀬郁夫 (名工大院工)  
光学格子上の2成分ボソン系の相構造と動力学
- 15:55-16:10 小林恵太 (原子力機構)  
Analysis of cold fermi gas with p-orbit in optical lattice
- 16:10-16:25 奥村雅彦 (原子力機構)  
光格子系における長岡強磁性
- 
- 16:25-18:30 ポスターセッション

## 8月24日(水)

座長：北沢【格子QCD・他】

- 9:00-9:15 前沢祐 (理研)  
アノマリーによる核子の電荷誘起
- 9:15-9:30 古井貞隆 (帝京大理工)  
4元数基底を用いた格子QCDシミュレーション
- 9:30-9:45 石黒克也 (高知大情セ)  
有限温度SU(2) gluodynamicsにおける状態方程式と磁氣的モノポール
- 9:45-10:00 中川義之 (新潟大)  
ヒストグラム法を用いた有限密度格子QCD
- 10:00-10:15 河野泰宏 (阪大理)  
格子ゲージ理論による2次の輸送係数の測定
- 10:15-10:30 Philipp Gubler (東工大理)  
QCD和則と最大エントロピー法を用いた有限温度におけるクォークコニウムのスペクトル解析

10:30-10:50 休憩

【繰りこみ群1】

- 10:50-11:50 仲野英司 (高知大理)  
汎関数繰りこみ群

11:50-13:30 昼食

座長：大西【繰りこみ群2】

(13:00-14:00 に予定されていた Vladimir Skokov (GSI)による講演  
「Functional Renormalization Group method」はキャンセルになりました。)

- 13:30-13:45 一ノ瀬祥一 (静岡県立大) (原稿未着)  
カシミア効果の繰り込み群的アプローチ
- 13:45-14:00 小林玉青 (金沢大学)  
Phase Transition due to Quantum Dissipation

14:00-14:20 休憩

【繰りこみ群3】

- 14:20-14:50 Jean-Paul Blaizot (Saclay)  
BEC and thermalization of QGP
- 14:50-15:20 Juergen Berges (Darmstadt) (原稿未着)  
Out-of-equilibrium dynamics of coherent non-abelian fields
- 
- 15:20-15:30 世話人代表より、表彰、閉会のあいさつなど

<b>学生のポスター発表</b>	22日に3分間のスピーチ
------------------	--------------

1. 柴藤亮介 (首都大理工)  
1次元トラス内におけるボーズ・フェルミ混合系の動的性質
2. 佐藤大輔 (金沢大)  
Analysis of chiral phase transition by evaluating the Wilsonian effective potential in thermal gauge theories
3. 門内晶彦 (東大理)  
Hydrodynamic Effects on the Color Glass Condensate in Non-Equilibrium and Non-Boost Invariant Systems
4. 佐藤大輔 (京大理)  
Novel kinetic theory describing ultrasoft fermionic mode
5. 岡澤晋 (総研大)  
Stochastic Equations in Black Hole Backgrounds and Non-equilibrium Fluctuation Theorems
6. 荒木康史 (東大院理)  
グラフェンにおけるカイラル対称性の破れ・回復と Kekule 歪み
7. 中野嵩士 (京大基研)  
Staggered-Wilson fermion における Aoki phase の強結合解析
8. 佐々木崇宏 (九大院理)  
ゼロおよび純虚数化学ポテンシャルにおける、3フレーバーQCD のクォーク質量依存性
9. 上田宏史 (京大理)  
拡張された PQM 模型を用いたコンパクト天体現象における QCD 相転移
10. 早田智也 (東大院理)  
正準交換関係に基づく新しい QCD 和則の構築と、その QCD 物性への応用
11. 鈴木溪 (東工大理)  
有限温度でのボトムoniumにおける QCD 和則の MEM 解析
12. 奥山進治 (三重大)  
純粋状態量子力学の量子熱力学への変質

ポスター賞： 佐藤大輔 (金沢大)、中野嵩士 (京大基研)

# LHC 加速器における高エネルギー原子核衝突実験

広島大学大学院理学研究科 志垣賢太<sup>1</sup>

高エネルギー原子核衝突実験による高温パートン非閉込相の実験的探求は、米国ブルックヘブン国立研究所 (BNL) RHIC 加速器における同相発見を経て、欧州合同原子核研究機構 (CERN) LHC 加速器における性質解明の新たな局面に到達した。LHC 加速器 ALICE 実験<sup>2</sup>を中心とする初期成果を報告する。

## 1. 高エネルギー原子核衝突実験によるパートン非閉込相探査

高エネルギー原子核衝突物理学は極限状態における量子色力学 (QCD) の実験的探究である。特に衝突型加速器実験に代表される高エネルギー衝突は、高エネルギー密度 (高温) 極限におけるパートン非閉込相へ向けた QCD 相図上の探査といえる。格子 QCD 計算は相境界温度として約 170 MeV を予言する。RHIC 加速器 PHENIX 実験は仮想光子測定を用いて衝突系の到達温度 300–600 MeV を示唆する結果を得た [1]。同時に、生成したパートン物質は極めて低粘性の完全流体としての振舞いを示し、弱結合のパートン気体描像を裏切る強結合描像が驚きを持って迎えられた [2]。この強結合パートン物質が相境界付近の過渡的現象であるのか、LHC におけるより高温領域の探査に一層の期待が掛かる。

## 2. LHC 加速器 ALICE 実験とその初期成果

LHC 加速器では 2009 年 11 月の重心系衝突エネルギー  $\sqrt{s} = 0.9$  TeV での陽子相互衝突を皮切りに、現在までに 2.36 TeV 陽子相互衝突、7 TeV 陽子相互衝突、そして核子間重心系衝突エネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV の鉛原子核相互衝突および同エネルギーでの陽子相互衝突までを順調に実現した。現在よりもさらに 2 倍となる設計衝突エネルギーには 2014 年後半にも到達予定である。

2010 年の 7 TeV 陽子相互衝突運転において、ALICE 実験は  $0.5 \text{ pb}^{-1}$  のビーム供給を受け、 $8 \times 10^8$  以上のミニマムバイアス衝突事象に加えて事象選択的トリガによるデータ収集も行った。ALICE 実験にとって陽子相互衝突は原子核衝突の基準測定の意味合いが強いが、正味のバリオン数がほぼ 0 の衝突中心領域生成など、興味深い成果も多々得られた [3]。

待望の鉛原子核相互衝突運転は 2010 年 11 月 7 日の初衝突から同年 12 月 6 日まで行われた。ALICE 実験には事前の期待を約 3 倍も上回る  $10 \mu\text{b}^{-1}$  弱が供

<sup>1</sup> E-mail: shigaki@hiroshima-u.ac.jp

<sup>2</sup> <http://aliweb.cern.ch/>

給され、運転終了時の輝度は設計値の 3% にまで到達した。以下、重要な初期成果の一端を報告する。

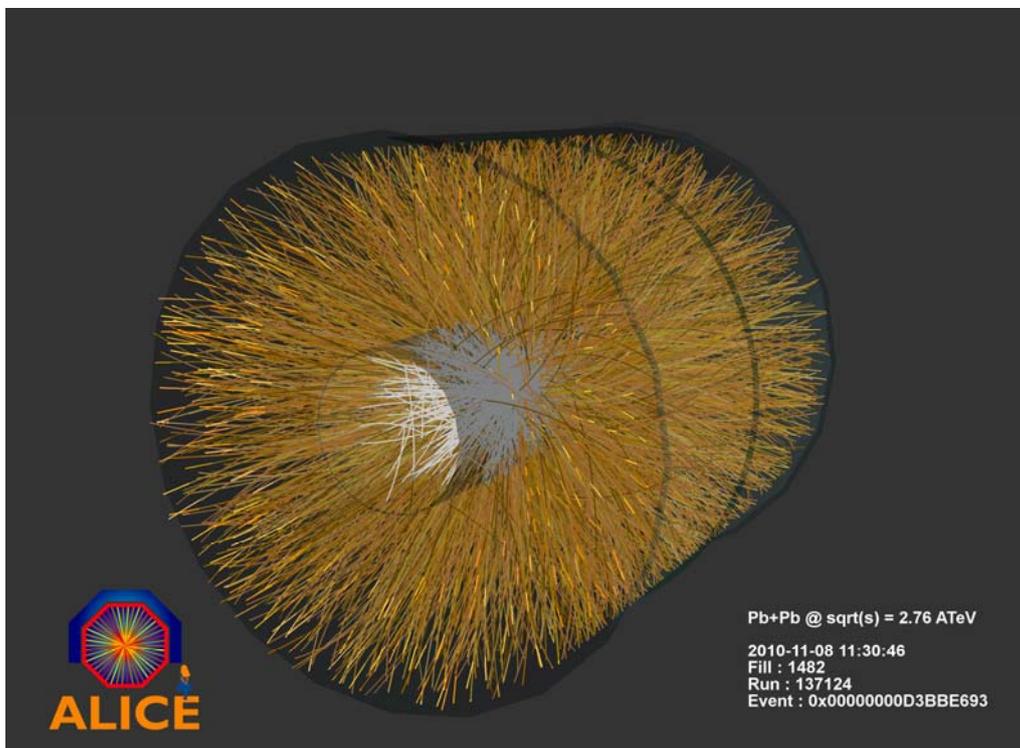


図 1: ALICE 実験が観測した  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV 鉛原子核相互衝突事象の例<sup>3</sup>。

## 2.1 生成粒子密度、到達エネルギー密度、時空容積

衝突中心度 5% 以内の  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV 鉛原子核相互衝突における単位擬ラピディティあたりの生成荷電粒子数  $dN_{ch}/d\eta$  は  $1584 \pm 4$  (stat.)  $\pm 76$  (sys.) [4] で多くの理論予想を上回り、衝突関与核子数あたりで RHIC 加速器の 2.5 倍に達した。衝突系の初期到達エネルギー密度は、簡単な一次元膨張描像に基づけば、 $16 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  以上と推定される。また、二粒子相関を用いた時空発展測定により、生成する高温領域の容積は約  $300 \text{ fm}^3$  (RHIC の約 2 倍)、寿命は約  $10 \text{ fm}/c$  (RHIC の約 1.3 倍) との結果を得た [5]。両結果を併せ、LHC におけるより高温、大容積、長寿命のパートン物質生成が示された。

## 2.2 生成粒子の集団運動

RHIC 加速器における低粘性強結合流体生成の最大の証左は強度の集団運動、特に方位角異方性のフーリエ展開第 2 成分 (楕円流成分) であった [2]。ALICE

<sup>3</sup> Copyright CERN on behalf of the ALICE Collaboration.

実験でも同様の強い楕円流成分を観測し、強結合の示唆を得た [6]。粒子の横運動量の関数としての楕円成分強度はLHCとRHICで誤算範囲内での一致を示す。一方で、平均横運動量は約 1.3 倍に増加し、粒子質量と平均横運動量の正相関からLHCでのより強い集団膨張が窺われる。熱的粒子生成と集団膨張の重合せ描像に基づくと、LHCでの現象はRHICでの衝突中心度依存性をさらに連続的に中心衝突方向に外挿して記述可能に見え、運動学的連続性を示唆する。

### 2.3 ジェット抑制、高横運動量粒子抑制

LHC 加速器では 100 GeV 以上のジェット生成断面積はRHICから約 6 桁も増加し、衝突直後段階の探針として一層有用である。ATLAS 実験やCMS 実験では大立体角の検出器を活かし、従来の多数の事象集積による統計的手法に加えて、単一事象中のジェット対の一方のエネルギー損失による非対称ジェット対や単ジェットを、特に中心衝突事象において観測した [7]。これに対してALICE 実験は、低横運動量の粒子まで含めたジェット再構成に優位性を持つ。

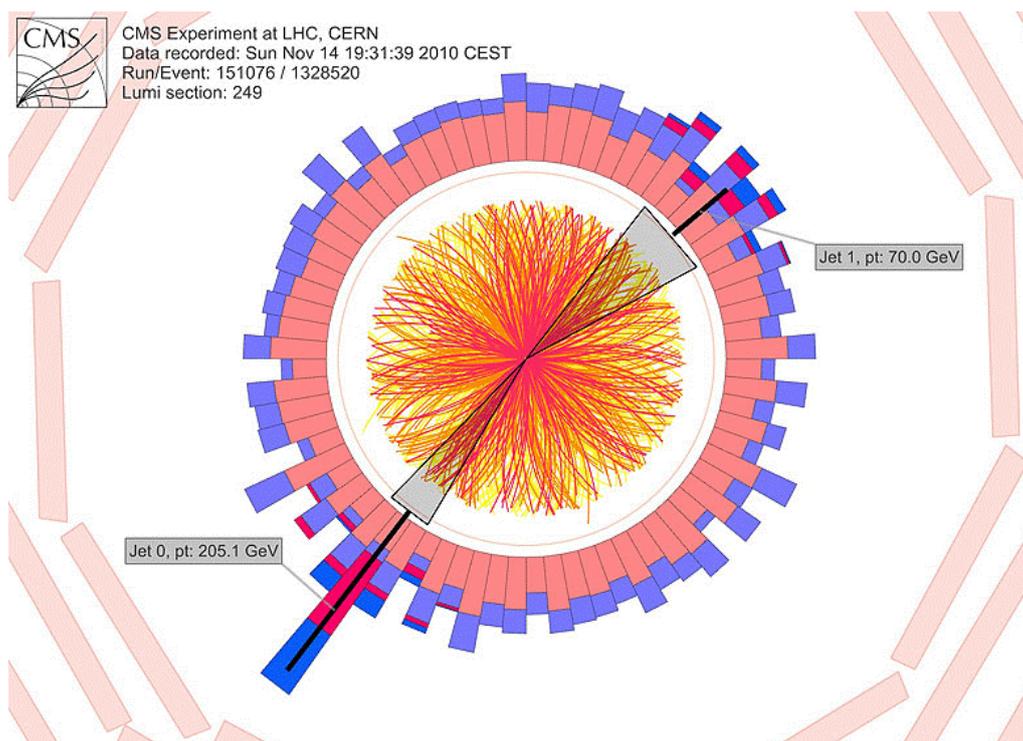


図 2： CMS 実験が観測した非対称ジェット対事象の例<sup>4</sup>。

従来手法を踏襲した高横運動量粒子抑制の解析結果は、LHCにおいても定性的にはRHICと類似の横運動量依存性を示す [8]。しかし、最も抑制が強い領域

<sup>4</sup> Copyright CERN on behalf of the CMS Collaboration.

での抑制度が約 1.5 倍に増加し、またさらに高横運動量の領域では抑制が弱まるなど、LHC における新たな傾向が発見され、今後の理解進展が待たれる。

また、RHIC ではチャーム・クォークのパートン物質中でのエネルギー損失が軽いクォークとほぼ同等に観測され、高温パートン相中のクォークのエネルギー損失機構に知見を与えた [9]。ALICE においても、高横運動量の D 中間子や単レプトンの抑制により、チャーム・クォーク、さらにはボトム・クォークのエネルギー損失が示唆される [10]。今後、クォークのエネルギー損失機構やクォークとグルーオンの振舞いの相違に関する知見の獲得進展を期待する。

## 2.4 クォーコニウム抑制

パートン非閉込相の証左として色デバイ遮蔽によるクォーコニウムの生成抑制が予言され、RHIC および SPS 加速器でも  $J/\Psi$  中間子抑制が観測された [11]。一方で、溶融、遅い段階での熱的生成、励起状態からの崩壊など、複数の生成・抑制機構の関与が議論され、その機構の統一的理解には到っていない。LHC では到達温度上昇により RHIC では溶融しない  $\Upsilon$  中間子などの溶融も予想され、系統測定による機構理解が期待される。原子核衝突におけるクォーコニウム抑制に関して ALICE 実験を含めた複数の測定結果が得られ始めており、今後の系統的理解に繋がるであろう。

## 3. まとめ

RHIC 加速器に続き LHC での高エネルギー原子核衝突実験は、高温極限における QCD の探求に多大な成果を挙げつつある。特に LHC での原子核衝突運転に唯一特化した検出器を擁する ALICE 実験は、熱輻射実光子の直接検出を含めて、系統的精密測定によりパートン非閉込相の性質の包括的理解に挑む。

既に初年度のデータから、RHIC と比較してより高温、大容積、長寿命の高温相生成が示され、LHC における高エネルギー原子核物理学プログラムの物理的好条件が確認された。現時点までに得られた初期成果の多くは、ジェットを除き RHIC で多くの物理成果に繋がった稀事象ではなく、生成高温系の巨視的性質を反映する観測量であり、RHIC での結果からの大幅な不連続性は見付かっていない。しかし、LHC でより重要度が増す高運動量移行過程や重フレーバーに関連しては、強度の非対称ジェット対や単ジェットに現れる極めて強度のパートンのエネルギー損失や、あるいはボトム・クォークまで含めた重クォークのエネルギー損失の示唆などが既に得られ、その背後には今後の豊富な物理成果が透けて見える。RHIC でその存在が明らかとなった高温パートン非閉込相の性質解明に向け、LHC による新たな局面到来である。

最後に、ALICE 実験共同研究者およびすべての関係者の皆さまに感謝致しま

す。



図 3 : ALICE 実験共同研究者 (の一部)。2011 年 9 月、フィンランド、ユヴァスキュラ大学における物理検討週間にて。

- [1] PHENIX Collaboration (A.Adare *et al.*), Phys. Rev. Lett. 104, 132301 (2010).
- [2] PHENIX Collaboration (A.Adare *et al.*), Phys. Rev. Lett. 98, 172301 (2007).
- [3] ALICE Collaboration (K.Aamodt *et al.*), Phys. Rev. Lett. 105, 072002 (2010).
- [4] ALICE Collaboration (K.Aamodt *et al.*), Phys. Rev. Lett. 105, 252301 (2010).
- [5] ALICE Collaboration (K.Aamodt *et al.*), Phys. Lett. B696, 328–337, (2011).
- [6] ALICE Collaboration (K.Aamodt *et al.*), arXiv:1011.3914 [nucl-ex].
- [7] ATLAS Collaboration (G.Aad *et al.*), arXiv:1011.6182 [hep-ex].
- [8] ALICE Collaboration (K.Aamodt *et al.*), Phys. Lett. B696, 30–39 (2011).
- [9] PHENIX Collaboration (S.S.Adler *et al.*), Phys. Rev. Lett. 96, 032301 (2006).
- [10] ALICE Collaboration (A.Dainese *et al.*), presented at Quark Matter 2011.
- [11] PHENIX Collaboration (A.Adare *et al.*), Phys. Rev. Lett. 98, 232301 (2007).

## Towards spectral functions from 2PI effective action

*Institute of Physics, University of Tokyo*     H. Fujii

Two-particle irreducible effective action provides a useful framework to perform non-perturbative analyses in field theory. Here we report its application to the evaluation of the static critical exponents of  $O(N)$  scalar theory, and discuss a possible way to obtain the spectral function and to study dynamic criticality of the Nambu–Jona-Lasinio model.

### 1 Introduction

Unveiling the phase diagram of QCD is one of the fundamental problems in modern physics. Numerical lattice QCD simulations show crossover behavior of deconfinement and chiral symmetry restoration in a temperature  $T$  region around 170 MeV. At finite baryo-chemical potentials  $\mu$ , lattice simulations suffer from the sign problem, but many chiral models predict a first-order phase boundary which separates the low and high  $\mu$  regions at low  $T$  and which terminates at an endpoint as  $T$  increases. This point is referred to as the QCD critical point (CP).

Although the location, even the existence, of the QCD CP depends on the models, certain properties near the CP are universal, which should provide useful information in searching the QCD CP experimentally at RHIC. This motivates us to study the slow dynamics near the QCD CP as a universal property of QCD. We will use a self-consistent approximation scheme based on two-particle irreducible (2PI) effective action in order to deal with the long-range critical fluctuations [1].

Here we apply the 2PI effective action to evaluate the static critical exponents,  $\eta$  and  $\nu$ , in  $O(N)$  scalar  $\lambda\phi^4$  theory as an example, and then we give a preliminary discussion on the mesonic spectral functions in the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model, towards the description of the dynamics near the critical point.

### 2 Critical exponents, $\eta$ and $\nu$ , from 2PI effective action

Let us consider a system whose ground state is determined by a partition function

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -S[\varphi] + \int d^3x J_a(\mathbf{x}) \varphi_a(\mathbf{x}) \right] \equiv e^{-W[J]}, \quad (1)$$

where  $S[\varphi] = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_i \varphi_a(\mathbf{x}))^2 + \frac{\lambda}{4!N} (\varphi_a(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} t \varphi_a(\mathbf{x})^2 \right]$  is the Landau functional for the order parameter field  $\varphi_a(\mathbf{x})$  ( $a = 1, \dots, N$ ). We compute the critical exponents by approaching the critical point from the symmetric phase ( $t \propto T - T_c \rightarrow 0^+$ ).

Performing the double Legendre transform with respect to the mean field  $\phi$  and the two-point function  $G$ , we have the 2PI effective action

$$\Gamma_{2\text{PI}}[\phi, G] = S[\phi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr} G_0^{-1} G + \bar{\Gamma}_2[\phi, G], \quad (2)$$

where Tr should be understood as integration over the space coordinates and summation over the field components.  $G_0$  is the free propagator. In the symmetric phase we can set  $\phi = \langle \varphi \rangle = 0$ .

The ground state is determined by the condition,  $\delta \Gamma_{2\text{PI}}[G]/\delta G = 0$ , which gives the Kadanoff-Baym (KB) equation:

$$G_{ab}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{0,ab}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Sigma_{ab}[G(\mathbf{x}, \mathbf{y})]. \quad (3)$$

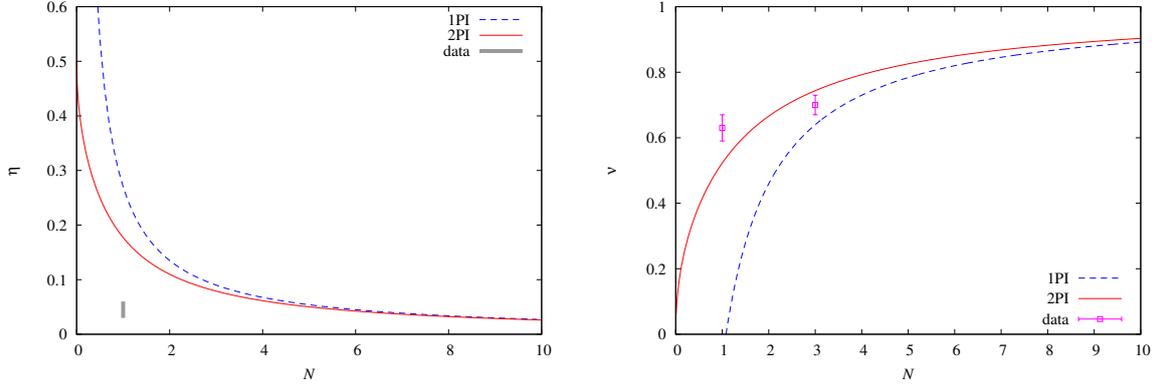


Figure 1: Critical exponent  $\eta$  (left) and  $\nu$  (right) of  $O(N)$  scalar theory.

This equation always holds (in the symmetric phase). Approaching the critical point, fluctuations become long-ranged and non-perturbative. We here apply the KB equation at the critical point [2], where we know the form of  $G$  in the momentum space as

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \frac{1}{p^2} \left( \frac{p}{\Lambda} \right)^\eta \quad (4)$$

with  $p = |\mathbf{p}|$  and a cutoff scale  $\Lambda$ . Employing the systematic  $1/N$  expansion, we include the next-to-leading-order (NLO) skeleton graphs:

$$\bar{\Gamma}_2^{\text{LO}}[G] = \text{two circles}, \quad \bar{\Gamma}_2^{\text{NLO}}[G] = \text{circle with two internal lines}. \quad (5)$$

Requiring that the scaling form should be the asymptotic solution of the KB equation at small  $p$ , we find a condition for  $\eta$  as shown in Fig. 1 (left).

By differentiating the KB equation with respect to  $t(\mathbf{x})$  one obtains a self-consistent equation for  $\Gamma_{ab}^{(2,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \delta G_{ab}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \delta t(\mathbf{z})$  [3] as

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \Gamma_{0,ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \frac{\delta \Sigma_{ab}[G(\mathbf{x}, \mathbf{y})]}{\delta t(\mathbf{z})}, \quad (6)$$

where  $\Gamma_{0,ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})\delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})\delta_{ab}$ . Knowing again the scaling form  $\tilde{\Gamma}^{(2,1)}(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}; \mathbf{k}) \sim k^{2-\eta-1/\nu}$ , one can determine the exponent  $\nu$  from this equation together with  $\eta$  obtained previously. We solve this equation by resumming the leading  $\ln k$  term. The result is shown in Fig. 1 (right).

Although we cannot justify the  $1/N$  expansion at small  $N$ , the exponents  $\eta$  and  $\nu$  in the 2PI NLO framework remain positive and finite down to  $N = 0$  in contrast to the NLO result in the standard 1PI framework.

### 3 Spectral function and slow modes

After seeing the advantage of the 2PI formalism in statics, we like to apply it to dynamics. Here we take the NJL model, which share the same global symmetries with QCD. In fact, the 2PI formalism has been applied to the NJL model in order to include the higher order contributions in

$1/N$  expansion with  $N$  being the number color [4]. Here we will work in the real-time formalism at finite  $T$ , which avoids the analytic continuation unlike in the imaginary-time formalism.

The 2PI skeleton diagrams are the same as in the scalar case with replacing the boson lines by the fermion lines. We include the NLO contributions. The KB equation for the fermion is written as

$$D^R(\omega, k)^{-1} = (i\not{k} - m) - \Sigma^R(\omega, k), \quad (7)$$

where the self-energy  $\Sigma^R$  can be obtained by cutting one line in  $\bar{\Gamma}_2$ , and will be decomposed into the Lorentz tensors with the Dirac matrices. Note that this NLO approximation gives rise to a second order phase transition at finite  $T$ [4], whereas other self-consistent approximations sometimes result in a first order transition.

In order to compute the bosonic two-point functions,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , it is convenient to introduce external sources coupled to the relevant current. Differentiating twice with the external current gives us the relevant two-point functions. The equations involve the scattering kernels which satisfy the Bethe-Salpeter (BS) equation written schematically as

$$\text{[Shaded Box]} = \times + \text{[Dashed Line]} + \text{[Vertical Line with Dashed Top]} + \text{[Vertical Line with Dashed Bottom]} + \text{[Triangle with Shaded Square]} + \text{[Vertical Line with Shaded Square]} + \text{[Vertical Line with Shaded Square]}, \quad (8)$$

where the dashed line represents the chain diagrams of the quark loops. These bosonic functions derived from the 2PI effective action should retain the symmetries of the system. Especially the pions should be massless in the chiral limit in the broken phase.

The spectral function  $\rho(\omega, p)$  can be obtained as the imaginary part of  $\tilde{G}(p)$ . By analyzing the infra-red behavior of  $\rho(\omega, p)$  at the critical point, one should be able to determine the dynamic scaling behavior of the slow modes from this microscopic computation.

## 4 Outlook

It will be numerically a tough task to solve the BS equation with the non-local kernel, even though one starts with a simple contact interaction in the NJL model. Nevertheless, it is an important issue to check whether one can derive the dynamic scaling behavior from a microscopic computation directly.

## References

- [1] J. Berges, AIP Conf. Proc. 739:3-62, 2005.
- [2] M. Alford, J. Berges and J. M. Cheyne, Phys. Rev. D **70**, 125002 (2004).
- [3] Y. Saito, H. Fujii, K. Itakura and O. Morimatsu, arXiv:1108.1266 [hep-ph].
- [4] D. Muller, M. Buballa and J. Wambach, Phys. Rev. D **81**, 094022 (2010), see also M. Oertel, arXiv:hep-ph/0012224.

# クォーク・グルーオン・プラズマにおける輸送過程に伴う電磁放射

赤松幸尚<sup>1</sup>、浜垣秀樹<sup>2</sup>、初田哲男<sup>3</sup>、平野哲文<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構、<sup>2</sup> 東京大学 原子核科学研究センター、

<sup>3</sup> 理化学研究所 仁科加速器研究センター、<sup>4</sup> 上智大学 理工学部

## 1 イントロダクション

相対論的重イオン衝突実験における電磁放射 (レプトン対、光子) は、作られた QCD 物質のプロープの一つとして重要な観測量である。電磁放射の源は大きく分けて、hard 過程、媒質からの熱的放射、終状態ハドロンの崩壊過程、という 3 つがある。クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) の物性研究という観点からは、媒質からの熱的放射が最も興味深い。熱的放射のスペクトルは、QCD の電磁カレントのスペクトル関数を用いて表現できるため、理論計算と実験結果の比較が容易である。先行研究に於いては、スペクトル関数をハドロン相ではハドロン間相互作用を用いて計算し、QGP 相では摂動論的 QCD を用いて計算したものがある。しかし、これらの研究では SPS でのレプトン対放射の実験結果を再現できるものの、RHIC では特に低質量領域 ( $0.15 < M_{ee} < 0.6$  GeV)[1] では再現できていない。また一方で、RHIC での光子の横運動量スペクトル ( $p_T > 1$  GeV)[2] は再現できるものの、衝突軸非対称性 ( $v_2$ )[3] は再現できていない。低質量レプトン対も光子の  $v_2$  においても、理論計算に比べて実験データが大きい値を出している。さらに理論的には QGP は完全流体でよく近似でき強結合プラズマである、と考えられているので、スペクトル関数の摂動論的 QCD による計算の信頼性も乏しい。本稿では、因果的な相対論的粘性流体を用いて摂動論によらずに電磁放射のスペクトル関数を評価し、RHIC における低質量におけるレプトン対生成や光子の横運動量分布や  $v_2$  といった観測量を統一的に記述することを試みる。

## 2 スペクトル関数

レプトン対 (運動量  $p_1^\mu, p_2^\mu; q^\mu \equiv p_1^\mu + p_2^\mu$ ) と光子 (運動量  $q^\mu$ ) の熱的放射はそれぞれ

$$\frac{E_1 E_2 dN_{l+l-}}{d^3 p_1 d^3 p_2 d^4 x} = \frac{\alpha^2}{2\pi^4 q^4} \frac{p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu}}{\exp(q^0/T) - 1} \text{Im} G_{R,\mu\nu}(q; T), \quad q_0 \frac{dN_\gamma}{d^3 q d^4 x} = -\frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\text{Im} G_{R,\mu}^\mu(q; T)}{\exp(q^0/T) - 1}, \quad (1)$$

$$G_R^{\mu\nu}(q; T) \equiv \int d^4 x e^{iqx} i\theta(x^0) \langle [J^\mu(x), J^\nu(0)] \rangle_T, \quad J^\mu(x) \equiv \frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s}\gamma^\mu s,$$

で与えられる。QGP の電流のダイナミクスを因果的な相対論的粘性流体で記述し、スペクトル関数を線型応答理論に基づいて計算すると、

$$\text{Im} G_R^{(L)}(q; T) \equiv -\frac{q^2}{k^2} \text{Im} G_R^{00}(q; T) = -\frac{\chi D \omega q^2}{\omega^2 + (\tau_J \omega^2 - D k^2)^2}, \quad (2)$$

$$\text{Im} G_R^{(T)}(q; T) \equiv \frac{1}{2} \left( \text{Im} G_{R,\mu}^\mu(q; T) - \text{Im} G_R^{(L)}(q; T) \right) = -\frac{\chi D \omega}{\tau_J^2 \omega^2 + 1}. \quad (3)$$

となる。ここで、 $\chi$  は電荷の感受率、 $D$  は電荷の拡散係数、 $\tau_J$  は緩和時間である。式 (2)、(3) の  $\omega \gg k$  での振る舞いから分かるように、 $\chi D / \tau_J$  が大きいほど、すなわち、電荷の揺らぎが大きく、揺らぎに対して短時間で強い電流が流

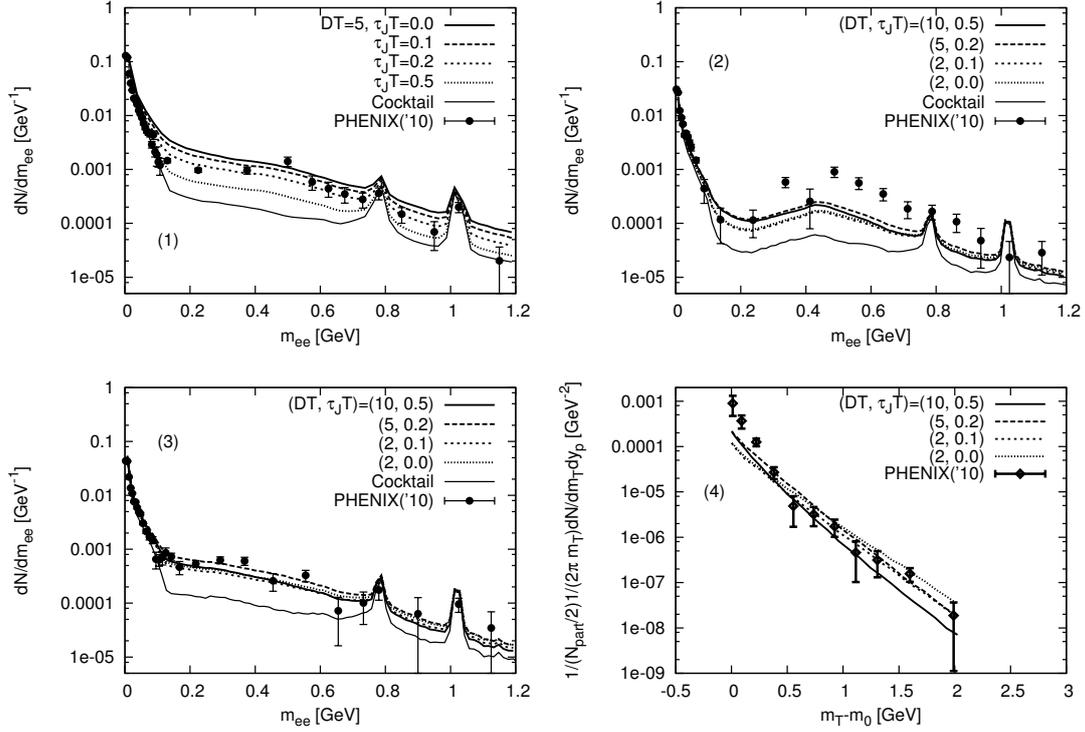


図1 レプトン対の (1) 不変質量分布、(2) 横運動量を  $p_T < 0.5$  GeV に制限した不変質量分布、(3) 横運動量を  $0.5 < p_T < 1.0$  GeV に制限した不変質量分布、(4) 横質量 ( $m_T$ ) 分布。実験データ [1] の誤差は統計誤差だけを表示している。

れるほど、電磁放射は強くなる。また、式 (1) と式 (2)、(3) から分かるように、レプトン対のスペクトルは低エネルギーで仮想光子のプロパゲータに由来する発散を持つので、実験で得られた大量のレプトン対生成を容易に説明することが期待される。輸送理論に基づくスペクトル関数は、この領域のレプトン対生成と光子放射のスペクトルを統一的に記述できる。

未知関数  $\chi$ 、 $D$ 、 $\tau_J$  の温度依存性であるが、 $\chi(T)$  は格子計算のフィットにより、 $D(T)$  と  $\tau_J(T)$  は次元解析から無次元量 ( $a, b$ ) を用いて

$$\chi(T) = 0.28T^2 \left[ 1 + \tanh \left( \frac{T - T_c^*}{0.15T_c^*} \right) \right], \quad D(T) = a/T, \quad \tau_J(T) = b/T, \quad (4)$$

と与えた。ただし、最新の格子計算による chiral 凝縮の温度依存性から  $T_c^* = 0.155$  GeV とした。なお、摂動計算では  $(a, b) \approx (4, 15)$ 、AdS/CFT の計算では  $(a, b) = (1/2\pi, \ln 2/2\pi)$  となっている。

### 3 実験結果との比較

輸送理論に基づくスペクトル関数、式 (2)、(3)、(4) に従って、RHIC における電磁放射を計算した。この計算で用いた流体模型は、完全流体で記述しており、状態方程式は格子計算で得られたクロスオーバーのものを用いている。詳細については、[4] を参照されたい。

図 1 では、レプトン対生成に関する minimum bias の理論計算と実験データ [1] を比較している。図 1(1) に示すのは、レプトン対の不変質量分布である。終状態ハドロン崩壊によるレプトン対のスペクトル (cocktail) に、熱的放射

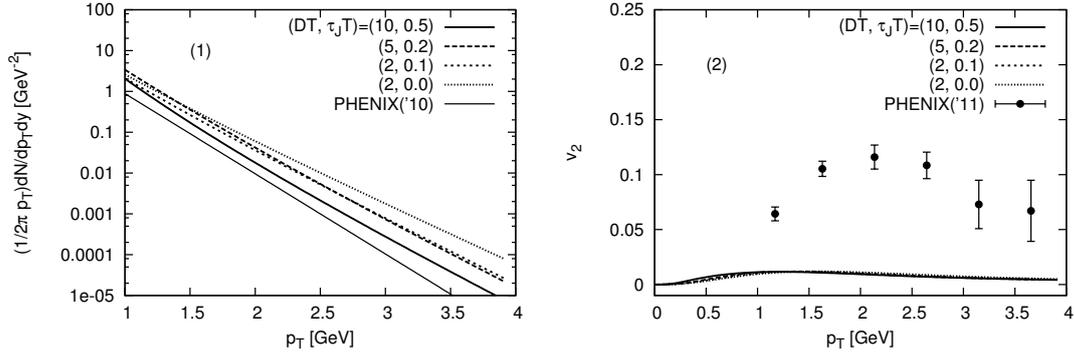


図2 光子の(1)横運動量分布と(2)衝突軸非対称性( $v_2$ )。横運動量分布の実験データとして、データをフィットした関数を表示している[2]。 $v_2$ の実験データはBBC detectorでevent planeを決めて測定されたものを用いている[3]。また、実験データ[3]の誤差は統計誤差だけを表示している。

のスペクトルを加えたものをプロットしている。実験データを説明できるパラメタは、 $(a, b) = (5, 0.2)$ である。他のいくつかのパラメタで同様の計算を行った結果、 $(a, b) = (10, 0.5)$ 、 $(5, 0.2)$ 、 $(2, 0-0.1)$ といったパラメタで実験が説明できることが分かった。これらのパラメタを用いて、下記の計算を続けた。図1(2)、(3)に示すのは、横運動量を(2)  $p_T < 0.5$  GeV、(3)  $0.5 < p_T < 1.0$  GeVに制限したレプトン対の不変質量分布である。 $p_T < 0.5$  GeVでは実験データを説明できないものの、 $0.5 < p_T < 1.0$  GeVでは実験データとよく合っている。横運動量が低いところで実験データが多くなっているのは、図1(4)に示す $m_T$ 分布の実験データにおける急な傾きと対応しており、レプトン対のスペクトルに対する媒質効果の特徴づけるものとして注目されている。図1(4)の $m_0 \approx 0.47$  GeVは、測定した領域のレプトン対の平均不変質量である。

図2では、光子スペクトルの centrality 0-20%の理論計算と実験データ[2, 3]を比較している。図2(1)に示すのは、光子の横運動量分布である。実験データ[2]では、データはやや高い運動量領域( $p_T > 1$  GeV)に限られており、そこでは実験データは理論計算より総じて少ない。図2(2)に示すのは、光子の衝突軸非対称性( $v_2$ )である。実験データ[3]においても、データはやや高い運動量領域( $p_T > 1$  GeV)に限られており、そこでは数倍ずれていて再現できていない。

## 4 結論

実験データとの詳細な比較を行った結果、輸送理論に基づくスペクトル関数による統一的な記述は難しいことが分かった。しかし、輸送理論の適用領域は運動量やエネルギーの小さいところであるため、レプトン対のより小さい横運動量領域( $p_T < 0.5$  GeV)や光子の小さい横運動量領域( $p_T < 1$  GeV)で実験データに漸近的に近づくようなパラメタがあるかもしれない。一方で、レプトン対の横質量分布(図1(4))の急な傾きは、熱的放射が主要な放射源ではない可能性をも示唆している。

## 参考文献

- [1] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. C **81**, 034911 (2010) [arXiv:0912.0244 [nucl-ex]].
- [2] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010) [arXiv:0804.4168 [nucl-ex]].
- [3] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], arXiv:1105.4126 [nucl-ex].
- [4] Y. Akamatsu, H. Hamagaki, T. Hatsuda and T. Hirano, arXiv:1107.3612 [nucl-th].

# Dyson-Schwinger 方程式を用いた熱準粒子構造の解析

奈良大学教養部

中川 寿夫, 横田 浩, 吉田 光次

熱 QED と QCD について, 特に熱 QCD の温度・密度に依存する相構造と相転移現象の研究は, 現在理論と実験の両面から注目されている。過去において, 主として Lattice Simulation, Dyson-Schwinger (DS) 方程式によるフェルミオンの質量項の分析がなされてきた [1]。我々は, 解析的な分析を可能にして, なおかつ先行する数々の分析結果と比較検討がしやすい, 熱場理論の硬熱ループ (Hard Thermal Loop: HTL) 予加算を考慮した DS 方程式を用いて分析をしてきた [2-4]。本稿では, 熱的準粒子構造について行った分析結果を報告する [5]。

フェルミオンに対する硬熱ループ予加算を考慮した DS 方程式等の詳細は文献 [2,3] にあるので, ここでは必要な以下の式のみ与える。

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P))p_i\gamma^i - B(P)\gamma^0 + C(P)$$

本稿での解析は, ladder 近似, 一部修正した Instantaneous Exchange 近似の下で行った。ここでの準粒子構造の分析は, Landau ゲージの下で行った。結合定数は  $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$  で定義される。

準粒子構造を調べるために, symmetric phase ( $C = 0$ ) でのスペクトル関数  $\rho_{\pm}(p_0, p)$  [6,7], Dispersion Law および崩壊定数  $\gamma \sim \text{Im}[B(p_0, p = 0)]$  の振る舞いをそれぞれ図 1~4 に示す。なお, スペクトル関数  $\rho_{\pm}$  は

$$\rho_{\pm}(p_0, p) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{D_{\pm}(p_0, p)} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{p_0 + B(p_0, p) \mp pA(p_0, p)}$$

$$S_R = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{D_+} \left( \gamma^0 + \frac{p_i\gamma^i}{p} \right) + \frac{1}{D_-} \left( \gamma^0 - \frac{p_i\gamma^i}{p} \right) \right]$$

で与えられる。また, Dispersion Law は  $\text{Re}[D_+(p_0, p)] = 0$  の解の  $(p_0 = \omega, p)$  の関係として与えられる。

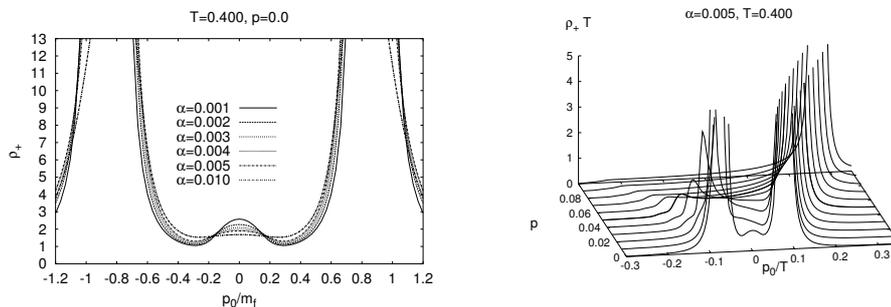


図 1: スペクトル関数

スペクトル関数は, small coupling では,  $p \sim 0$  のとき, 3 ピーク構造を持つことが分かる (図 1)。ただし, 論文 [7] で指摘されている第 3 のピークよりは大きく suppress されている。これは,

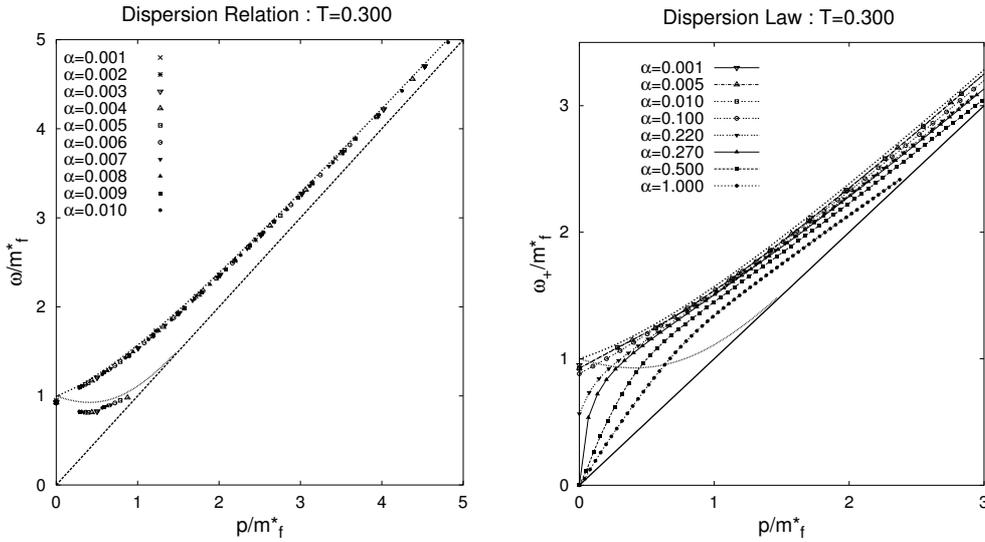


図 2: Dispersion Law( $T$  固定): 点線は HTL

$p_0 \sim 0$  で  $B(p_0, p)$  の虚数部が大きくなるためである。このことは虚数部を考慮した分析が重要であることを示している。

Dispersion Law は small (weak) coupling では、HTL 近似とよい一致を与える (図 2 左)。一方、large (strong) coupling では、thermal mass が減少していることがわかる (図 2 右)。また、温度  $T$  が増大する場合も thermal mass が減少するという結果が得られた (図 3)。ここで、 $m_f^*$  は HTL 計算の next-to-leading order 補正を考慮した thermal mass であり、以下の関係式で与えられる [8]。

$$\left(\frac{m_f^*}{m_f}\right)^2 = 1 - \frac{4g}{\pi} \left[ -\frac{g}{2\pi} + \sqrt{\frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{1}{3}} \right], \quad m_f^2 = \frac{g^2 T^2}{8} = \frac{\alpha T^2}{2}$$

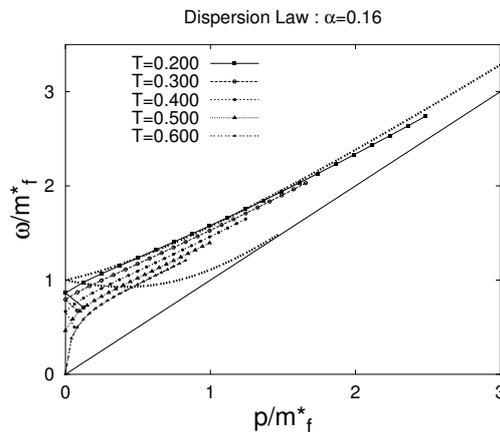


図 3: Dispersion Law ( $\alpha$  固定): 点線は HTL

崩壊定数 (decay width) は、 $\gamma \sim \alpha T (\log \frac{1}{g} + O(1))$  の振る舞いをする (図 4)。small (weak) coupling での振舞いは、HTL 近似の結果と一致している。また、small (weak) coupling と large (strong) coupling では係数や  $O(1)$  の値が異なるため、全く同じ振る舞いをするわけではない。

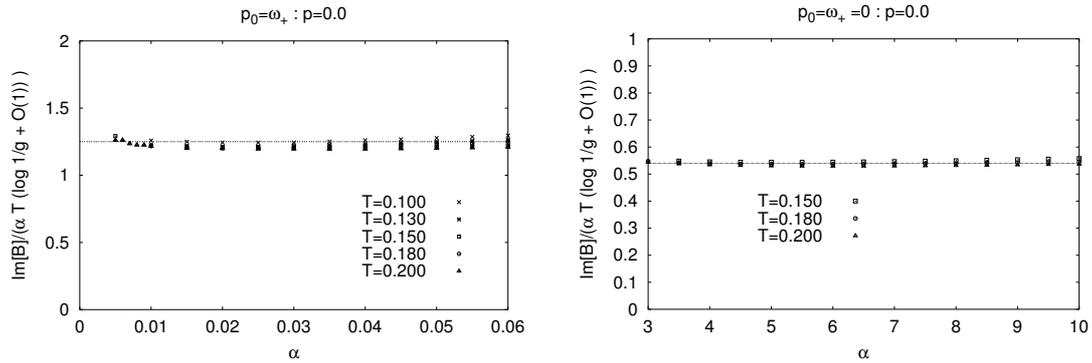


図 4: 崩壊定数の振る舞い

準粒子の振る舞いは、以下のようにまとめられる [5]。

- small (weak) coupling では Dispersion Law および崩壊定数とも HTL 近似をほぼ再現する。
- small (weak) coupling では  $p \sim 0$  のとき、スペクトル関数は第 3 のピークを持つが、大きくはない。これは、虚数部が大きいためである。虚数部を考慮した分析が重要である。
- large (strong) coupling では、thermal mass が減少する。また、崩壊定数は small (weak) coupling とほとんど同様の振る舞いをするが、係数等が異なり、そのまま継続していない。
- さらに、 $T$  が大きくなっても thermal mass が減少するという興味ある結果が得られた。

さらに、Running coupling での分析および有限密度 ( $\mu \neq 0$ ) の場合の分析を現在実行中である。

#### 参考文献

- 例えば,  
K.-I. Kondo and K. Yoshida, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 199;  
M. Harada and A. Shibata, Phys. Phys. D **59** (1999) 014010;  
K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta, Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 979.
- Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **107** (2002) 759.
- Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 777.
- H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, in: Nagoya Mini-workshop on "Strongly Coupled Quark-Gluon Plasma: SPS, RHIC and LHC" (2007), p.173; in: The Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories (2008), p.220; Bulletin of the Research Institute of Nara University **18** (2010) 1.
- H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, 準備中.
- H. A. Weldon, Phys. Rev. D **61** (2000) 036003.
- M. Harada, Y. Nemoto and S. Yoshimoto, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 117;  
M. Harada and Y. Nemoto, Phys. Rev. D **78** (2008) 014004;  
M. Harada and S. Yoshimoto, arXiv:0903.5495.
- A. Rebhan, Nucl. Phys. **A702** (2002) 111.

# グラフェンの特異な物性とカイラル対称性

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 物理学専攻 初貝 安弘

## グラフェンとカイラル対称性

図1に示すようなベンゼン環を無限にならべた、2次元蜂の巣格子上の単層炭素からなるグラフェンは単位胞に非等価な2原子を含み、フェルミ準位近傍には、いわゆる伝導帯と価電子帯からなる2つのエネルギーバンドを持つ半導体である。

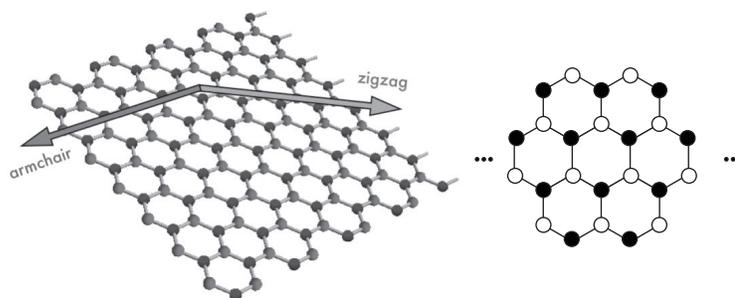


図1: 炭素原子が蜂の巣格子をつくり単一原子層で存在するとされるグラフェン。典型的な境界である zigzag 境界と armchair 境界を示す (後の議論参照)。

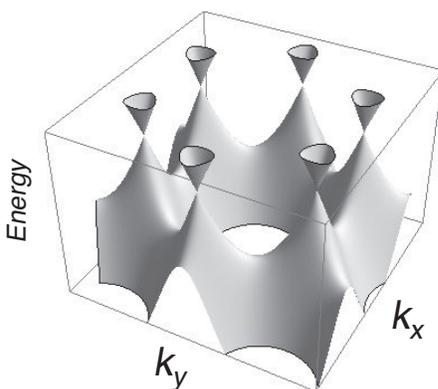


図2: 2次元波数空間上でのエネルギー分散

ただし、よく知られたようにそのエネルギーギャップは非等価な2つの波数(K点, K'点)

においてゼロとなり、ゼロギャップ半導体とよばれる（図2のエネルギー分散を参照）。このK点、K'点におけるゼロギャップの存在は結晶の高い対称性による偶然縮退として古くから知られていたが、一方で2次元八ニカム格子上的カイラル対称なフェルミオン系におけるダブリングした Massless Dirac fermion の Dirac cone とも見なせる。

ここでグラフェンのカイラル対称性とは八ニカム格子が2種類の格子点にわけられホッピングがその異なる格子点の間にのみ存在すること（バイパートイト）であることに基づく。このカイラル対称性に基づくグラフェンにおいて観測される多くの特徴的な物理現象が普遍的観点から記述され、カイラル対称性が実際のグラフェンの物理の理解において重要であることが示唆される。講演では、カイラル対称性をキーワードとした我々のグラフェンに関する研究を最近の進展を含めて紹介した [1-3]。

### グラフェンの Dirac cone とカイラル対称性

グラフェンのギャップ近傍の電子状態を記述する一粒子ハミルトニアンは、2行2列のエルミート行列となり  $H(\mathbf{k}) = \mathbf{R}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$  と波数依存の実3次元ベクトル  $\mathbf{R}(\mathbf{k}) = (R_x, R_y, R_z)$  を用いて、パウリ行列で展開される。この表示では伝導帯、価電子帯のエネルギー分散は  $\pm|\mathbf{R}(\mathbf{k})|$ 、バンドギャップは  $2|\mathbf{R}(\mathbf{k})|$  となる。ここで、八ニカム格子上的グラフェンがカイラル対称であることにより、 $\{H(\nabla\mathbf{k}), \gamma\} = 0$  となる波数に依存しないエルミート演算子  $\gamma$ , ( $\gamma^2 = 1, \text{Tr} \gamma = 0$ ) が存在し、同様に実ベクトル  $\mathbf{n}_\gamma$  をもちいて  $\gamma = \mathbf{n}_\gamma \cdot \boldsymbol{\sigma}$  と書けば  $\{H(\mathbf{k}), \gamma\} = 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_\gamma = 0$  より  $\mathbf{R}(\nabla\mathbf{k}) \perp \mathbf{n}_\gamma$  すなわちハミルトニアンを表現する  $\mathbf{R}$  は一般の3次元ベクトルではなく常に  $\mathbf{n}_\gamma$  を法線とする2次元平面内に拘束されることを意味する。ゼロギャップ点は  $\mathbf{R}(\mathbf{k}) = 0$  となる波数で与えられるから一般のゼロギャップ点の co-dimension は3であり (Von Neumann-Wigner & Berry) 2次元系で生ずるゼロギャップは一般には偶然縮退となるが、カイラル対称なグラフェン等の場合ゼロギャップ点の co-dimension は2であり、2次元系でいったん生じたゼロギャップ点はカイラル対称性を保存する限り有限の摂動に対してトポロジカルに安定となる [1-3]。さらにグラフェンのブリルアンゾーンはその周期性より2次元トーラス  $T^2$  とみなせるからその像  $\mathbf{R}(T^2)$  も向き付け可能な閉曲面であり、かつそれが原点を通る特定の平面上に拘束されることよりグラフェンのフェルミオンダブリングはこの曲面の向き付け可能性から従うこととなり、目で見える Nielsen-Ninomiya の定理として感覚的に理解できる (机の上につぶした紙風船)[2](図3)。

さらに、ハミルトニアンをゼロギャップ点を与える波数  $\mathbf{k}_D$  ( $\mathbf{R}(\mathbf{k}_D) = 0$ ) 近傍で展開し

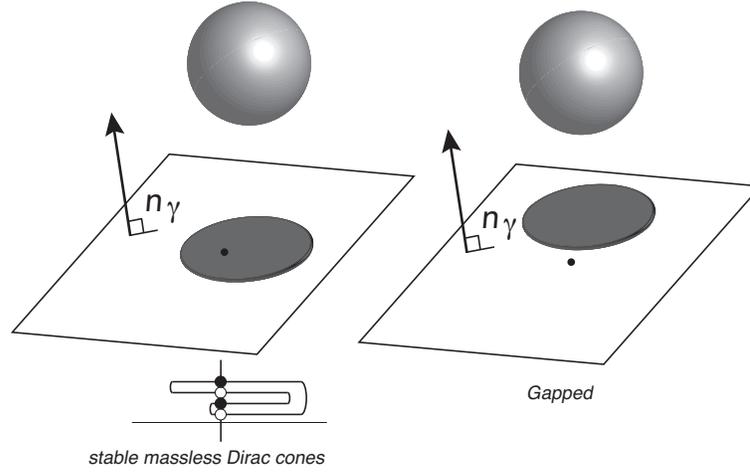


図 3: 閉曲面  $R(T^2)$  Dirac cone が現れる場合とギャップが開く場合

(連続極限に対応する),  $H_D = \delta k_x \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \delta k_y \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  と書けば, そのエネルギー分散は  $E = \pm \hbar \omega$ ,  $\omega = c \bar{K}$  という異方的なコーン構造となる [2,3]. ここで「実効的な光速」 $c$  は  $(c\hbar)^2 = |\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|$  から定まり, グラフェンの場合, 真の光速の  $1/300$  程度である.

### グラフェンのランダウ準位とカイラル対称性

ここで量子化の逆の手続き  $\delta k_\mu = -i\partial_\mu$ , ( $\mu = x, y$ ) を行えば, 2次元系に垂直な静磁場  $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$  下でのグラフェンは, ゼロギャップ点付近での連続極限において, 以下のハミルトニアンで記述される.

$$H_D(B) = \hbar^{-1}[(\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\sigma})\pi_x + (\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\sigma})\pi_y], \quad \pi_\mu = -i\hbar\partial_\mu - eA_\mu, \quad [\pi_x, \pi_y] = i\hbar eB$$

磁場が一様な場合, そのエネルギー準位はエネルギーゼロを中心とする不等間隔のランダウ準位をつくるが, 特にゼロエネルギーに存在するいわゆる  $n = 0$  ランダウ準位の波動関数は  $\gamma_D = \mathbf{n}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}$  の固有値  $+1$  の固有関数となる. ここで  $\mathbf{n}_D = \mathbf{X} \times \mathbf{Y} / |\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|$  であるが, 格子レベルでのカイラル演算子  $\gamma$  を定める  $\mathbf{n}_\gamma$  を用いて  $\mathbf{n}_D = \chi_D \mathbf{n}_\gamma$  により  $\mathbf{k}_D$  での Massless Dirac fermion の chirality  $\chi_D (= \pm 1)$  を定義すれば,  $\mathbf{k}_D$  におけるゼロモードランダウ準位は格子レベルのカイラル演算子  $\gamma$  の固有値  $\chi_D$  の固有状態となる. また, 「紙風船」によるトポロジカルな議論からダブリングペア  $\mathbf{k}_D$  と  $\mathbf{k}_{D'}$  間で, カイラルリティーが反転すること ( $\chi_D + \chi_{D'} = 0$ ) も容易にわかる (図 4).

このグラフェンにおけるカイラル対称性は, 系の乱れに関するゼロモードランダウ準位

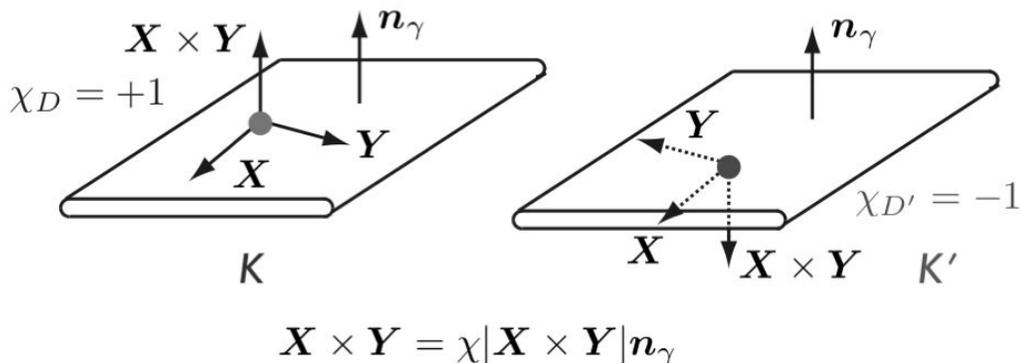


図 4: フェルミオンペアのカイラリティ

にトポロジカルな安定性をあたえるが [3], 系の電子相関による物理にも大きな意義を持つ.

### グラフェンの局在状態とカイラル対称性

グラフェンには, 特徴的な複数の形状の境界 (Zigzag 端, Armchair 端, Klein 端等) が存在するが, 特定の場合のみゼロエネルギーに局在状態が存在することが知られていた [4,5,6]. 実は, この局在状態はグラフェンのカイラル対称性がもたらす普遍的現象の一つであり, バルクの非自明なトポロジカルな性質がエッジに局在した観測量に特徴的にあらわれるとの意味で, 多くのトポロジカル相において特徴的である「バルク-エッジ対応」の典型例であると見なせる [2,7] (図5のまとめ参照). この対応は古くは量子ホール効果ならびに, いわゆる Haldane 相としての整数スピンを持つ量子スピン鎖においてその存在がはっきりとなったものであり, 近年ではトポロジカルな絶縁体としての量子スピンホール相においてその有効性が議論されている. また, いわゆるフォトニックバンド系においても類似の現象が見いだされ, 近年広く多様な物理系で見い出される普遍的な概念であると認識されつつある.

このバルク・エッジ対応としてグラフェンにおける境界における局在状態の物理をみたとき, バルクには非磁性のまま境界でのみ局在磁化が発生するとの理論的予測 [5] は, 電子相関によるカイラル対称性の局所的な破れとして理解することができる [2,7]. また, カイラル対称なディラックフェルミオンとの普遍性を重んじる観点から見直すと 2次元のい

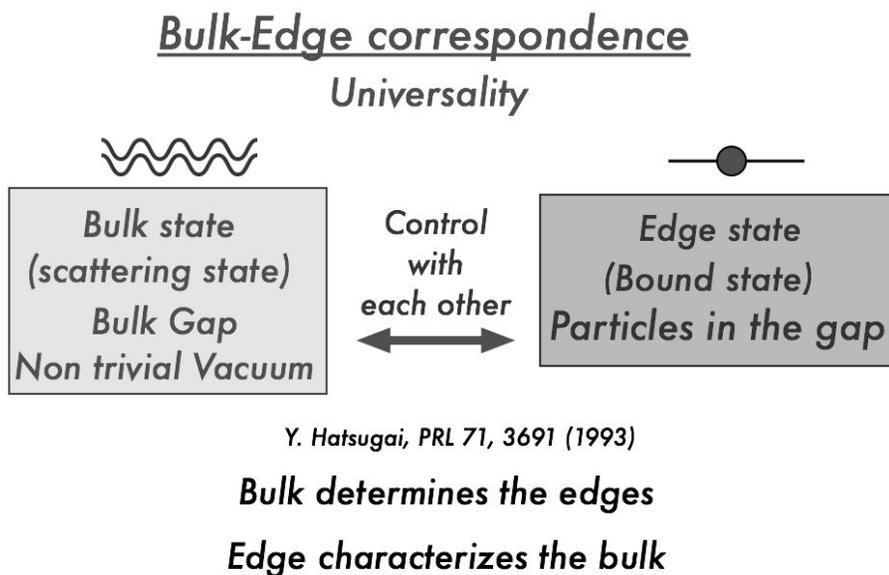


図 5: バルク-エッジ対応

いわゆる d 波の超伝導相とグラフェンとは高い類似性がある。この d 波の超伝導におけるカイラル対称性とは秩序変数が実であること、つまり、時間反転対称性を意味し、そこでのゼロモードはアンドレーフ束縛状態である。また、カイラル対称性の局所的やぶれは、超伝導相における局所的な時間反転対称性の破れを意味する。

### 磁場中グラフェンの量子ホール絶縁相とカイラル対称性

バルクのグラフェンに対する電子相関に関しては、カイラル対称性の観点からその基礎的研究を以前行ったが [8], 近年カイラル凝縮相としての観点からの研究が進展しており [9], 講演では我々の我々の電子相関に関する研究をカイラル対称性をキーワードに数値計算の結果を含めて議論した。ランダウギャップに対して最近接の電子間相互作用を摂動的にかつ厳密に取り扱う範囲で、ハーフフィルドの系は多体の縮退度 2 のカイラル凝縮相となり、ホール絶縁体となることがホール伝導度に関するいわゆる Niu-Thouless-Wu 公式に

より, 以下のチャーン数  $C$  の計算から従う [10].

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{h} C \\ C &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int \text{Tr} F \\ F &= dA + A^2 \\ A &= \Psi^\dagger d\Psi \\ \Psi &= (|\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle)\end{aligned}$$

ここで  $|\Psi_\pm\rangle$  は 2 重に縮退したカイラル凝縮状態である [10].

## 参考文献

- [1] Y. Hatsugai, T. Fukui and H. Aoki, Phys. Rev. B **74**, 305414 (2006), Eur. Phys. J. Special Topics **148**, 133 (2007), Y.Hatsugai, arXiv: 1008.4563, 初貝安弘, 青木秀夫, 固体物理 **45**, 457 (2010)
- [2] Y. Hatsugai, Solid. State Comm. **149**, 1061 (2009), New J. Phys. **12**, 065004 (2010)
- [3] T. Kawarabayashi, Y. Hatsugai, H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **103**, 156804 (2009), T. Kawarabayashi et al., Phys. Rev. B **82**, 195426 (2010), Phys. Rev. B **83**, 153414 (2011).
- [4] M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, K. Kusakabe, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 1920 (1996)
- [5] S. Okada and A. Oshiyama, Phys. Rev. Lett. **87** 146803 (2001)
- [6] M. Arikawa, H. Aoki, and Y. Hatsugai, Phys. Rev. B **78**, 205401 (2008)
- [7] Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **71**, 3697 (1993), S. Ryu and Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **89**, 077002 (2002).
- [8] Y. Hatsugai, Fukui and H. Aoki, Physica E **40**, 1530 (2008)
- [9] Y.Araki and T. Hatsuda, Phys. Rev. B **82**, 121403 (2010), arXiv:1010.5876.
- [10] 浜本, 初貝, 青木, 2011 年 9 月日本物理学会 (物性)22aTL-12, arXiv:1108.1638, 及び出版準備中.

# QCD 相図の実験的検証における、陽子およびバリオン数ゆらぎの役割について

大阪大学大学院理学研究科 北沢正清

## 1 序

量子色力学 (QCD) により記述される物質は、温度・密度などの環境の変化に応じて様々な相転移を起こすことが理論的に予想されている。このうち、有限温度における非閉じ込め・カイラル相転移は、バリオン数密度がゼロの場合には明確な転移点が存在しないクロスオーバーであることが格子 QCD の解析からほぼ確定している。有限密度においては格子 QCD の適用が難しいため明解な解答は得られていないものの、転移の次数が一次相転移へと変化する可能性が多くの理論により示唆されている。このため QCD 相図上には一次相転移の終点、すなわち QCD 臨界点が存在することが期待され、このような描像が QCD 相図の標準として広く受け入れられている。

2 年程前から、有限密度の QCD 相図を持つであろうこれらの構造を重イオン衝突実験により実験的に探ろうという動きが RHIC で始まり、近年にわかに活気を帯びた分野を形成している [1]。重イオン衝突実験で生成された高温物質のバリオン数密度は衝突エネルギーを変化させることにより制御できるので、この目的のためには様々な衝突エネルギーで衝突実験を行えば良い。このため、この試みは「衝突エネルギー走査プログラム」と呼ばれ、現在まさに新しい実験データが日進月歩で提供される状況にある。

ただし、このプログラムで得られた実験データから QCD 相構造に関する情報を抽出するのは難しい問題であり、この目的に適した物理量の選択とその詳しい性質の解析に関してはいまだ実験・理論双方による更なる努力が要求される段階にある。相構造の観測に向けた古典的かつ現在でも最も有力と考えられているシナリオは、各種物理量のゆらぎの衝突エネルギー依存性を調べるというものである。例えば、二次相転移点である QCD 臨界点付近においては臨界ゆらぎと結合した物理量のゆらぎが増大するため、臨界点の近くを通過した場合に限りこれら物理量のゆらぎが増大が見られるはずで、そのような振る舞いが観測されれば臨界点存在の証拠となる [2]。なお、実験的にゆらぎを観測するには、衝突イベント毎に測定した物理量を用いればよい。また、普通ゆらぎと言った場合には偏差 (2 次のモーメント) のことを意味するが、ゆらぎの高次のキュムラントにも相構造に対応する様々な特徴的な振る舞いが現れ、これらが有力な観測量となることも指摘されている [3]。

ゆらぎを用いて QCD 相図を探るというシナリオにおいて、特によく議論の対象となるのはバリオン数のそれである。これは、バリオン数が保存電荷であるため理論的に取扱い易いことに加え、ある体積中のゆらぎの時間変化は境界での輸送のみによってなされるため非保存量と比べて遅く、より初期段階に生成されたゆらぎを観測することができるという特徴を備えているためである [4]。ところが、残念なことにバリオン数ゆらぎを実験的に直接観測することはできない。現在の実験技術では中性子をはじめとする電荷を持たないバリオンが観測できないためである。電荷を持つ陽子であれば観測できるので、陽子数のゆらぎならば観測量であり、具体的なデータも得られている [1]。最近では、実験で得られた陽子数のゆらぎを無批判にバリオン数ゆらぎと同定して理論と実験を比較する議論も散見される。

本研究では、ハドロン気体を持つ性質を利用することにより観測可能な陽子数ゆらぎからバリオン数ゆらぎを求める方法を示す [5]。これにより、従来不可能と思われていたバリオン数ゆらぎの実験による決定が可能となるほか、これまであまり深く考察されることのなかった陽子数ゆらぎとバリオン数ゆらぎの間の関係を明確にすることが可能となる。

## 2 核子分布の二項分布性

バリオン数ゆらぎに関する公式を導出するために、本研究では重イオン衝突実験で検出器に到達する核子数に占める陽子数の確率分布が二項分布となることを用いる。すなわち、ある衝突において検出器に  $N_p$  個の陽子と  $N_n$  個の中性子が到達する確率  $P(N_p, N_n)$  は、 $N_p + N_n$  を固定すると二項分布関数  $B_p(N_p; N_p + N_n)$  に比例している。ただしここで  $B_p(k; N) = p^k(1-p)^{(N-k)}N!/(k!(N-k)!)$ 。

このことを理解するために、まずはじめに重イオン衝突で生成可能な温度・密度領域におけるハドロン気体において、(反)核子のうち(反)陽子が占める個数は良い近似で二項分布となることを説明しておこう。これは、このような領域では温度およびバリオン化学ポテンシャルが核子の質量に対して十分小さいため、核子の分布はボルツマン分布となることを用いれば以下のように容易に理解できる。ある体積中のボルツマン分布した粒子の数  $N$  の確率分布は平均粒子数  $\lambda$  のポアソン分布  $P_\lambda(N) = \lambda^N e^{-\lambda}/N!$  で与えられる。従って、この体積中に  $N_p$  個の陽子と  $N_n$  個の中性子が存在する確率  $P(N_p, N_n)$  は、核子間の相関を無視すれば

$$P(N_p, N_n) = P_{\lambda_p}(N_p)P_{\lambda_n}(N_n) = P_{\lambda_p+\lambda_n}(N_p + N_n)B_{\lambda_p/(\lambda_p+\lambda_n)}(N_p; N_p + N_n), \quad (1)$$

となり、確かに二項分布が出てくる。後述するように、核子間の相関を無視する近似はハドロン気体においてよく正当化できる。反核子についても同じことが言える。

次に、動的に発展するハドロン気体中で核子数の分布が二項分布からずれた場合に、再び二項分布が達成されるまでの緩和過程を考えてみよう。ハドロン気体中の核子が起こす最も頻度の高い散乱過程は、パイ粒子と散乱して共鳴状態  $\Delta(1232)$  を生成し、再び核子とパイ粒子に崩壊する反応によるものである。 $\Delta(1232)$  はアイソスピン  $I = 3/2$  を持ち 4 重項を形成するが、このうち  $\Delta^+$  と  $\Delta^0$  を介した反応は核子のアイソスピンが変化する荷電交換反応を含んでおり、これらの反応により陽子数と中性子数は変換することができる。ハドロン気体中の陽子が  $\Delta^+$  もしくは  $\Delta^0$  を生成したのち、再び陽子に崩壊する確率と中性子に崩壊する確率の比は 5 : 4 なので、ある核子がこの反応を一度経ると、もとのアイソスピンが何であったかをほぼ完全に忘れてしまうことが分かる。更に、相対論的重イオン衝突で生成可能な温度・密度領域のハドロン気体中においてはパイ粒子の密度が核子のそれと比べて格段に多いので、上の反応が起こる頻度は核子同士が反応するそれと比べて圧倒的に多く、核子間に相互作用による相関が発生する余地はほぼ皆無である。また、パイ粒子たちは核子との反応の影響を受けない「熱浴」と見なすことができるので、それぞれの核子はまったく独立に  $\Delta$  共鳴を経ることによるアイソスピンの「コイン投げ」を受けることになる。従って、核子が  $\Delta$  共鳴を数度経る時間が経過すれば、核子数分布の二項分布性は十分成立することが分かる。

ハドロン気体中の核子が上述の反応を起こす平均自由時間は、散乱断面積とパイ粒子の密度から求めることができ、例えば  $T = 150\text{MeV}$  においては約 4fm という値が得られる。従って極端な初期アンサンブルから出発しても約 4fm 後には全ての核子のアイソスピンがランダム化され、二項分布が実現する。これに対し、重イオン衝突において生成されたハドロン気体の寿命は例えば RHIC の最高エネルギーで数十 fm と見積もられており、アイソスピン分布が二項分布に至る緩和時間スケールと比べて圧倒的に長い。このことは、重イオン衝突の終状態においては、陽子及び中性子分布の二項分布性が極めてよい精度で成立していることを意味する。すなわち、ある衝突イベントの終状態のある位相空間内に  $N_p, N_n, N_{\bar{p}}, N_{\bar{n}}$  個の(反)陽子と(反)中性子が存在する確率は、アイソスピン対称性のもとで

$$P(N_p, N_n, N_{\bar{p}}, N_{\bar{n}}) = F(N_B, N_{\bar{B}})B_{1/2}(N_p; N_B)B_{1/2}(N_{\bar{p}}; N_{\bar{B}}), \quad (2)$$

と分解することができる。ただし、 $N_B = N_p + N_n$  ( $N_{\bar{B}} = N_{\bar{p}} + N_{\bar{n}}$ ) は (反) 核子数。本稿では省略するが、これらの量は適切な処置の後にはバリオン数と見なすことができるので [5] 添字に B という記号を用いている。 $F(N_B, N_{\bar{B}})$  は、重イオン衝突の時間発展や検出器の配置等に依存して決まる何らかの分布関数。バリオン数  $N_B^{(\text{net})} = N_B - N_{\bar{B}}$  は保存量であるので、粒子数を数える領域の体積を大きくしていけばその緩和時間はいくらでも長くなる。現在行われている実験において検出器が囲む終状態位相空間内での緩和時間が十分遅ければ、二項分布は達成されているものの、バリオン数  $N_B^{(\text{net})}$  のゆらぎに関しては衝突で生成された物質の高温時の状態からあまり変わらないという状況が実現しうる。このとき、陽子数とバリオン数は明らかに異なることに注意したい。

### 3 バリオン数ゆらぎの決定

陽子数と中性子数の間に二項分布性があることを認めると、中性子数が観測できなためバリオン数を決定するための情報が欠損しているにも関わらず、この欠損をアイソスピンの二項分布性という先見の情報が補うことにより、バリオン数ゆらぎを推測することが可能となる。実際、確率分布に関する式 (2) の関係さえ認めてしまえば、バリオン数ゆらぎと陽子数ゆらぎを関連付けることは初等計算の範囲の問題となる。例えば、陽子数の二乗ゆらぎは、

$$\begin{aligned} \langle (\delta N_p^{(\text{net})})^2 \rangle &= \sum (N_p^{(\text{net})} - \langle N_p^{(\text{net})} \rangle)^2 P(N_p, N_n, N_{\bar{p}}, N_{\bar{n}}) \\ &= \frac{1}{4} \langle (\delta N_B^{(\text{net})})^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle N_B^{(\text{tot})} \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

と計算されるし、同様な計算により

$$\langle (\delta N_B^{(\text{net})})^2 \rangle = 4 \langle (\delta N_p^{(\text{net})})^2 \rangle - 2 \langle N_p^{(\text{tot})} \rangle, \quad (4)$$

なる関係も得られる。ただしここで  $N_c^{(\text{tot})} = N_c + N_{\bar{c}}$ 。また、これらの式ではアイソスピン対称性が仮定されている。同様な関係式は、高次のゆらぎに対しても求めることができる [5]。式 (4) の右辺は、観測可能量である陽子数のゆらぎのみから構成されているので、この式を用いることによってバリオン数のゆらぎが実験的に決まる。最近、陽子数とバリオン数を同等と見なしてバリオン数に関する理論的予言を陽子数に関する実験結果と比較している研究が散見されるが、式 (3) および (4) から明らかのようにこれら二つのゆらぎは異なっても全く不思議ではなく、バリオン数に関する理論的予言と比較されるべき量は式 (4) で構成されたものであることを強調して本稿のまとめとしたい。

## References

- [1] M. M. Aggarwal *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **105**, 022302 (2010); B. Mohanty, arXiv:1106.5902 [nucl-ex].
- [2] M. A. Stephanov, K. Rajagopal, and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **81**, 4816 (1998).
- [3] M. Asakawa, S. Ejiri, and M. Kitazawa, Phys. Rev. Lett. **103**, 262301 (2009).
- [4] M. Asakawa, U. W. Heinz, and B. Müller, Phys. Rev. Lett. **85**, 2072 (2000); S. Jeon and V. Koch, Phys. Rev. Lett. **85**, 2076 (2000).
- [5] M. Kitazawa, M. Asakawa, [arXiv:1107.2755 [nucl-th]].

# An effective matrix model for deconfinement

日高 義将 (理研)

## 導入

我々の世界の真空を熱していくとやがて真空中では閉じ込められていたクォークやグルーオンが自由に動き回るクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) と呼ばれる状態に相転移すると考えられている。米国ブルックヘブン国立研究所で行われている重イオン衝突実験においてこの QGP は実現され、それは非常に強く相関したプラズマ状態であることが示唆されている [1]。この QGP のダイナミクスを理解することは理論的にも実験的にも非常に重要である。本稿では、非閉じ込め相転移付近の強く相関した QGP から超高温での弱結合 QGP へ移る間の領域を semi-QGP [2] と呼び、この semi-QGP の有効モデルの構築を行う [3]。

## Semi-QGP の有効モデル

ここでは、簡単のためクォークのいないグルーオンだけの世界を考えよう。またカラーの数  $N_c$  とした  $SU(N_c)$  ゲージ理論を考える。有限温度の Yang-Mills 作用は、ゲージ変換  $gA_\mu(\tau, \mathbf{x}) \rightarrow U(\tau, \mathbf{x})(gA_\mu(\tau, \mathbf{x}) - i\partial_\mu)U^\dagger(\tau, \mathbf{x})$  に対して不変であり、さらに  $U(\tau, \mathbf{x}) = zU(0, \mathbf{x})$  を持つ非周期的なゲージ変換に対しても不変になる。ここで  $z^3 = 1$  を満たす。この対称性は  $Z(N_c)$  対称性と呼ばれる。時間方向の Wilson ループである Polyakov ループ

$$L(\mathbf{x}) = P \exp i \int_0^\tau d\tau A_0(\tau, \mathbf{x}) \quad (1)$$

は、この変換に対して  $L(\mathbf{x}) \rightarrow U(\tau, \mathbf{x})L(\mathbf{x})U^\dagger(0, \mathbf{x}) = zU(0, \mathbf{x})L(\mathbf{x})U^\dagger(0, \mathbf{x})$  と変化し、トレースと期待値を取った

$$\ell = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr} L \rangle \quad (2)$$

は  $\ell \rightarrow z\ell$  と変化し、 $\ell$  は  $Z(N)$  対称性に対する秩序変数とみなすことができる。この秩序変数は物理的には無限に重いクォークを系に入れた時の自由エネルギー  $f_q$  を用いて  $\ell \sim \exp(-f_q/T)$  のように書くことができる。閉じ込め相では閉じ込めのため、1 粒子自由エネルギーが発散すると考えられるので  $\ell = 0$  となる。また、非閉じ込め相では、1 粒子自由エネルギーが有限になり  $\ell \neq 0$  が対応する。この非閉じ込め相転移を記述するモデルは、Meisinger-Miller-Ogilvie 模型 [4] や Polyakov ループを含む Nambu-Jona-Lasinio 模型 [5] など様々なものが提案されている。我々は Meisinger-Miller-Ogilvie 模型の拡張したモデルを考えることにする [3]。このモデルでは、ゲージ場の時間成分を平均場とゆらぎに分解する:

$$A_0(\tau, \mathbf{x}) = A_0^{\text{cl}} + \delta A_0(\tau, \mathbf{x}), \quad (A_0^{\text{cl}})_{ab} = \frac{2\pi T}{g} q_a \delta^{ab}. \quad (3)$$

これは  $2i\pi T q_a$  のカラー虚数化学ポテンシャルを持っているものと等価になっており、グルーオンは随伴表現に属するのでグルーオンの虚数化学ポテンシャルは  $2i\pi T q_{ab} \equiv 2i\pi T(q_a - q_b)$  となる。 $\exp(2\pi i q_a)$  は Polyakov ループの固有値に対応している。自由ガス近似によるポテンシャルは、

$$\mathcal{V}_{\text{pert}}(q_a) = -(N_c^2 - 1) \frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{2\pi^2 T^4}{3} \sum_{a,b=1}^{N_c} [q_{ab}]_{\text{mod } 1}^2 (1 - [q_{ab}]_{\text{mod } 1})^2 \quad (4)$$

となる [6]. 右辺の第 1 項は自由なグルーオンガスによる寄与, 第 2 項が背景場が存在することによる現れた寄与である. ループ展開を行うことによって高次のポテンシャルを得ることができるが, ここでは, 非摂動ポテンシャル項を模型に導入する事にする. ポテンシャルは元の対称性を保つように  $q_{ab}$  の関数で  $q_{ab} \rightarrow q_{ab} + 1$  の変換に対して不変な

$$V_n(q_{ab}) = ([q_{ab}]_{\text{mod } 1})^n (1 - [q_{ab}]_{\text{mod } 1})^n \quad (5)$$

を採用する. 摂動項  $\mathcal{V}_{\text{pert}}(q_a)$  は  $V_2(q_{ab})$  を用いて書ける事がわかる. 一般には任意の  $V_n$  がポテンシャルに含まれてよいがここでは簡単のため,  $V_1(q_{ab})$  及び  $V_2(q_{ab})$  の 2 つの項を持つ場合に話を限る. 我々は, 以下のポテンシャルを採用する [3]:

$$\mathcal{V}_{\text{non}}(q_a) = \frac{2\pi^2}{3} T^2 T_c^2 \sum_{a,b}^{N_c} \left( -\frac{c_1}{5} V_1(q_a) - c_2 V_2(q_a) + \frac{4c_3}{15} \right). \quad (6)$$

全体のポテンシャルは  $\mathcal{V}_{\text{eff}}(q_a) = \mathcal{V}_{\text{pert}}(q_a) + \mathcal{V}_{\text{non}}(q_a)$  となる. このポテンシャルが最小になるように  $\langle q_a \rangle$  を求め, そこから熱力学量, 例えば圧力は  $p(T) = -\mathcal{V}_{\text{eff}}(\langle q_a \rangle)$  として求める事ができる. この模型には 3 つのパラメータ  $c_i$  があるが, そのうち一つは  $T = T_c$  で相転移が起こるように決められ, もう一つはポテンシャルの  $T = T_c$  での値の自由度に吸収されるので, 実質 1 つのパラメータを持つ模型となる. Meisinger-Miller-Ogilvie 模型 [4] は我々の模型で  $c_2 = 0$  に置いたものに対応する. ポテンシャルの最低値を求めるため平均場を  $q_a = (1 - \phi)(2a - N - 1)/(2N)$  と仮定してポテンシャルを書き直すと,

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\phi, t) = \frac{\pi^2(N_c^2 - 1)T_c^4}{45} t^2(t^2 - c_2) \tilde{\mathcal{V}}(\phi, t) \quad (7)$$

及び

$$\tilde{\mathcal{V}}(\phi, t) = -\frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - \left(1 - \frac{4}{N_c^2}\right) \phi^3 + \left(2 - \frac{3}{N_c^2}\right) \phi^4 + \tilde{\mathcal{V}}(0, t) \quad (8)$$

を得る. ここで,  $t = T/T_c$ , 及び

$$m_\phi^2 = 1 + \frac{6}{N_c^2} - \frac{c_1}{t^2 - c_2}, \quad \tilde{\mathcal{V}}(0, t) = \frac{1}{N_c^2} + \frac{-c_1 - c_2 + c_3}{t^2 - c_2} \quad (9)$$

である. 相転移は極値条件  $\partial \tilde{\mathcal{V}}(\phi, t)/\partial \phi = 0$  を解くことで求められる.  $\phi = 0$  が閉じ込め相に対応しこの時 Polyakov ループの期待値は  $l = 0$  となる.  $N_c = 2$  の時は, 3 次の項が現れず 2 次相転移を示す. 一方,  $N_c \geq 3$  の場合は 3 次の項のため 1 次相転移が実現することがわかる. これは格子 QCD の結果を再現している [7]. この模型を用いていくつかの物理量を計算してみよう. 我々はパラメータを  $(e - 3p)/T^4$  のピークの位置が合うように  $N_c = 3$  の場合に  $c_1 = 0.32$ ,  $c_2 = -0.83$ ,  $c_3 = 1.13$  と取る. 図は圧力  $p$ , エネルギー密度  $e$ ,  $(e - 3p)/T^4$ , 及び Polyakov ループの期待値について格子 QCD の結果 [8] と我々の結果との比較である.  $p$ ,  $e$  及び  $e - 3p$  は格子 QCD の結果を再現できているが, 一方 Polyakov ループの期待値は大きく異なっている. 格子 QCD における Polyakov ループはくりこみによる不定性を含むため我々の直接比較できず, これが原因となっている可能性もある. 今回の我々の模型の結果では semi-QPG の領域は格子 QCD の結果とは異なり,  $T \sim 1.2T_c$  の狭い領域に限られることがわかる.

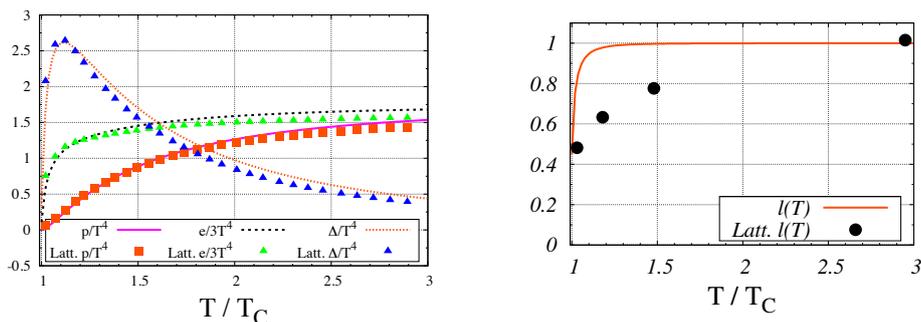


図 1: 我々の模型と格子 QCD の計算 [8] との比較. 左: 圧力  $p$ , エネルギー密度  $e$  を自由ガスの場合との比を取ったもの及び  $\Delta/T^4 = (e - 3p)/T^4$ . 右: Polyakov ループの期待値

## まとめと展望

本稿では, semi-QGP を記述する模型の構築を行った. Polyakov ループの固有値を変数に取った模型になっておりこの模型で圧力, エネルギー等の物理量を計算した. 今回使った模型の解析では Semi-QGP の領域は  $1.2T_c$  くらいまでの狭い領域であることが示唆される. 今後の発展として, クォークを入れる拡張やこの模型から計算される背景場中 (semi-QGP 中) でのレプトン対生成の計算, エネルギーロスの計算, 輸送係数の計算を行うことで semi-QGP の理解を深めていきたい.

## 参考文献

- [1] E. Shuryak, Prog. Part. Nucl. Phys. **62**, 48 (2009); U. W. Heinz, 0901.4355; D. A. Teaney, 0905.2433.
- [2] Y. Hidaka and R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **78**, 071501(R) (2008); *ibid.* **80**, 036004 (2009); *ibid.* **80**, 074504 (2009); *ibid.* **81**, 076002 (2010).
- [3] A. Dumitru, Y. Guo, Y. Hidaka, C. P. K. Altes, R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D83**, 034022 (2011).
- [4] P. N. Meisinger, T. R. Miller and M. C. Ogilvie, Phys. Rev. D **65**, 034009 (2002).
- [5] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004) [arXiv:hep-ph/0310121].
- [6] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981); N. Weiss, Phys. Rev. D **25**, 2667 (1982).
- [7] S. Datta, S. Gupta, Phys. Rev. **D82**, 114505 (2010).
- [8] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier, B. Petersson, Nucl. Phys. **B469**, 419-444 (1996).

# PQM 模型における $\theta$ および虚数化学ポテンシャルにおける相転移

森田健司<sup>1</sup>, V. Skokov<sup>2</sup>, B. Friman<sup>2</sup>, K. Redlich<sup>3</sup>,  
京大基研<sup>1</sup>, GSI<sup>2</sup>, University of Wrocław

## 概要

PQM 模型における相転移について、平均場近似をベースに一般的な性質を議論した後、汎関数繰り込み群の手法を用いて揺らぎの効果を取り込んだ結果と比較する。

## 1 序論：虚数化学ポテンシャルにおける QCD

虚数化学ポテンシャル  $\mu = i\theta T$  においては、符号問題が存在しないために格子 QCD シミュレーションが可能である [1]. Roberge と Weiss によって、QCD の分配関数は  $\theta$  について周期  $2\pi/3$  の周期関数であり、高温では  $\theta = \pi/3$  で 1 次相転移 (RW 転移) が存在することが示された [2]. これらの性質は、近年直接格子 QCD によって確かめられたが、相構造や相転移の次数が注目を集めている。解析接続によるアプローチによって、格子 QCD による実化学ポテンシャルにおける相図の決定に利用が可能であるほか [3], 格子 QCD の結果を有効模型でフィットすることによって、より予言能力が高い模型の構築が可能であると期待されている [4]. 本報告では、有効模型のひとつである Polyakov-Quark-Meson (PQM) 模型をベースに、平均場近似における相構造を議論した後、汎関数繰り込み群の手法を用いてカイラル場の揺らぎの影響について述べる。

## 2 平均場近似における相構造

PQM 模型は、温度に依存する一定値の背景ゲージ場  $A_0$  のもとでの QM 模型と理解することができ、Lagrangian は次のように与えられる [5].

$$\mathcal{L} = \bar{q} [i\gamma^\nu D_\nu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})] q + \frac{1}{2}(\partial_\nu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\nu \vec{\pi})^2 - U(\sigma, \vec{\pi}) - U(\Phi, \Phi^*; T). \quad (1)$$

1-4 項目は共変微分項を除けば、 $O(4)$  QM 模型に相当し、カイラル相転移を記述する。最後の項が Polyakov loop に対する有効ポテンシャルであり、模型中でもっとも不定性が大きい部分である。1 項目の共変微分を通じてクォークと Polyakov loop が相互作用することにより、熱力学ポテンシャル  $\Omega$  におけるクォークの励起が抑えられ、閉じ込めを記述する。PQM 模型では、カイラル対称性の陽な破れは  $U(\sigma, \vec{\pi})$  中に  $m_\pi = 138$  MeV

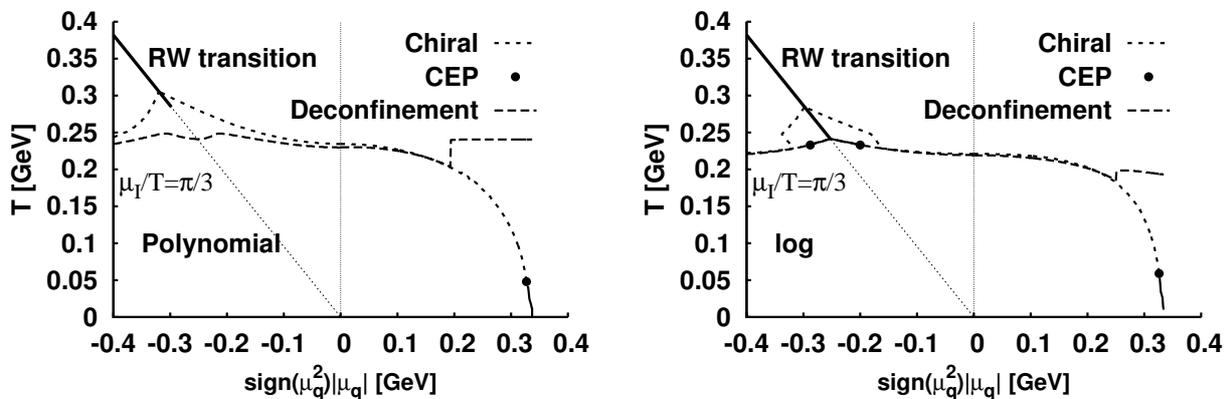


図 1: PQM 模型の平均場近似での相図. 左: 多項式ポテンシャル. 右: 対数ポテンシャル.

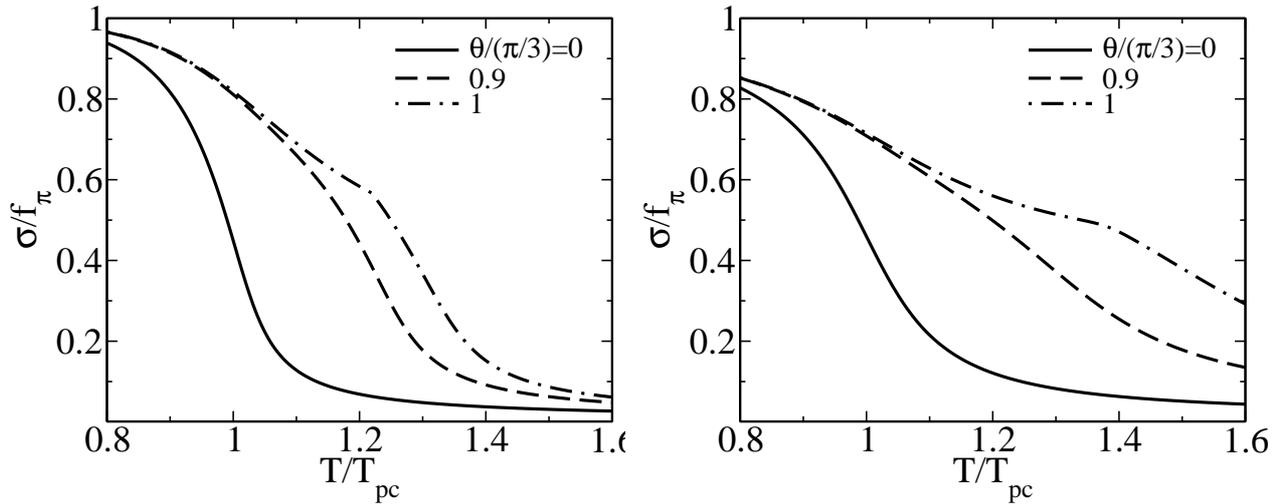


図 2:  $f_\pi$  で規格化したカイラル場の温度依存性. 左: 平均場近似, 右: 汎関数繰り込み群による結果. 温度は  $\theta = 0$  における転移温度  $T_{pc}$  で規格化してある.

に比例する 1 次の項を入れ, 他のカイラルパートのパラメータは, 真空中における  $f_\pi = 93$  MeV,  $m_\sigma = 600$  MeV を再現するように決められる. また,  $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T)$  は  $Z(3)$  対称性によって関数型が制限される. 多項式に展開したもの [6] のほか, QCD の強結合展開から得られる, Haar 測度によって定義域が制限された対数型のポテンシャル [7, 8] が用いられる. このポテンシャルの不定性による違いは PNJL 模型によって詳しく議論されている [9].

それぞれの秩序変数はギャップ方程式  $\partial\Omega/\partial X_i = 0$ ,  $X_i = \sigma, \Phi, \Phi^*$  を数値的に解くことによって求めることができ, その温度あるいは化学ポテンシャルに対する変化をみることで相図を決定することができる. 平均場近似による結果を図 1 に示す.<sup>1</sup> 相構造の一般的な傾向は, カイラル場に対するギャップ方程式によって理解することができる [9], 熱的な項が実化学ポテンシャルでは  $\cosh(n\mu_R/T)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) に比例するのに対して, 虚数化学ポテンシャルでは  $\cos(n\mu_I/T)$  になることから, 臨界線がより高温に位置することが説明される. 実  $\mu$  臨界終点の位置などの定量的な性質は, 真空の揺らぎの正則化 [10] や,  $m_\sigma$  などに依存する. 閉じ込め転移はより強く  $\mathcal{U}$  の選び方に依存し, 図 1 にあるように, 多項式ポテンシャルでは RW 転移終点を除く全領域でクロスオーバーになるが, 対数型を用いると  $\mu_I/T = \pi/3$  付近では 1 次相転移になり, 虚数  $\mu$  領域に臨界終点が見れる.

### 3 汎関数繰り込み群を用いたゆらぎの効果

平均場近似に基づく前節の議論に対して, 量子揺らぎの効果を考える. ここでは, Wetterich 方程式に基づく汎関数繰り込み群アプローチを採用する. 詳しくは, 仲野氏のレビューを参照されたい. PQM 模型ではカイラル場の揺らぎを非摂動的に取り入れる定式化がなされており, Polyakov loop は平均場的な取り扱いにとどまるが, 熱力学ポテンシャルに対するフロー方程式を解くことによって, 揺らぎを非摂動的に取り込んだ結果を得ることができる. 詳細は文献 [11, 12] に譲り, ここでは簡単に結果のみを紹介する. 本節での結果は,  $\mathcal{U}$  には多項式型ポテンシャルを用いている. 図 2 は異なる虚数化学ポテンシャルの値における, カイラル場の温度依存性を示したものである. 一見して, 揺らぎの効果によって温度依存性が緩やかになることがわかる. PQM 模型では, クォーク質量が  $M_q = g\langle\sigma\rangle$  ( $g$  は式 (1) の湯川結合定数) で与えられるので,  $\sigma$  の値の違いは, クォーク質量の違いを通じて, 閉じ込め転移と  $Z(3)$  転移にも影響を及ぼす. 図 3 にその一例として, Polyakov loop の絶対値の温度変化  $d|\Phi|/dT$  を示す. 等高線の尾根が臨界線に対応するが, 平均場近似と汎関数繰り込み群の結果には明らかな差異が見られる.  $\theta = \pi/3$  付近において, 平均場近似の結果においてみられるダブルピーク構造は, 汎

<sup>1</sup>実  $\mu$  における閉じ込め臨界線, 虚数  $\mu$  におけるカイラル臨界線の折れ曲がり, クロスオーバー転移の決定に秩序変数の微分を使っていることからくる artifact である.

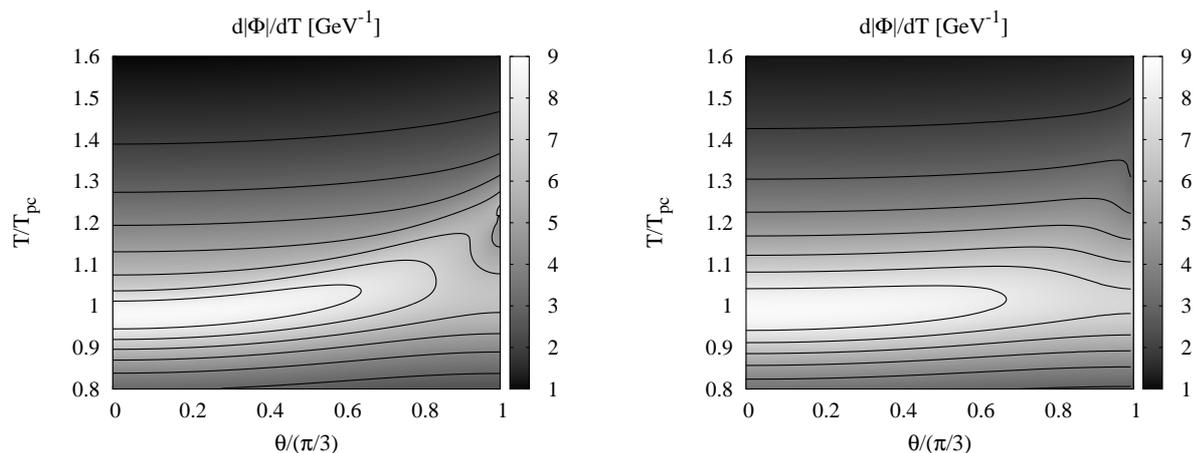


図 3:  $T - \theta$  平面における  $d|\Phi|/dT$  の等高線図. 左: 平均場近似, 右: 汎関数繰り込み群による結果

関数繰り込み群を用いた結果では消失しており, カイラル場の変化が緩やかになっていることを反映している. 臨界線の曲率や, RW 転移終点の温度も揺らぎによって変化するが, その変化は  $U$  に強く依存し, 例えば, 多項式ポテンシャルにおいては, 平均場近似のもとで  $T_{RW} = 1.22T_{pc}$ , 汎関数繰り込み群のもとでは  $T_{RW} = 1.39T_{pc}$  であるのに対して, 対数型ポテンシャルではそれぞれ  $1.09T_{pc}$ ,  $1.08T_{pc}$  である. これらの結果は, 虚数化学ポテンシャル領域における相図の理解において, 揺らぎの効果が重要であることを示唆している.

本研究は京都大学クォーク・ハドロン科学国際共同研究プログラム (YIPQS) の補助を受けています.

## 参考文献

- [1] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka, T. Takahashi, Prog. Theor. Phys. 110 (2003) 615.
- [2] A. Roberge, N. Weiss, Nucl. Phys. B275 (1986) 734.
- [3] P. de Forcrand, O. Philipsen, Nucl. Phys. B642 (2002) 290.
- [4] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, M. Yahiro, Phys. Rev. D 79 (2009) 096001.
- [5] B. J. Schaefer, J. M. Pawłowski, J. Wambach, Phys. Rev. D 76 (2007) 074023.
- [6] C. Ratti, M. A. Thaler, W. Weise, Phys. Rev. D 73 (2006) 014019.
- [7] K. Fukushima, Phys. Lett. B 591 (2004) 277.
- [8] S. Roessner, C. Ratti, W. Weise, Phys. Rev. D 75 (2007) 034007.
- [9] K. Morita, V. Skokov, B. Friman, K. Redlich, Phys. Rev. D, to appear. arXiv:1107.2273.
- [10] V. Skokov, B. Friman, E. Nakano, K. Redlich, B.-J. Schaefer, Phys. Rev. D 82 (2010) 034029.
- [11] V. Skokov, B. Stokic, B. Friman, K. Redlich, Phys. Rev. C 82 (2010) 015206.
- [12] K. Morita, V. Skokov, B. Friman, K. Redlich, Phys. Rev. D, to appear. arXiv:1108.0735.

# 次元正則化を用いた有限温度 NJL 模型における メソンの振舞い

木村大自,<sup>a</sup> 幸山浩章,<sup>b</sup> 稲垣知宏<sup>c</sup>

<sup>a</sup> 広島大学教育学部, <sup>b</sup> 中原大学理学院

<sup>c</sup> 広島大学情報メディア教育研究センター

次元正則化を用いて、3 フレーバー南部-ヨナ-ラシーニヨ (NJL) 模型における擬スカラーメソンの振舞いを解析する。実験値やカットオフによる解析と次元正則化による解析を比較し、後者が QCD の有効理論として妥当な結果を導くかどうかを調べる。また、有限温度系におけるメソンの振舞いを、2 つの正則化で比較検討する。

## 1 はじめに

NJL 模型は軽い擬スカラーメソンを記述し、カイラル対称性の自発的破れを導く QCD の低エネルギー有効理論として広く使われている。この模型のラグランジアンは、3 フレーバーの場合、次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^a\psi)^2] \\ & - K[\det \bar{\psi}_i(1 - \gamma_5)\psi_j + \det \bar{\psi}_i(1 + \gamma_5)\psi_j] \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $i, j$  はフレーバーの添字、 $\lambda$  は Gell-Mann 行列、 $m$  はカレントクォーク質量行列で  $\text{diag}(m_u, m_d, m_s)$  を示す。3 項目の行列式は、フレーバーについて取っており、カイラルアノマリーの寄与を表している。2 項目の 4 体フェルミオン相互作用と 3 項目の 6 体フェルミオン相互作用の結合定数  $G, K$  は、どちらも負の質量次元を持つため、4 次元時空において理論を繰り込むことができない。そのため量子補正を計算する際、これまでの大部分の研究では、フェルミオンループの運動量の大きい領域を、カットオフする正則化が採用されている。通常、NJL 模型は 1GeV 以下のエネルギースケールで議論されるため、カットオフによる正則化は、有効理論という観点から物理的な意味が理解しやすく、多くの成功を収めている。

NJL 模型は繰り込めない理論であるから、量子補正を計算すると物理量は正則化の処方によって変わる。我々はカットオフと別の正則化として、フェルミオンループの運動量次元を下げて計算する次元正則化を用いて、模型の性質を再評価することにした。次元正則化を採用した理由は、次の事柄が改善されるためである。カットオフを用いるとスケール変換の不変性が壊れること、 $\eta'$  メソンの質量がカットオフスケールを越えること、カイラルアノマリーの扱いにカットオフによる影響が入る可能性があること。その他、クォーク対凝縮が予想されるような高密度系において、カットオフスケールの影響が、このスケールよりも小さい化学ポテンシャル領域で、温度・密度相構造に現れてしまうことなどが知られている。次元正則化を用いると、このような現象は当然起らない [1]。本研究では、次元正則化を用いて擬スカラーメソンの振舞いを解析し、カットオフによる解析と比較検討する。

## 2 パラメータ

NJL 模型を QCD の有効理論にするため、メソンの質量や崩壊定数を計算し、実験値や経験値を用いて、模型に含まれるパラメータを固定する。本研究では、論文 [2] と同じ物理量の組  $\{m_u, m_\pi, f_\pi, m_K, m_{\eta'}\}$  を用いて、パラメータの値を決める。ただし、実験値は新しい値に更新し、 $m_u (= m_d)$  は 3–6MeV の間で振る。カットオフの場合、模型に含まれるパラメータは、 $m_u, m_s, G, K$  とカットオフパラメータ  $\Lambda$  の 5 個であるため、上記の物理量から全てのパラメータの値が決まる。ところが、次元正則化の場合、内線の運動量積分の次元を 4 からずらし ( $2 < \dim(k) = D < 4$ )、次元のずれを繰り込みスケールで補正するため、カットオフの場合より 1 個パラメータが増えてしまう。そこで、次元正則化においては、上記の物理量に加えて、トポロジカル感受率  $\chi$ 、あるいは  $\eta$  メソンの質量を用いてパラメータを固定する [3]。

表 1 に 2 つの正則化を用いて、 $1/N_c$  展開の第 1 次近似で求めた物理量を示す。 $m_\eta$  の値をインプットに使うと、次元の値が高い解と低い解が存在するため、次元の高い解のケースを  $m_\eta^{\text{HD}}$  と書いている。次元正則化でトポロジカル感受率  $\chi^{1/4}$  の値を 170MeV に取ったケース ( $\chi_{170}$ ) では、カットオフによる結果と比較的近い値が得られる。ただし、これらのケースでは、どちらも  $m_\eta$  の値が実験値より小さくなってしまう。一方、次元正則化で  $m_\eta$  の値をインプットに使った場合、 $m_u$  を 5.5MeV や 3.0MeV に選んでも  $\chi^{1/4}$  の値は、格子計算等の値よりも大きくなってしまふ。つまり、パラメータの 1 個多い次元正則化を用いても、 $m_\eta$  と  $\chi$  の値を同時に実験値等と合せることは困難である。

表 1: カットオフと次元正則化を用いて得られた物理量の値 (単位は MeV)。括弧内は、インプットパラメータを表す。最後の行は、実験値もしくは経験値。

Case	$m_u$	$m_s$	$m_\eta$	$\chi^{1/4}$	$-\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$	$D$
Cutoff	(5.5)	136	482	163	245	4
$\chi_{170}$	(5.5)	150	473	(170)	247	2.47
$m_\eta^{\text{HD}}$	(5.5)	148	(548)	224	246	2.78
$m_\eta$	(3.0)	84.9	(548)	244	301	2.29
exp./emp.	3.4-6.8	94.5-176	548	170-179	228-287	4

## 3 メソンの温度依存性

前章で得られたパラメータを用いて、メソンの質量や崩壊定数の温度依存性を調べる。温度は虚時間形式を用いて導入する。図 1, 2 に、2 つの正則化で求めたメソンの質量や崩壊定数、構成子クォーク質量  $m_i^*$  の和をそれぞれ描く。図 2 は、ケース  $m_\eta$  で  $m_u = 3.0\text{MeV}$  に取った場合の図である。0 温度における次元正則化の構成子クォーク質量の値は、カットオフのそれよりも大きくなっている。これは、次元正則化において内線の運動量を無限大まで積分したためである。ところが、図に示している 2 つの正則化の擬似臨界温度 ( $\partial\langle \bar{u}u \rangle / (\partial T)$  の最大値) の値は、どちらもほぼ 184MeV になる。この理由の 1 つは、次元正則化において  $D = 2.29$  という低い次元で、理論を考えているためと思われる。また、他の次元正則化のケースでは、擬似臨界温度がよく知られている値 (150–200MeV) よ

りも大きくなる。このことは、ケース  $m_\eta$  の4体フェルミオン相互作用と6体フェルミオン相互作用の結合定数の値が、他のケースよりも大きいことと関係していると思われる。

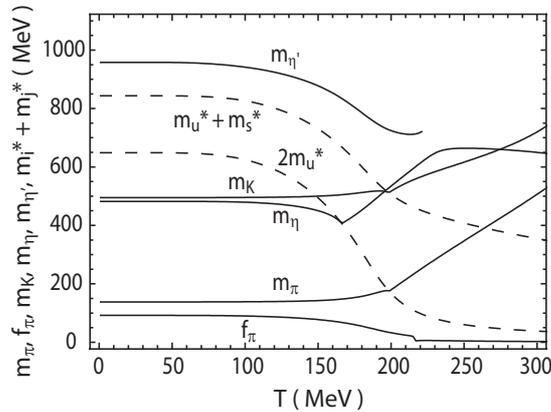


図 1: カットオフを用いて得られたメソンの温度変化の振舞い。

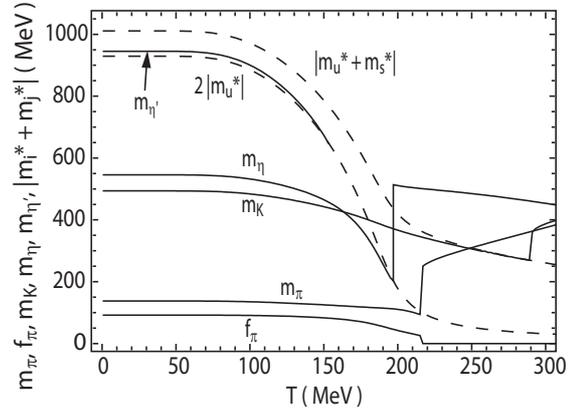


図 2: 次元正則化を用いて得られたメソンの温度変化の振舞い (ケース  $m_\eta$ )。

図 1,2 に見られるように、 $f_\pi$  の温度依存性の振舞いはどちらも似ている。しかし、メソンの質量の振舞いは、擬似臨界温度付近で異なっている。次元正則化でメソンの質量が  $m_i^* + m_j^*$  の値に引きずられているのは、メソン質量の解曲線において、この閾値（共鳴状態）の影響が次元を下げたぶん強くなるためである。更に次元正則化では、この閾値より大きい領域でメソンのモードが実数解を持たなくなるため、カットオフでの振舞いのように滑らかにソフトモードへ移行しない。

## 4 まとめ

次元正則化を用いて 3 フレーバー NJL 模型を解析した。実験値などから模型のパラメータを固定し、 $m_s, m_\eta, \langle \bar{u}u \rangle$  等を次元正則化で求めると、カットオフによる結果と比較的近い値が得られた。 $f_\pi, f_K, \chi$  の温度依存性は、カットオフの場合と似た振舞いになっていた。しかし、メソンの質量の温度依存性は、擬似臨界温度付近で、カットオフの結果と違いが見られた。これは次元を下げた影響で、メソン質量の解曲線がこの領域で特異な振舞いを示すことに起因している。他方、メソンの化学ポテンシャル依存性については、次元正則化を用いた場合、興味深い結果が出ているので別の機会に紹介したい。

## 参考文献

- [1] T. Fujihara, D. Kimura, T. Inagaki, A. Kvinikhidze, Phys. Rev. D **79**, 096008 (2009).
- [2] T. Hatsuda, T. Kunihiro, Phys. Rept. **247**, 221 (1994).
- [3] T. Inagaki, D. Kimura, H. Kohyama, A. Kvinikhidze, Phys. Rev. D **83**, 034005 (2011).

# Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration

Yuji Sakai<sup>\*†</sup>, Takahiro Sasaki<sup>\*†</sup>, Hiroaki Kouno<sup>‡</sup>, Masanobu Yahiro<sup>†</sup>  
 Department of Physics, Kyushu University<sup>†</sup>,  
 Department of Physics, Saga University<sup>‡</sup>,

## 1 Introduction

An important query on the QCD thermodynamics is whether the chiral-symmetry restoration and the deconfinement transition take place simultaneously or not. Actually, in lattice QCD (LQCD) simulations at zero chemical potential ( $\mu_q$ ), there is a debate as to whether the transitions really coincide or not [1]. LQCD simulations are far from perfection at real  $\mu_q$  because of the sign problem. Fortunately, LQCD data are available at imaginary  $\mu_q$  [2] and isospin chemical potential  $\mu_1$  [3], since there is no sign problem. The data show that chiral and deconfinement transitions coincide in the numerical accuracy. Since there is no general reason for coincidence between the two crossover transitions, it is natural to think that the chiral and deconfinement transitions nearly coincide as a result of strong entanglement between the two order parameters: the chiral condensate and the Polyakov loop. We investigate this possibility in the present paper.

## 2 PNJL model

We consider the Polyakov-loop extended Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) model which can treat both the chiral and deconfinement transitions. The two-flavor PNJL Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \bar{q}(\gamma_\nu D_\nu + m_0)q + G_s[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*), \quad (1)$$

where  $q$  denotes the two-flavor quark field,  $m_0$  does the current quark mass, and  $D_\nu = \partial_\nu - iA_\nu\delta_{\nu 4}$ . Here the Polyakov potential  $\mathcal{U}$  [4] is a function of the Polyakov loop  $\Phi = \frac{1}{N_c} \text{tr}_c e^{-iA_4/T}$  and its conjugate  $\Phi^*$ . We take the Polyakov gauge where  $A_4$  can take a diagonal form. The chiral condensate  $\sigma = \bar{q}q$  and the Polyakov loop  $\Phi$  are order parameters for the chiral and deconfinement transitions, respectively. In the mean field approximation,  $\sigma$ ,  $\Phi$  and  $\Phi^*$  satisfy the stationary conditions of the thermodynamic potential. The PNJL model can reproduce the LQCD results at imaginary  $\mu_q$  [5], particularly

---

<sup>\*</sup>supported by JSPS Research Fellow.

the model has the Roberge-Weiss periodicity that is a periodicity of  $\theta = \text{Im}(\mu_q)/T$  with period  $2\pi/3$ . The RW periodicity is due to invariance under the extended  $\mathbb{Z}_3$  transformation, which is a combination of the  $\mathbb{Z}_3$  transformation and  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi/3$ . This symmetry guarantees that the PNJL model can reproduce the LQCD results qualitatively at imaginary  $\mu_q$ . Figure 1 (a) shows the phase diagram of the PNJL model at imaginary  $\mu_q$ . The chiral and deconfinement transitions separate each other by 20 %. The PNJL model reproduces the LQCD results for the deconfinement transition, but not for the chiral transition. This indicates that the entanglement between the chiral and deconfinement transitions is weak in the PNJL model. This problem will be discussed in the next section.

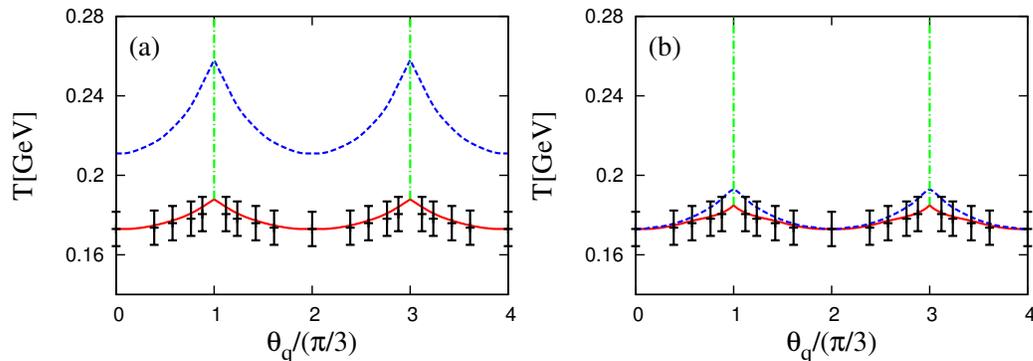


Figure 1: Phase diagram at imaginary chemical potential (a) by the PNJL model and (b) by the EPNJL model. The solid (dashed) lines represent the deconfinement (chiral) transition lines. The vertical dot-dashed lines denote the RW transition lines. Lattice data are taken from Ref. [2].

### 3 Entanglement PNJL model

In the NJL-type model, the four-quark vertex  $G_s$  is originated from the one-gluon exchange between two quarks and its higher-order exchanges. If the gluon field  $A_\nu$  has a vacuum expectation value  $\langle A_4 \rangle$  in its temporal component,  $A_\nu$  is coupled to  $\langle A_4 \rangle$  which is related to  $\Phi$ ; see Fig. 2. Hence,  $G_s$  is changed into an effective (entanglement) vertex  $G_s(\Phi)$  that

$$\text{Four-quark vertex} = \text{Gluon exchange} + \text{Gluon exchange} \Phi + \dots$$

Figure 2: The diagrammatic description of the effective vertex  $G_s(\Phi)$ .

can depend on  $\Phi$  [6]. Actually, recent analyses [6] based on the exact renormalization-group method indicate that entanglement interactions between  $\sigma$  and  $\Phi$  appear in addition to the original entanglement through the covariant derivative. It is expected that the  $\Phi$  dependence of  $G_s(\Phi)$  will be determined in the future by exact renormalization group

method. In this paper, however, we simply assume the following  $G_s(\Phi)$  that preserves chiral symmetry, charge conjugate symmetry and extended  $\mathbb{Z}_3$  symmetry [5]:

$$G_s(\Phi) = G_s[1 - \alpha_1 \Phi \Phi^* - \alpha_2 (\Phi^3 + \Phi^{*3})]. \quad (2)$$

The PNJL model with the entanglement vertex  $G_s(\Phi)$  is referred to as entanglement PNJL (EPNJL) model. The EPNJL model has entanglement interactions between  $\sigma$  and  $\Phi$  in addition to the covariant derivative in the original PNJL model. Figure 1 (b) shows the phase diagram of the EPNJL model at imaginary  $\mu_q$ . In this model, the two transitions coincide with each other as a consequence of the strong entanglement between  $\sigma$  and  $\Phi$ . Thus, the EPNJL model reproduces the LQCD results at imaginary  $\mu_q$ . Since the EPNJL model is constructed so as to reproduce LQCD data at imaginary  $\mu_q$ , the validity of the model is confirmed for isospin chemical potential where LQCD data are available. As shown in Fig. 3 (a), the EPNJL model also reproduces the LQCD results at isospin chemical potential. Finally we predict the phase diagram in the whole  $\mu_q^2 - T$  plane by using the EPNJL model in Fig. 3 (b). Location of the critical end piont (CEP) moves to lower  $\mu_q$  in the EPNJL model than that in the PNJL model.

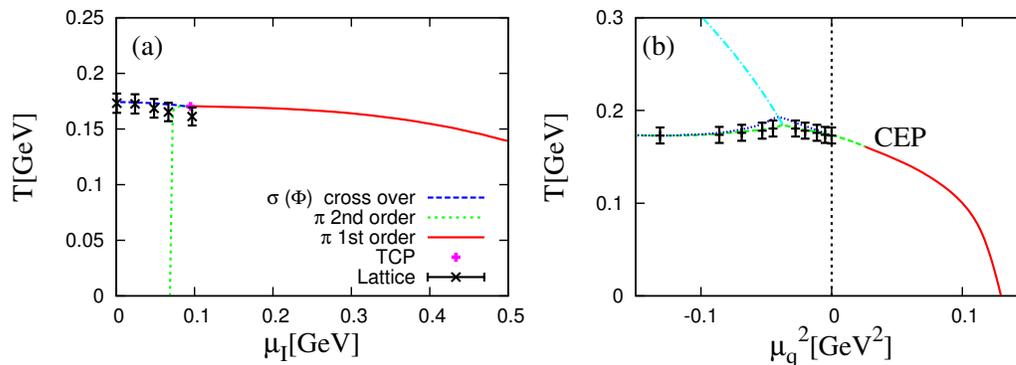


Figure 3: (a) Phase diagram at isospin chemical potential by the EPNJL model. LQCD data are taken from Ref. [3]. (b) Phase diagram in the  $\mu_q^2 - T$  plane in the EPNJL model. The left (right) half-plane corresponds to imaginary (real)  $\mu_q$ . Lattice data are taken from Ref. [2].

## References

- [1] S. Borsányi, et., al. arXiv:1005.3508 [hep-lat] (2010).
- [2] P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. **B642**, 290 (2002).
- [3] J. B. Kogut, and D. K. Sinclair, Phys. Rev. D **70**, 094501 (2004).
- [4] S. Rößner, C. Ratti, and W. Weise, Phys. Rev. D **75**, 034007 (2007).
- [5] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **82**, 076003 (2010).
- [6] K.-I. Kondo, Phys. Rev. D **82**, 065024 (2010).

# 非平衡 Thermo Field Dynamics による量子輸送方程式

中村祐介, 山中由也 早大基幹理工電子光システム

## 1 諸言

本稿では非平衡現象を記述する熱場の量子論の1つである非平衡 Thermo Field Dynamics (TFD) [1] をレビューする。実時間正準場の理論形式である TFD は、自由度を倍加することによって熱的な混合状態期待値を純粋状態期待値 (熱的真空の期待値) で表現する形式である。その際、熱的真空を消去する生成消滅演算子  $\xi$  と、もともとの生成消滅演算子  $a$  を結ぶ変換 (熱的 Bogoliubov 変換) には2個のパラメータ自由度がある。平衡系では全ての物理量がこれらの自由度に依存しないことが示されている [2] が、非平衡ではこれらのパラメータの選択が重要な役割を担う。実際、マクロな量に対する熱的な因果律、即ち時間の矢の向きに現象を記述する要請より、これらのパラメータが決定される。

実時間熱場の量子論の有力な手法である Closed time path 法 (Schwinger-Keldysh 法, CTP 法) [3] と TFD にはいくつかの共通点がある。それは、Heisenberg 描像における Heisenberg 方程式を微視的力学法則として出発していること、 $2 \times 2$ -行列伝搬関数を用いること、相互作用描像で Feynman 図法を確立し Dyson 方程式が成立する、などである。平衡系では TFD と CTP 法の両者は等価な理論であるが [4]、非平衡系においては上記の共通点があるにも拘わらず、本稿でも述べるように現時点で2つは異なった手法であることを強調しておく。

本稿は以下の様に構成される。第2章では平衡 TFD の導入を行う。TFD の特色である「自由度の倍加」という概念が自然に表れることを超演算子形式 [5] を用いて示す。また TFD の倍加された演算子 (チルダ演算子) が平衡系では CTP 法の Keldysh 経路の復路の演算子と対応付けられ、TFD と CTP の同等性が確認される。第3章では TFD を非平衡系へ拡張する。その際、非摂動粒子分布が「時間依存する」と「時間依存しない」の2つの理論展開が考えられる。通常 CTP 法では後者の定式化を採用し、非摂動粒子分布を見ずに、Heisenberg 粒子分布の時間発展を記述する方程式を導いている。一方 TFD では前者を採用し、非摂動粒子分布は時間依存する未知のパラメータとして導入する。そして摂動的に計算された伝搬関数に対し自己無撞着な繰り込み条件を課すことで、非摂動粒子分布に対する時間発展方程式を導出する形式である。この差が非平衡系における TFD と CTP 法の最も本質的な違いである。時間依存非摂動粒子を用いることは、各時刻でのマクロな粒子分布や粒子描像を取り込む計算法である。第4章では非平衡 TFD の応用例を紹介し、量子輸送方程式の数値計算結果を示す。第5章ではまとめと今後の展望を述べる。

なお全ての議論は fermion 系・多成分系に対しても同様に成り立つが、表記の簡単のため本稿では一成分 boson 系のみを扱う。

## 2 平衡 Thermo Field Dynamics

TFD は、真空の場の量子論の自由度を2重化し熱的な混合状態期待値を純粋状態期待値により表現することで、熱的な状況を記述する理論である。本章では平衡系においてこの2重化という概念がどのように自然に表れたのかを述べ、さらに CTP 法との対応を調べる。

### 2.1 超演算子形式と自由度倍加

非摂動ハミルトニアン  $H_0$  を対角化する生成消滅演算子  $a, a^\dagger$  で作られる Fock 空間を用いて、規格化された密度行列を以下で定義する：

$$\rho = (1-p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle\langle m|. \quad (1)$$

ここで表記の簡単の為、量子数の添字は省略している。 $p$  は熱平衡ならば Boltzmann 因子  $p = \exp(-\beta\omega)$  である。この密度行列のもとで熱的な期待値  $\langle A \rangle$  は  $\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho]$  で与えられる。

密度行列  $\rho$  に対して「左から演算子を作用する」と「右から演算子を作用する」の2種類の演算が存在することに注目し、超演算子形式 [5] を以下のように導入する：

$$\rho = |\rho\rangle\rangle, \quad A\rho = A|\rho\rangle\rangle, \quad \rho A^\dagger = \tilde{A}|\rho\rangle\rangle. \quad (2)$$

つまり  $\rho$  に対して左から  $A$  を作用させる超演算を  $A$ 、右から  $A^\dagger$  を作用させる超演算を  $\tilde{A}$  とする。 $\rho$  の具体形より  $(a - p\tilde{a}^\dagger)|\rho\rangle\rangle = 0$  が導かれる。またトレース演算に対応する超ブラを  $\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle$  とすると、トレースの循環性より  $\langle\langle 1|(a - \tilde{a}^\dagger) = 0$  が成立する。超演算子形式を用いると熱的期待値は  $\text{Tr}[A\rho] = \langle\langle 1|A|\rho\rangle\rangle$  と書き直すことが出来る。

このように導入された超演算子  $a, \tilde{a}$  が従う代数は

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (\text{otherwise}) = 0, \quad (3)$$

であることが導かれる。例えば非チルダ演算子とチルダ演算子が交換することは、任意の超ケット  $|R\rangle\rangle$  を用いて

$$[a, \tilde{a}]|R\rangle\rangle = (a\tilde{a} - \tilde{a}a)|R\rangle\rangle = a(Ra^\dagger) - (aR)a^\dagger = 0, \quad (4)$$

とすることで示される。また超演算子形式におけるハミルトニアンは  $H$  ではなく、 $\hat{H} = H - \tilde{H}$  であり、その起源は Liouville 方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho_s = [H, \rho_s] = H\rho_s - \rho_s H \quad \rightarrow \quad i \frac{d}{dt} |\rho_s\rangle\rangle = (H - \tilde{H})|\rho_s\rangle\rangle, \quad (5)$$

である。さらに超演算子の空間は倍加された Fock 空間に写像することが出来る [1]：

$$|\rho\rangle\rangle = (1-p) \sum_m p^m |m\rangle\langle m| \rightarrow (1-p) \sum_m p^m |m\rangle \otimes |m\rangle \equiv |0\rangle, \quad (6)$$

$$\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle \rightarrow \sum_m \langle m| \otimes \langle m| \equiv \langle 0|. \quad (7)$$

以上より、混合状態で与えられていた熱的な期待値が、倍加された Fock 空間の純粋状態期待値  $\langle 0|A|0\rangle$  で記述出来るようになった。 $\langle 0|$  と  $|0\rangle$  は熱的真空と呼ばれる。

## 2.2 熱的 Bogoliubov 変換

生成消滅演算子  $a$  はもちろん熱的真空を消去しない。TFD では熱的真空を消去する生成消滅演算子  $\xi$  を導入することが本質的である：

$$\xi|0\rangle = \tilde{\xi}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\xi^\dagger = \langle 0|\tilde{\xi}^\dagger = 0. \quad (8)$$

ただし  $[\xi, \xi^\dagger] = [\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger] = 1$  であり、それ以外は交換する。 $\xi$  の定義に際して、2個の任意パラメータが存在する。1つは熱的真空の定義の自由度から来る  $\alpha$  自由度である。式 (6), (7) の定義 ( $\alpha = 1$  としていた) ではケットが密度行列の情報を全て担っているが、トレースの循環性 ( $\text{Tr}[A\rho] = \text{Tr}[\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha]$ ) を使えば、密度行列の情報をケットだけではなく、ブラにも一部渡すことが出来る。もう1つは

スケール変換  $\xi \rightarrow c\xi$ ,  $\xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger/c$  に対応するパラメータ (下の  $s$ ) である。  $\xi$  演算子と  $a$  演算子を結ぶ変換 (熱的 Bogoliubov 変換) は

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu, \quad \bar{\xi}^\nu = \bar{a}^\mu B^{-1,\mu\nu}, \quad (9)$$

となる。ここで熱的 Bogoliubov 行列  $B$  は、一般に上で述べた 2 個の任意パラメータを含んで

$$B = \frac{e^{s\tau_3}}{\sqrt{1-p}} \begin{pmatrix} 1 & -p^\alpha \\ -p^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

ただし  $\tau_3$  は Pauli の第 3 行列である。また以下の 2 重項表現を用いた:

$$\xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^\dagger \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{\xi}^\nu = (\xi^\dagger \quad -\tilde{\xi})^\nu. \quad (11)$$

### 2.3 伝搬関数と Dyson 方程式

一般に熱場の量子論で Dyson 方程式が自動的に成立するわけではない。そのためには相互作用描像のもとで Dyson 展開、Feynman 図法が確立していなければならない。TFD では以下のようにして Dyson 方程式の成立が保証される。まずハミルトニアン  $\hat{H}$  を  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$  と非摂動と摂動部に分け、相互作用描像を定義する:

$$A(t) = \hat{U}(t, t_0) A_H(t) \hat{U}(t_0, t), \quad \hat{U}(t_1, t_2) = \text{T exp} \left( -i \int_{t_2}^{t_1} ds \hat{H}_{\text{int}} \right). \quad (12)$$

ここで添字 H の付いた演算子は Heisenberg 描像、無い演算子は相互作用描像のものである。また  $\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0$ ,  $\hat{H}_{\text{int}} = H_{\text{int}} - \tilde{H}_{\text{int}}$  とし、 $t_0$  を両描像の一致する時刻とした。

ある伝搬関数  $D(t_1, t_2) = -i \langle 0 | \text{T}[A_H(t_1) B_H(t_2)] | 0 \rangle$  を考える。相互作用描像の定義により

$$D(t_1, t_2) = -i \langle 0 | \hat{U}(t_0, \infty) \text{T}[A(t_1) B(t_2) \hat{S}] \hat{U}(-\infty, t_0) | 0 \rangle, \quad \hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty), \quad (13)$$

と書けるが、Dyson 展開が使える為にはこれが

$$D(t_1, t_2) = -i \langle 0 | \text{T}[A(t_1) B(t_2) \hat{S}] | 0 \rangle, \quad (14)$$

とならなければならない。真空の場の量子論では Gell-Mann-Low の公式により真空に作用する  $U$  を消したが、非平衡系において Gell-Mann-Low の公式が成立するのには自明ではない。CTP 法では Keldysh 経路上の時間を導入することにより、式 (14) に相当する形にまとめた。TFD では熱的 Bogoliubov 変換に付随する自由度を使ってこの問題を解決する [2]。まず  $t_0 = -\infty$  と選ぶことで、式 (13) を

$$D(t_1, t_2) = -i \langle 0 | \hat{S}^{-1} \text{T}[A(t_1) B(t_2) \hat{S}] | 0 \rangle, \quad (15)$$

と変形する。さらにここで  $\alpha = 1$  とすると

$$\langle 0 | (a - \bar{a}^\dagger) = 0, \quad (16)$$

より  $\langle 0 | \hat{H}_{\text{int}} = 0$  が成立し、式 (14) の形にまとめることができる。なお同じことは  $\alpha = 0$ ,  $t_0 = \infty$  という選び方でも達成される。さらに平衡系では  $p = e^{-\beta\omega}$  という具体形を使えば、任意の  $\alpha, s$  で Feynman 図法が利用可能であり、摂動の各次数で物理量がこれらの自由度に依存しないことを示すことができる [2]。

以後、 $\alpha = 1$ ,  $s = -\log \sqrt{1-p}$ ,  $t_0 = -\infty$  と選ぶ表現を「 $\alpha = 1$  表現」と呼ぶことにする。 $\alpha = 1$  表現では熱的 Bogoliubov 行列は

$$B = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

となる。ここで  $n$  は  $n = p/(1-p)$  であり、平衡系では Bose-Einstein 分布になっている。

## 2.4 平衡系における Closed time path 法との対応

CTP 法との関係を調べるために  $\alpha = 1$  表現のもとで  $A = \psi, B = \tilde{\psi}$  とし、式 (14) を次の様に変形する：

$$D(x_1, x_2) = -i \langle 0 | T[\psi(x_1) \tilde{\psi}(x_2) \hat{S}] | 0 \rangle \quad (18)$$

$$= -i \langle 0 | T[\tilde{\psi}(x_2) \tilde{S}] T[\psi(x_1) S] | 0 \rangle \quad (19)$$

$$= -i \langle 0 | \tilde{T}[\psi^\dagger(x_2) S] T[\psi(x_1) S] | 0 \rangle \quad (20)$$

$$= -i \langle U(-\infty, t_2) \psi^\dagger(x_2) U(t_2, \infty) U(\infty, t_1) \psi(x_1) U(t_1, -\infty) \rangle. \quad (21)$$

ただし 2 行目では非チルダ演算子とチルダ演算子が交換することを用いて  $\hat{S}$  を非チルダ部分  $S = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} ds H_{\text{int}}(s)\right)$  とチルダ部分  $\tilde{S} = T \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{H}_{\text{int}}(s)\right)$  に分けた。(次章で述べるように、非平衡系では非チルダ演算子とチルダ演算子が交換しなくなるので、この議論が使えなくなることを注意しておく。) 3 行目では式 (14) を繰り返し用いて、左側の T 積内のチルダ演算子を非チルダ演算子に書き換えた。その過程で T 積は時間逆順序積  $\tilde{T}$  に変わる。チルダ演算子がなくなったので、4 行目で熱的真空期待値をもとの熱的期待値に直した。式 (21) は CTP 法における Keldysh 経路を用いた伝搬関数

$$D(t_1, t_2) = -i \langle T_c[\psi(x_1^+) \psi^\dagger(x_2^-) S_c] \rangle, \quad (22)$$

そのものである。ここで上添字 + は変数が Keldysh 経路上の往路、- は復路にいることを示しており、 $T_c$  は Keldysh 経路上における時間順序積である。

## 2.5 伝搬関数の構造と Dyson 方程式

TFD における  $a$ -演算子、 $\xi$ -演算子に対する非摂動伝搬関数、全伝搬関数を以下のように定義する：

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T[a_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle, \quad (23)$$

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T[a_{\text{H}, \ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{\text{H}, \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle, \quad (24)$$

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T[\xi_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle, \quad (25)$$

$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T[\xi_{\text{H}, \ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{\text{H}, \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle. \quad (26)$$

相互作用描像における  $\xi$ -演算子は定義により熱的ブラ、ケットの両方を消去する [式 (8)] のに対して、 $\alpha = 1$  表現における Heisenberg 描像では熱的ケットのみを消去する：

$$\xi_{\text{H}} | 0 \rangle \neq 0, \quad \tilde{\xi}_{\text{H}} | 0 \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | \xi_{\text{H}}^\dagger = \langle 0 | \tilde{\xi}_{\text{H}}^\dagger = 0. \quad (27)$$

従って  $\xi$ -演算子に関する非摂動全般関数が

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \delta_{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} -i\theta(t_1 - t_2) & 0 \\ 0 & i\theta(t_2 - t_1) \end{pmatrix}^{\mu\nu} e^{-i\omega_{\ell_1}(t_1 - t_2)}, \quad (28)$$

と  $\mu\nu$  について対角行列になるのに対して、全伝搬関数は一般に上三角行列になる [ $g_{\ell_1 \ell_2}^{12}(t_1, t_2) \neq 0, g_{\ell_1 \ell_2}^{21}(t_1, t_2) = 0$ ]。熱的 Bogoliubov 変換 (9) より、 $a$ -演算子の全伝搬関数は

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2), \quad (29)$$

となる。 $G$  が上三角行列の相似変換で与えられるという点で、これは CTP 法における Keldysh 変換に良く似ているが、本質的には別の変換によるものである。TFD では上三角行列  $g$  と熱的 Bogoliubov 変換が先にあるのに対して、CTP 法では  $G$  に適当な相似変換を施すことによって上三角行列を得ている。

Dyson 方程式を通して、自己エネルギー  $\Sigma$  及び  $S$  が以下の様に定義される：

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 \Delta_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) \Sigma_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) G_{m_2 \ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2), \quad (30)$$

$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) S_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) g_{m_2 \ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2). \quad (31)$$

### 3 非平衡 Thermo Field Dynamics

ここまではトレース公式と Liouville 方程式の単なる数学的な書き換えとも言える。本章では TFD を分布関数の時間依存する非平衡系へと拡張する。ここで“分布関数”には非摂動分布関数  $n = \langle a^\dagger a \rangle$  と Heisenberg の粒子分布関数  $n_H = \langle a_H^\dagger a_H \rangle$  の2つを明確に区別しなければいけない。前者は平衡系ならば Bose-Einstein 分布であり、後者は相互作用の補正を受けた観測される分布である。

非平衡への拡張を試みる際に

- 時間依存する  $n(t)$  を考え、その時間依存性を自己無動着に決定する。 $n_H(t)$  は摂動計算を通じて  $n(t)$  を使って求める。
- 時間依存しない  $n$  を考え、 $n$  の現れない、 $n_H(t)$  に関して閉じた式を求める。 $n$  と  $n_H(t)$  の関係は明示しない。

という2つのアプローチが考えられる。通常 CTP 法では、(b) が採用されている。そして計算は摂動展開に頼らず、 $\Phi$  微分近似等を用いることで最終的に  $n_H(t)$  に関して閉じた量子輸送方程式を導いている。TFD でも、(b) を採用し、CTP と全く同じ結果を得ることが可能である。しかし、TFD では、(a) に基づく定式化が容易に可能で、そして  $n$  に対する量子輸送方程式が導出される。(a) に基づく TFD と (b) に基づく CTP の違いの認識が、本稿の主張である。以下 (a) に基づく TFD を解説する。

(b) では時間依存しない  $n$  (同じことであるが時間依存しない  $p$ ) を用いて密度行列を式 (1) とするが、(a) では非平衡系を記述する密度行列を以下の様に仮定する：

$$\rho(t) = (1 - p(t)) \sum_{m=0}^{\infty} p^m(t) |m, t\rangle \langle m, t|. \quad (32)$$

$p = n/(1+n)$  は平衡系では  $\exp(-\beta\omega)$  であったが、ここでは  $0 < p < 1$  を満たす時間依存する未知のパラメータとする。また  $|m, t\rangle$  は時間依存する粒子数状態であり、その厳密な定義は後で定める。式 (32) で密度行列の形が対角的としたことは、各瞬間毎に initial correlation がない状態を通っているという仮定、つまり各瞬間に initial correlation が切れる尺度で時間の粗視化を行っていることに対応する。

#### 3.1 非摂動ハミルトニアンと熱的真空

前章と同様の処方により自由度を倍加し、熱的 Bogoliubov 変換により  $\xi$ -演算子を導入する。ただし非平衡 TFD では  $n(t)$  は熱平衡分布ではなく非平衡分布であり、この時点では未知な時間依

存パラメータであることに注意する。非摂動ハミルトニアンを  $\hat{H}_Q(t)$  と書くことにすると、相互作用描像における  $a$ -演算子、 $\xi$ -演算子の Heisenberg 方程式はそれぞれ

$$i \frac{d}{dt} a_\ell^\mu(t) = [a_\ell^\mu(t), \hat{H}_Q(t)], \quad i \frac{d}{dt} \xi_\ell^\mu(t) = [\xi_\ell^\mu(t), \hat{H}_Q(t) + \hat{Q}(t)], \quad (33)$$

となる。ただし  $\hat{Q}(t)$  は熱的カウンター項と呼ばれ、その定義は

$$\hat{Q}(t) = -i \sum_\ell \bar{a}_\ell^\mu(t) [\dot{B}_\ell^{-1}(t) B_\ell(t)]^{\mu\nu} a_\ell^\nu(t), \quad (34)$$

である。非平衡分布関数  $n_\ell$  が時間依存していることが熱的カウンター項  $\hat{Q}(t)$  の起源である。

熱的真空が時間依存しないためには、非摂動ハミルトニアンが  $\xi$ -演算子について対角的になっていなくてはならない。従って非平衡 TFD における非摂動ハミルトニアンを

$$\hat{H}_Q(t) = \hat{H}_0 - \hat{Q}(t), \quad (35)$$

と選ぶ。ここで

$$\hat{H}_0 = \sum_\ell \omega_\ell \bar{a}_\ell^\mu(t) a_\ell^\mu(t) = \sum_\ell \omega_\ell \bar{\xi}_\ell^\mu(t) \xi_\ell^\mu(t), \quad (36)$$

である。Heisenberg 方程式 (33) より、 $\xi_\ell(t) = \xi_\ell e^{-i\omega_\ell t}$  と変数分離できるため、時間依存しない熱的真空が定義できる：

$$\xi_\ell(t)|0\rangle = \tilde{\xi}_\ell(t)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\xi_\ell^\dagger(t) = \langle 0|\tilde{\xi}_\ell^\dagger(t) = 0. \quad (37)$$

### 3.2 非平衡系における粒子描像

$a$ -演算子の粒子数状態  $|m, m', t\rangle$  を以下で定義する：

$$|m, m', t\rangle = \frac{1}{\sqrt{m! m'!}} [a^\dagger(t)]^m [\tilde{a}^\dagger(t)]^{m'} |0, 0, t\rangle. \quad (38)$$

ただし  $|0, 0, t\rangle$  は  $a(t)$  や  $\tilde{a}(t)$  で消去される真空。  $\alpha = 1$  表現における  $|m, m', t\rangle$  と熱的真空の関係は、式 (6) と同様

$$|0\rangle = (1 - p(t)) \sum_m p^m(t) |m, m, t\rangle, \quad \langle 0| = \sum_m \langle\langle m, m, t|, \quad (39)$$

で与えられる。  $a(t)$  は  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{a}^\dagger(t)$  と同時刻では交換するので、時間を固定すれば  $|m, m, t\rangle = |m, t\rangle \otimes |m, t\rangle$  と二つの Fock 空間の直積に分解することが出来る。ただし  $|m, t\rangle$  はこの Fock 空間内で閉じ時間発展をしないことに注意する。つまり

$$i \frac{d}{dt} |m, t\rangle = h(t) |m, t\rangle, \quad (40)$$

となる演算子  $h(t)$  は存在しない。これは熱的カウンター項  $\hat{Q}$  の存在により、非摂動ハミルトニアンが非チルダ演算子とチルダ演算子を混合するためである。一方、直積に分解する前の  $|m, m, t\rangle$  ならば閉じた時間発展をする。具体的には

$$i \frac{d}{dt} |m, m, t\rangle = \hat{Q} |m, m, t\rangle, \quad (41)$$

となっている。熱的真空期待値を  $|m, t\rangle$  の言葉で書くと

$$\langle 0|A[a(t), a^\dagger(t)]|0\rangle = \sum_m \langle m, t|\rho A[a(t), a^\dagger(t)]|m, t\rangle, \quad (42)$$

となる。ただし  $\rho$  は式 (32) で与えられるものである。すなわち、非平衡 TFD において物理量は  $\xi$  が消去する時間依存しない熱的真空の期待値として与えられるが、 $a$ -演算子の言葉で見直すと、それは密度行列と時間依存する粒子数状態  $|m, t\rangle$  を用いたトレース公式 (42) となっていた。倍加した空間では式 (41) により時間発展しているが、直積に分解された  $|m, t\rangle$  はその空間内で閉じた時間発展をしているわけではなかった。つまり各時刻毎に異なる粒子分布・粒子描像  $|m, t\rangle$  を渡り歩いていく形式となっている。言い換えると、非平衡 TFD の計算は、時間とともに変化する粒子数分布や粒子描像に応じて各時刻で適切な非摂動状態に基づいたものとなっている。

尚、非チルダ演算子とチルダ演算子を混合する熱的カウンター項  $\hat{Q}$  のため、平衡系の様に  $\hat{S}$  を非チルダ部分とチルダ部分との積に分解することが出来なくなる。このため非平衡 TFD では第 2.4 節で用いた議論が成立せず、Keldysh 経路との対応が失われる。

### 3.3 時間の矢の向きの因果律

熱的 Bogoliubov 変換には 2 個の任意パラメータ  $\alpha, s$  が存在するが、平衡系では全ての物理量はこれらの自由度には依存しないことが示せた。しかし非平衡系では物理量は  $\alpha, s$  に依存し、何らかの方法でこれらのパラメータを固定しなければならない。そこでまず  $\alpha, s$  自由度を残したまま、 $a$ -演算子の自由伝搬関数を具体的書き下す：

$$\Delta^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -ie^{-i\omega(t_1-t_2)} \left[ \theta(t_1 - t_2)R^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \theta(t_2 - t_1)A^{\mu\nu}(t_1, t_2) \right]. \quad (43)$$

ただし

$$R^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \frac{e^{-s(t_1)+s(t_2)}}{\sqrt{(1-p(t_1))(1-p(t_2))}} \begin{pmatrix} 1 & p^\alpha(t_2) \\ p^{1-\alpha}(t_1) & p^{1-\alpha}(t_1)p^\alpha(t_2) \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad (44)$$

$$A^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \frac{e^{-s(t_1)+s(t_2)}}{\sqrt{(1-p(t_1))(1-p(t_2))}} \begin{pmatrix} p^\alpha(t_1)p^{1-\alpha}(t_2) & p^\alpha(t_1) \\ p^{1-\alpha}(t_2) & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad (45)$$

である。ここで  $R^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は  $t_2 \rightarrow t_1$  へ、 $A^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は  $t_1 \rightarrow t_2$  への粒子の伝搬を示す係数で、粒子分布関数などのマクロ量の関数であるはずである。そこで、時間に関して  $R^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は  $t_2$  のみ、 $A^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は  $t_1$  にのみ依存せよ、という時間の矢に矛盾しない因果律を課す。この因果律の要請により自由度は  $\alpha = 1$   $s = -\log \sqrt{1-p}$ 、つまり  $\alpha = 1$  表現に固定される。

平衡 TFD では  $\alpha = 1$  と  $t_0 = -\infty$  と選ぶことにより、分布関数  $n$  の具体形に依らず Dyson 展開が使える形式となっていた。非平衡 TFD では新たに熱的カウンター項  $\hat{Q}$  が加わったために、摂動ハミルトニアンがブラ真空を消去することを再度確認しなくてはならない。 $\langle 0|\hat{H}_{\text{int}} = 0$  は既に示されているので、あとは  $\langle 0|\hat{Q} = 0$  を確認すればよい。 $\alpha = 1$  とし、 $s$  自由度を残したまま  $\hat{Q}$  を書き下すと

$$\hat{Q} = i \left( \dot{s} - \frac{1}{2} \frac{\dot{n}}{1+n} \right) (\xi^\dagger \xi + \tilde{\xi} \tilde{\xi}^\dagger) - i \dot{n} \xi^\dagger \tilde{\xi}^\dagger, \quad (46)$$

となる。これより  $\langle 0|\hat{Q} = 0$  が成立するためには  $s = -\log \sqrt{1-p}$  が必要であることが分かる。これは因果律の要請で固定された  $\alpha = 1$  表現に他ならない。 $\alpha = 1$  表現では非平衡系においても Dyson 展開が可能であることが示された。

尚、 $\alpha = 0$ ,  $s = \log \sqrt{1-p}$ ,  $t_0 = \infty$  とする  $\alpha = 0$  表現でも Dyson 展開が可能であることを同様にして示すことが出来る。さらに一般的な場合で Dyson 展開が可能な表現は  $a = 1$  表現か  $\alpha = 0$  表現の 2 つに限られることも分かる。 $\alpha = 0$  表現を採用すると、 $A^{\mu\nu}$  は  $t_2$  のみ、 $R^{\mu\nu}$  は  $t_1$  のみに依存する様になる。つまり未来の情報で過去が決まるという時間逆向きの世界が記述される。

時間可逆な場の量子論から出発して時間不可逆な熱現象を含む理論を導くには、どこかで時間反転不変性を破らなくてはならない。TFD では熱的な因果律の要請により  $\alpha = 1$  表現を選んだところで、時間の矢の向きが選択されている。

### 3.4 繰り込み条件と量子輸送方程式

既に述べた様に、非平衡 TFD では時間依存する未知パラメータである非平衡分布関数  $n(t)$  を自己無動着に決定しなくてはならない。そのための処方として Chu-Umezawa の繰り込み条件 [6]

$$g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = 0, \quad (47)$$

が提案されている。この自己無動着な繰り込み条件は最低次ではある種の on-shell 繰り込み条件であり、 $\dot{n}_\ell(t)$  に対する方程式、つまり量子輸送方程式を決定する条件になっている。これらのことを見ていくために、まず  $\xi$ -演算子に対する Dyson 方程式 (31) を  $g^{12}$  について解く：

$$g_{\ell_1\ell_2}^{12}(t_1, t_2) = \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 g_{\ell_1 m_1}^{11}(t_1, s_1) S_{m_1 m_2}^{12}(s_1, s_2) g_{m_2 \ell_2}^{22}(s_2, t_1). \quad (48)$$

右辺の全伝搬関数  $g^{11(22)}$  を非摂動伝搬関数  $d^{11(22)}$  に近似し議論を最低次に限れば、繰り込み条件 (47) は

$$g_{\ell\ell}^{12}(t, t) \simeq \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell m_1}^{11}(t, s_1) S_{m_1 m_2}^{12}(s_1, s_2) d_{m_2 \ell}^{22}(s_2, t) \quad (49)$$

$$= \int_{-\infty}^t ds_1 \int_{-\infty}^t ds_2 S_{\ell\ell}^{12}(s_1, s_2) e^{i\omega_\ell(s_1-s_2)}, \quad (50)$$

となる。さらに平衡系では

$$g_{\ell\ell}^{12}(t, t) = \int_{-\infty}^t ds S_{\ell\ell}^{12}(k_0) \Big|_{k_0=\omega_\ell}, \quad (51)$$

となる。ここで  $S(k_0)$  は  $S(t_1, t_2)$  の相対時間  $t_1 - t_2$  についての Fourier 変換である。 $n$  が平衡分布であることを用いれば、自己エネルギーの on-shell 非対角成分  $S_{\ell\ell}^{12}(k_0) \Big|_{k_0=\omega_\ell}$  は常に 0 であることが示される。つまり平衡系の最低次では Chu-Umezawa の繰り込み条件が自然に満たされている。

非平衡系では、摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_I$  は相互作用項  $\hat{H}_{\text{int}}$  と熱的カウンター項  $\hat{Q}$  の和である。従って最低次では自己エネルギーは相互作用部分  $S_{\text{int}}$  と熱的カウンター部分  $S_Q$  に分解できる。特に

$$S_{Q, \ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i\dot{n}_{\ell_1} \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta(t_1 - t_2) \delta_{\mu 1} \delta_{\nu 2}, \quad (52)$$

である。従って繰り込み条件 (47) 及び式 (50) より

$$\dot{n}_\ell(t) = 2\text{Im} \int_{-\infty}^t ds S_{\text{int}, \ell\ell}^{12}(t, s) e^{i\omega_\ell(t-s)}, \quad (53)$$

を得る。これが非平衡分布関数の時間発展を決める量子輸送方程式である。あとは摂動計算により自己エネルギー  $S^{12}$  を具体的に求めれば良い。右辺の時間積分も範囲から分かる通り、過去の分布にも依存する非 Markov 型の方程式である。また因果律が要請する  $\alpha = 1$  表現を採用したことにより、時間積分の上端は  $t$ 、つまり未来の分布に依らない形になる。もし  $\alpha = 0$  表現を採用していたならば、積分範囲は  $t$  から  $\infty$  になっていた。

## 4 応用例：捕捉された冷却原子気体

### 4.1 調和トラップに捕捉された Bose 気体

角振動数  $\Omega$  の調和トラップに捕捉された凝縮していない Bose 気体を考える。ハミルトニアンは

$$H = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} + \frac{U}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} g_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell_4} a_{\ell_1}^{\dagger} a_{\ell_2}^{\dagger} a_{\ell_3} a_{\ell_4}, \quad (54)$$

である。ただし  $\omega_{\ell} = \Omega(\ell + 1/2)$ 。自己エネルギーを摂動の 2 次で求め、式 (53) に代入し

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\ell}(t) = 4U^2 \int_{-\infty}^t ds \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} g_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}^2 \cos[(\omega_{\ell} - \omega_{\ell_1} - \omega_{\ell_2} + \omega_{\ell_3})(t - s)] \\ \times [n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3})(1 + n_{\ell}) - (1 + n_{\ell_1})(1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_{\ell}]_s, \end{aligned} \quad (55)$$

を得る。ここで右辺衝突積分の角括弧の添字  $s$  は、括弧内の  $n$  の時間引数が  $s$  であることを表している。これが非平衡 TFD で導出された量子輸送方程式である。見ている時間スケールの粗さより、メモリーの切れる時間が十分短いとして衝突積分において  $n(s) \rightarrow n(t)$  と置き換える (Markov 近似) と、式 (55) は

$$\dot{n}_{\ell}(t) = \frac{4\pi U^2}{\Omega} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} g_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}^2 \delta_{\ell_1 + \ell_2, \ell_3 + \ell} [n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3})(1 + n_{\ell}) - (1 + n_{\ell_1})(1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_{\ell}]_t, \quad (56)$$

となる。これはよく知られた量子 Boltzmann 方程式であり、TFD 以外の方法でも導出されているものである。

### 4.2 一次元二重井戸モデル

以下のハミルトニアンで記述される二重井戸モデルを考える：

$$H = -J \sum_{\ell} (a_{\ell L}^{\dagger} a_{\ell R} + a_{\ell R}^{\dagger} a_{\ell L}) + \sum_{\ell} \sum_{i=L,R} \omega_{\ell} a_{\ell i}^{\dagger} a_{\ell i} + \frac{U}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} g_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell_4} a_{\ell_1}^{\dagger} a_{\ell_2}^{\dagger} a_{\ell_3} a_{\ell_4} i. \quad (57)$$

ここで  $J$  は左右の井戸間のホッピング項であり、添字  $L, R$  で左右の井戸を区別している。 $t < 0$  までは  $J = 0$  とし、右井戸は空、左井戸に熱平衡の気体が存在するものとする。 $t = 0$  で瞬間的に有限の  $J$  を与え、左右の井戸を繋ぐことで非平衡状態を作る。この系に対する量子輸送方程式を数値的に解き、非平衡から平衡へと緩和する様を示したのが Fig. 1 である。非 Markov 型の輸送方程式では、平衡に近づいては遠ざかりと revival を伴いながら徐々に平衡へと緩和していくが、Markov 近似をするとその傾向は見られなくなる。なお扱う粒子数の数を増やすにつて、非 Markov 型でも revival は起きにくくなり Markov 近似の結果へと漸近する。

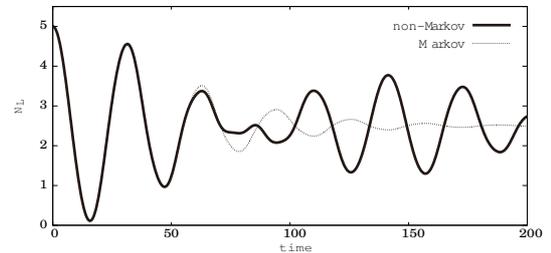


Fig. 1: 左井戸の粒子数  $N_L$  の時間変化。平衡分布ならば  $N_L = 5$  となる。太線は TFD で導出された非 Markov 型の量子輸送方程式、点線はそれを Markov 近似したものである。

## 5 まとめ

平衡系及び非平衡系に対する TFD のレビューを行った。まず超演算子形式から出発することで、TFD の特色である自由度倍加の概念が自然に導入されることを示した。平衡系では TFD は CTP 法と同等であり、チルダ演算子は Keldysh 経路上の復路の演算子と対応する。一方非平衡系ではこの対応関係が崩れる。これは、CTP 法では非平衡系でも初期時刻の非摂動分布関数  $n$  (当然時間依存しない) だけを導入しているのに対し、TFD では各時刻に最適な粒子分布・粒子描像に対応した時間依存する  $n$  に基づいて定式化されているためである。粒子分布・粒子描像の時間変化が大きくなるほど、具体的計算における TFD の長所が生かせることになる。 $n$  の時間依存性は自己無撞着 (繰り込み条件) に導かれる量子輸送方程式によって決定される。

明確に定義された粒子描像・真空の上で議論が行えることが、TFD の利点である。単純なモデルの最低次の計算では粒子描像の違いが与える影響は見え難いかもしれないが、より複雑なモデルでは粒子描像の選び方が本質的になってくる。例えば凝縮体のある冷却原子気体系 (自発的に対称性が破れた系) において、適切な準粒子描像に基づく場の量子論としては当然の寄与である 3 粒子生成・消滅の衝突項が現われ、特に凝縮体が不安定な時に重要な寄与を及ぼす [7]。しかし粒子描像に依らない、あるいは適切ではない粒子描像を用いた方法ではこの項は見落とされてしまう。さらにこの利点により非平衡系に対して第 3 章で議論したような、密度行列の形をどう仮定しているのか、 $a$ -演算子の粒子数状態がどのように時間依存しているのか、どこで時間反転不変性を破り時間の矢の向きを導入したか、などの重要だが他の理論では非自明な事柄をより明確に議論することが出来る形式になっている。

## 参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] T. S. Evans, I. Hardman, H. Umezawa, and Y. Yamanaka, *J. Math. Phys.* **33**, 370 (1992).
- [3] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1962); J. Rammer, *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007); 北 孝文, *物性研究* **90**, 1 (2008).
- [4] T. Arimitsu, *Physica* **148A**, 427 (1988).
- [5] M. Schmutz, *Z. Physik B* **30**, 97 (1978).
- [6] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys.* **A10**, 1693 (1995).
- [7] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010); Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *ibid.* **326**, 2070 (2011).

# 非平衡 Thermo Field Dynamics における 正準量子化に基づいた相対論的中性スカラー場

水谷友一, 稲垣知宏<sup>A</sup>, 中村祐介<sup>B</sup>, 山中由也<sup>B</sup>  
広大理, 広大総<sup>A</sup>, 早大基幹理工<sup>B</sup>

## 1 はじめに

熱非平衡現象に関わる量子論的な振る舞いは、熱的な状態と実時間の自由度を共に扱う事が出来る実時間形式の熱場の量子論によって記述される。さらに、素粒子論や宇宙論などにおいて興味を持たれている高エネルギー物理現象に関わる非平衡現象を扱うには、相対論的場によって理論を記述する必要がある。本研究では、実時間形式の場の量子論の一つである、Thermo Field Dynamics(TFD)を対象とした研究を行った。

TFDで摂動計算を厳密に定義するには、正準量子化に基づいて量子場を構築する必要があるが、非平衡 TFD (NETFD) における正準量子化に基づいた場の構築方法としては、非相対論的な場に対して H. Umezawa と Y. Yamanaka らによって提唱された方法が知られている [1]。さらに、NETFD における摂動の寄与に対して、自己無撞着なくこみ条件を課す事により、量子 Boltzmann 方程式が導出される事が示されている [2]。しかし、相対論的な場に対しては正準量子化に基づく場の構築方法は十分解っていなかった。そこで本研究では、H. Umezawa, Y. Yamanaka らが導入した方法に沿って相対論的中性スカラー場を記述し、また、自己無撞着なくこみ条件を応用する事によって量子 Boltzmann 方程式の導出を行った。本研究では、空間方向に一様な非平衡系を対象としている。尚、本稿は文献 [3] のレビューである。

## 2 正準量子化に基づいた中性スカラー場の記述

ここでは、NETFD をごく簡単に説明する。詳しい説明は、文献 [4] や中村氏のプロシーディングを参照して頂きたい。NETFD では、通常の場合の量子論で扱われる  $a$  振動子に加えて、チルダ振動子、 $\tilde{a}$ 、を導入する。この  $a$  振動子と  $\tilde{a}$  振動子は互いに独立な交換関係を満たす。また、 $a$  振動子のみで構成されたハミルトニアン、 $H$ 、と  $\tilde{a}$  振動子のみで構成されたハミルトニアン、 $\tilde{H}$ 、を用いて定義されたハットハミルトニアン、 $\hat{H} = H - \tilde{H}$ 、により場の時間発展が表される。このとき  $H$  と  $\tilde{H}$  は、チルダ共役則と呼ばれる関係によって互いに結びついている。さらに TFD では、振動子とチルダ振動子を 2 成分のベクトル表示で表した熱的二重項表現、 $a_p^\alpha(t) = (a_p(t) \tilde{a}_p^\dagger(t))$ 、 $\tilde{a}_p^\alpha(t) = (a_p^\dagger(t) - \tilde{a}_p(t))^T$ 、が用いられる。また、二重項表現で表した  $a$  振動子に対して以下のような熱的 Bogoliubov 変換、 $\xi_p^\alpha(t) = B(n_p(t))^{\alpha\beta} a_p^\beta(t)$ 、 $\tilde{\xi}_p^\alpha(t) = \tilde{a}_p^\beta(t) B^{-1}(n_p(t))^{\beta\alpha}$ 、を定義する事により、 $\xi$ 、 $\tilde{\xi}$ 、を新たに導入する。ここで、 $B(n_p(t))$  及び  $B^{-1}(n_p(t))$  は熱的 Bogoliubov 行列と呼ばれる熱的二重項表現にかかる行列である。熱的 Bogoliubov 変換の表現は無数に存在するが、本研究では NETFD の摂動計算にファイマン図を利用できる表現の中から、さらに摂動計算が因果律の要請を満たす表現を採用している。また、本研究で対象とする空間的に一様な非平衡系において、熱的 Bogoliubov 変換に現れたパラメータ、 $n_p(t)$ 、は運動量の大きさと実時間にのみ依存する関数として与えられる。この変換を受けた  $\xi$  振動子の張る真空状態、 $\xi_p|\theta\rangle = \tilde{\xi}_p|\theta\rangle = 0$ 、 $\langle\theta|\xi_p^\dagger = \langle\theta|\tilde{\xi}_p^\dagger = 0$ 、は熱的真空状態と呼ばれる。

H. Umezawa, Y. Yamanaka らによって提唱された正準量子化に基づく方法は、相互作用表示において熱的真空状態が時間に依存しないように構築される。このため、 $\xi$  振動子で展開された中性スカラー場、 $\phi_\xi$ 、及びその共役変数、 $\pi_\xi$ 、を以下のエルミートな場として導入する。

$$\phi_\xi^\alpha(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\xi_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3 \tilde{\xi}_p(t_x)^T)^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (1)$$

$$\pi_\xi^\alpha(x) \equiv (-i) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (\xi_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - (\tau_3 \tilde{\xi}_p(t_x)^T)^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2)$$

$$\bar{\phi}_\xi^\alpha(x) = \phi_\xi^\beta(x) \tau_3^{\beta\alpha}, \quad \bar{\pi}_\xi^\alpha(x) = \pi_\xi^\beta(x) \tau_3^{\beta\alpha}. \quad (3)$$

ここで、 $\tau_3^{\beta\alpha}$  は熱的二重項表現に作用するパウリの第3行列を意味する。また、 $\xi$  振動子の時間依存性は、相対論的なエネルギー固有値、 $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 、を用いて表される、 $\xi_p^\alpha(t_x) = \xi_p^\alpha e^{-i\omega_p t_x}$ 、 $\bar{\xi}_p^\alpha(t_x) = \bar{\xi}_p^\alpha e^{i\omega_p t_x}$ 。この時、(1)-(3) 式の中性スカラー場は、同時刻交換関係、 $[\bar{\phi}_\xi^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\xi^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}$ 、を満たす。

a 振動子の時間依存性を表すエネルギー固有値は、先に導入した  $\xi$  振動子が満たす時間発展方程式に熱的 Bogoliubov 変換を課す事により得られる a 振動子に対する運動方程式から求められる。その結果、a 振動子のエネルギー固有値は、相対論的なエネルギー固有値、 $\omega_p$ 、に加えて熱的 Bogoliubov パラメータの時間微分項、 $\dot{n}_p(t)$ 、を含む、 $\Omega_p^{\alpha\beta}(t_x) \equiv \omega_p \delta^{\alpha\beta} - i\dot{n}_p(t_x)T_0^{\alpha\beta}$ 、によって記述される。ただし、 $T_0^{\alpha\beta}$  は熱的二重項表現に作用する行列、 $T_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 、である。このエネルギー固有値、 $\Omega_p^{\alpha\beta}(t)$ 、を用いて、中性スカラー場の正振動項、負振動項に対応する振動子、 $a_p^\alpha(t)$ 、 $\bar{a}_p^\alpha(t)$ 、は以下のように表される。

$$a_p^\alpha(t_x) = \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \Omega_p(t_s)\right\}^{\alpha\beta} a_p^\beta, \quad \bar{a}_p^\alpha(t_x) = \bar{a}_p^\beta \exp\left\{i \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \Omega_p(t_s)\right\}^{\beta\alpha}. \quad (4)$$

(4) 式で表される a 振動子は、正振動項、負振動項共に同じエネルギー固有値に依存しているため、以下のように中性スカラー場を記述する事が出来る。

$$\phi_a^\alpha(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{a_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3 \bar{a}_p(t_x))^T{}^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}, \quad (5)$$

$$\pi_a^\alpha(x) \equiv (-i) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \{a_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - (\tau_3 \bar{a}_p(t_x))^T{}^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}, \quad (6)$$

$$\bar{\phi}_a^\alpha(x) = \phi_a^\beta(x) \tau_3^{\beta\alpha}, \quad \bar{\pi}_a^\alpha(x) = \pi_a^\beta(x) \tau_3^{\beta\alpha}. \quad (7)$$

ここで定義された a 振動子の張る中性スカラー場も同時刻交換関係、 $[\bar{\phi}_a^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_a^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}$ 、を満たす。a 振動子の張る中性スカラー場に対する非摂動ハットハミルトニアン、 $\hat{H}_Q(t)$ 、は、エネルギー固有値、 $\Omega_p^{\alpha\beta}(t)$ 、に熱的 Bogoliubov パラメータの時間微分項、 $\dot{n}_p(t)$ 、が入っている事から、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{H}_Q = & \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \bar{\pi}_a^\alpha(x) \left( 1 - i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0 \right)^{\alpha\beta} \pi_a^\beta(x) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a^\alpha(x) \left( 1 - i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0 \right)^{\alpha\beta} (-\nabla_x^2 + m^2) \phi_a^\beta(x) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

非摂動ハミルトニアン、 $\hat{H}_Q$ 、において、 $\dot{n}(t) = 0$ 、を課した式は、有限温度系における中性スカラー場、 $\phi_a^\alpha(x)$ 、の非摂動ハミルトニアン、 $\hat{H}_0$ 、と一致する。ここで、非平衡系と有限温度系における非摂動ハミルトニアンの差を  $\hat{Q}$  と書くことにする、 $\hat{Q} = \hat{H}_0 - \hat{H}_Q$ 。

NETFD では、系の時間発展を記述するハミルトニアンは、有限温度系で与えられるハミルトニアンで定義される。有限温度系における非摂動ハミルトニアン、 $\hat{H}_0$ 、と相互作用ハミルトニアン、 $\hat{H}_{int}$ 、から成るハミルトニアンを NETFD で求められた非摂動ハミルトニアンで展開すると、

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_Q + \hat{H}_{int} + \hat{Q}, \quad (9)$$

と書く事が出来るため、NETFD における相互作用ハミルトニアンは、 $\hat{H}_I \equiv \hat{H}_{int} + \hat{Q}$ 、となる。ここで現れた  $\hat{Q}$  は熱的カウンター項と呼ばれ、このカウンター項からの摂動の寄与が、次章で説明する自己無撞着なくくりこみ条件に対するカウンター項として作用する。

### 3 自己無撞着なくくりこみ条件

この章では、空間的に等方な非平衡系でよく用いられる空間方向に対してフーリエ変換を課した t 表示によって伝播関数や量子補正項を記述する。TFD における自由伝播関数は、a 振動子で展開された場の積、

$\phi_a \bar{\phi}_a$ , に対する熱的真空期待値によって定義され, 以下のような行列構造を持つ量として表される.

$$D_0^{\alpha\beta}(t_x, t_y; \mathbf{p}) = B^{-1}(n_p(t_x))^{\alpha\gamma_1} D_{0,R}^{\gamma_1\gamma_2}(t_x - t_y; \mathbf{p}) B(n_p(t_y))^{\gamma_2\beta} + \{\tau_3 B(n_p(t_x))^T\}^{\alpha\gamma_1} D_{0,A}^{\gamma_1\gamma_2}(t_x - t_y; \mathbf{p}) \{B^{-1}(n_p(t_y))^T \tau_3\}^{\gamma_2\beta}. \quad (10)$$

ここで, 熱的 Bogoliubov 行列で挟まれた行列,  $D_{0,R(A)}^{\gamma_1\gamma_2}$ , はそれぞれ対角的な  $2 \times 2$  行列を成す.

NETFD において伝播関数への量子補正の寄与を評価すると, 一般的に熱的 Bogoliubov 行列で挟まれた行列,  $D_{H,R(A)}^{\gamma_1\gamma_2}$ , の非対角成分,  $D_{H,R}^{12}$ ,  $D_{H,A}^{21}$ , に摂動の寄与が現れ, これらの非対角成分は, 共に摂動の寄与を受けた  $\xi$  振動子の真空期待値,  $\langle \theta | \xi_H \tilde{\xi}_H | \theta \rangle$ , に対応している. ただし, 添え字 H はハイゼンベルグ表示を意味する. また, 先ほど相互作用ハミルトニアンに導入された熱的カウンター項,  $\hat{Q}$ , からの寄与もこれらの非対角成分に現れる. 文献 [2] において, 自己無撞着なくりこみ条件は, 外線の同時刻極限,  $t_x \rightarrow t_y$ , の下でこの非対角成分に現れた摂動の寄与を熱的カウンター項に取り込む事により定義されている. この時, 熱的カウンター項には, Bogoliubov パラメータの時間微分項,  $\dot{n}_p(t)$ , が含まれるため, このくりこみ条件より, Bogoliubov パラメータの時間発展方程式が得られる. また, このくりこみ条件は外線の同時刻極限の下で,  $\langle \theta | \xi_H(t) \tilde{\xi}_H(t) | \theta \rangle = 0$ , を課す事に対応しているため, 相対論的場に対しては, 熱的カウンター項に  $D_{H,R}^{12}$  と  $D_{H,A}^{21}$  をくりこむ条件式が, 自己無撞着なくりこみ条件に相当する. 相対論的な中性スカラー場に対する自己無撞着なくりこみ条件として,  $D_H^{12}$  に成り立つ条件式を  $2 \times 2$  行列の構造を持つ量子補正項,  $\Sigma^{\alpha\beta}$ , と伝播関数の各成分を用いて表すと, 以下のように書く事が出来る.

$$\dot{n}_p(t_x) = -2\omega_p \partial_{t_x} \left[ \lim_{t_x \rightarrow t_y} \int dt_{z_1} dt_{z_2} D_{0,R}^{11}(t_x - t_{z_1}; \mathbf{p}) \left\{ i\Sigma^{12}(t_{z_1}, t_{z_2}, \mathbf{p}) + n_p(t_{z_2}) i\Sigma_R(t_{z_1}, t_{z_2}, \mathbf{p}) - n_p(t_{z_1}) i\Sigma_A(t_{z_1}, t_{z_2}, \mathbf{p}) \right\} D_{0,R}^{22}(t_{z_2} - t_y; \mathbf{p}) \right]. \quad (11)$$

ここで,  $\Sigma_R \equiv \Sigma^{11} + \Sigma^{12}$ ,  $\Sigma_A \equiv \Sigma^{11} - \Sigma^{21}$ , をそれぞれ表している. 中性スカラー場のような電荷を持たない場に対しては, (11) 式によって  $D_{H,A}^{21}$  に対する自己無撞着なくりこみ条件も同時に満たされる. さらに, このくりこみ条件の下で, 摂動の低次では非摂動振動子に対する熱的 Bogoliubov パラメータは, 観測粒子数分布と一致する事が示されているため, (11) 式より量子 Boltzmann 方程式が得られる.

紙面の都合上割愛するが, 文献 [3] では, さらに 3 点や 4 点相互作用模型から得られる量子補正項に対して自己無撞着なくりこみ条件を課す事により, 量子 Boltzmann 方程式の導出を行っている.

ここでは, 空間的に等方な非平衡系を扱ったが, ポテンシャルの存在する空間で場を展開する事によって, 非等方な非平衡系を同様に扱える事が, 文献 [5, 6] で示されている. このような方法を応用して理論に非等方性を取り込む事が今後の課題である.

## 参考文献

- [1] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Advances in Physics* **37** (1988), 531.
- [2] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995), 1693.
- [3] Y. Mizutani, T. Inagaki, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, arXiv:1105.5952.
- [4] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics* (American Institute of Physics, New York, 1993).
- [5] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, Y. Yamanaka, *Ann. of Phys.* **325** (2010), 426.
- [6] Y. Nakamura, Y. Yamanaka, *Ann. of Phys.* **326** (2011), 1070.

# グルオンプラズマの非平衡発展について

筑波大学大学院数理物質科学研究科 八田佳孝

## 1 はじめに

RHIC や LHC の超相対論的重イオン衝突で生成される物質がいかにして熱平衡 (クォークグルオンプラズマ) に達するかを調べることは、初期宇宙の物理とも関連して興味深い。流体模型によると熱平衡に達する時間は非常に短いという示唆もあり、それを理論的に検証するのはチャレンジングである。本研究ではカラーグラス凝縮 (Color Glass Condensate) と 2 粒子既約形式を組み合わせて、重イオン衝突後の系の時間発展を記述する方程式を導く [1]。

## 2 カラーグラス描像での重イオン衝突

重イオン衝突の時間発展に適した座標系  $\tau = \sqrt{t^2 - (x^3)^2}$ 、 $\eta = \tanh^{-1} \frac{x^3}{t}$ 、 $x^i = (x^1, x^2)$  を導入しよう。カラーグラス [2] の考え方では、衝突前の 2 つの重イオンはそれぞれコヒーレントなグルオン場の衝撃波  $\mathcal{A}_i^{1,2} = \partial_i \rho^{1,2}$  で表される。ここで  $\rho^{1,2}$  は valence parton に由来するカラー電荷分布を表す。衝突により 2 つの衝撃波は非線形に絡み合い、前方光円錐  $\tau > 0$  の中でヤンミルズ方程式にしたがって時間発展する。便利なゲージ  $A^\tau = (x^- A^+ + x^+ A^-) / \tau = 0$  を選ぶと方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} \partial_\tau \left( \frac{1}{\tau} \partial_\tau A_\eta \right) + \frac{1}{\tau^2} D_i F_{i\eta} &= 0, \\ -\frac{1}{\tau} \partial_\tau (\tau \partial_\tau A_i) + \left( \frac{1}{\tau^2} D_\eta F_{\eta i} + D_j F_{ji} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

となり、これを  $\tau = 0$  での初期条件  $A_i = \mathcal{A}_i^1 + \mathcal{A}_i^2$ 、 $A_\eta = 0$  などのもとで解けばよい。方程式の解  $A$  を用いて様々な物理量を構成し、 $\rho$  の適当な分布関数を重みとして平均をとることによって観測量が得られる。

## 3 2 粒子既約形式

方程式 (1) はある種の観測量を計算するには有用であっても、それ自身では熱平衡化 (thermalization) を記述するものではない。後者を議論するためには古典場の周りの揺らぎを考慮することが必要になり、その強力な枠組みが 2 粒子既約形式 (2-particle irreducible formalism, 2PI) である。2PI 形式はゼロ温度、有限温度の幅広い問題に使われており、非平衡場の理論に応用された場合、自己無撞着で保存則を満たす発展方程式を得ることができる。その解は永年項を出さず、最終的に量子熱平衡分布 (Bose-Einstein 分布) へと収束する [3]。

具体的にヤンミルズ理論の 2PI 有効作用を見てみよう。

$$\Gamma[A, G] = S_{YM}[A] + \frac{i}{2} \text{tr} \ln G^{-1} + \frac{i}{2} \text{tr} G_0^{-1}[A]G + \Gamma_2[A, G]. \quad (2)$$

$A$  は古典場、 $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \langle T_C \{a_\alpha^a(x) a_\beta^b(y)\} \rangle$  は closed time path 上で定義された量子揺らぎ  $a$  のグリーン関数、 $\Gamma_2$  は 2PI な真空ダイアグラムの和である。 $A$  と  $G$  に対する方程式は作用の停留条件  $\frac{\delta\Gamma}{\delta A} = 0$ 、 $\frac{\delta\Gamma}{\delta G} = 0$  で与えられる。 $G$  の代わりに通常的时间軸で定義された関数  $\mathcal{F}$ 、 $\rho$  を使おう。

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{2} \langle \{a, a'\} \rangle + \frac{1}{2} (\theta_C(\tau - \tau') - \theta_C(\tau' - \tau)) \langle [a, a'] \rangle \\ &\equiv \mathcal{F} - \frac{i}{2} (\theta_C(\tau - \tau') - \theta_C(\tau' - \tau)) \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathcal{F}$  は statistical function と呼ばれ、1 粒子状態の占有状況を表す関数である。 $\rho$  は spectral function と呼ばれ、系にどのような状態が存在するかを表す。 $\Gamma_2$  を two-loop まで評価すると上記の停留条件は次のように書ける。 $(\rho$  に対する方程式は割愛する。)

$$\begin{aligned} &\left( \partial_\tau^2 A_I + \frac{1}{\tau} \partial_\tau A_I - \delta_{I\zeta} \frac{A_I}{\tau^2} - D_J F_{JI} \right)^a \\ &= g f_{abc} \left( D_{xI}^{be} \mathcal{F}_{JJ}^{ec}(x, y) + D_{xJ}^{be} (\mathcal{F}_{JI}^{ec}(x, y) - 2\mathcal{F}_{IJ}^{ec}(x, y)) \right)_{y=x} \\ &\quad + \frac{ig^2}{2} C_{ab,cd} \int_{\tau_0}^{\tau} d^4 y V_{lmn,LMN}^y \left[ \rho_{IL}^{bl}(x, y) \mathcal{F}_{JM}^{cm}(x, y) \mathcal{F}_{JN}^{dn}(x, y) \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{F}\rho\mathcal{F}) + (\mathcal{F}\mathcal{F}\rho) - \frac{1}{4}(\rho\rho\rho) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \partial_\tau^2 + \frac{1}{\tau} \partial_\tau - \frac{1}{\tau^2} \delta_{I\zeta} \right) \delta_{IJ} - (D^2 \delta_{IJ} - D_I D_J - 2ig F_{IJ}) \right]^{ab} \mathcal{F}_{JK}^{bc}(x, y) \\ &\quad + g^2 \left( C_{ad,be} \mathcal{F}_{IJ}^{de}(x, x) + \frac{1}{2} C_{ab,de} \mathcal{F}_{MM}^{de}(x, x) \delta_{IJ} \right) \mathcal{F}_{JK}^{bc}(x, y) \\ &= - \int_{\tau_0}^{\tau} d^4 z \Pi_\rho(x, z)_{IJ}^{ab} \mathcal{F}_{JK}^{bc}(z, y) + \int_{\tau_0}^{\tau'} d^4 z \Pi_{\mathcal{F}}(x, z)_{IJ}^{ab} \rho_{JK}^{bc}(z, y), \end{aligned} \quad (5)$$

。

$$\Pi_{\mathcal{F}}(x, y)_{IJ}^{ab} = \frac{1}{2} \vec{V}_{alm,ILM}^x \left( \mathcal{F}_{LL'}^{ll'} \mathcal{F}_{MM'}^{mm'} - \frac{1}{4} \rho_{LL'}^{ll'} \rho_{MM'}^{mm'} \right)_{xy} \overleftarrow{V}_{bl'm',JL'M'}^y, \quad (6)$$

$$\Pi_\rho(x, y)_{IJ}^{ab} = \frac{1}{2} \vec{V}_{alm,ILM}^x \left( \mathcal{F}_{LL'}^{ll'} \rho_{MM'}^{mm'} + \rho_{LL'}^{ll'} \mathcal{F}_{MM'}^{mm'} \right)_{xy} \overleftarrow{V}_{bl'm',JL'M'}^y. \quad (7)$$

ここで空間座標として  $(\eta, x^1, x^2)$  の代わりに  $x^I = (\zeta \equiv \tau\eta, x^1, x^2)$  を用いた。この変数変換により曲がった座標系の不便さを取り除くことができる。 $D = \partial - igA$  は古典場の共変微分であり、 $V$  は古典場によって変更を受けた位置表示のグルオン 3 点頂点である。(4) の左辺は (1) と同じものであり、右辺に量子揺らぎによる backreaction が現れている。

## 4 議論

上記の方程式に関していくつかコメントする。まず、 $A^\tau = 0$  ゲージの residual なゲージ変換、つまり  $\tau$  に依らないゲージ変換に対して上の方程式系は covariant に変換する。従ってゲージ変換後も方程式は同じ形をしている。一方で  $A^\tau = 0$  とは別のゲージへの変換を考えるとゲージ不変性は一般に損なわれる。これは 2PI 形式のよく知られた問題であるが、一般にゲージに依る部分は結合定数の高次であることが分かっているのでここではそれで妥協する。次に、方程式は  $A$  に対するカラーグラスの初期条件と、 $\mathcal{F}, \rho$  に対する初期条件を導くことで原理的に解くことができるが、実際には  $A$  が  $x^{1,2}$  に依存している場合技術的に非常に難しい。最初のステップとして空間的に一様な場合を考えるのは有用かもしれない。その場合の初期条件は論文 [1] を参照。

最後に、以前の仕事との関連を述べる。カラーグラスに基づいた熱平衡化の問題は Gelis, Venugopalan のグループが精力的に取り組んでいる [4]。そこでの方法はいわゆる classical statistical approximation に基づいており、格子上でヤンミルズ方程式を適当な揺らぎを入れて解くことで 2PI 作用をすべてのループ次数まで足しあげることができる。(我々の上記の方程式は 2-loop までしか入っていない。) 一方で、classical statistical approximation はループ展開の各次数で量子効果を無視している。例えば、(4) の最後の項  $-\frac{1}{4}\rho\rho\rho$  と (6) の第 2 項  $-\frac{1}{4}\rho\rho$  が無視される。つまり  $\mathcal{F}\mathcal{F}$  に対して  $\rho\rho$  を無視するという近似で、これは運動量が十分小さいところでのみ正当化される。例えば自由スカラー場の熱平衡では  $n(p)$  を温度  $T$  の Bose-Einstein 分布として

$$\mathcal{F}(t-t', p) = \frac{\cos(t-t')p}{p} \left( n(p) + \frac{1}{2} \right), \quad \rho(t-t', p) = \frac{\sin(t-t')p}{p}, \quad (8)$$

であり、 $\mathcal{F} \gg \rho$  であるためには  $p \ll T$  が必要である。(  $t-t'$  に関する振動も考慮に入れなければいけない。) このために、classical statistical approximation では Bose-Einstein 分布を実現することができない。代わりに得られる平衡分布は Rayleigh-Jeans 則を変更したもの

$$n(p) = \frac{T}{p} - \frac{1}{2}, \quad (9)$$

である。一方で 2PI 形式では、熱平衡分布が Bose-Einstein 分布になることが保障されている。このことの重要性は、Bose-Einstein 分布の tail であるボルツマン分布 (指数分布) が重イオン衝突の顕著な実験事実であることから明らかである。将来的には 2 つのアプローチの良いところを併せ持った方法が望まれる。

### 参考文献

- [1] Y. Hatta and A. Nishiyama, arXiv:1108.0818 [hep-ph].
- [2] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian and R. Venugopalan, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, 463 (2010).
- [3] J. Berges, AIP Conf. Proc. **739**, 3 (2005).
- [4] K. Dusling, F. Gelis and R. Venugopalan, arXiv:1106.3927 [nucl-th].

# Kadanoff-Baym Approach to Thermalization of Gluonic Matter

Akihiro Nishiyama

*Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba,  
Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan*

October 9, 2011

## Abstract

We estimate kinetic equilibration time of gluonic matter (transverse modes) with Kadanoff-Baym equation. We include off-shell  $g \leftrightarrow gg$  particle number changing processes in 3+1 dimensional dynamics. We show that the gluonic matter approaches to kinetic equilibrium with time scale  $1/m$  with local transverse thermal mass  $m^2 = \frac{g^2 NT^2}{9} = (210\text{MeV})^2$  for  $g^2 = 1$ , color  $N = 3$  and  $T = 360\text{MeV}$ .

## 1 Introduction

Recently experiments of heavy ion collisions have been done to create and study Quark-Gluon Plasma (QGP) at RHIC and LHC. With respect to QGP nearly ideal hydrodynamics succeeds in describing dynamics after thermalization of Glasma. Its success is based on early thermalization of Glasma  $t_{\text{eq}} = 0.6 - 1.0\text{fm}/c$  [1]. This time scale is comparable with the formation time of partons [2], because of which, normal parton picture might fail to describe thermalization of Glasma. In fact thermalization time with Boltzmann equation with on-shell  $gg \leftrightarrow ggg$  is 2-3 fm/c [3], that is, on-shell approach predicts longer thermalization time. Thus new approaches beyond the on-shell parton picture are necessary to describe non-equilibrium dynamics of gluons.

As a candidate of approaches, we are trying to adopt non-equilibrium quantum field theoretical method, which is represented Kadanoff-Baym(KB) equation [4]. One of the merits of solving this equation is that KB equation satisfies conservation law of energy-momentum. Another merit is that we can trace time evolution of spectral function. Since it has decay width of partons, we can include off-shell  $g \leftrightarrow gg$  and  $g \leftrightarrow ggg$  processes in addition to on-shell  $gg \leftrightarrow gg$ . The off-shell processes have been neglected in normal on-shell approaches. They might play a significant role in describing early thermalization of gluons.

Our work is to describe thermalization of transverse modes of gluons in 3+1 dimensions. It is extension of our recent work in 2+1 dimensions [5], where it is shown that off-shell  $g \leftrightarrow gg$  processes contribute to entropy production in temporal axial gauge (TAG)  $A^0 = 0$ .

## 2 Kadanoff-Baym equation in TAG

In this section we write down KB equation for only transverse modes for polarization tensor to give numerical analyses in the next section. We assume vanishing classical field  $\langle A \rangle = 0$  and concentrate on only fluctuations (Green's functions). This means that we concentrate on dynamics after decoherence of classical field [2]. We also assume homogeneous and non-expanding system. We adopt the spatially Fourier transformed KB equations of the transverse part [5] which is simplified

in the momentum space as

$$[\partial_{x,0}^2 + \mathbf{k}^2 + \Pi_{\text{loc},T}(x^0)] F_T(x^0, y^0; \mathbf{k}) = \left\{ [\Pi_{F,T}\rho_T]_{t_0}^{y^0} - [\Pi_{\rho,T}F_T]_{t_0}^{x^0} \right\}, \quad (1a)$$

$$[\partial_{x,0}^2 + \mathbf{k}^2 + \Pi_{\text{loc},T}(x^0)] \rho_T(x^0, y^0; \mathbf{k}) = - [\Pi_{\rho,T}\rho_T]_{y^0}^{x^0}, \quad (1b)$$

where  $t_0$  is initial time and we have introduced a short-hand notation,  $[AB]_{t_1}^{t_2} \equiv \int_{t_1}^{t_2} dz^0 A(x^0, z^0; \mathbf{k}) B(z^0, y^0; \mathbf{k})$ . In this work we only trace the transverse (subscript 'T') dynamics of color isotropic Green's functions by use of projection tensor  $\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$  (We decouple longitudinal part in the equation by assuming infinite longitudinal self-energy  $\Pi_{\text{loc},L} \rightarrow \infty$ ), and here we define statistical function  $F_{ij}(x, y) \equiv \langle \{A_i(x), A_j(y)\} \rangle$  which contain information of distribution functions and spectral function  $\rho(x, y) \equiv i [A_i(x), A_j(y)]$  which contain information of dispersion relation, respectively. In addition  $\Pi_{\text{loc}}$  represents local part of leading order self-energy, which is replaced by mass squared  $m^2$  (Here self-consistency relation  $\Pi_{\text{loc}} \sim m^2$  is approximately satisfied by selecting initial conditions in the next section.) , while  $\Pi_{F,\rho}$  represents statistical and spectral part of leading order nonlocal self-energy which induces the mode-coupling between different wavenumbers (Fig. 1) and includes off-shell transverse  $g \leftrightarrow gg$  processes.

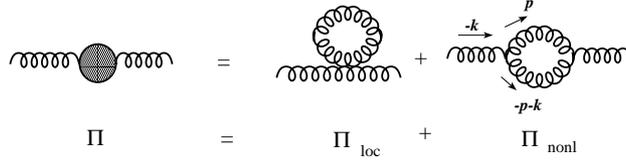


Figure 1: Leading order self-energy for gluons. Local (Center) and Non-local (Right) part.

### 3 Numerical analyses in 3+1 dimension

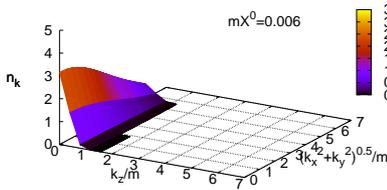


Figure 2: Initial distribution function

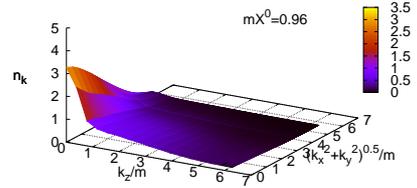


Figure 3: Late time distribution function at  $mt = 0.96$

In this section we show numerical evolution of statistical Green's functions. We prepare anisotropic distribution function in the transverse statistical function as

$$n_{\mathbf{k}}^0 = \frac{C}{\Delta_{\perp}^2 \Delta_z} \exp\left(-\frac{k_z^2}{2\Delta_z^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\Delta_{\perp}^2}\right) \quad (2)$$

with  $\Delta_{\perp}^2/m^2 = 10.0$ , anisotropic parameter  $x \equiv \Delta_{\perp}^2/\Delta_z^2 = 100$  and  $C = 10$ . This function has Gaussian peaks around  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , and the widths are different for  $k_z$  and  $k_x, k_y$  directions (Fig. 2).

This might be expected as a practical model of momentum distribution in mid-rapidity regions in heavy ion collisions. We shall set  $m^2$  to the thermal mass  $\frac{g^2 NT^2}{9}$  for transverse mode where  $T = 360\text{MeV}$ , so that  $m = 210\text{ MeV}$  at  $g^2 = 1$  and  $N = 3$ . Then the above initial condition corresponds to energy density  $12\text{GeV}/\text{fm}^3$  with  $\Delta_{\perp} \cong 660\text{MeV}$ .

Late time behavior of distribution function is described in Fig. 3. Isotropization and Convergence to Bose-Einstein distribution are realized in late time (Fig. 4). Time scale of kinetic equilibrium is  $t_{eq} \sim 1/m$  for transverse mode.

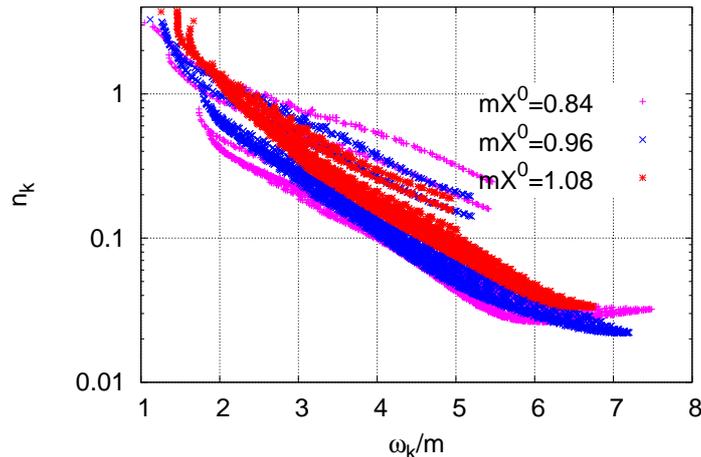


Figure 4: Logarithmic plot near kinetic equilibrium ( $mt = 0.84, 0.96$  and  $1.08$ ).

## 4 Summary

In this work we have solved the Kadanoff-Baym equation for the non-Abelian gauge theory in a spatially homogeneous and non-expanding 3+1 dimensional system in TAG. We have included nonlocal self-energy representing the process  $g \leftrightarrow gg$  for only transverse parts. Next anisotropic Gaussian distribution function is adopted as an initial condition. The local self-energy is set to reproduce infrared cutoff  $m^2$  ( $\Pi_{loc,T} \sim m^2$ ) and the total energy is set to be  $12\text{ GeV}/\text{fm}^3$ . Finally, the number distribution function approaches the Bose distribution. We find that the time scale of kinetic equilibrium is  $mt_{eq} \sim 1$  for  $g^2 = 1.0$  and  $N = 3$ .

## References

- [1] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Nucl. Phys. **A702** (2002), 269; U. W. Heinz, AIP Conf. Proc. **739** (2005), 163.
- [2] B. Muller and A. Schafer, Phys. Rev. C **73** (2006) 054905 [arXiv:hep-ph/0512100].
- [3] R. Baier, A. H. Mueller, D. Schiff and D. T. Son, Phys. Lett. B **502** (2001) 51 [arXiv:hep-ph/0009237].
- [4] L.P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1962); G. Baym, Phys. Rev. **127** (1962) 1391.
- [5] A. Nishiyama and A. Ohnishi, Prog. Theor. Phys. **125** (2011) 775. arXiv:1011.4750 [nucl-th].

## 散逸がある系での Schwinger 機構とグラズマの崩壊

二松学舎大学 国際政治経済学部 岩崎愛一

## 要旨

高エネルギー重イオン衝突直後に発生するカラー電場の Schwinger 機構による崩壊を議論する。対発生する粒子間の相互作用によるエネルギー散逸を考量し、電場エネルギーの散逸を明らかにする[1]。

高エネルギー重イオン衝突直後に発生するカラー電場、磁場（グラズマ）の崩壊でクォークグルーオンプラズマ（QGP）が生まれると考えられている。それは時間にして  $1\text{fm}/c$  以内である。その短い時間内で如何にして電場、磁場が崩壊するかを明らかにすることが課題である。グラズマの特徴として、電場、磁場が衝突軸方向に向いていること、また、それらが軸方向に一様であることがある。一様と言うことは、場の軸方向の運動量成分が非常に小さいと言うことである。QGP は、軸方向の運動量成分を持っているので、運動量成分のないグラズマの崩壊から、如何にしてその運動量が発生するかをも明らかにしなくてはならない。（以下で明らかのように、Schwinger 機構で対発生した粒子は、電場からの加速でその運動量成分を獲得する。）

ここでは、磁場を背景にした電場の崩壊を、Schwinger 機構で考えてみる。クォーク対発生である。簡単のため、通常電場、磁場を考え、クォークの代わりに電子、陽電子対発生を考える。この問題は Schwinger 機構として昔から考えられてきた（最近のレビュー[2]）。しかし、電場のみではなく磁場を背景とした Schwinger 機構は、重イオン衝突でそれが重要であることが認識される以前は、単に数学的関心であり、それほど詳細な研究は行われていない。特に、電場、磁場中で対発生する粒子が運ぶ電流による電場への影響（いわゆるバックリアクション）を考慮した研究はつい最近になってからである[2][3]。そこでは、対発生した電子、陽電子を自由粒子として扱い、その間の相互作用は考慮しない。それが一番簡単な取り扱いである。しかし、そうすると、電場は対発生で崩壊することはなく、いわゆるプラズマ振動することが知られている。それは、次のような理由である。

対発生した電子を加速した電場は、その加速のためエネルギーを失い次第に弱くなる。しかし、電場  $E$  がゼロになっても電流  $J$  は流れているため、電場はゼロのままではいられず、マクスウェル方程式（ $\partial_t E = -J$ ）に従い、はじめと逆向きの電場が成長する。するとその場は電流を減速する。ゆえに電流の運動エネルギーが、電場のエネルギーとなり電場は成長する。と同時に逆向きに加速された電子、陽電子対は対消滅をしてその数を減らしてゆく。もちろん電流も減少する。そしてついには、対発生した粒子がすべて対消滅してしまう。その結果、粒子のエネルギーはすべて電場のエネルギーとなる。粒子は消え、初めにあった電場と向きは逆で強さが同じ電場が残ることになる。そして、再び対発生がスタ

ートし、今度ははじめと逆向きに電流が流れ、電場は弱くなってゆく。という具合に同じ状況が繰り返されるのである。これがプラズマ振動と呼ばれているものである（図1）。

しかし、これではいつになっても電場は崩壊しない。そこで、対発生した粒子の電流が抵抗のためエネルギーを失う効果を取り入れる。すなわちエネルギー散逸を考量して、電場の崩壊を考える。対発生した電子、陽電子の相互作用を取り入れるのである。仮定として、対発生した電子、陽電子は速やかに熱平衡分布に達するとする。さて、電場の影響で、電子の分布は熱平衡から少しずれる。そのずれからの回復に要する緩和時間と呼ばれるパラメータを導入し、ボルツマン方程式を用いて、電気伝導率を熱平衡分布関数と緩和時間で表す。（この操作は、初等的な統計物理学の教科書にある。）電子、陽電子散乱の結果緩和するので、その散乱振幅で緩和時間は求まる。このようにして、電気伝導率は電子の散乱振幅で決まる。もちろん、強磁場中での散乱振幅を計算するのである。実際のグラズマでは、電場と磁場が同じ程度の大きさで十分強く、電子（クォーク）の質量を無視できるほどである。その場合は、主に最低ランダウ準位の状態が電場崩壊に効く[4]。それゆえ、最低ランダウ状態を用いて散乱を計算する。（面白いことに、低温では緩和時間は十分短く、仮定したように粒子が速やかに熱平衡に達する。このことは、温度ゼロの真空中で対発生する電子は、ゼロ温度のフェルミ分布になることが分かっており、有限温度であっても、十分温度が低いときには、すぐに平衡分布に達することが予想される。）結果を図2に表すと以下ようになる。エネルギー散逸の結果、プラズマ振動することなく、電場は消える。

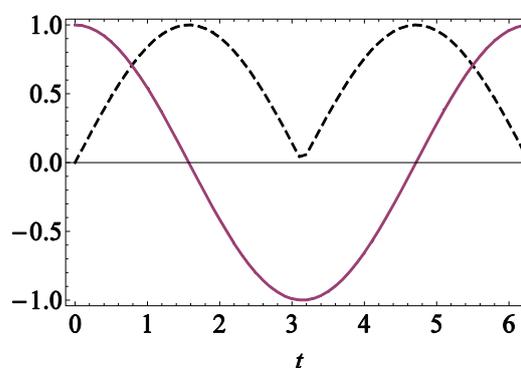


図1;エネルギー散逸が無い場合。電場 (line) と電子数密度(dash)

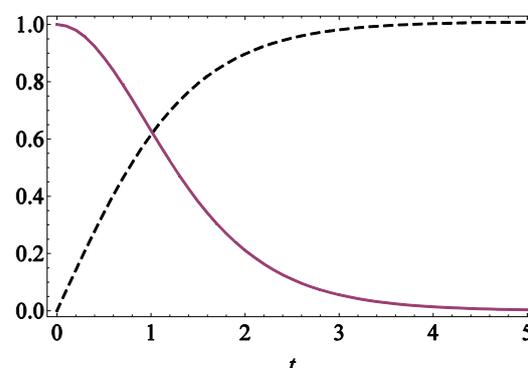


図2;エネルギー散逸のある場合。電場(line) と電子数密度(dash)

1. A. Iwazaki, hep-ph/1105.5188
2. N. Tanji, Annals Phys.324 (2009) 1691.
3. A. Iwazaki, Phys.Rev.C80 (2009) 052202.
4. Y. Hidaka, T. Iritani and H. Suganuma, hep-ph/1103.3097.

# ブースト不変に膨張する電場のもとでの Schwinger 機構

丹治直人 (KEK)

## 1 はじめに

高エネルギーの極限において、重イオン衝突の系はビーム軸方向のローレンツ・ブーストに対して近似的に不変であるとみなせる。衝突した2つの原子核は光円錐の上を走り、ローレンツ収縮により原子核のビーム軸方向の厚みが0になるため、ビーム軸方向のスケールが無くなるからである。1983年に Bjorken[1] が Landau の流体モデルにブースト不変な初期条件を導入して以来、この対称性は相対論的重イオン衝突の系の理論的記述において大きな役割を果たしてきた。

重イオン衝突直後の系の状態は完全には理解されていないが、QCD に基づき高エネルギーのハドロンを記述するカラーグラス凝縮の枠組みでは、衝突後の2つの原子核の間にビーム軸方向を向いたコヒーレントなカラー電場が生成されることが示されている。このカラー場の配位もまたビーム軸方向のローレンツ・ブーストに対して不変になっている。

それでは、ブースト不変な古典場で与えられる初期状態から時空発展して、どのようにしてクォーク、グルオンの粒子が生成されるのだろうか？そして、どのようにしてブースト不変に膨張するクォーク・グルオンプラズマの流体が実現するのであろうか？本研究では、前者の問題に焦点を当て、ブースト不変に膨張する古典的な電場のもとでの粒子生成のダイナミクスを Schwinger 機構として記述する。

## 2 $\tau$ - $\eta$ 座標上での場の量子化

ブースト不変に膨張する系を記述するには  $\tau$ - $\eta$  座標  $(\tau, \eta, \mathbf{x}_\perp)$  :

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right), \quad \mathbf{x}_\perp = (x, y). \quad (1)$$

を導入するのが便利である。ただし、ビーム軸を  $z$  軸方向にとっている。一方、Schwinger 機構による粒子生成を記述するためには場の量子化により粒子描像を導入する必要がある。そこで、まず  $\tau$ - $\eta$  座標上で場の量子化を行う。その際、座標系が曲がっているために、真空の定義、あるいは同じことだが粒子の定義に不定性が生じてしまう。通常の Cartesian 座標系では、時間に関する並進対称性に基づき、場の演算子をモード展開する際に現れる正振動数・負振動数の解をそれぞれ  $e^{-i\omega t}$  と  $e^{+i\omega t}$  に選べば良い。しかし、 $\tau$ - $\eta$  座標系においては計量が  $\tau$  に依存するために、自由場であっても正振動数・負振動数の解の選び方に任意性が生じてしまう。この不定性は以下の議論により取り除くことができる [2]。今、 $\tau$ - $\eta$  座標を用いているのは我々の記述の上での都合であり、物理的な

状態は我々が用いる座標系には依らない。従って、 $\tau$ - $\eta$  座標上で場を量子化して定義される真空は Cartesian 座標上で定義される真空と同じであるべきである。スカラー場の場合に、この要請を満たすように正振動数・負振動数の解を選んで、場の演算子をモード展開すると以下ようになる。

$$\phi(\tau, \eta, \mathbf{x}_\perp) = \int d\lambda d^2 p_\perp \left[ \chi_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}(\tau) a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda} + \chi_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}^*(\tau) b_{-\mathbf{p}_\perp, -\lambda}^\dagger \right] \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp + i\lambda\eta}. \quad (2)$$

ただし、正振動数の解  $\chi_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}(\tau)$  はハンケル関数を用いて

$$\chi_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} e^{\frac{\pi}{2}\lambda} H_{i\lambda}^{(2)}(m_\perp \tau) \quad (3)$$

と表される。ここで、場の演算子に対して正準交換関係を課して量子化を行えば、演算子  $a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}^\dagger$  と  $b_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}^\dagger$  はそれぞれ粒子、反粒子の生成演算子としての役割を獲得する。これらの  $\tau$ - $\eta$  座標上で定義された生成消滅演算子は、Cartesian 座標上で定義された生成消滅演算子  $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$  と次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{\sqrt{\omega_p}} e^{-i\lambda y_p} a_{\mathbf{p}}, \\ b_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{\sqrt{\omega_p}} e^{-i\lambda y_p} b_{\mathbf{p}}^\dagger. \end{aligned} \quad (4)$$

今、粒子と反粒子の生成消滅演算子は互いに混じり合っていないということが重要である。この事実によって  $\tau$ - $\eta$  座標上で  $a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}|0\rangle = b_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}|0\rangle = 0$  により定義した真空  $|0\rangle$  と Cartesian 座標上で  $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = b_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$  により定義した真空  $|0\rangle$  が同じになることが保証される。式 (4) を見ると、ブースト不変性を尊重した粒子モード  $a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}$  というのはさまざまな運動量を持った粒子状態の重ね合わせであることがわかる。

モード展開 (2) で  $\lambda$  は space-time rapidity  $\eta$  に共役な運動量変数として導入されたが、その物理的な意味は明白ではない。そこで、量子数  $\lambda$  を持つ一粒子状態に対しエネルギー・運動量テンソルの期待値を求めることで、 $\lambda$  の物理的な意味を調べると以下のことがわかる。 $\lambda/\tau$  という量は、速度  $v_z = z/t$  で動く系で観測した  $z$  軸方向の運動量である。同様の結果は古典力学の座標変換に基づく議論によって文献 [3] でも与えられているが、量子論に基づく演算子としての関係式 (4) はそれ以上の情報を含んでいる。すなわち、一粒子状態  $a_{\mathbf{p}_\perp, \lambda}^\dagger|0\rangle$  は前方光円錐内に広がった状態であり、運動量  $\lambda/\tau$  はあらゆる時空点  $\eta$  に同時に分配されているのである。

### 3 膨張系での Schwinger 機構

$\tau$ - $\eta$  座標上で場の量子化を行ってしまえば、前方光円錐内にのみ存在する電場からの Schwinger 機構による粒子生成は、電場が空間一様の場合 [4] と同様に記述することができる。一般には、ブースト不変な電場は  $\tau$  依存性を持ち得て、重イオン衝突の系では電場は  $\tau$  と共に減衰することが期待されるが、ここでは、膨張系での粒子生成のダイナミクスを明らかにすることに主眼を置いて、電場の強さが  $\eta$  だけでなく  $\tau$  にも依存しない定電場の場合の結果を示す。このような定電場のもとでは問題を解析的に解くことができる。

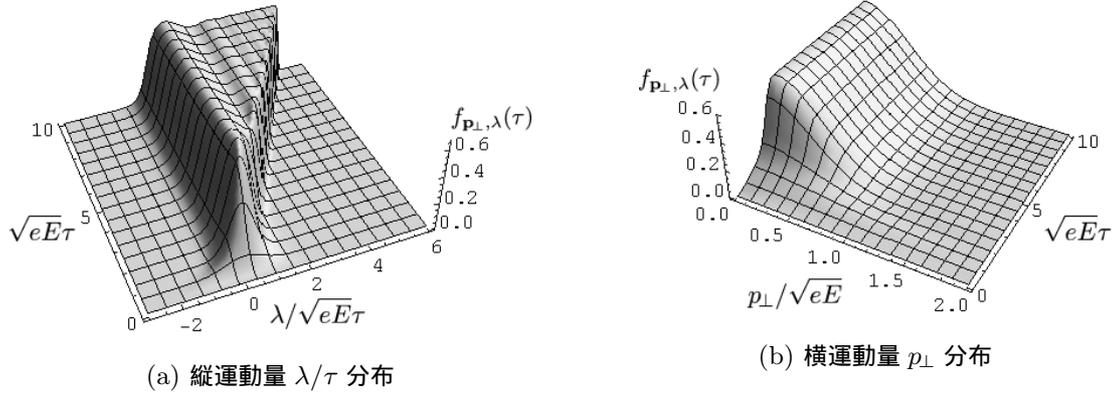


図 1 生成粒子の運動量分布の時間発展。 ( $m^2/2eE = 0.1$ )

図 1 に、

$$f_{\mathbf{p}_{\perp},\lambda}(\tau) = (2\pi)^3 \frac{dN}{d^2x_{\perp} d\eta d^2p_{\perp} d\lambda} = \langle 0, \text{in} | \mathbf{a}_{\mathbf{p}_{\perp},\lambda}^{\dagger}(\tau) \mathbf{a}_{\mathbf{p}_{\perp},\lambda}(\tau) | 0, \text{in} \rangle \frac{\tau(2\pi)^3}{V_{\eta}} \quad (5)$$

で定義される生成粒子の運動量分布の時間発展を示した。ただし、QED の場合の結果である。図 1(a) を見ると、縦運動量  $\lambda/\tau$  がおよそ 0 の粒子が生成され、その後、古典運動方程式  $\lambda = \frac{1}{2}eE\tau^2 + \text{const.}$  に従って加速されている様子がわかる。一方、横運動量  $p_{\perp}$  分布は Schwinger 機構に特徴的なガウシアン分布  $\exp\left\{-\frac{\pi(m^2+p_{\perp}^2)}{eE}\right\}$  を示している。これらの結果は、一見すると一様電場の場合 [4] と似ているが、縦方向（電場方向）のダイナミクスは全く異なっている。すでに議論したように縦運動量  $\lambda/\tau$  の物理的な意味が通常の運動量  $p_z$  とは異なるからである。 $\lambda/\tau$  は速度  $v_z = z/t$  で動く系で観測する運動量なので、 $\lambda/\tau$  が 0 の粒子が生成されるということは、重心系から見れば前方光円錐内の各点ではじめから速度分布  $v_z = z/t$  を持った粒子が生成されることを意味する。この速度分布は、粒子そのものの速度と流体の流速という違いはあるが、ブースト不変に膨張する流体 (Bjorken's flow) の速度分布と同じものである。

スケーリング分布  $v_z = z/t$  が現れること自体は、対称性の観点から見れば当然の結果であるが、今回の研究で明らかになった重要な点は、その速度分布が量子力学的状態として実現されているということである。古典的な記述では、別々な粒子が各点に分布して粒子全体として速度分布  $v_z = z/t$  が実現することとなるが、今の場合は、粒子は一粒子状態として前方光円錐内に広がっており、粒子一つ一つがそれぞれ速度分布  $v_z = z/t$  を成しているのである。このことの重要な帰結として、生成された粒子間に現れる非自明な相関があるが、詳細は文献 [5] に譲る。

## 参考文献

- [1] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D27**, 140 (1983).
- [2] C. M. Sommerfield, Ann. Phys. **84**, 285 (1974).
- [3] F. Cooper *et al.*, Phys. Rev. **D48**, 190 (1993).
- [4] N. Tanji, Ann. Phys. **324**, 1691 (2009).
- [5] N. Tanji, Phys. Rev. D **83**, 045011 (2011).

# 相対論的流体力学におけるオンサーガーの相反関係

南佑樹（京大理）、日高義将（理研）

平成 23 年 9 月 29 日

## 1 導入

相対論的流体力学は巨視的なスケールでの非平衡現象を記述する有効理論として宇宙物理、高エネルギー重イオン衝突実験の物理などで幅広く使われている [1, 2]。しかしながら、使われているのはもっぱら散逸（粘性や熱拡散）がない完全流体方程式である。散逸を含む相対論的流体方程式があまり使われない大きな理由の一つは、散逸過程をどのように取り込むべきなのか未だによく理解されていないということがある。相対論的な流体では、散逸過程の取り込み方によって因果律を破る、平衡状態が不安定になるなどの問題がおこる [3]。これらの問題を解決するために、これまでに様々な方法が提案され、様々な相対論的流体方程式が導出されてきた [1, 2, 4, 5]。しかしながら、どの方法、方程式による解決が正しいのか定かではなく、現状では多数の相対論的流体方程式が存在している [5, 6, 7]。

### 1.1 相対論的流体力学

いろいろな相対論的流体方程式が導出されているが、一般に次の保存則で与えられる。

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

ここで、 $N^\mu, T^{\mu\nu}$  は粒子流とエネルギー・運動量テンソルで一般に、次の様にかける

$$N^\mu = nu^\mu + \nu^\mu, \quad (3)$$

$$T^{\mu\nu} = hu^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}, \quad (4)$$

ここで  $n$ : 粒子数密度、 $e$ : エネルギー密度、 $h = e + P$ : エンタルピー密度、 $P$ : 圧力、 $u^\mu$ : 四元流速、 $\nu^\mu, \tau^{\mu\nu}$ : 散逸項。この散逸項が方程式によって違ってくる。例えば、ランダウ方程式 [6] の場合には

$$\nu^\mu = \lambda \left( \frac{nT}{h} \right)^2 \partial_\perp^\mu \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (5)$$

$$\tau^{\mu\nu} = \eta [\partial_\perp^\mu u^\nu + \partial_\perp^\nu u^\mu - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} (\partial_\perp \cdot u)] + \zeta \Delta^{\mu\nu} (\partial_\perp \cdot u), \quad (6)$$

ここで  $\Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ ,  $\partial_\perp^\mu \equiv \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$ 。また  $\mu$ : 化学ポテンシャル、 $T$ : 温度、 $\lambda$ : 熱伝導率、 $\eta$ : ずれ粘性率、 $\zeta$ : 体積粘性率。他に、エッカルト方程式 [7] では

$$\nu^\mu = 0, \quad (7)$$

$$\tau^{\mu\nu} = \eta [\partial_\perp^\mu u^\nu + \partial_\perp^\nu u^\mu - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} (\partial_\perp \cdot u)] + \zeta \Delta^{\mu\nu} (\partial_\perp \cdot u) + \lambda (u^\mu \partial_\perp^\nu T + u^\nu \partial_\perp^\mu T - T u^\mu (u \cdot \partial) u^\nu - T u^\nu (u \cdot \partial) u^\mu) \quad (8)$$

である。

このように方程式によって散逸項が異なっており、様々なものがある。しかし、“フレーム” という概念によって二つのタイプに大別することができる。流速を

$$u^\mu \propto u_\nu T^{\mu\nu} \quad (9)$$

とエネルギー流に比例するように選ぶ流儀をランダウフレーム、

$$u^\mu \propto N^\mu \quad (10)$$

と粒子流に比例するように選ぶ流儀をエッカルトフレームと呼ぶ。上述したランダウ方程式はランダウフレームに、エッカルト方程式はエッカルトフレー

ムに属している。このフレームは局所静止系の不定性に由来するものといわれており、二つのフレームによる違いは見かけだけのものに過ぎないと言われている。

しかし、実際には、このフレームによって音波の減衰率などの観測量が異なるということが指摘されている [8]。素直に考えれば、観測量が異なるということは、フレームの違いは見かけの違いではないということである。つまり、どちらかのフレームは何かおかしいのではないだろうか？

## 1.2 オンサーガーの相反関係

そこで、本研究ではどちらのフレームが正しいのか手がかりをつかむため、二つのフレームにおける流体方程式がオンサーガーの相反関係 [9] を満たしているのかを調べる。オンサーガーの相反関係は平衡状態からの揺らぎの緩和に対してなりたつ関係式である。この相反関係は平衡状態が時間反転不変であることを反映して現れるもので、相対論的流体方程式でも当然みたまなければならない。

ここでオンサーガーの相反関係がどのようなものか簡単に紹介する。まず、平衡状態からの線形揺らぎの緩和過程を考えよう。この過程は、一般に次のように書ける。

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}\right)_{\text{irr}} = -\sum_k L_{jk} \frac{\delta(\beta H)}{\delta A_k} \quad (11)$$

ここで  $A_j$  : 巨視変数、 $L_{jk}$  : オンサーガー係数、 $\beta$  : 逆温度、 $H$  : 熱力学ポテンシャル。さらに、左辺は巨視変数の不可逆変化を表している。流体の場合、巨視変数は  $A_j = \{n, e, \mathbf{v}\}$  で与えられる。このオンサーガー係数の添え字の入れ替えに対する関係式

$$L_{ji} = \epsilon_i \epsilon_j L_{ij} \quad (12)$$

をオンサーガーの相反関係と呼ぶ。ここで、 $\epsilon_i$  は  $A_i$  の時間反転性が even なら  $\epsilon_i = +1$ 、odd なら  $\epsilon_i = -1$  をとる。

## 2 相対論的流体方程式における相反関係

本研究はフレームについて知りたいので、ランダウフレームとエッカルトフレームの流体方程式が相反関係を満たすのか調べる。ランダウフレームは典型的な方程式、ランダウ方程式を調べる。一方、エッカルトフレームは典型的な方程式、エッカルト方程式が病的な不安定性をもっているため [3]、TKO 方程式をしらべる。

まず、相反関係は平衡状態からの線形揺らぎに対してなりたつので、ランダウ、TKO 方程式を平衡状態のまわりで線形化する。線形ランダウ方程式は

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v} + \lambda \left(\frac{n_0 T_0}{h_0}\right)^2 \nabla^2 \delta \left(\frac{\mu}{T}\right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -h_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v}, \quad (14)$$

$$h_0 \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(\delta P) + \eta \nabla^2 \delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}), \quad (15)$$

となる。ここで添え字  $\delta$  がついているものは揺らぎ、添え字  $0$  がついているものは平衡値である。また、 $\delta \mathbf{v}$  は三次元流速である。エッカルトフレームにおける TKO 方程式の場合、まず散逸項は

$$\nu^\mu = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu} = & \eta \left[ \partial_\perp^\mu u^\nu + \partial_\perp^\nu u^\mu - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} (\partial_\perp \cdot u) \right. \\ & \left. - \zeta' (3u^\mu u^\nu - \Delta^{\mu\nu}) (\partial_\perp \cdot u) \right. \\ & \left. + \lambda (u^\mu \partial_\perp^\nu T + u^\nu \partial_\perp^\mu T) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

で与えられる [5]。ここで、 $\zeta' = \zeta / (3\gamma - 4)^2$ 、 $\gamma$  : 比熱比。このとき、線形化すると

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -h_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v} + \lambda \nabla^2 \delta T + 3\zeta' \nabla \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \quad (19)$$

$$h_0 \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(\delta P) + \eta \nabla^2 \delta \mathbf{v} + \left(\zeta' + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \lambda \nabla \frac{\partial \delta T}{\partial t}, \quad (20)$$

となる。

次に、オンサーガー係数を読み取るために熱力学ポテンシャル  $H(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v})$  を考えよう。オンサーガー係数は不可逆変化と熱力学ポテンシャルの微分をつなぐ係数として定義されていることに注意。まず、巨視変数  $(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v})$  の時間反転性  $(+, +, -)$  から

$$H(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v}) = H(\delta n, \delta e) + H(\delta \mathbf{v}) \quad (21)$$

と分離できる。 $H(\delta n, \delta e)$  はグランドカノニカル分布の粗視化から

$$\begin{aligned} H(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v}) &= \int d\mathbf{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial e^2} \right) (\delta e(\mathbf{r}))^2 \right. \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 s}{\partial e \partial n} \right) (\delta e(\mathbf{r})) (\delta n(\mathbf{r})) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \right) (\delta n(\mathbf{r}))^2 \right] \end{aligned} \quad (22)$$

と一般に得ることができる [10]。ここで、 $s$ : エントロピー密度。 $H(\delta \mathbf{v})$  は他の変数と分離しているので

$$H(\delta \mathbf{v}) = \frac{A}{2} (\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}))^2 \quad (23)$$

とすればよい。ここで  $A$ : 定数。

この熱力学ポテンシャルに対してオンサーガー係数を読み取ると、線形ランダウ方程式 (13)-(15) 式の場合

$$L_{nn} = \lambda \left( \frac{n_0 T_0}{h_0} \right)^2 \nabla^2 \quad (24)$$

$$L_{vv}^{ij} = \frac{T_0 A^{-1}}{e_0 + P_0} [\delta_{ij} \partial_i \partial_j + (\zeta + \frac{1}{3} \eta) \partial_i \partial_j] \quad (25)$$

となる。その他の係数は 0。明らかに  $L_{vv}^{ij} = L_{vv}^{ji}$  で相反関係を満たす。これに対して、線形 TKO 方程式 (18)-(20) 式の場合、交差係数

$$L_{ev} = 3T_0 A^{-1} \zeta' \frac{\partial}{\partial t} \nabla \quad (26)$$

$$L_{ve} = \frac{T_0^2 \lambda}{e_0 + P_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \quad (27)$$

が現れて、相反関係を破る。エッカルト方程式でも、詳細は省略するが  $L_{ev} \neq L_{ve}$  となって相反関係をやぶる。

### 3 まとめ

本研究では相対論的流体方程式がオンサーガーの相反関係を満たしているのかを調べた。その結果、 $(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v})$  の時間反転性が  $(+, +, -)$  という仮定のもと、ランダウ方程式は相反関係を満たすが、エッカルトフレームの TKO 方程式とエッカルト方程式は破ることを示した。相反関係を破るという事は、状態の時間反転不変性か、変数の時間反転性のどちらかがおかしいということである (エッカルトフレームがそもそも間違えていないとすれば)。本研究では平衡状態への摂動を考えているので、状態は時間反転不変性をもっている。つまり、変数  $(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{v})$  が自然な時間反転性  $(+, +, -)$  をもっていないのであろう。

### 参考文献

- [1] R. Maartens, arXiv:astro-ph/9609119v1, and references therein.
- [2] D. H. Rischke, arXiv:nucl-th/9809044v1, and references therein.
- [3] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D **31** (1985), 725.
- [4] W. Israel, J.M.Stewart, Ann.Phys.(N.Y.) **118** (1979), 341
- [5] K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. B **646** (2007), 134.
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, New York, 1959)
- [7] C. Eckart, Phys. Rev. **58** (1940), 919.
- [8] Y. Minami and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122**, 881 (2010).
- [9] H. B. G. Casimir, Rev. Mod. Phys. **17**, 343 (1945).
- [10] A. Onuki, *Phase Transition Dynamics*, (Cambridge University Press, 2007).

# AdS/CFT 対応を用いた非線形電気伝導の系統的分析<sup>1</sup>

京都大学大学院理学研究科 中村 真

E-mail: nakamura@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

## Introduction

AdS/CFT 対応とは、あるクラスの強結合量子ゲージ理論を古典重力理論にマップする枠組みである。この対応を用いると、ゲージ理論側の非摂動的解析を重力理論により行うことが可能となり、QCD や物性系への応用の観点からも注目を浴びている。

AdS/CFT 対応は超弦理論の枠組みで規定されている。仮に超弦理論からの逸脱を許し現象論的に対応を構成する立場に立つと、超弦理論によるモデル構成の指導原理を失い、どこまでが仮定でどこからが予言なのか、慎重な見極めが必要となってくる。一方で超弦理論に準拠して構成する限り、対応が不定性なく大変自然に導かれるが、超弦理論からの制限がきつく、現実の QCD や物性系に等価な重力対応を得るには工夫を要する。このような状況の中で、超弦理論の指導原理を失わずに、同時に現実の系との接点を持つ応用対象として、非平衡系の物理学があるのではないかと筆者は考えている。

平衡状態の多粒子系の巨視的物理量の振る舞いは、個々の物質の微視的理論の詳細にはよらない統計物理学で記述される。あるいは局所熱平衡にある系の巨視的振る舞いを記述する流体方程式は個々の微粒子の微視的理論とは独立である。このように、多粒子・多自由度系の巨視的な振る舞いには微視的理論の詳細に左右されない規則性が存在すると期待でき、たとえ超弦理論の制限内で現実と異なる微視的理論から出発しても、現実の系と共通の巨視的性質を抽出できる可能性がある。言うまでもなく、平衡系や平衡に近い系の巨視的物理量の振る舞いに関しては既に多くの成果が確立している。そこで、AdS/CFT 対応が大いに活躍できる可能性として、筆者は平衡から離れた多粒子系の巨視的振る舞いについて注目している。

非平衡系は大きく二つに分類することが出来る。一つは時間に依存する系であり、もう一つは非平衡だが時間には依存しない非平衡定常系である。扱いやすさの観点から、まずは非平衡定常系の物理学について考えてみるのが定石であろう。非平衡定常系の代表的な例としては、定常電流の流れる系がある。この場合、定常電流により絶えずエントロピーや熱が生成されており、それらが外部環境（熱浴）に流出しバランスすることで定常状態が成立している。エントロピーや熱の生成があるという意味で、この系は非平衡系である。系に加える電場や流れる電流が微小な線形応答領域に関しては、電気伝導度などの輸送係数の計算は既に線形応答理論で与えられている。従って本稿では、線形応答領域を超えた、非線形領域における定常電流系に焦点を絞り、AdS/CFT 対応の応用可能性を探ってみたい。

微視的理論に左右されず広い範囲の系で成立する性質の代表例として、二次相転移における臨界現象がある。それでは、非平衡定常状態における相転移は存在するのであろうか。また二次相転移に対応するものが存在し、そこにはある程度普遍的な臨界現象が見られるだろうか。このような問いに答えるための試みとして、本研究では、非線形電気伝導を示す非平衡定常状態の振る舞いを、ある微視的理論に立脚して系統的に調べた。その結果、まだ予備的ながら、非平衡状態における相転移現象と見られる新奇な振る舞いを得ることが出来た [2]。(ここではこれを非平衡相転移と呼ぶことにする。) 以下、その概要を述べたい。

<sup>1</sup>本研究は科学研究費・挑戦的萌芽研究「AdS/CFT 対応による非平衡定常物理学への新アプローチ」(課題番号 23654132、研究代表者: 中村真) および科学研究費・新学術領域研究「多彩なフレーバーで探る新しいハドロン存在形態の包括的研究」(領域番号 2104、研究代表者: 飯嶋 徹) の補助を受けて行われた。

## AdS/CFT 対応の応用

AdS/CFT 対応は、もともと微視的理論を記述する枠組みである。例えば、特定の量子ゲージ理論のゲージ粒子数個の散乱振幅を重力理論で計算することが可能である。むしろ不思議なのは、重力側では条件次第でブラックホール解が現れ、そこに温度やエントロピーといった巨視的物理の概念が自然に現れ得ることである。重力理論の枠内では、どのようなメカニズムで微視的自由度の粗視化がなされているのだろうか。この問いに関する完全な回答はまだ得られていないように思われる。しかしながら、いったん AdS/CFT 対応と重力理論で起きる粗視化を認めると、巨視的物理量、特に保存量の量子論的かつ統計的期待値を重力理論側から比較的容易に計算することが可能となる。特に、もともと AdS/CFT 対応の成立には平衡の概念は必要とされていなかったため、平衡から離れた系でも、電流のような保存量の量子論的・統計的期待値を得ることが可能であると考えられている。またその計算においては線形応答を前提としない。一般に、AdS/CFT 対応では演算子の期待値を直接読み取ることが可能であり、例えば一定電場のもとでの電流期待値を、久保公式を経由せずに計算することが可能である。つまり、AdS/CFT 対応は、電気伝導度や系の振る舞いを非線形領域で調べる道具として、大変適しているように思われる。

## 具体的理論

ここでは、AdS/CFT 対応の成立が比較的詳細に調べられている「3+1 次元強結合 large- $N_c$   $SU(N_c)$   $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論に  $\mathcal{N} = 2$  ハイパー多重項を加えた理論」を扱うことにする。大雑把には、「 $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論」の部分は QCD のグルーオン自由度に、「 $\mathcal{N} = 2$  ハイパー多重項」はクォークの自由度に対応する。この理論は以下の特徴を持つ。

1. この理論は随伴表現の場（グルーオンとその superpartner）と基本表現・反基本表現の場（クォーク・反クォークとそれらの superpartner）の自由度を持つ。
2. この理論は AdS/CFT 対応を用いて保存電荷（ここではクォーク電荷）の非線形伝導度が計算可能な、最も単純な理論の一つである。
3. 有限温度においては、理論がもともと持っていた超対称性は破れている。
4. 非閉じ込め相ではグルーオン部分系の自由度がクォーク部分系の自由度の  $O(N_c)$  倍となるため、large- $N_c$  の極限で、グルーオン部分系はクォーク部分系に対する良い熱浴として振る舞い、電流が生成する熱を吸収する。このため、クォーク部分系は十分良い近似で定常状態として扱うことが可能となる。

本研究では、外部電場により生じる非線形電気伝導度を AdS/CFT の技術で計算した。より正確にはクォーク電荷に作用する外力を加え、その外力に対するクォーク電荷の電流の応答を、非線形領域において調べた。

AdS/CFT 対応を用いると、グルーオン系は 5 次元 AdS-Schwarzschild ブラックホール時空上の超重力理論として、クォーク系はその時空上の D7-brane の物理として表現される。この D7-brane 上には  $U(1)$  電磁場が存在し、クォーク電荷に対する外部電場と、それに共役なクォーク電流の情報を担う。電場と電流の関係、つまり電気伝導度は、この D7-brane 上の  $U(1)$  電磁場の振る舞いで決定されるが、それは電磁場の運動方程式、および D7-brane の on-shell 作用が複素数とならない条件、から決定される。これまでの解析から、この系は（あるパラメータ領域内で）Mott 絶縁体などの強相関絶縁体が絶縁破壊後に示すのと定性的に同様の負性微分抵抗を持つことが示された [1]。またこの負性微分抵抗の実現には、外部電場によるクォーク・反クォークの対生成が重要であることも示されている [1]。

今回の研究では、理論のパラメータの一つであるクォーク質量  $m_q$  (current quark mass) を変化させ (これは、質量を固定して、熱浴であるグルーオン系の温度  $T$  を変化させることにほぼ対応する) 系の電気伝導特性の移り変わりを詳細に調べた結果、図1のような振る舞いを得た [2]。具体的な数値データの例は図2に示されている。ここで注目すべきは、ある領域において、電流値を増やしていくと電圧値に「飛び」(ヒステリシス)が生ずることである。また温度を下げっていくとこの「飛び」が消えることも見てとれる。この飛びを「一次相転移」に対応づけるならば、ここで見られる変化は「一次相転移」が「クロスオーバー」に移行する過程であるとも言える。これらは電流が非ゼロの非平衡定常状態における振る舞いであり、筆者はこれを非平衡系における相転移 (あるいはクロスオーバー) として定式化できるのではないかと考えている。

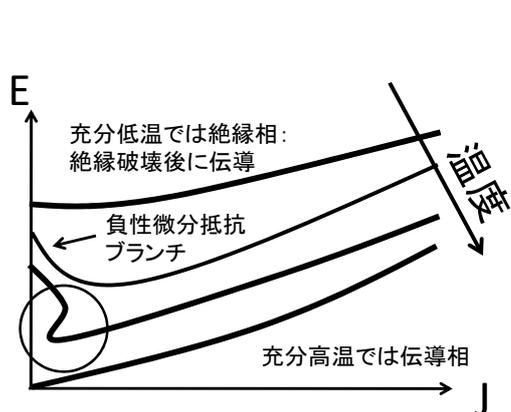


図1: 電流密度 ( $J$ )・電場 ( $E$ ) 特性の概略。丸で囲んだ領域に電場のヒステリシスが見られる。

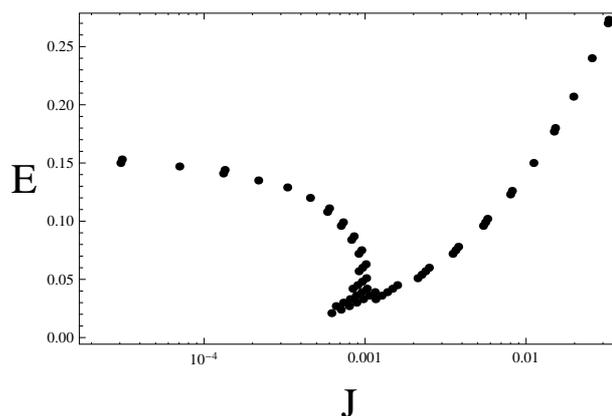


図2: 電流密度 ( $J$ )・電場 ( $E$ ) 特性の予備的な結果の一例。図1の丸で囲まれた領域を表示。単位は全て自然単位系を採用し、 $T = \sqrt{2}/\pi$ 、 $\lambda N_c = (2\pi)^4$  ( $\lambda$  は't Hooft 結合)、 $m_q = 1.3096$  を用いた。

## 考察および展望

ここで見られた物理量の「飛び」を「相転移」として正確に定式化するには、オーダーパラメータを正確に定義する必要があり、現在はこの作業を行っている [2]。また「一次相転移」と「クロスオーバー」の接点に「二次相転移」が存在するのか、その場合「臨界現象」が見られ、そこに「普遍性」が見られるのか、など数々の興味深い問いに関して、今後答えていく予定である。

このように AdS/CFT 対応は、平衡から離れた多自由度系の巨視的な振る舞いについて、少なくとも計算可能な枠組みの例を提供する。この枠組みを利用することで、従来の手法とは異なる新しい視点からの非平衡物理学の研究が可能となることを期待してやまない。そのためには非平衡物理学の専門家との意見交換が不可欠であると考えている。この記事を読まれて興味を持たれた方々は遠慮なくコンタクト頂ければ幸いです。

## 参考文献

- [1] S. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **124** (2010) 1105-1114. [arXiv:1006.4105 [hep-th]]. 他に関連論文もここで引用されているものを参照されたい。  
 [2] S. Nakamura, work in progress.

# Q-ball による chiral magnetic effect

理化学研究所 橋本数理物理学研究室 飯田英明\* †

Quark-gluon plasma 中での興味深い現象である chiral magnetic effect が、線形シグマ模型のソリトン解 Q-ball によって引き起こされる可能性を議論する。線形シグマ模型にカイラル量子異常の効果を取り入れた模型において、外部磁場が存在すると、Q-ball により磁場の方向に電流が流れることが分かる。このシナリオに特徴的な現象として、クォーク質量の効果により、大きな直流の他に小さな交流が流れることを示す。

## 1 はじめに

Chiral magnetic effect (CME) は、quark-gluon plasma (QGP) 中において、電流が磁場の方向に流れる現象である [1, 2]。実験的には、重イオン衝突実験において生成される磁場の方向への荷電粒子の放出異方性として観測され、RHIC においてこの現象が報告されている [3]。CME は、強い相互作用における局所的な CP 対称性の破れと関係し、カイラル量子異常の一つの現れであると考えられている [1, 2]。

我々はこの現象を、相転移現象の解析などに一般的によく使われる模型である線形シグマ模型を使って調べた [4]。線形シグマ模型に、カイラル量子異常によるメソンと 2 光子の結合を表す項を加える。このとき、線形シグマ模型のノントポロジカルなソリトンである Q-ball が存在すると、外部磁場の下で CME が起こることを示す。また、この模型では、クォーク質量の効果を検討すると、小さな交流が現れることが分かる。

## 2 カイラル量子異常を考慮した線形シグマ模型

最初に、カイラル量子異常の効果を検討した線形シグマ模型を構築する。スカラー中間子  $\Phi_{ij} = \bar{q}_R^j q_L^i$  で構成される、一般的な線形シグマ模型は以下のように与えられる：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \text{Tr}[\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - M(\Phi + \Phi^\dagger)] - V(\Phi \Phi^\dagger) + A(\det \Phi + \det \Phi^\dagger) \quad (1)$$

$M \propto \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$  の項はクォーク質量の効果を表し、 $A(\det \Phi + \det \Phi^\dagger)$  は  $U(1)_A$  の破れの効果を表す。カイラル量子異常により、 $\Phi$  の対角部分の中性擬スカラーメソンが 2 光子と結合するが、以下これらのメソンと  $\sigma$  のみを考え、 $\Phi = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \sigma e^{i\eta' T^0 + i\pi^0 T^3 + i\eta T^8}$  とする。

カイラル量子異常による  $\eta'$ 、 $\pi_0$ 、 $\eta$  と 2 光子との結合を取り入れるため、軸性カレントの微分が QCD のカイラル量子異常の関係式を満たすように次の項を付加する：

$$\mathcal{L}_{\not{A}} = \frac{3ie^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \sum_i q_i^2 (\log \Phi_i - \log \Phi_i^*) = \frac{3e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\mu A_\nu F_{\rho\sigma}, \quad P_\mu = \partial_\mu \text{Im} \left( \sum_i q_i^2 \log \Phi_i \right) \quad (2)$$

\*e-mail address: hiida@riken.jp

†この研究は、衛藤稔 (山形大)、橋本幸士 (理研)、三輪光嗣 (日大) との協同研究である。

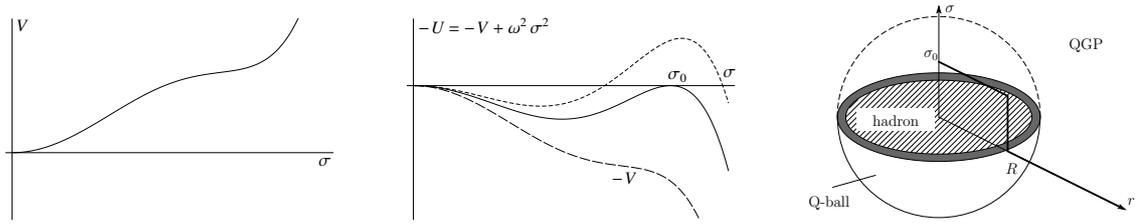


図 1: (左) ポテンシャル  $V(\sigma)$ 、(中)  $-U = -V + \omega^2 \sigma^2$ 、(右) large Q-charge limit での Q-ball 解

$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$  ( $\epsilon^{0123} = 1$ )、 $q_i$  はクォーク ( $u, d, s$ ) の電荷を表し、 $\text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$  である。この  $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$  は、外部電磁場が存在するとき、電磁場の源として働く。この付加的な相互作用により生まれるカレントは

$$\mathcal{J}^\mu = -\frac{3e^2}{4\pi^2} P_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} \quad (3)$$

となる。よって、 $P_0$  をノンゼロにするような  $\Phi$  に対する運動方程式の解が存在すると、外部磁場  $B^i$  の方向に平行な電流  $\mathcal{J}^i = \frac{3e^2}{4\pi^2} P_0 B^i$  が生まれる ( $\tilde{F}^{0i} = -B^i$ 。またここでは電場は考えない)。以下に見るように、実際そのような解は存在する。

### 3 Q-ball 解の存在と chiral magnetic effect

ここでは、前節の  $P_0$  がノンゼロになる Q-ball 解が存在し、chiral magnetic effect が起こることを示す。ここで扱うラグランジアンは以下である：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |\partial_\mu \Phi|^2 - V(|\Phi|^2) + h(\Phi + \Phi^*) - \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad \mathcal{J}^\mu = -\frac{3e^2}{4\pi^2} \tilde{F}^{\nu\mu} \partial_\nu \text{Im}(q^2 \log \Phi) \quad (4)$$

ここでは  $h$  を無視し、かつ電磁場からの back reaction も無視する。また、簡単のため 1 flavor の場合を考えている。 $V$  は一般に  $\sigma = 0$  に最小値を持つ図 1(左) のようなものを考える。運動方程式の解として  $\Phi = \sigma(r) e^{in'(t)}$ 、 $\eta'(t) = \omega t$  を仮定する。このとき、 $\sigma$  に対する運動方程式は

$$\sigma'' + \frac{2}{r} \sigma' - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \sigma} = 0, \quad U(\sigma) \equiv V(\sigma^2) - \omega^2 \sigma^2 \quad (5)$$

となる。プライムは  $r$  による微分を表す。この系は、 $r$  を時間、 $\sigma$  を位置と見なすと、ポテンシャル  $-U$  を持つ 1 次元系の古典力学と解釈できる。ここで  $(2/r)\sigma'$  は減衰力と見なせる。おおざっぱに言うと、Q-ball は  $-U(\sigma)$  の 2 つの極値を結ぶ解である (図 1(中) 参照)。Coleman は、 $\omega$  が  $\omega_0^2 < \omega^2 < \mu^2$  のとき、Q-ball 解が存在することを示した [5]。ただし  $\mu$  は  $\mu^2 = \partial V / \partial \sigma^2|_{\sigma=0}$  ( $\sigma = 0$  での  $V$  の曲率)、 $\omega_0$  は  $V$  により定まる定数であり、次の段落において説明する。この解はノントポロジカルなソリトン解であり、その存在はポテンシャルの詳細に依らない。

議論を分かりやすくするため、large Q-charge limit を考える。Q-charge は Q-ball の電荷を表し、今の場合軸性電荷である。このとき  $\sigma$  は平滑化された step function のようになる。そこで、ここでは  $\sigma = \text{const.} > 0 (r < R)$ 、 $\sigma = 0 (r > R)$  を仮定し、 $\Phi|_{r < R} = \sigma e^{i\omega t}$ 、 $\Phi|_{r > R} = 0$  とする (図 1(右))。Q-ball の体積が十分大きいので、表面の効果は無視する。すると、Q-ball のエネルギー  $E_0$ 、 $\omega_0$ 、および  $\sigma_0$  は  $E_0 = Q\omega_0$ 、 $\omega_0^2 = V'(\sigma_0^2)$ 、 $\omega_0 \sigma_0^2 = V(\sigma_0^2)$  で与えられる [4]。large Q-charge limit では、 $\omega_0, \sigma_0$  が  $Q$  と無関係に決まることを指摘しておく。

このような Q-ball 解が存在し、かつ外部磁場  $\vec{B}$  が存在すると、上記のラグランジアンより

$$\vec{J} = \frac{3e^2}{4\pi^2} q^2 \omega \vec{B} \quad (6)$$

が流れることが分かる。これは CME に他ならない。

## 4 Quark mass による交流の存在

前節では  $h$  の効果を見捨てたが、ここではこの効果を摂動として取り入れる。Q-ball は、 $U(1)_A$  を破る  $h(\Phi + \Phi^*)$  の存在により、安定ではなくなる。しかしながら、 $h$  が小さいときには、Q-ball は十分長く存在するであろう。このとき交流のカレントが発生することを示す。

$h$  により摂動的に解を構成する。 $\epsilon \equiv h/(\sigma_0 \omega_0^2)$  として  $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots$  と展開する。 $\Phi_0$  は Q-ball 解である。1 次の運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi_1 + \Phi_1 V'(|\Phi_0|^2) + \Phi_0 (\Phi_0^* \Phi_1 + \Phi_0 \Phi_1^*) V''(|\Phi_0|^2) - \sigma_0 \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

で与えられる。Q-ball 解を代入し解くと、 $\Phi_1|_{r < R} = \frac{3\alpha_1 - 1}{3\alpha_1 + 2} \sigma_0 + \frac{1}{3\alpha_1 + 2} \sigma_0 e^{2i\omega_0 t}$ 、 $\Phi_1|_{r > R} = \frac{\sigma_0 \omega_0^2}{V''(0)}$  を得る。また、 $\Phi_2$  についても具体的に解が求まる [4]。これらの解から Q-ball のエネルギー  $E$  を計算すると、1 次の摂動では  $E$  は変化しないことがわかる [4]。すなわち、 $\epsilon$  が十分小さいとき、エネルギーの変化は無視できる。よって、Q-ball はこの摂動に対し安定であると期待される。

これに対して、カレントには  $\epsilon$  の 1 次の補正が存在する。具体的には以下のようになる：

$$\vec{J} = \frac{3e^2}{4\pi^2} q^2 \vec{B} \omega_0 \left( 1 - \epsilon \frac{3\alpha_1 - 2}{3\alpha_1 + 2} \cos \omega_0 t + \dots \right) \quad (8)$$

これは、大きな直流の CME カレントに加え、小さな交流が流れることを示している。

## 5 まとめ

我々は、線形シグマ模型にカイラル量子異常の効果を取り入れた模型を用いて、外部磁場の下での chiral magnetic effect を調べた。その結果、線形シグマ模型に現れるノントポロジカルなソリトン解である Q-ball の存在により、CME が起こることを示した。また、クォーク質量の効果により、大きな CME カレントの他に、小さな交流が流れることを示した。

最後に、我々の議論は、線形シグマ模型という非常に一般的な模型を使っているという事、ポテンシャルの詳細には依らない議論であるということを強調しておく。

## 参考文献

- [1] D.E.Kharzeev, L.D.McLerran and H.J. Warringa, Nucl.Phys.A**803**, 227 (2008).
- [2] K. Fukushima, D.E.Kharzeev and H.J.Warringa, Phys. Rev. D**78**, 074033 (2008).
- [3] S.A. Voloshin [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A**830**, 377C (2009).
- [4] M.Eto, K.Hashimoto, H.Iida and A.Miwa, Phys.Rev.D**83**, 125033 (2011).
- [5] S.R.Coleman, Nucl.Phys. B**262**, 263 (1985) [Erratum-ibid. B**269**, 744 (1986)].

# Randall-Sundrum 時空上のゲージ-ヒッグス統合模型の 熱的相転移

幡中 久樹 (阪大理)

## 概要

余剰次元を用いてゲージ階層性問題を解決するシナリオである電弱ゲージ・Higgs 統合模型の有限温度の効果, とくに余剰次元を持つ時空が Randall-Sundrum 時空である場合について調べる. 具体的には Randall-Sundrum 時空上での  $SO(5) \times U(1)_X$  ゲージ・Higgs 統合模型に関して, 臨界温度とポテンシャル障壁の高さなどについて報告する. (背景や計算方法などについては 2010 年の報告 [1] も参照されたい.)

**計算** 温度  $T$  で余剰次元を持つ場の理論の 1 ループ有効ポテンシャルは (実スカラー場 1 つ分の自由度につき) 以下のように表される:

$$V(T) = \frac{(-1)^{2\eta}}{2} T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[ (2\pi T(m+\eta))^2 + p^2 + M_n^2 \right]. \quad (1)$$

ここで  $\eta = 0$  ( $\frac{1}{2}$ ) がボゾン (フェルミオン) ループに対して割り当てられる.  $m$  に関する和は松原形式に基づく (虚) 時間方向のモード和である.  $n$  に関する和は Kaluza-Klein モードに対する足し上げに対応する.  $M_n$  は Kaluza-Klein (KK) 質量である. この有効ポテンシャルはゼロ温度部分  $V(T=0)$  と有限温度の補正  $\Delta V(T)$  に分けられ, 有限温度の補正は有限であり,

$$\Delta V(T) = -\frac{(-1)^{2\eta} T^4}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_n \frac{(-1)^{2m\eta}}{m^4} (m|M_n|/T)^2 K_2(m|M_n|/T), \quad (2)$$

と与えられる ( $K_2(x)$  は第 2 種の修正ベッセル関数).

ここでは, 調査する模型として Randall-Sundrum 時空上の  $SO(5) \times U(1)_X$  ゲージ-Higgs 統合模型 [2] を取り上げる. バルクの  $AdS_5$  空間の計量は

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{dz^2}{k^2 z^2}, \quad 1 \leq z \leq kL, \quad (3)$$

で与えられ,  $k$  は AdS 曲率,  $L$  は長さの次元を持ち,  $z=1$  にある UV プレーンと  $z=kL$  にある IR プレーンの距離を表すパラメータである. この模型では W,Z ボゾンやクォーク・レプトンとその Kaluza-Klein 励起モードの質量は, Higgs 真空期待値の代わりに高次元ゲージ場の真空期待値から定義される Wilson-line 位相に依存する. ゼロ温度の有効ポテンシャルについては [3] を, KK モードについては [2] に掲げられたものを用いた.

図 1 では,  $z_L \equiv \exp(kL) = 10^{15}$  での W,Z,Higgs, トップクォークとその KK 励起状態のループによる 1 ループ有効ポテンシャルの Wilson-line 位相  $\theta_H$  への依存性を, 様々な温度について示した. 図 1(a) で, 低温では  $\theta_H = \pi/2, 3\pi/2$  でポテンシャルは最小となり, この場合ゲージ対称性は  $U(1)_{em}$  にまでこわれる. 高温では  $\theta_H = 0, \pi$  に最小値があり, この時は電弱対称性  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  が回復している. 図 1(b) より,  $z_L = 10^{15}$  では, 相転移温度は  $\tilde{T}_c \equiv T_c/(k/z_L) \simeq 0.5841$  で与えられることがわか

る。また、図 1 (b) から相転移温度でのポテンシャルは  $\theta_H \sim \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ , で縮退した最大値をとり,  $\theta_H = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  で縮退した最小値をとるので, 障壁の高さを  $V_{\text{barrier}} \equiv V(\theta_H = \pi/4) - V(\theta_H = 0)$  とできる。また、図 1 からわかるように, Wilson-line 位相の真空期待値は相転移温度以下ではゼロ温度の値と変わらず,  $\theta_H = \pi/2, 3\pi/2$  であるので, 相転移温度での Higgs 真空期待値の値を標準模型でのゼロ温度の値  $\varphi_c \simeq 246[\text{GeV}]$  にとることとする。

このモデルでは、フリーパラメータとなるのは余剰次元の形状に関する  $z_L$  だけであるので, 異なる  $z_L$  の値における臨界温度  $T_c$  と真空期待値との比  $\varphi_c/T_c$ 、ポテンシャル障壁の高さ  $V_{\text{barrier}}$  と臨界温度との比  $V_{\text{barrier}}^{1/4}/T_c$  について, 表 1 にまとめた。電弱バリオジェネシスを起こすに十分な一次相転移である条件 (あるいは, スファレロンによるバリオン数の流失 (washing-out) が抑制される条件 [4]) :

$$\varphi_c/T_c \gtrsim 1 \quad (4)$$

を満たすには  $z_L \lesssim 12.2$  を満たせばよいことがわかった。<sup>1</sup>障壁の高さは  $V_{\text{barrier}} \sim (0.2)^4 T_c^4$  であり,  $\varphi_c/T_c, V_{\text{barrier}}/T_c^4$  とともに, 平坦な余剰次元での結果 [5, 6, 7]:  $\varphi_c/T_c \gg 1, V_{\text{barrier}} \sim \mathcal{O}(1) \times T_c^4$  と比べると非常に低いことがわかった。

## 参考文献

- [1] 『Randall-Sundrum 時空における有限温度でのゲージ・ヒッグス統合』、基研研究会『熱場の量子論とその応用 2010』、2010年8月30日から9月1日、京都大学基礎物理学研究所、『素粒子論研究』118巻4号 D-172~D-173.
- [2] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, Phys. Rev. D **78**, 096002 (2008) [Erratum-ibid. D **79**, 079902 (2009)] [arXiv:0806.0480 [hep-ph]].
- [3] Y. Hosotani, M. Tanaka and N. Uekusa, Phys. Rev. D **82**, 115024 (2010) [arXiv:1010.6135 [hep-ph]].
- [4] M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **287**, 757 (1987); Nucl. Phys. B **299**, 797 (1988).
- [5] C. L. Ho and Y. Hosotani, Nucl. Phys. B **345**, 445 (1990).
- [6] G. Panico, M. Serone, JHEP **0505**, 024 (2005). [hep-ph/0502255].
- [7] N. Maru and K. Takenaga, Phys. Rev. D **72**, 046003 (2005) [arXiv:hep-th/0505066].

<sup>1</sup>(4) の不等式の右辺の値は、スファレロンによる流失機構の詳細によっては 1 からずれる。

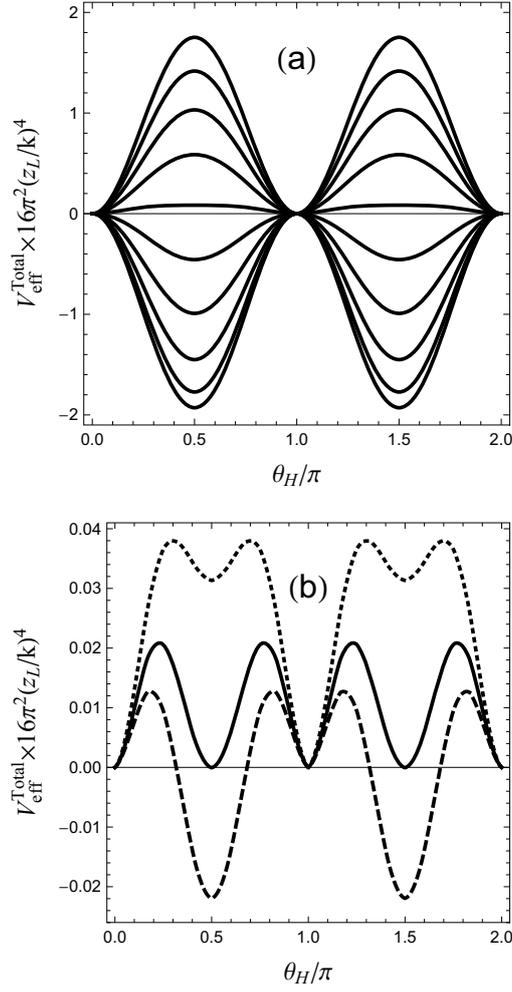


図 1: [preliminary]  $z_L = 10^{15}$  での有効ポテンシャル. (a)  $\tilde{T} \equiv T/(kz_L^{-1}) = 0.1$  (一番下) から 1.0 (一番上) まで 0.1 刻み. (b) 下から  $\tilde{T} = 0.58, 0.5841, 0.59$ .

表 1: [preliminary] Critical temperature  $T_c$ , the ratio  $\varphi_c/T_c$ , the height of the potential barrier  $V_{\text{barrier}} \equiv V^{\text{Total}}(\pi/4, T_c)$  for various value of  $z_L = e^{kL}$

$z_L$	$10^5$	$10^7$	$10^{10}$	$10^{12.15}$	$10^{15}$	$10^{17}$
$T_c[\text{GeV}]$	158	188	224	246	273	290
$\varphi_c/T_c$	1.6	1.3	1.1	1.0	0.90	0.85
$V_{\text{barrier}} [10^6 \text{GeV}^4]$	3.0	3.8	4.9	5.5	6.3	6.8
$V_{\text{barrier}}^{1/4}/T_c$	0.26	0.24	0.21	0.20	0.18	0.18

# BCS-BEC クロスオーバー領域における 強結合フェルミ原子気体の擬ギャップ現象

東京理科大学 理学部, JST(CREST) 土屋 俊二 \*1

## 1 Introduction

ここ数年, 冷却 Fermi 原子気体の研究において擬ギャップと呼ばれる現象が話題となっている. 擬ギャップはもともと銅酸化物高温超伝導体において見られる現象で, 超伝導転移温度以上のノーマル相において電子の状態密度に超伝導状態と同様のギャップ構造が現れる現象である [1, 2]. 擬ギャップの出現は高温超伝導の機構と密接に関連していると考えられているが, その起源には, 強い対揺らぎによる転移温度以上における対形成 [3, 4, 5, 6], 反強磁性揺らぎ [7, 8], 隠れた秩序 [9] など諸説あり, 現在も研究者の間では議論が続いている. また, 最近ではカラー超伝導に関しても擬ギャップ現象が起こりうるという理論的な提案がなされており [10], 擬ギャップ現象はエネルギースケールによらず現れる普遍的な現象であると考えられる.

一方, 冷却原子気体の研究では, 2008 年に JILA の Jin のグループが photoemission spectroscopy と呼ばれる手法を用い, Fermi 原子気体において 1 粒子スペクトルを観測する事に成功し [11], 2010 年には同グループがこの手法により BCS-BEC クロスオーバー領域にある Fermi 原子気体において擬ギャップを直接的に観測する事に成功した [12]. 更に, 今年 10 月には Cambridge 大学の Köhl らのグループが, 2 次元の Fermi 原子気体において擬ギャップの観測に成功している [13].

筆者らは, BCS-BEC クロスオーバー領域にある Fermi 原子気体において, 強い対揺らぎにより擬ギャップが存在すると予想し, 研究の初期の頃からこの問題に取り組んできた. 我々は, 対揺らぎによる強結合効果を取り入れた  $T$  行列近似を用い, 1 粒子状態密度とスペクトル関数を計算することにより, BCS-BEC クロスオーバー領域において擬ギャップが存在する事を直接的に示した [14, 15]. 更に, 同理論を実験における空間的な非一様性を取り入れて拡張し, photoemission spectrum の計算を行ったところ実験データと非常に良い一致が得られ, 理論の正当性を裏付ける事に成功した [16]. これら一連の研究により冷却 Fermi 原子気体の擬ギャップ現象は一躍注目を浴び大きな研究テーマに発展しつつある.

本稿では, 冷却 Fermi 原子気体における擬ギャップ現象の研究の最近の進展について, 筆者らの最近の研究を中心に紹介する.

---

\*1 E-mail: tsuchiya@rk.phys.keio.ac.jp

## 2 $T$ 行列近似による対揺らぎの理論

ここでは BCS-BEC クロスオーバー、及び擬ギャップ現象を記述するミクロな理論である  $T$  行列近似に基づく対揺らぎの理論 [4, 6, 14] について紹介する.  $T$  行列近似は比較的単純な近似であるにもかかわらず、擬ギャップ現象を定量的に記述する優れた理論である.

いま異なる 2 成分からなる Fermi 原子気体を考え、各成分を擬スピン  $\sigma(=\uparrow, \downarrow)$  により表す. Jin のグループの実験 [11] では原子種として  $^{40}\text{K}$  を用い、 $|F, F_z\rangle = |9/2, -7/2\rangle, |9/2, -9/2\rangle$  の二つの異なる内部状態にある原子を利用している. ここで  $F$  は hyperfine spin の大きさを、 $F_z$  はその  $z$  成分を表す. 異なる成分の原子が Feshbach 共鳴により相互作用すると仮定すると、この系のハミルトニアンは次のように与えられる. (以下、 $\hbar = 1$  とおく)

$$H - \mu N = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}\sigma} - U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2\downarrow} c_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2\uparrow}. \quad (1)$$

ここで、 $c_{\mathbf{p}\sigma}$  ( $c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ ) は運動量  $\mathbf{p}$ 、スピン  $\sigma$  を持つ Fermi 原子の消滅 (生成) 演算子、 $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$  は化学ポテンシャル  $\mu$  から測った運動エネルギー ( $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$ ,  $m$  は原子の質量)、また  $N$  は全粒子数を表す. ここでは相互作用としてデルタ関数的な引力ポテンシャルを仮定し、その強さを  $-U (< 0)$  としている.  $U$  と  $s$  波散乱長  $a_s$  の関係は

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \frac{-U}{1 - U \sum_{\mathbf{p}} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}, \quad (2)$$

で与えられる [17].

実験では  $s$  波散乱長は、Feshbach 共鳴を利用することにより磁場を用いて調節することが可能である. そのため、今後相互作用の大きさを  $a_s$  を含む無次元のパラメタ  $(k_F a_s)^{-1}$  により記述する. ここで  $k_F$  は理想 Fermi 気体の Fermi 波数である. このパラメタで BCS 極限は  $(k_F a_s)^{-1} = -\infty$ , BEC 極限は  $(k_F a_s)^{-1} = \infty$  に対応し、 $-1 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1$  をクロスオーバー領域と呼ぶ. 特に、 $(k_F a_s)^{-1} = 0$  は  $a_s$  が発散する特別な点であるためユニタリー極限と呼ばれる.

$T$  行列近似における 1 粒子温度 Green 関数は次のように与えられる [14].

$$G_{\mathbf{p}}(i\omega_n) = \frac{1}{G_{\mathbf{p}}^0(i\omega_n)^{-1} - \Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)}. \quad (3)$$

ここで  $G_{\mathbf{p}}^0(i\omega_n) = 1/[i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}]$  は自由 Fermi 粒子の Green 関数、 $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$  ( $n$ :整数) は Fermi 松原周波数を表す. 自己エネルギー  $\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)$ 、散乱行列  $\Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n)$  はダイアグラムにより図 1 のように表され、次のように与えられる.

$$\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n) G_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^0(i\nu_n - i\omega_n), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{p}}(i\nu_n) &= \frac{-U}{1 - U \Pi_{\mathbf{q}}(i\nu_n)} \\ &= \frac{4\pi a_s}{m} \frac{1}{1 + \frac{4\pi a_s}{m} \left[ \Pi_{\mathbf{q}}(i\nu_n) - \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right]}, \end{aligned} \quad (5)$$

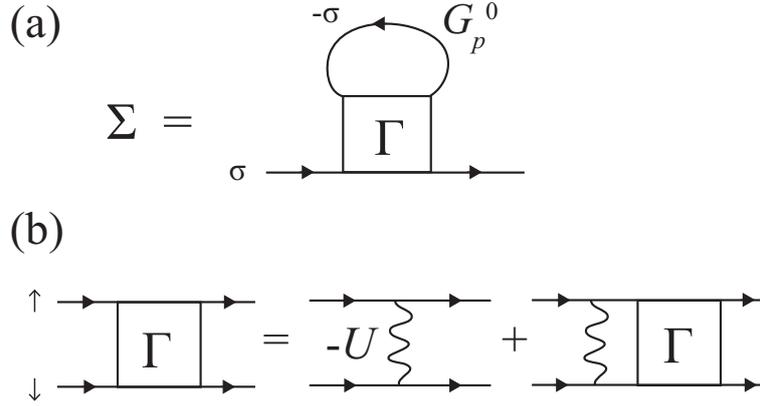


図 1  $T$  行列近似における (a) 自己エネルギー  $\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)$ , (b) 散乱行列  $\Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n)$  を表すダイアグラム.  $\sigma(=\uparrow, \downarrow)$  は擬スピンを表す.

ここで  $\nu_n = 2n\pi/\beta$  は bose 松原周波数である. また, 対相関関数  $\Pi_{\mathbf{q}}(i\nu_n)$  は

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{q}}(i\nu_n) &= T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^0(i\nu_n + i\omega_n) G_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^0(-i\omega_n) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - f(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) - f(\xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + \xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} - i\nu_n}, \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられ,  $f(\xi)$  は Fermi 分布関数を表す.

散乱行列  $\Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n)$  は図 1(b) にあるように, 対揺らぎを表す Cooper チャンネルの梯子型のダイアグラムにより与えられる. また, 図 1(a) から明らかなように, 1 粒子 Green 関数 (3) には自己エネルギー (4) を通してこの対揺らぎの効果が取り込まれている.

1 粒子スペクトル関数  $A(\mathbf{p}, \omega)$ , 状態密度  $\rho(\omega)$  は Green 関数を解析接続することにより次のように求まる.

$$A(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)], \quad (7)$$

$$\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} [G_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)] = \sum_{\mathbf{p}} A(\mathbf{p}, \omega). \quad (8)$$

スペクトル関数  $A(\mathbf{p}, \omega)$  は photoemission spectroscopy により直接測定することができる [11].

超流動の転移温度  $T_c$  を Thouless の判定条件  $[\Gamma_{\mathbf{q}=0}(i\nu_n = 0, T = T_c)]^{-1} = 0$  [20] により定める. これより

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2\xi_{\mathbf{p}}} \tanh \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{2T_c} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right], \quad (9)$$

が得られる. 式 (9) は BCS 理論の  $T_c$  におけるギャップ方程式に他ならない.

Nozières-Schmitt-Rink の理論 [18] によると BCS-BEC クロスオーバーにおいて化学ポテンシャルは強結合効果により Fermi エネルギーからずれを生じる. この強結合効果を取り入れるため, 式 (9) と Fermi 原子に関する粒子数方程式

$$N = 2T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{\mathbf{p}}(i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (10)$$

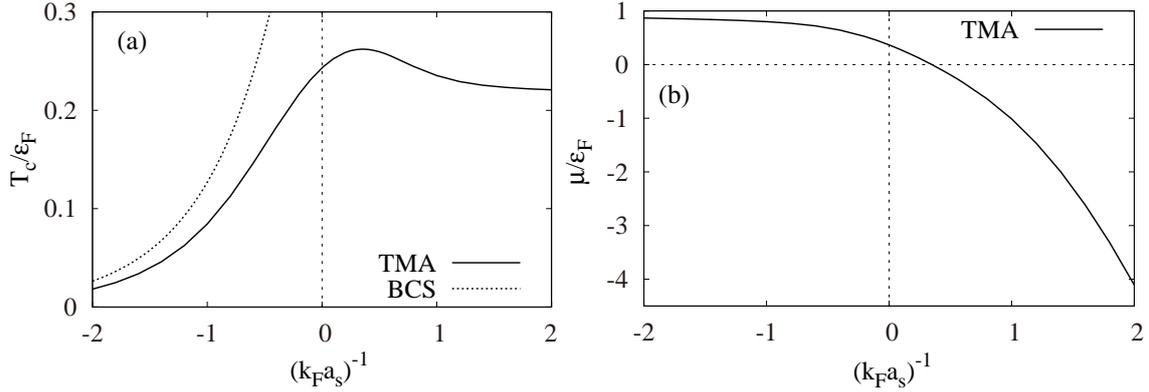


図2  $T$  行列近似 (TMA) により計算した (a) 超流動転移温度  $T_c$ , 及び (b) 化学ポテンシャル  $\mu(T_c)$ . (a) において点線は BCS 理論による超流動転移温度を表す.

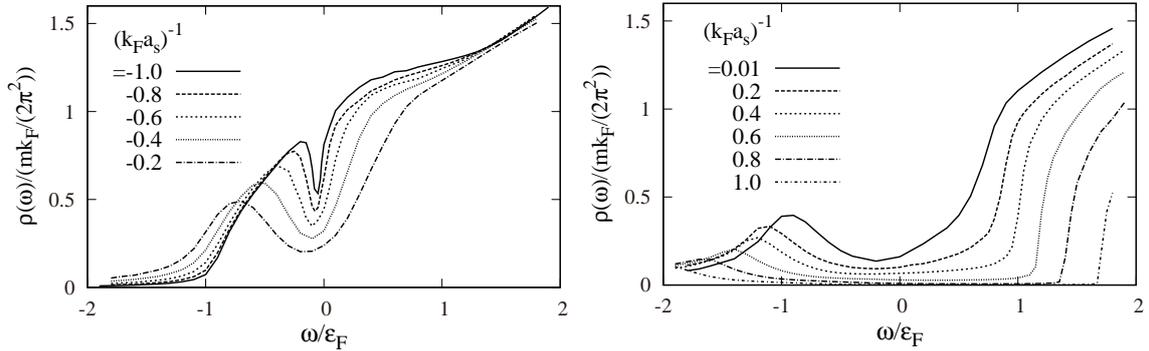


図3 超流動転移温度  $T_c$  における状態密度  $\rho(\omega)$ .

を連立して解き,  $T_c$  と  $\mu(T_c)$  を自己無撞着に決める [18]. その結果,  $T_c$  と  $\mu(T_c)$  は図2のように得られる.

図2(a)において  $T_c$  が BCS 領域から BEC 領域まで滑らかに繋がっていることから, BCS-BEC クロスオーバーが起きている事がわかる [18, 19]. また, 化学ポテンシャル (図2(b)) は BCS 極限 ( $(k_F a_s)^{-1} \rightarrow -\infty$ ) では Fermi エネルギーに一致するが, 相互作用が大きくなるにつれて減少し, BEC 領域において2体の束縛状態の形成に伴い負の値をとる. BEC 極限 ( $(k_F a_s)^{-1} \rightarrow \infty$ ) では  $\mu \rightarrow -1/(2ma_s^2)$  となり,  $2|\mu|$  が分子の束縛エネルギー  $E_{\text{bind}} = 1/(ma_s^2)$  と等しくなる.  $T_c$  以上における化学ポテンシャルの温度変化は式 (10) を解く事により求められる.  $T_c$  以上における  $A(\mathbf{p}, \omega)$ ,  $\rho(\omega)$  の計算にはこのようにして求めた  $\mu(T)$  を用いる.

### 3 1 粒子状態密度, スペクトル関数に現れる擬ギャップ

図3に  $T$  行列近似を用いて計算した  $T_c$  における状態密度を示す. クロスオーバー領域の全域において Fermi 面近傍の状態密度が減少し, ギャップ構造が現れている事がわかる.  $T_c$  において超流動ギャップはゼロになるため, このギャップ構造は擬ギャップに他ならない.

BCS 領域から BEC 領域へ引力相互作用が増加するにつれギャップの幅は大きくなり, ユニタリー極限

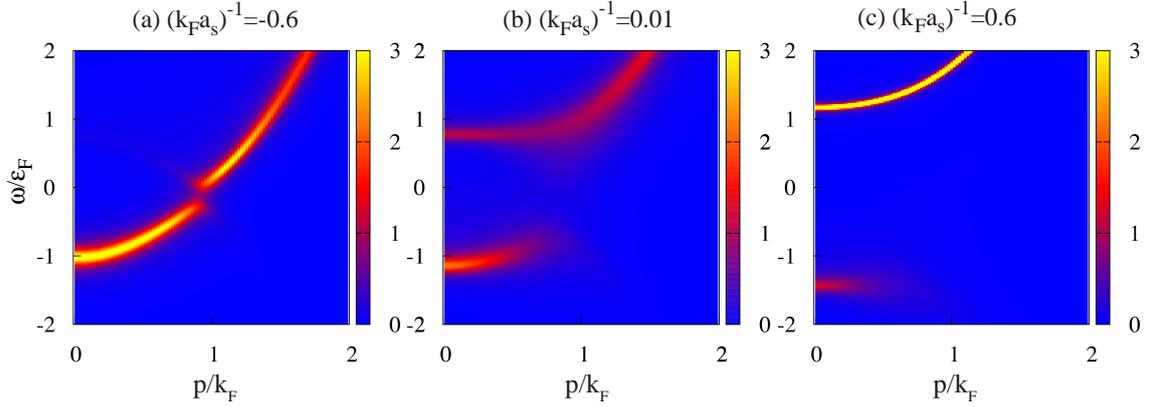


図4 超流動転移温度  $T_c$  におけるスペクトル関数.

$((k_F a_s)^{-1} = 0)$  近傍において擬ギャップは最も顕著となる. BCS 極限では Fermi 面近傍におけるギャップが次第に埋まることにより擬ギャップは消失し, 理想 Fermi 気体の状態密度  $\rho(\omega) \propto \sqrt{\omega + \mu}$  に近づく. また, BEC 極限では擬ギャップは下側のピークが次第に小さくなることにより消えて行き, 最終的には理想 Fermi 気体の状態密度  $\rho(\omega) \propto \sqrt{\omega - |\mu|}$  に近づいて行く. (BCS 側では  $\mu > 0$ , BEC 側では  $\mu < 0$  であることに注意する.) このように BCS 極限と BEC 極限では擬ギャップの消え方が異なることがわかった.

図4に  $T_c$  におけるスペクトル関数を示す. スペクトル関数は, クロスオーバー領域全域でエネルギーが正と負の2つのブランチにピークを持つ, いわゆる double-peak 構造 [4, 6] を持ち, 2つのピークの間ギャップが生じる. 状態密度はスペクトル関数を運動量について足し上げることで得られるため, 状態密度における擬ギャップはこの double-peak 構造を反映していることがわかる.

相互作用を増加させるとピーク間のギャップが大きくなり擬ギャップ構造が顕著になる. BCS 極限では2つのピーク間のギャップが消えて single peak になり, 理想気体のスペクトル関数  $A(\mathbf{p}, \omega) = \delta(\omega - (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu))$  に近づいて行く. 他方, BEC 極限では下側のブランチのピークが次第に消えて行き, 理想気体のスペクトル関数  $A(\mathbf{p}, \omega) = \delta(\omega - (\varepsilon_{\mathbf{p}} + |\mu|))$  に近づく. このように double-peak 構造が BCS 極限, BEC 極限において異なる振る舞いをするのは各極限における状態密度の振る舞いの違いと対応している.

また, BCS 側から相互作用を大きくするにつれピークはブロードになって行き, 準粒子の寿命は短くなって行く. BEC 側では下側のピークは強度が下がり, よりブロードになるが, 上側のピークは鋭くなり強度も増加する. 上側のピークは, 分子が乖離することにより生じるフェルミオンの励起を表していると考えられ, そのため  $\omega = |\mu|$  から始まる鋭いピークとなる. 下側のピークは hole 的な励起を表しており, 多体効果により生じていると考えられる. BEC 側では系の励起は分子ボソンが支配的となるが, フェルミオンの性質を持つ1体のホール励起も存在している事を表している.

図4におけるスペクトル関数は次のBCS型のスペクトル関数

$$A(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right] \delta(\omega - E_{\mathbf{p}}) + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right] \delta(\omega + E_{\mathbf{p}}), \quad (11)$$

により良く近似できる [6]. ここで,  $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta_{pg}^2}$  は準粒子スペクトルを表す. いまの場合, 式 (11) において超流動ギャップ  $\Delta$  は擬ギャップ  $\Delta_{pg}$  に置き換えられている. ピーク間のギャップの最小値は, BCS 側 ( $\mu > 0$ ) では  $p = \sqrt{2m\mu}$  において  $2\Delta_{pg}$  を取り, BEC 側 ( $\mu < 0$ ) では  $p = 0$  において  $2\sqrt{\mu^2 + \Delta_{pg}^2}$  を取る.

強い対揺らぎにより擬ギャップが生じる理由について, BCS 理論における Green 関数と比較する事により簡単に理解することができる. まず BCS 理論における Green 関数は次のように書ける.

$$G_p^{\text{BCS}}(i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + \Delta^2} = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \Delta^2 G_{-p}^0(-i\omega_n)} \quad (12)$$

式 (12) は particle の Green 関数  $G_p^0(i\omega_n) = 1/[i\omega_n - \xi_p]$  と hole の Green 関数  $G_{-p}^0(-i\omega_n)$  が結合していることを示しており, 超流動ギャップ  $\Delta$  はその particle-hole の結合の強さを表すと読むことができる. 他方, 式 (5) で与えられる  $\Gamma(\mathbf{q} = 0, \nu_n = 0)$  は  $T_c$  において発散することから,  $T$  行列近似における自己エネルギー (4) は次のように近似する事ができる.

$$\begin{aligned} \Sigma_p(i\omega_n) &= T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma_p(i\nu_n) G_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}(i\nu_n - i\omega_n) \\ &\simeq T \left[ \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n) \right] G_{-p}^0(-i\omega_n) = -\Delta_{pg}^2 G_{-p}^0(-i\omega_n). \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, 擬ギャップ  $\Delta_{pg}$  として  $\Delta_{pg}^2 = -T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n)$  を導入した. 式 (3), (13) を用いると,  $T$  行列近似の Green 関数は次のように書ける.

$$G_p(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \Delta_{pg}^2 G_{-p}^0(-i\omega_n)} = -\frac{i\omega_n + \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + \Delta_{pg}^2}. \quad (14)$$

これより, 擬ギャップ  $\Delta_{pg}$  も超流動ギャップ  $\Delta$  と同様に particle-hole のカップリングの強さを表す事がわかる. 即ち, 擬ギャップは対揺らぎにより particle と hole の結合が生じることにより現れることがわかった. また, 式 (14) より得られるスペクトル関数が式 (11) になっていることが直ちにわかる.

上の近似は対揺らぎにより擬ギャップが生じる理由を理解するのに非常に有益である. しかし, この近似では対揺らぎの影響を単純化しすぎており, 実際には式 (13) において無視した  $\mathbf{q} \neq 0, \nu_n \neq 0$  を持つ項の寄与により図 4 にあるようにスペクトル関数のピークが幅を持ち, 準粒子が有限の寿命を持つ. また, それにより図 3 にあるように擬ギャップの内部で状態密度が有限に残る.

$T_c$  以上における状態密度の温度変化を図 5 に示す. 温度が上昇すると対揺らぎが小さくなるため擬ギャップは次第に埋まって行き, ある温度において擬ギャップは完全に消失する. この温度を擬ギャップ温度  $T^*$  とする.  $T^*$  より高い温度領域において擬ギャップが消えた後も, 対揺らぎの影響により状態密度は理想 Fermi 気体のものと異なっており, 特に BEC 側ではその違いが顕著に見られる.

$T_c$  以上の温度領域におけるスペクトル関数の温度変化を図 6 に示す. 温度の上昇に伴い BCS 側, BEC 側において共に double-peak 構造が消えて行くことがわかる. スペクトル関数において double-peak 構造が消える温度を擬ギャップ温度  $T^{**}$  とする.

興味深いのは BCS 側と BEC 側では double-peak 構造の消え方が異なっている点である. 図 6(a) より BCS 側では各ピークの幅が広がり, 2つのピークが重なることで一つの幅の広いピークができ double-peak 構

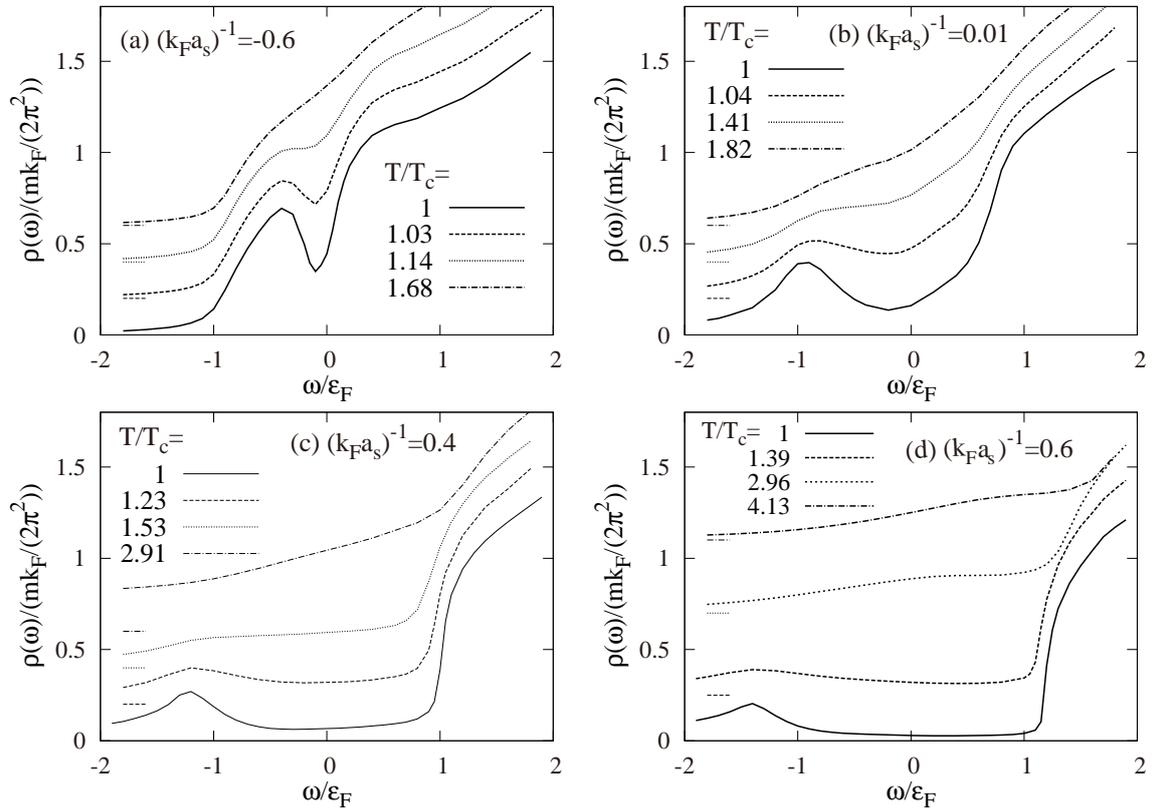


図5  $T_c$  以上における状態密度の温度変化. 各曲線の左端にある短い線は, 対応する  $\rho(\omega)$  の原点を示す.

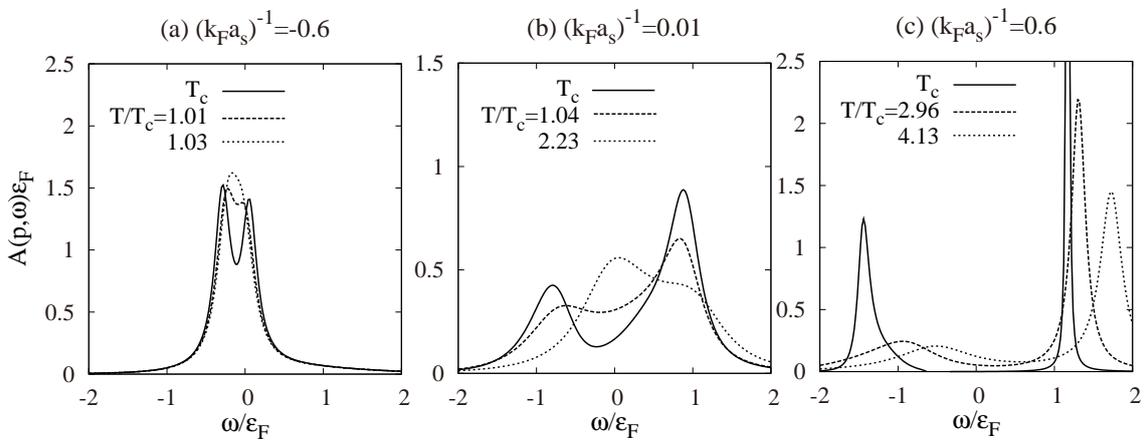


図6  $T_c$  以上におけるスペクトル関数の温度変化. 運動量はピーク間の  $\omega$  の間隔が最小になるように選んでおり, 各場合について (a)  $p/k_F = 0.91, 0.83, 0.01$  で与えられる.

造が消える。しかし、図 6(c) において BEC 側では温度が上昇すると下側のピークがブロードになると共に上昇して行き、上側のピークに吸収される事により double-peak 構造が消えて行く。この違いにより、擬ギャップ温度  $T^*$  と  $T^{**}$  の大小が BCS 側と BEC 側において逆転するという事態が起きる。

また、図 6(c) より BEC 側では Fermi エネルギー程度の温度まで double-peak 構造が残り、 $T^{**}$  が非常に高温になることがわかる。下側のピークが高温まで残っているということは、多体効果によりフェルミオンの励起が高温まで存在する事を示唆している。

## 4 相図における擬ギャップ領域

図 7 に 1 粒子状態密度、スペクトル関数のそれぞれから見積もった擬ギャップ温度  $T^*$ ,  $T^{**}$  を含む相図を示す [14]。これらの擬ギャップ温度は、BCS 領域から相互作用を大きくするにつれて単調に増加し、ユニタリー極限以降は  $T_c$  よりも顕著に大きくなる。

図 7 において  $T^*$  と  $T^{**}$  は一致せず、BCS 領域では  $T^* > T^{**}$ 、BEC 領域では  $T^* < T^{**}$  となっている。これは、スペクトル関数の double-peak 構造が、状態密度に現れる擬ギャップと必ずしも対応していないことを意味している。即ち、BCS 領域においては、スペクトル関数の double-peak 構造が消え single peak となっても、Fermi 面付近でスペクトル強度が抑制されて小さくなっているため、運動量についての和を取ると状態密度にギャップが生じる。また、BEC 領域においては、スペクトル関数に double-peak 構造が存在しても、下側のピークがブロードなため、運動量についての和を取ると状態密度のギャップが埋まってしまい、そのため状態密度の擬ギャップは消えてしまう。

このように  $T^*$  と  $T^{**}$  が異なることは、測定する物理量によって擬ギャップ温度が異なることを示唆している。例えば、光原子分光を用いてスペクトル関数を測定する事により得られる擬ギャップ温度は  $T^{**}$  であり、また比熱などの状態密度の振る舞いを直接反映する物理量を測定して擬ギャップ温度を決めた場合には  $T^*$  が得られると予想できる。擬ギャップ現象は相転移ではなくクロスオーバー現象であるため、擬ギャップ温度を一意的には決める事はできないことを注意しておく。

これまでの研究では BCS 理論における超流動転移温度  $T_{\text{BCS}}$  を外挿したものを対形成の目安の温度と考え、 $T_{\text{BCS}}$  を擬ギャップの生じる温度と見なしてきた。しかし図 7 において実際に状態密度、スペクトル関数から見積もった擬ギャップ温度  $T^*$ ,  $T^{**}$  は  $T_{\text{BCS}}$  と大きく異なっていることがわかる。

BEC 側において分子の束縛エネルギーは  $E_{\text{bind}} \simeq 2|\mu(T_c)|$  と見積もれる。したがって温度が  $E_{\text{bind}}$  よりも低い場合には分子の熱的な乖離は抑制され、系は非凝縮分子ボソンから成るノーマル Bose 気体として振る舞う。そのため、1 粒子スペクトルが擬ギャップ構造を持っていても系の性質には反映されない。これより、 $E_{\text{bind}} = 2|\mu(T_c)|$  を擬ギャップ領域の BEC 側における相境界とする。その結果、擬ギャップ相の領域は  $T_c$ ,  $E_{\text{bind}}$ ,  $T^*$  または  $T^{**}$  によって囲まれる領域となる。

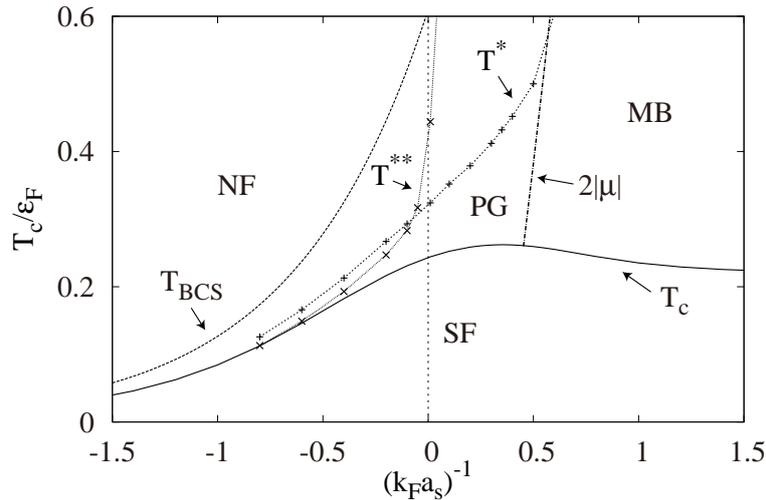


図7 Fermi 原子気体のクロスオーバー領域における相図. 擬ギャップ温度  $T^*$ ,  $T^{**}$  を含む特徴的な温度がプロットしてある. 相図の各領域はノーマル Fermi 気体相 (NF), ノーマル分子ボソン相 (MB), 超流動相 (SF), 擬ギャップ相 (PG) から成る.

## 5 まとめ

本稿では, 最近の冷却 Fermi 原子気体における擬ギャップ現象に関する研究について筆者らの研究を中心に紹介した. 最近の photoemission spectroscopy を用いた実験 [11, 12] により, BCS-BEC クロスオーバー領域において Fermi 原子気体が擬ギャップ現象を示す事が明らかとなってきた. 我々は,  $T$  行列近似を用いて対揺らぎによる強結合効果を取り込み, 1 粒子状態密度, スペクトル関数の  $T_c$  以上における振る舞いを調べ, これらの物理量に擬ギャップが現れることを明らかにした. また状態密度, スペクトル関数のそれぞれの振る舞いから擬ギャップ温度  $T^*$ ,  $T^{**}$  を求め, 相図における擬ギャップの領域を特定した. これらの結果は, photoemission spectroscopy による実験や熱力学量の測定により, 更に詳しく擬ギャップの性質を調べるのに有用であると考えられる.

銅酸化物高温超伝導体における擬ギャップについては, 対揺らぎを含めてこれまでいくつかの起源が提唱されており, 現在でもその起源に関しては完全に理解されているとは言い難い. 一方, 冷却 Fermi 原子気体における擬ギャップは対揺らぎを起源としていることが明白である. そこで, Fermi 原子気体の擬ギャップの性質について詳しく調べ, 対揺らぎを起源とする擬ギャップの理解を深めることにより, 銅酸化物高温超伝導体における対揺らぎを起源とする説についてより詳しく検証することができると期待される.

紙数の関係により, photoemission spectroscopy の実験の詳細や, 実際の実験結果の解析において重要となるトラップポテンシャルによる空間的な非一様性の影響については詳しく触れることができなかった. 興味のある読者は文献 [16, 21] を参照されたい.

最後に, 本解説は筆者がポスドクとして慶應義塾大学理工学部物理学科に在籍中に, 大橋洋士教授, 大学院生の渡邊亮太氏とともに行った共同研究に基づいている. これまでの共同研究に対しお二人に深く感謝致します.

す。また、Toronto 大学の Allan Griffin 教授には本研究に関して多くの貴重なコメントを頂いた。残念ながら Griffin 教授は今年 5 月に惜しまれつつ他界された。Griffin 教授のこれまでの指導に熱くお礼申し上げるとともに、心よりご冥福をお祈り致します。

## 参考文献

- [1] P. Lee, N. Nagaosa, and X. Wen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17 (2006).
- [2] A. Damascelli, Z. Hussain, and Z. Shen, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 473 (2003).
- [3] M. Randeria, N. Trivedi, A. Moreo, and R. T. Scalettar, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2001 (1992).
- [4] B. Jankó, J. Maly, and K. Levin, *Phys. Rev. B* **56**, R11407 (1997).
- [5] Y. Yanase and K. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 1659 (2001).
- [6] A. Perali, P. Pieri, G. C. Strinati, and C. Castellani, *Phys. Rev. B* **66**, 024510 (2002).
- [7] A. Kampf and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev. B* **41**, 6399 (1990).
- [8] D. Pines, *Z. Phys. B* **103**, 129 (1997).
- [9] S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, and C. Nayak, *Phys. Rev. B* **63**, 094503 (2001).
- [10] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, *Phys. Rev. D* **70**, 056003 (2004).
- [11] J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, *Nature (London)*, **454**, 744 (2008).
- [12] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, *Nature Phys.* **6**, 569 (2010).
- [13] M. Feld, B. Fröhlich, E. Vogt, M. Koschorreck, and M. Köhl, *arXiv:1110.2418* (2011).
- [14] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **80**, 033613 (2009).
- [15] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 043630 (2010).
- [16] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 033629 (2010).
- [17] M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, New York, 1995), p. 355.
- [18] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [19] Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. Lett* **89**, 130402 (2002).
- [20] D. J. Thouless, *Ann. Phys. (N.Y.)* **10**, 553 (1960).
- [21] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A*, to be published (2011).

## 原子分子混在量子気体の動力学\*

西村拓史<sup>†,‡</sup><sup>1</sup> お茶の水女子大学 お茶大アカデミック・プロダクション

近年、Feshbach 共鳴法等の技術的な発展により、原子と分子が混在した量子気体の実現され、研究が進められている。量子気体中における分子は原子間有効相互作用を操作する媒体として機能すると同時に、それ自体が一つの粒子として量子統計的に振る舞う。今回の発表では、そのような原子分子混在量子気体の動力学について我々の理論研究の成果の一部を紹介した。今回発表された内容の一部は日本大学の丸山智幸教授、並びに立命館大学の藪博之教授との共同研究によるものである。

一般に分子とは量子多体系における束縛状態を指すものであり、例えば、真空中の2原子分子であれば2体系の束縛状態を意味する。量子気体中においては、分子は量子多体相関による束縛状態を意味し、例えば、2原子分子であれば物質中の2体相関による束縛状態を意味する。このような束縛状態は量子多体相関が非常に強い場合に発生するものであり、量子多体問題の観点からみると原子分子混在量子気体とは強相関量子系の一つの極限であると言える。一方で、古典論における分子は、化学の分子論に代表されるように、古くから盛んに研究されてきたものであり、それら古典論と現代的な量子多体論との間の橋渡しをすることは学問上の一つの理論的課題であるといえる。

それらの認識の下で我々は、量子多体問題に対する一つのアプローチとして分子論を活用するための理論的な基礎研究、並びに実際の実験系への応用研究に取り組んできた [1–3]。今回の動力学についての研究は、その一環である。

ここでは Feshbach 共鳴 (FR) 法における分子を考える。すなわち、ここでの分子は元の2原子とは異なった角運動量スピン状態を持っており、その角運動量スピン状態 (閉じたチャンネルと呼ぶ) においては外場のために2原子への解離がほとんど禁止されていて元の2原子の散乱状態 (開いたチャンネルと呼ぶ) のエネルギーに近い束縛状態 (すなわち分子) のみが共鳴遷移を通じて系に影響を与えるという状況を考えている。このような状況は実際の実験系において既に実現されており、特に BEC-BCS クロスオーバーに関するものは様々な実験グループにおいて行われている。また、角運動量スピン状態の違いを利用して、分子と原子とを区別して観測することも可能であることに注意されたい。

量子統計においては、粒子はボース粒子とフェルミ粒子の2種類に分類される。特にボース粒子は極低温において一粒子状態を巨視的な数の粒子が占有するボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) を引き起こすために注目されることが多い。本発表では時間の関係上、フェルミ粒子を含まない

---

\* Dynamics of atom-molecule mixed quantum gases

† Takushi Nishimura (Division of Advanced Sciences, Ochanomizu University)

‡E-mail: nishimura.takushi@ocha.ac.jp

ボース粒子系の場合に限って議論を行った。

具体的には以下のような環境を考える。1成分ボース原子気体 ( $A$ ) と等核ボース分子気体 ( $M$ ) が互いに共鳴遷移している状況を考える ( $A + A \leftrightarrow M$ )。その時のハミルトニアンは、低エネルギー極限において有効な擬ポテンシャル法を用いて以下のように与えられる。

$$H = H_A + H_M + H_{AA} + H_{MM} + H_{FR}, \quad (1)$$

$$H_A \equiv \int d\mathbf{r} \Psi_A^\dagger \left[ -\frac{\nabla^2}{2} + V_A(\mathbf{r}) \right] \Psi_A, \quad H_M \equiv \int d\mathbf{r} \Psi_M^\dagger \left[ -\frac{\nabla^2}{4} + V_M(\mathbf{r}) + \Delta E \right] \Psi_M, \quad (2)$$

$$H_{\alpha\alpha} \equiv \frac{g_{\alpha\alpha}}{2} \int d\mathbf{r} \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\alpha(\mathbf{r}) \Psi_\alpha(\mathbf{r}) \quad (\alpha = A, M), \quad g_{\alpha\alpha} = \frac{4\pi a_{\alpha\alpha}}{m_\alpha}, \quad (3)$$

$$H_{FR} \equiv \lambda \int d\mathbf{r} \Psi_M^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_A(\mathbf{r}) \Psi_A(\mathbf{r}) + \text{h.c.}, \quad \tilde{a}_{AA} \approx a_{AA} - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta E}. \quad (4)$$

ここで、 $\hbar = 1$ 、 $m_A = m_M/2 = 1$  として、さらに簡単のために原子分子間の相互作用を無視した ( $H_{AM} = 0$ )。

この発表では、熱的な非平衡動力学における FR 衝突項の寄与の話 [4] とゼロ温度における BEC の動力学の話 [5] の2つの話題に焦点を絞る。

### I. FR 衝突項の非平衡動力学への寄与

ここでは、FR 衝突項の寄与を見るために、一様 ( $V_A(\mathbf{r}) = V_M(\mathbf{r}) = 0$ ) で  $H_{AA} = H_{MM} = 0$  の場合を考える。一様なので、以下では運動量表示を用いる。

最初に非平衡動力学を量子力学的ボルツマン方程式を用いて定義する。すなわち、運動量分布  $f_A(\mathbf{p})$  と  $f_M(\mathbf{p})$  は

$$\frac{df_A}{dt} = \Gamma_{FR}^A, \quad \frac{df_M}{dt} = \Gamma_{FR}^M, \quad (5)$$

に従う。これはただの定義であることに注意されたい。さらに、転移温度以下においては BEC が発生し、 $f_\alpha(\mathbf{p}) = \delta_{\mathbf{p}} f_{0\alpha} + \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p})$  ( $\alpha = A, M$ ) となることにも注意が必要である。

FR 衝突項  $\Gamma_{FR}^A$  と  $\Gamma_{FR}^M$  は微視的理論と量子統計に従って以下のように与えられる。

$$\Gamma_{FR}^A(\mathbf{p}_1) = 2 \sum_{\mathbf{p}_2} \sum_{\mathbf{p}_m} A_{FR}, \quad \Gamma_{FR}^M(\mathbf{p}_m) = - \sum_{\mathbf{p}_1} \sum_{\mathbf{p}_2} A_{FR}, \quad (6)$$

$$A_{FR} \equiv 4\pi\lambda^2 \delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_m} \delta(\varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A - \varepsilon_m^M) (\Lambda_{\text{in}} - \Lambda_{\text{out}}), \quad (7)$$

$$\Lambda_{\text{in}} \equiv (1 + f_A(\mathbf{p}_1))(1 + f_A(\mathbf{p}_2))f_M(\mathbf{p}_m), \quad \Lambda_{\text{out}} \equiv (1 + f_M(\mathbf{p}_m))f_A(\mathbf{p}_1)f_A(\mathbf{p}_2). \quad (8)$$

ここで、FR 衝突項の符号と係数は総原子数の保存により決定されている。

量子力学的ボルツマン方程式によると、BEC 転移温度以上では、量子力学的な  $H$  定理により、速やかに化学平衡状態へ移行することが証明される。実際にそのことはシミュレーション計算によっても示され、低温においては通常の化学反応速度論を超えた量子統計性の寄与がみられる。

一方で、BEC 転移温度以下では、凝縮数が固定してしまうために、FR 衝突項の寄与は非常に小さくなる。実際のシミュレーション計算でも化学平衡状態へ移行しないことが確認できる。化学平衡状態へ移行するには凝縮数を変化させる  $H_{AA}$  や  $H_{MM}$  の寄与が不可欠であり、緩和時間もそちらの時間スケール（通常は FR 衝突項による緩和時間よりも大きい）によって決定されることになる。この結果は凝縮数が巨視的な変数であることを考えれば自然な帰結であるが、量子力学的ボルツマン方程式による非平衡動力学がどの程度まで実際の実験系に活用できるものなのかは個々の系において詳細な比較検証が必要であることに注意されたい。

## II. トラップ系 BEC の動力学の話

次にゼロ温度におけるトラップ系 ( $V_A(\mathbf{r}) = r^2/2$ ,  $V_M(\mathbf{r}) = r^2$ ) の BEC の動力学を考える。

BEC の動力学は BEC 秩序変数  $\langle \Psi_\alpha(\mathbf{r}) \rangle \equiv \phi_\alpha(\mathbf{r})$  ( $\alpha = A, M$ ) によって記述され、それらは以下の非線形連立波動方程式に従う。

$$i \frac{d\phi_A}{dt} = \frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \phi_A^*}, \quad i \frac{d\phi_M}{dt} = \frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \phi_M^*}. \quad (9)$$

ここでは初期条件として化学平衡状態を用意しておき、 $t = 0$  において  $\Delta E$  を突然に変えるというシミュレーション計算を典型的な実験環境変数を用いて行った。

結果として、分子数振動とモノポール（呼吸）振動とが連結した複雑な集団運動が発生することが示された。この集団運動は BEC のコヒーレンスに由来するものであり、エネルギー保存と総原子数保存のために化学平衡状態の周りを振動する。また、集団運動の固有振動数には相互作用の非線形が非常に大きく寄与していることも分かった。

以上、本発表では、原子分子混在量子気体の動力学について我々の理論研究の成果の一部を紹介した。本研究は科研費 (22540414) の補助を受けている。

- 
- [1] T. Nishimura, A. Matsumoto, and H. Yabu, Phys. Rev. A **77**, 063612 (2008).
  - [2] T. Nishimura and T. Maruyama, JPSJ **79**, 083001 (2010).
  - [3] R. Shibato, T. Nishimura, T. Watanabe, and T. Suzuki, arXiv:1104.4408, accepted to PRA.
  - [4] T. Nishimura and T. Maruyama, in preparation.
  - [5] T. Nishimura, T. Maruyama, and H. Yabu, in preparation.

# 加速系におけるスピン軌道相互作用

松尾衛<sup>1,2</sup>, 家田淳一<sup>2,3</sup>, 齊藤英治<sup>2,3,4</sup>, 前川禎通<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> 京都大学基礎物理学研究所

<sup>2</sup> 日本原子力研究開発機構先端基礎研究センター

<sup>3</sup>CREST-JST, <sup>4</sup> 東北大学金属材料研究所

**はじめに** 物体の加速運動に伴う慣性力の電子に対する効果は、量子論成立以前から研究されてきた。回転運動によって磁性体が磁化するバーネット効果 [1]、磁化によって回転運動が引き起こされるアインシュタイン・ドハース効果 [1]、電子の加速運動による電荷蓄積を引き起こすシュワート・トルマン効果などが知られている [3]。近年の微細加工技術の進展によって、ナノ磁性における力学的回転の効果も測定されている [4, 5, 6]。ナノ磁性粒子における量子化された力学的回転運動の観測 [7]、ピエゾ素子によるフォノンの単一量子励起制御 [8] といった量子現象の研究の発展もめざましい。

一方、電子の持つ電荷だけでなくスピンも同時に利用するスピントロニクス分野 [9, 10] では、「スピン流」と呼ばれるスピン角運動量の流れの生成、制御、検出技術が急速に発達している。今日のスピントロニクスでは、ナノスケールで制御された物質を用いて、電気伝導や光学特性といった物理特性と電子の持つスピン自由度との相関を利用したスピン流制御手法がこれまでにいくつか提案・検証されてきた [11, 12, 13, 14]。しかし、物体の加速運動に伴う慣性力のスピン流への効果は、これまで研究されてこなかった。

そこで、我々は、新たに力学的回転および並進加速とスピン自由度の結合を利用したスピン流生成法を提案した [15, 16, 17]。加速系における電子に対するハミルトニアンを一般共変ディラック方程式の低エネルギー極限から導き、新たに導出された加速系におけるスピン軌道相互作用によって、マクロな物体の加速運動を用いたスピン流生成が可能であることを以下に示す。

**回転系におけるスピン軌道相互作用** 一般共変ディラック方程式の低エネルギー極限から導かれた、電磁場下での回転系の電子のパウリ・シュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{\text{PR}} \psi, \quad H_{\text{PR}} = H_{\text{K}} + H_{\text{Z}} + H_{\text{I}} + H_{\text{S}} + H_{\text{D}}, \quad (1)$$

となる [15]。ここで、 $H_{\text{K}} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi}^2 + qA_0$ ,  $H_{\text{Z}} = \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ ,  $H_{\text{I}} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi} + \mathbf{S})$ ,  $H_{\text{S}} = \frac{q\lambda}{2\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E}' - \mathbf{E}' \times \boldsymbol{\pi})$ ,  $H_{\text{D}} = -\frac{q\lambda}{2} \text{div} \mathbf{E}'$ ,  $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$ ,  $\lambda = \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2}$ ,  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}$  とおいた。特に、スピン軌道相互作用  $H_{\text{S}}$  とダーウィン項  $H_{\text{D}}$  に含まれる「有効電場」 $\mathbf{E}'$  には、回転系の Maxwell 方程式 [19] に現れる電場と同様に、磁場と回転速度の積が現れる。通常、真空中の電子の  $H_{\text{I}}$  に対する  $H_{\text{S}}$  の効果は、極めて小さく、スピン軌道相互作用の大きさを表す無次元量  $\eta_{\text{SO}}$  は、 $\eta_{\text{SO}} = \frac{\lambda(mv)^2}{\hbar^2} = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \ll 1$  となり無視できる。しかし、プラチナなどの金属や、GaAs などの半導体では、スピン軌道相互作用が増強されることが知られており [20, 21]、物質中の電子相関に依存する [22, 23]。

**回転によるスピン流生成**  $H_{\text{PR}}$  から得られる電子の速度演算子  $\dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{r}, H_{\text{PR}}]/i\hbar$  は、以下の 3 つの部分からなる。

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{I}} + \mathbf{v}_{\sigma}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, H_{\text{K}}] = \frac{\boldsymbol{\pi}}{m}, \quad \mathbf{v}_{\text{I}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, H_{\text{I}}] = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{\sigma} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, H_{\text{S}}] = \frac{e\lambda}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{E}'. \quad (3)$$

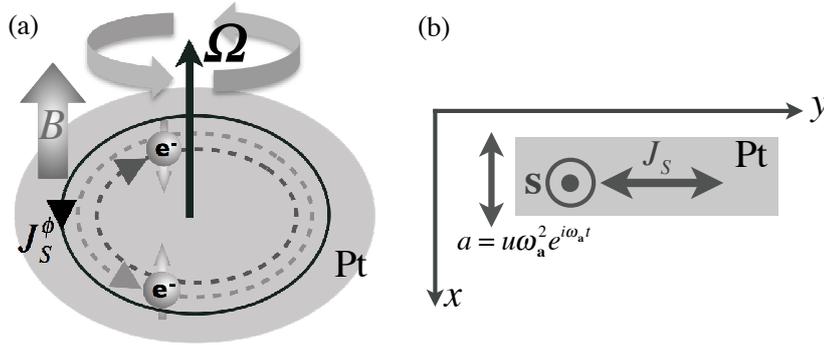


Figure 1: (a) 力学回転によるスピンの生成。回転軸方向に一樣磁場をかけると、スピン軌道相互作用由来の異常速度によってスピンの生成される。(b) 力学共振器による  $x$  方向の並進加速によって  $z$  方向に偏極したスピンの生成が  $y$  方向に生成される。

特に、スピン依存する  $\mathbf{v}_\sigma$  は異常速度とよばれ、スピンの生成を導く。簡単のためにここでは、力学的回転の角速度と一樣磁場をそれぞれ  $z$  軸方向に揃え、静止系では電場がないとする。 $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 。このとき、 $z$  方向に偏極したスピンの生成は、 $\mathbf{J}_s = en \text{Tr} \sigma_z \dot{\mathbf{r}} = 2nek\omega_c R \mathbf{e}_\phi$  となる。ここで、 $R$  は回転軸からの距離、 $\mathbf{e}_\phi$  は方位角方向の単位ベクトル、 $n$  は電子数密度であり、無次元パラメータ  $\kappa$  をフェルミエネルギー  $\epsilon_F$  を用いて、 $\kappa = \lambda k_F^2 \cdot \frac{\hbar \Omega}{\epsilon_F}$  と定義した [15]。  $B = 1 \text{ T}$ ,  $\Omega = 1 \text{ kHz}$ ,  $\lambda k_F^2 \approx 0.6$ ,  $k_F \approx 10^{10} \text{ m}^{-1}$ ,  $R = 10 \text{ mm}$  とした場合、スピンの生成  $|\mathbf{J}_s|$  はおよそ  $10^8 \text{ A/m}^2$  となる (Fig. 1(a))。

**並進加速によるスピンの生成** 加速度  $\mathbf{a}$  で並進加速する系のスピン軌道相互作用は、

$$H_{S,\mathbf{a}} = \frac{\lambda}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times q \mathbf{E}_\mathbf{a}). \quad (4)$$

となることが知られている [18]。ここで並進加速に伴う「有効電場」を  $\mathbf{E}_\mathbf{a} = (m/q)\mathbf{a}$  とおいた。前節と同様、並進加速によるスピン軌道相互作用によって電子は異常速度  $\mathbf{v}_{\sigma,\mathbf{a}} = \frac{e\lambda}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{E}_\mathbf{a}$  を持ち、並進加速によるスピンの生成が可能となる。力学共振器を用いて、 $x$  方向に角速度  $\omega_a$ 、振幅  $u$  の振動を与えると、その並進加速度は  $\mathbf{a} = u\omega_a^2 e^{i\omega_a t} \mathbf{e}_x$  となる。これにより、 $z$  方向に偏極したスピンの生成  $\mathbf{J}_s^z$  が  $y$  方向にだけ生成され (Fig. 1(b))、その表式は  $\mathbf{J}_s^z = \frac{2nem\lambda}{\hbar} u\omega_a^2 e^{i\omega_a t} \mathbf{e}_y$  で与えられる [17]。

**まとめ** 加速系におけるスピン軌道相互作用が電子のスピン依存する速度を与えるため、それによって、物質の加速運動の引き起こすスピンの生成が可能であることを示した。

**謝辞** 今回、本研究内容を発表する機会を与えてくださった室谷心教授に深く感謝いたします。

## References

- [1] S. J. Barnett, Phys. Rev. **6**, 239 (1915).

- [2] A. Einstein and W. J. de Haas, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **17**, 152 (1915).
- [3] R. T. Tolman and T. Stewart, *Phys. Rev.* **8**, 97 (1916).
- [4] D. Rugar, C. S. Yannoni, and J. A. Sidles, *Nature (London)* **360**, 563 (1992).
- [5] T. M. Wallis, J. Moreland, and P. Kabos, *Appl. Phys. Lett.* **89**, 122502 (2006).
- [6] G. Zolfagharkhani *et al.*, *Nat. Nanotechnol.* **3**, 720 (2008).
- [7] J. Tejada, R. D. Zysler, E. Molins, and E. M. Chudnovsky, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 027202 (2010).
- [8] A. D. O'Connell *et al.*, *Nature(London)* **464**, 697 (2010).
- [9] S. Maekawa, ed., *Concepts in Spin Electronics* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [10] S. D. Bader and S. S. P. Parkin, *Annu. Rev. Cond. Matter Phys.* **1**, 71 (2010).
- [11] J. C. Slonczewski, *J. Magn. Magn. Mater.* **159**, L1 (1996).
- [12] L. Berger, *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
- [13] Y. Tserkovnyak, A. Brataas, and G. E. W. Bauer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 117601 (2002).
- [14] S. E. Barnes and S. Maekawa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 246601 (2007).
- [15] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 076601 (2011).
- [16] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa, *Appl. Phys. Lett.* **98**, 242501 (2011).
- [17] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa, *Phys. Rev.* **B84**, 104410 (2011).
- [18] F. W. Hehl and W.-T. Ni, *Phys. Rev.* **D42**, 2045 (1990).
- [19] See, for example, C. T. Ridgely, *Am. J. Phys.* **67** (5), 414 (1999).
- [20] L. Vila, T. Kimura, and Y.C. Otani, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 226604 (2007).
- [21] S. Takahashi and S. Maekawa, *Sci. Technol. Adv. Mater.* **9**, 014105 (2008).
- [22] G. -Y. Guo, S. Maekawa, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 036401 (2009).
- [23] B. Gu, J.-Y. Gan, N. Bulut, T. Ziman, G.-Y. Guo, N. Nagaosa, and S. Maekawa, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 086401, (2010).

# 光学格子上的2成分ボソン系の相構造と動力学

一瀬郁夫  
(名古屋工業大学)

We study finite-temperature phase structure of two-component hard-core bosons in a cubic optical lattice. This system is an effective system for the bosonic Hubbard model with strong on-site repulsions and is called bosonic t-J model, which can be regarded as a bosonic counterpart of the t-J model for the strongly-correlated electron systems like the high-temperature superconducting materials. We study the model by means of path-integral methods and Monte-Carlo simulations. We found that this system has very rich phase structure including checkerboard-type “insulating” state, superfluid, phase-separated state, inhomogeneous cloudlet state, etc. This result gives important insight into mechanism of the high-temperature superconductivity of cuprate.

## I. INTRODUCTION

In the last decade, system of ultra-cold atoms has been one of the most actively studied area in condensed matter physics and its various physical properties have been investigated quite intensively by both experimental and theoretical methods. In particular, it is expected that atomic systems in an optical lattice exhibit a new exotic quantum state and its discovery gives an important insight into quantum phenomena for which interactions plays an essential role. As dimensionality and interactions between particles are highly controllable and also there are no effects of impurities and defects, cold atomic system in an optical lattice is regarded as a “final simulator” for quantum many-body systems and it sometimes elevates purely academic theoretical model to a realistic one.

It is expected that obtained knowledge of cold atomic systems give useful insights into physical properties of strongly-correlated systems. In the present talk, we investigate a system of two-component bosons with strong repulsions. We first introduce a bosonic t-J model, which is an effective model of the bosonic Hubbard model with strong on-site repulsive interactions between atoms. The original t-J model of fermions is a canonical model for the high-temperature ( $T$ ) superconducting (SC) materials. The fermionic t-J model has been studied quite intensively since the discovery of the high- $T_c$  SC, but precise knowledge of its phase structure etc is still lacking partially because of difficulty of numerical study on the fermion system. We expect that study on more tractable bosonic counterpart of the t-J model is useful to understand the strongly-correlated quantum systems including high- $T_c$  materials. This is one of our motivation to study the bosonic t-J model.

Another motivation of the present study is to see if some exotic state like the supersolid (SS), which was theoretically predicted in a single-component hard-core boson systems, exists in the multi-component system. In 2004, it was reported that the SS of  $^4\text{He}$ , i.e., solid with superfluid (SF), was observed by experiment. Soon after this report, possibility of SS in cold atom systems was theoretically studied. By study on the hard core bosons on a square lattice, it was concluded that the realization of the SS was difficult in that system unless a long-range interaction exists. On the other hand for the hard-core bosons on a triangular lattice, parameter region for possible SS state has been clarified. In the SS of single-component boson, a density wave and SF coexist.

In the present talk, we study the possibility of SS in the two-component hard-core boson systems. It should be remarked that the SS state *with paired superfluid and checkerboard order* in the bosonic system corresponds to the coexisting phase of the antiferromagnetism (AF) and SC in the electron system. Recently this AF and SC coexisting phase was really observed for highly homogeneous samples of high- $T_c$  materials. Then it is quite interesting to see how the SS emerges in the present system.

## II. MODEL HAMILTONIAN AND SLAVE-PARTICLE REPRESENTATION

As explained in the introduction, we study the t-J model of hard-core bosons in the cubic lattice and its phase structure at finite temperature. Hamiltonian of the t-J model is derived from the bosonic Hubbard model whose Hamiltonian is given as follows,

$$H_{\text{Hub}} = - \sum_{r,i=1}^3 t_a (a_{r+i}^\dagger a_r + \text{h.c.}) - \sum_{r,i=1}^3 t_b (b_{r+i}^\dagger b_r + \text{h.c.}) + U \sum_r (n_{ar} - \frac{1}{2})(n_{br} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \sum_{r,\alpha=a,b} V_\alpha n_{\alpha r} (n_{\alpha r} - 1) - \sum_{r,\alpha=a,b} \mu_{c\alpha} n_{\alpha r}, \quad (2.1)$$

where  $r$  denotes site of the cubic lattice,  $i (= 1, 2, 3)$  is the unit vector in the  $i$ -th direction (it also sometimes denotes the direction index), and  $a_r$  and  $b_r$  are boson annihilation operators.  $n_\alpha$  is the number operator of the boson  $\alpha$ , and therefore  $U$  and  $V_\alpha$  are inter-species and intra-species interactions, respectively. In the present paper, we shall consider the case  $t_a, t_b \ll U, V_a, V_b$ , and *the total filling factor of bosons less than unity*. Furthermore we set  $t_a = t_b = t$  and  $V_a = V_b$  and also for the chemical potential  $\mu_{ca} = \mu_{cb}$ . More general cases like  $t_a \neq t_b$  will be studied in a future paper.

The effective Hamiltonian in the large on-site repulsion limit can be obtained by the standard methods of expansion in powers of  $t/U$  and  $t/V$ ,

$$H_{\text{tJ}} = - \sum_{r,i=1}^3 t (a_{r+i}^\dagger a_r + b_{r+i}^\dagger b_r + \text{h.c.}) + J_z \sum_{r,i} S_{r+i}^z S_r^z - J_\perp \sum_{r,i} (S_{r+i}^x S_r^x + S_{r+i}^y S_r^y) - \mu_c \sum_r (1 - n_{ar} - n_{br}), \quad (2.2)$$

where  $\vec{S}_r = \frac{1}{2} B_r^\dagger \vec{\sigma} B_r$  with  $B_r = (a_r, b_r)^t$ ,  $\vec{\sigma}$  is the Pauli spin matrices, and up to the second order of the expansion

$$J_z = \frac{4t^2}{U} - \frac{4t^2}{V}, \quad J_\perp = \frac{2t^2}{U}. \quad (2.3)$$

$\mu_c$  in Eq.(2.2) is the chemical potential of hole. In the following discussion, we shall treat  $t$ ,  $J_z$  and  $J_\perp$  as free parameters. In the system  $H_{\text{tJ}}$  in Eq.(2.2), the physical state at each site  $r$  is expanded by three orthogonal basis state vectors  $\{|0\rangle, |a\rangle = a_r^\dagger |0\rangle, |b\rangle = b_r^\dagger |0\rangle\}$ , where  $|0\rangle$  is the empty state of the bosons.

## III. SYSTEM IN GRAND-CANONICAL ENSEMBLE: MONTE-CARLO SIMULATIONS

In this section, we show the results of the phase structure obtained by the MC simulations for the system in the grand-canonical ensemble(GCE). This calculation corresponds to the case in which the density of particles can vary depending on the interactions between particles. In the cold atom system in an optical lattice, the system of the GCE corresponds to the case of nearly flat confining potential.

Partition function of the GCE at temperature  $T$ ,  $Z_{\text{GCE}}$ , is given by the path-integral methods as follows,

$$Z_{\text{GCE}} = \int [D\bar{w} D w D \bar{z} D z] e^{-\beta H_{\text{tJ}}(\bar{w}, w, \bar{z}, z)}, \quad (3.1)$$

where  $\beta = 1/(k_B T)$  and the Hamiltonian  $H_{tJ}(\bar{w}, w, \bar{z}, z)$  is obtained from  $H_{tJ}$  in Eq.(2.2). We have numerically studied the system (3.1) and obtained phase diagram etc for various values of the chemical potential  $\mu_c$ . In order to identify a phase boundary, we measured the ‘‘internal energy’’  $E$  and the specific heat  $C$ , which are defined as

$$E = \frac{1}{L^3} \langle \beta H_{tJ} \rangle, \quad C = \frac{1}{L^3} \langle (\beta H_{tJ} - U)^2 \rangle, \quad (3.2)$$

where  $L$  is the linear system size. We impose the periodic boundary condition for practical calculation.

### A. Phase diagram

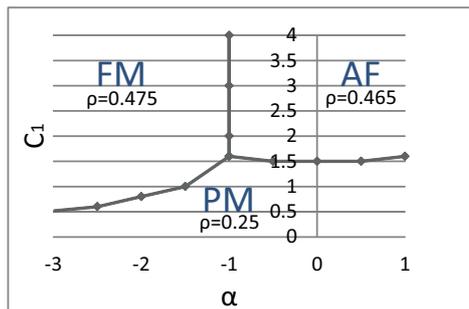


FIG. 1: Phase structure of model for  $t = \mu_c = 0$  in  $\alpha - c_1$  plane, where  $\alpha = -J_{\perp}/J_z$  and  $c_1 = \beta J_z$ . There are three phases, PM, AF and FM phases. Physical meaning of each phase is explained in the text. Typical value of particle density  $\rho = \langle a_r^\dagger a_r \rangle = \langle b_r^\dagger b_r \rangle$  in each phase is also shown.

We first consider the case of  $t = 0$ , i.e., the system without particle hopping. In Fig.1, we show the obtained phase diagram in the  $\alpha - c_3$  plane for  $\mu_c = 0$ , where  $\alpha = -J_{\perp}/J_z$  and  $c_3 = \beta J_z$ . Similar phase diagrams are obtained for other values of  $\mu_c$ . There are three phases, paramagnetic (PM),  $z$ -antiferromagnetically ordered (AF) and  $xy$ -ferromagnetic (FM) phases. At high- $T$ , the system is in the PM phase without any long-range order, as expected. As  $T$  is lowered, phase transition to the  $z$ -AF or  $xy$ -FM phase takes place. The AF state corresponds to the checkerboard state and the FM state to the state with the SCF, as we explained previously. These phase transitions are of second order. In the low- $T$  region, there exists a line of the phase boundary between the AF and FM phases at  $\alpha = -1$  as predicted by the MFT. On the line  $\alpha = -1$ , the pseudo-spin symmetry is enhanced to  $SU(2)$  as the inter-species and intra-species interactions between atoms are the same, otherwise the symmetry is  $U(1) \times Z_2$ . The enhancement of the symmetry is seen by the redefinition of operators as  $a_r \rightarrow -a_r$  for  $r \in$  odd site. By this redefinition,  $(S_r^x, S_r^y) \rightarrow -(S_r^x, S_r^y)$  for  $r \in$  odd site, and then  $J_{\perp} \rightarrow -J_{\perp}$ . For ferroelectric materials, similar transition line to the present  $\alpha = -1$  one is called a morphotropic phase boundary (MPB) and plays a very important role.

Results of study on systems with finite hopping  $t$  and systems in the canonical ensemble will be reported in a future publication[1].

---

[1] Y.Nakano, T.Ishima, N.Kobayashi, T.Yamamoto, I.Ichinose, and T.Matsui, paper in preparation;  
I.Ichinose, T.Ishima, N.Kobayashi, and Y.Kuno, paper in preparation.

# Analysis of cold fermi gas with p-orbit in optical lattice

小林恵太<sup>A B</sup>, 奥村雅彦<sup>A B</sup>, 太田幸宏<sup>C</sup>, 山田進<sup>A B</sup>, 町田昌彦<sup>A B</sup>  
原子力研究開発機構<sup>A</sup>, CREST(JST)<sup>B</sup>, 理化学研究所<sup>C</sup>

## 1 はじめに

光学格子中の中性原子気体実験は急速に進歩しており、様々なパラメーター（相互作用、温度、トラップポテンシャルの形状等）の制御性の高さから、量子多体系の、特に強相間電子系の量子シミュレーターとして期待されている。また、近年では  $p$  バンド中の原子気体の実現しており [1]、より複雑かつ多彩な強相間多体効果が観測されようとしている。特に多バンドの自由度を実現することにより、高温超伝導、軌道秩序、磁性などの問題に対し新たな物理を与えてくれるものと思われる。例えば、 $p$  バンド中の原子気体はスピン  $3/2$  ハイゼンベルグモデルとして記述されることが論文 [2] において示されている。本稿ではバンドの自由度を利用することにより、中性原子気体フェルミオン気体においてハルデー相を実現する方法を提案する。具体的には擬一次元系を考え、サブバンドの自由度を用いることにより、系が一次元スピン 1 のハイゼンベルグモデルに帰着する事を示す。現実の中性原子気体では光学格子ポテンシャルと共に調和振動子ポテンシャルが存在する。本稿では調和振動子ポテンシャルを加えた擬一次元系のハバードモデルに対し密度行列繰り込み群 [3] を用いた数値計算を行ううことにより、有限サイズ擬一次元系においてハルデー相がどのように出現するのか明らかにする。

## 2 擬一次元ハバードハミルトニアン

本稿では、次の擬一次元光学格子フェルミオン原子気体を記述するモデルハミルトニアンを考える。

$$H = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int d\mathbf{x} \left[ \psi_{\sigma}^{\dagger} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{opt}}(z) + V_{\text{ho}}(\mathbf{x}_{\perp}) \right) \psi_{\sigma} + \frac{g}{2} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \psi_{\sigma} \right] \quad (1)$$

ここで  $\psi_{\sigma}$  はフェルミ場の演算子である。今、 $z$  方向に光学格子ポテンシャル  $V_{\text{opt}}(z)$  が存在し、光学格子ポテンシャルに垂直な方向に閉じ込めポテンシャル  $V_{\text{ho}}(\mathbf{x}_{\perp})$  が存在するとしている。本稿では  $V_{\text{ho}}(\mathbf{x}_{\perp})$  は円柱対称である場合を考えている。場  $\psi_{\sigma}$  を次のように展開する:  $\psi_{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{n_{\text{sb}}, n_{\text{b}}, \sigma, i} a_{n_{\text{sb}}, \sigma, i} W_{n_{\text{b}}, i}(z) u_{n_{\text{sb}}}(\mathbf{x}_{\perp})$  ここで  $n_{\text{sb}}$  は垂直方向閉じ込めポテンシャルによって生じるサブバンドであり、 $u_{n_{\text{sb}}}$  は固有値方程式  $h_0 u_n(\mathbf{x}_{\perp}) = \epsilon_n u_n(\mathbf{x}_{\perp})$ ,  $h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 + V_{\text{ho}}(\mathbf{x}_{\perp})$  により与えられる。また、 $n_{\text{b}}$  はブロッホバンドを表しており、 $W_{n_{\text{b}}, i}(z)$  はワニエ関数である。以後は（第一ブロッホバンド） $\gg$ （第一サブバンド）の状況を想定し（光学格子ポテンシャルが強い状況）ブロッホバンドの寄与を無視する。第一サブバンドまでの寄与を取り入れ、強結合近似の下で次の擬一次元ハバードハミルトニアンを得る。

$$H = \sum_{n=g, e_1, e_2} \left[ - \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{\langle i, j \rangle} J a_{n, \sigma, i}^{\dagger} a_{n, \sigma, j} + \sum_{i, \sigma} \epsilon_n a_{n, \sigma, i}^{\dagger} a_{n, \sigma, i} + U_{nn} \sum_i a_{n, \uparrow, i}^{\dagger} a_{n, \downarrow, i}^{\dagger} a_{n, \downarrow, i} a_{n, \uparrow, i} \right] + \sum_{n \neq n'} U_{nn'} \left[ a_{n, \uparrow, i}^{\dagger} a_{n, \downarrow, i}^{\dagger} a_{n', \downarrow, i} a_{n', \uparrow, i} + a_{n, \uparrow, i}^{\dagger} a_{n', \downarrow, i}^{\dagger} a_{n', \downarrow, i} a_{n, \uparrow, i} + a_{n, \uparrow, i}^{\dagger} a_{n', \downarrow, i}^{\dagger} a_{n, \downarrow, i} a_{n', \uparrow, i} \right], \quad (2)$$

ここで  $n = g$  は基底サブバンド、 $n = e_1, e_2$  は第一サブバンドであり、垂直方向閉じ込めポテンシャルのため第一サブバンドは 2 重縮退している。また、ホッピング  $J$ 、オンサイト相互作用  $U_{nn'}$  は

$$J = - \int d\mathbf{x} W_{i+1}^*(z) u_n^*(\mathbf{x}_{\perp}) \left[ \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{opt}}(z) \right] W_i(z) u_n(\mathbf{x}_{\perp}), \quad U_{nn'} = g \int d\mathbf{x} |W_i(z)|^4 |u_n(\mathbf{x}_{\perp})|^2 |u_{n'}(\mathbf{x}_{\perp})|^2,$$

により与えられる(ここで  $u_n(x_\perp)$  の対称性を用いた)。擬次元ハバードハミルトニアンの特徴としてバンド間相互作用の存在が上げられる。式(2)において二行目、第一項はバンド間のペアホッピングを表す項である。第二項目以降の項の役割を見るために、 $1/2$  スピン演算子  $S_{n,i}$  を用いると  $-\sum_{n \neq n'} U_{nn'} (S_{n,i} \cdot S_{n',i} - \frac{1}{4} n_{n,i} n_{n',i})$  と表現でき、バンド間に強磁性的な相互作用が働くことが解る。つまり各々のバンドにおいてハーフフィリングである場合、バンド間でスピンはトリプレットを組むことにより安定化することになる。以上から、バンド間相互作用の存在のため擬次元系では磁性に大きな影響が現れることが予想される。以下で摂動論による解析により、擬次元モデルがスピン1のハイゼンベルグモデルに帰着されることを示す。原子が基底サブバンドから第一サブバンドまで占有している状況を考え、基底サブバンドは2重占有、第一サブバンドはハーフフィリングである状況を考える。式(2)において  $J=0$  とした場合の固有状態はバンド間スピントリプレット状態がエネルギー  $E = U_g + 2U_{ge} + 2(\epsilon_s + \epsilon_g)$  を持ち、シングレット状態がエネルギー  $E = U_g + 2(U_{ge} + U_{ee'}) + 2(\epsilon_s + \epsilon_g)$  を持つ。  $U_{ee'} > 0$  であることから、第一サブバンド間でトリプレットを組んだ状態が基底状態となる。ホッピング項  $J$  に対する2次摂動の範囲で有効ハミルトニアン  $H_J = \sum_e P_G H_{\text{hop}} P_E (E_G - H_U)^{-1} P_E H_{\text{hop}} P_G$  を導出する。ここで  $P_G$  は基底状態への射影演算子であり、 $P_E$  は部分空間  $\mathcal{H}_{d,i} \otimes \mathcal{H}_{h,j}$  への射影演算子であり、 $\mathcal{H}_{d,i} = \{|d\rangle_{g,i}|d,\uparrow\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|d,\downarrow\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|\uparrow\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|\downarrow\rangle_{e,i}\}$ 、及び  $\mathcal{H}_{h,i} = \{|d\rangle_{g,i}|0,\uparrow\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|0,\downarrow\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|\uparrow,0\rangle_{e,i}, |d\rangle_{g,i}|\downarrow,0\rangle_{e,i}\}$  である(ここで  $d$  は2重占有を意味する)。具体的な計算を進めることにより、有効ハミルトニアンはスピン1ハイゼンベルグモデル

$$H_J = J_{ex} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + (\text{定数}) \quad (3)$$

に帰着されることになる。ここで、 $J_{ex} = \frac{J^2}{2(U_e + U_{ee'})}$  は有効相互作用であり、スピン1演算子はフェルミオン演算子を用いて  $S_i^{(m)} = \frac{1}{2} \sum_{e_l} \mathbf{a}_{i,e_l}^\dagger \sigma^{(m)} \mathbf{a}_{i,e_l}$  と定義されている(ここで、 $m = x, y, z$ 、及び  $\mathbf{a}_{i,e_l} = (a_{i,e_l,\uparrow}, a_{i,e_l,\downarrow})^t$ 、 $\sigma^{(m)}$  はパウリ行列である)。次元スピン1ハイゼンベルグモデルの基底状態はハルデー相とよばれ、スピンギャップの存在、有限系においては開放端条件の下でエッジが  $1/2$  スピンとして振る舞うことが知られている。現実の中性原子気体は光学格子ポテンシャルと共に調和振動子ポテンシャルがかかったトラップ有限系である。以後は密度行列繰り込み群法による数値計算により、トラップ有限系におけるハルデー相の効果を見る。

### 3 密度行列繰り込み群による数値計算結果

数値計算にあたり、式(2)に調和振動子ポテンシャル  $\frac{V}{(I-1)/2^2} (i - (I+1)/2)^2$  を加えたハバードモデルを計算する。ここで  $I$  は光学格子の総サイト数である。尚、数値計算では有効モデルとして基底サブバンドを無視した2-legモデルを扱う。また、垂直方向閉じ込めポテンシャルを調和振動子ポテンシャルとした場合、バンド内相互作用  $U_{nn}$  とバンド間相互作用  $U_{nn'}$  の関係が解析的に求まり、 $U_{nn'} = \frac{4}{9} U_{nn}$  となる。具体的にスピンインバランス数を変えていくことにより擬次元ハバードモデル、ハバードモデルにおける磁化率および磁気構造に注目した。

図1(a)-1, (b)-1では擬次元、次元ハバードモデルに対する密度分布を計算している。共にトラップ中央部にハーフフィリング状態のモット領域が出現し、その周りを金属相が出現していることが解る[4, 5]の手法を用い、図1(a)-2, (b)-2はモット領域における磁化率[4]:  $M = (\sum_{i \in \text{Mott}} [n_{i,\uparrow} - n_{i,\downarrow}]) / (\sum_{i \in \text{Mott}} [n_{i,\uparrow} + n_{i,\downarrow}])$  とインバランス率:  $p = (\sum_i [n_{i,\uparrow} - n_{i,\downarrow}]) / (\sum_i [n_{i,\uparrow} + n_{i,\downarrow}])$  の関係を表示したものである。通常の次元ハバードモデルではインバランス率の変化に対しモット領域では線形に磁化していく(図1(b)-1)。それに対し、擬次元モデルにおいてインバランス率が低い場合にはモット領域は磁化を持たないことが解る(図1(b)-1)。この結果はモット領域においてハルデー相が実現しておりスピンギャップがスピンをモット領域から排斥しているためである。図1では、擬次元系、次元系におけるスピン偏極  $m_i = n_{\uparrow,i} - n_{\downarrow,i}$  をプロットした。次元系図1(b)-1~5ではスピンインバランス数を増やすにつれ、モット領域全体にスピン密度波[5]が発達していることが解る。それに対し擬次元系では、スピンインバランス数が小さい場合には、モット領域と金属領域の境界からスピン密度波が現れ、モット領域の中央に向かうに従い指数関数的な減衰をみせることが解る。この結果は、磁場中のスピン1ハイゼン

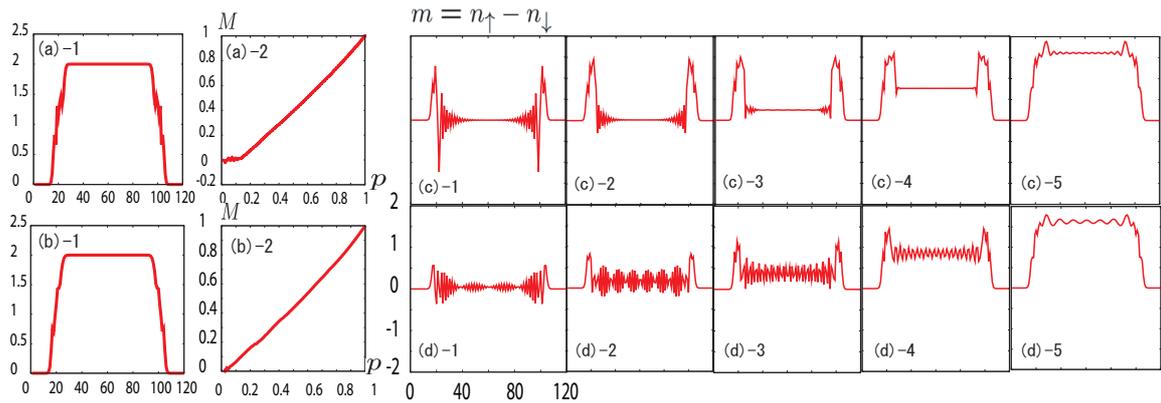


図 1: (a)-1 は擬一次元 Hubbard モデルの数値計算から得られる密度分布であり (b)-1 はバンド間相互作用  $U_{nn'} = 0$  とした、一次元 Hubbard モデルに相当するものである。全原子数は 164 個であり、スピンインバランス数  $N_{\uparrow} - N_{\downarrow} = 20$  としている。(a)-2, (b)-2 はモット領域における磁化率をインバランス率に対し計算したものである。(c)-1 ~ 5 は擬一次元モデルにおける、光学格子中の磁気構造をスピンインバランス数 6, 10, 20, 80, 140 としてプロットした。(d)-1 ~ 5 は擬一次元モデルにおいてバンド間相互作用  $U_{nn'}$  をゼロにしたものであり、一次元 Hubbard モデルの結果に相当する。計算パラメーターはバンド内相互作用  $U_{nn}/J = 15$ 、バンド間相互作用  $U_{nn'}/J = 15\frac{4}{9}$ 、ポテンシャル強さ  $V/J = 7$ 、総サイト数  $I = 120$  としている。

ンベルグモデルの数値計算結果 [6] と同様のものであり、ハルデー相の端点が  $1/2$  スピンとして振る舞うことによる。スピン 1 ハイゼンベルグモデルは VBS 状態として理解され開放端において  $1/2$  スピンとしての振る舞いが現れることが知られているが、モット領域と金属領域の境界においても同様の振る舞いが現れることは興味深いと言える。また、図 (c)-1 ~ 2 ではスピンギャップのためにモット領域から排斥されたスピンの金属相に溜まっていることが見て取れる。更にスピンインバランス数を増やしていくと指数関数的に減衰するスピン密度波が消失し、モット領域では一様な磁化が現れることが解る。これらの振る舞いは通常の一次元系の磁性とは質的に異なることが見てとれるだろう。

## 4 まとめ

本稿ではバンド間自由度を利用することにより、ハルデー相を実現する方法の提案、またトラップ有限系においてどのような磁気構造が現れるかを密度行列繰り込み群による数値計算を用いて示した。中性原子気体系において磁気構造などの情報は観測可能な情報と言えるため、ハルデー相が実現した場合の一つの指標となると考えられる。今後の課題としては時間依存密度行列繰り込み群法を用いた励起状態の解析などが挙げられるであろう。

## 参考文献

- [1] Torben Müller, Simon Fölling, Artur Widera, and Immanuel Bloch, Phys. Rev. Lett. **99**, 200405 (2007).
- [2] Kai Wu and Hui Zhai, Phys. Rev. B **77**, 174431, (2008).
- [3] S.R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992); Phys. Rev. B **48**, 10345 (1993).
- [4] M.Okumura, S.Yamada, M. Machida, and T. Sakai, Phys. Rev. A **79**, 061602(R), (2009).
- [5] M.Machida, M.Okumura, S.Yamada, T.Deguchi, Y. Ohashi, and H. Matsumoto, Phys. Rev. B **78**, 235117, (2008).
- [6] S.Miyashita and S. Yamamoto, Phys. Rev. B **48**, 913, (1993)

# 光格子系における長岡強磁性

奥村雅彦<sup>1,2,3,4</sup>, 山田進<sup>1,2,3</sup>, 町田昌彦<sup>1,2</sup>, 青木秀夫<sup>5</sup>

- 1) 日本原子力研究開発機構 システム計算科学センター      2) CREST(JST)  
3) 計算科学研究機構      4) 理化学研究所      5) 東京大学 理学部

## 1 はじめに

ハバード模型は固体中の電子の振る舞いを記述する最も単純な模型の一つである。この模型は、電子の動きを原子を表す格子点の間のホッピングと、電子間の接触型相互作用で近似敵に記述する。この模型は電子の振る舞いを非常に単純化してあるが、この模型の相図は未だ明らかになっていない。特に、高温超伝導体との関連で電子間相互作用が強い場合に、2次元ハバード模型の基底状態がd波超伝導であるかどうかに興味を持たれている。しかし、相互作用が強いため、解析的に基底状態を知る事は難しい。そこで、数値シミュレーションによる解析が力を発揮すると期待されるが、無限系の基底状態を知るためには膨大な計算機資源が要求されるため、数値シミュレーションによって不定性なく基底状態を決定することは、少なくとも今後しばらくは難しいと言わざるを得ない。このように、既存の方法では得る事が難しい強相関電子系の基底状態であるが、最近、新しい手法「量子シミュレーター」によってそれを得ようと言う試みが注目を集めている。

量子シミュレーターにはいくつか候補があるが、本稿では中性原子系に焦点を当てる。中性原子気体系はボース・アインシュタイン凝縮の実現をきっかけに、量子多体系の試験場としての役割を果たしてきた。近年、特にフェルミ原子光格子系が注目を集めている [1, 2]。この系は、レーザーの定在波によって作られた周期ポテンシャルの中にフェルミ原子を閉じ込めた系で、この系のフェルミ原子はハバード模型によって記述される事がわかっている。具体的には、格子模型の格子点は光格子のポテンシャルの底に、格子模型の電子は光格子系の原子に対応する。つまり、フェルミ原子光格子系は電子系を簡略化したハバード模型を実験室で実現した系である。しかし、いくら固体系を単純化したハバード模型を実現したからと言って、この系が固体系よりも扱いづらい系では意味がない。その点、フェルミ原子光格子系はレーザーの出力や外部磁場を調節する事によってホッピング・パラメータや相互作用の引力・斥力とその強弱などを自在に変える事ができるため、ハバード模型のほぼ全てのパラメータ領域を実現し、調べる事が出来る。これらの特徴から、フェルミ原子光格子系は強相関電子系の「量子シミュレーター」と言えるのである。

この「量子シミュレーター」を用いて固体中の電子の基本物性を明らかにしようとする試みの中で最も興味を惹くのは上記の基底状態がd波超伝導状態か否かである。しかし、それ以外にも、ボース・アインシュタイン凝縮のように、中性原子気体系でなければ実現は難しいと考えられる特異な現象が存在する。その中でも、本稿では「長岡強磁性」をフェルミ原子光格子系で実現する方法について議論する [3]。

## 2 長岡強磁性とその拡張

長岡強磁性とは、以下の条件を満たすハバード模型の基底状態が示す強磁性状態の事である [4] : 1) 相互作用は斥力で無限大、2) 1 ホール (ハーフ・フィリングから電子を一つ抜いた状態)、3) 接続条件 (connectivity condition) を満たす。これらの条件のもとでは、ハバード模型の基底状態は強磁性状態で

あることが解析的に示されており、数少ないハバード模型における解析解の一つである。これらの条件のうち、1と2は非常に厳しい条件であり、固体系で実現させるのは大変難しいと考えられている。しかし、フェルミ原子光格子系の制御性の高さを活かせば、この系も実現可能だと期待される。実際、4サイトのプラケットを光格子で作出し、長岡強磁性を実現しようとする提案もなされている [5]。

しかし、フェルミ原子光格子系では、周期ポテンシャルの他に、調和型のトラップポテンシャルがかかるため、空間的に不均一な系になってしまうため、一様に4サイトのプラケットを敷き詰めたような理想的な系を作る事は難しい。そこで、我々は、長岡強磁性を拡張した、「有限ホール密度長岡強磁性」に着目した。この有限ホール密度長岡強磁性は、オリジナルの長岡強磁性の条件2を緩和したもので、梯子状のハバード模型におけるある極限で基底状態が強磁性状態になる事が解析的に示されている [6]。また、その極限からずれた一般的な場合にも、数値シミュレーションによって基底状態が強磁性状態であることが示されている [6]。この有限ホール密度長岡強磁性は、オリジナルの長岡強磁性よりもフェルミ原子光格子系において実現が易しいと思われる。しかし、調和型のトラップポテンシャルの存在の影響や、実際の実験における相互作用の大きさは有限の有限性(条件1の一般化)の影響を考慮すると、現実のフェルミ原子光格子系でどのように有限ホール濃度長岡強磁性が実現し、どのように観測されるかは自明な事ではない。

そこで、本研究では、a) 調和型トラップポテンシャルの影響の評価、b) 実現性・観測可能性の追求、c) 有限ホール密度長岡強磁性が最大となるようなパラメータの探索を中心に、フェルミ原子光格子系における有限ホール密度長岡強磁性の実現について、並列化密度行列繰り込み群法 [7] を用いて、数値シミュレーションで評価した。

### 3 梯子型フェルミ原子光格子系

本稿では調和型トラップポテンシャルを考慮した梯子型ハバード模型

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \alpha, \sigma} (c_{i\sigma}^{\alpha\dagger} c_{j\sigma}^{\alpha} + \text{H.c.}) - t_{\perp} \sum_{i, \sigma} (c_{i\sigma}^{1\dagger} c_{i\sigma}^2 + \text{H.c.}) + \sum_{i, \alpha, \sigma} V (x_i^{\alpha} - x_c)^2 n_{i\sigma}^{\alpha} + \sum_i U n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}.$$

を扱う (図1)。 $t$ 、 $t_{\perp}$  はホッピングパラメータ、 $V$  はトラップの強さ、 $x_i^{\alpha} (\equiv ai)$  は  $i$  番目のサイトの位置 ( $a$  は格子定数)、 $U$  はオンサイトの相互作用、 $i$ 、 $j$  は梯子の長い方向、 $\alpha$  は短い方向のサイト番号、 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 、 $\langle i, j \rangle$  は再近接サイトの和を取る事を表す。本稿では  $J = 1$ 、系の大きさ  $L = 80-180$ 、粒子数  $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = 100$ 、トラップの中心  $i_c = x_c/a = (L+1)/2$ 、残す状態数は  $m = 800-1200$  でシミュレーションを行った。それぞれの計算においては  $V$  を変化させ、トラップ中心部の粒子密度を1より小さくなるように調節して、系全体において金属状態になるようにした。

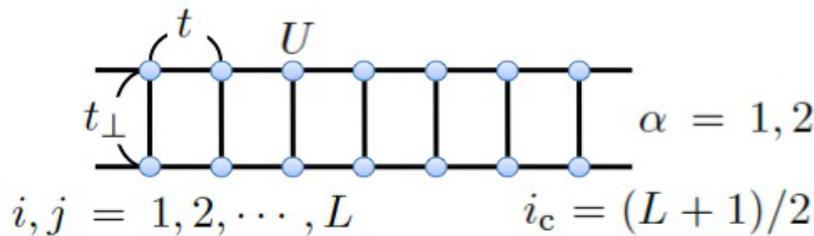


図1: 梯子型ハバード模型

## 4 結果

図2に  $t/t_{\perp} = 1$ ,  $U/t = 50$ ,  $V/t = 3 \times 10^{-3}$ ,  $L = 100$  でスピンバランス  $p = (N_{\uparrow} - N_{\downarrow})/N$  を変化させた結果を示す。ここで、 $n_i = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ ,  $n_{Si} = n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$  であり、NP は非偏極 (No Polarized)、PP は部分偏極 (Partially Polarized)、FP は完全偏極 (Fully Polarized) である。これらを見ると、トラップ中央付近に FF (強磁性) 相が現れている事がわかる。それぞれの相が現れている粒子密度を見てみると、相互作用の強さが無限大で調和型トラップがない場合の先行研究で得られている相図とほぼ対応している事がわかる [6]。つまり、光格子系では調和型トラップによる粒子密度変化が存在するために、トラップなしの系の相図が空間分布として得られるのである。また、スピン密度分布は既存の観測方法で観測可能であり [8]、光格子実験に適した実現方法であると言える。

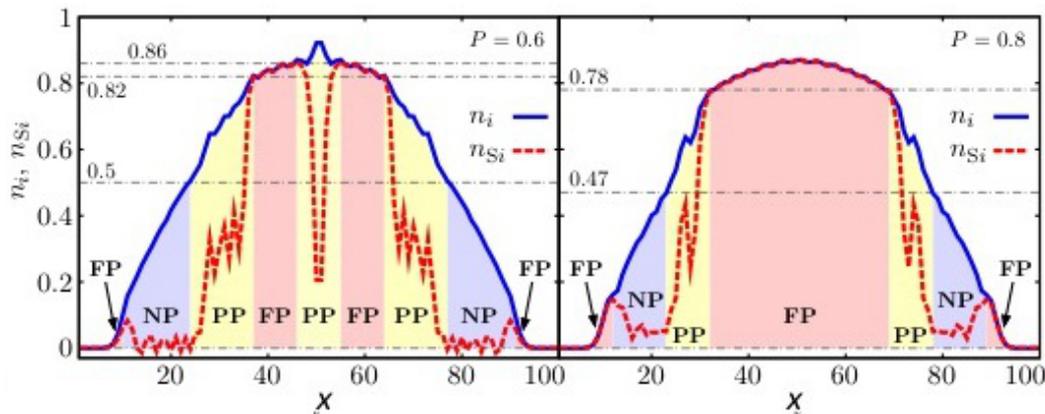


図2:  $p = 0.6, 0.8$  の場合の粒子密度  $n_i$  とスピン密度  $n_{Si}$  の空間分布

## 5 まとめ

本研究では、未だ実現していない有限ホール密度長岡強磁性を、フェルミ原子光格子系で実現する方法を提案した。そして、実際に数値シミュレーションを用いる事によってどのように実現・観測されるかを具体的に示した。さらに、文献 [3] では、この実現した強磁性状態が確かに有限ホール密度長岡強磁性に由来するものである事と、強磁性相が最も大きくなるパラメータの探索を行ったので、そちらも参照されたい。

## 参考文献

- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [2] 奥村雅彦, 物性研究 **96**, 617 (2011).
- [3] M. Okumura, S. Yamada, M. Machida, and H. Aoki, Phys. Rev. A **83**, 031606(R) (2011).
- [4] Y. Nagaoka, Phys. Rev. B **147**, 392 (1966); D.J. Thouless, Proc. Phys. Soc. London **86**, 893 (1965); H. Tasaki, Phys. Rev. B **40**, 9192 (1989).
- [5] J. von Stecher *et al.*, New J. Phys. **12**, 055009 (2010).
- [6] M. Kohno, Phys. Rev. B **56**, 15015 (1997).
- [7] S. Yamada, M. Okumura, and M. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **78**, 094004 (2009).
- [8] Y. Shin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 030401 (2006).

# Anomaly-induced charges in nucleons

Yu MAEZAWA RIKEN

<sup>1</sup>Recent advance in observations and experiments explores new effects of strong electromagnetic fields on fundamental particles. Since matter consists of baryons, electromagnetic properties of protons and neutrons are of most importance. Under the strong magnetic fields such as in neutron stars, supernovae and heavy ion collisions, tiny quantum effect of quantum chromo-dynamics may lead to an unveiled and significant consequence.

In this article, we investigate baryons under external electromagnetic fields. For describing the baryons, we use the Skyrme model [2] with Wess-Zumino-Witten (WZW) term [3, 4] including electromagnetism. The consequence is amazing: Nucleons in the external electromagnetic fields have anomalous charge distribution due to the chiral anomaly. Nonzero net charge, which is generally non-integer, is induced *even for neutrons*. Correspondingly, we will show that the Gell-Mann-Nishijima formula,  $Q = I_3 + N_B/2$  ( $Q$ : electric charge,  $I_3$ : the third component of isospin,  $N_B$ : baryon number), has an additional term due to the quantum anomaly.

Figure 1 shows a schematic description of the phenomenon. Due to the anomalous interaction with a quark loop through the WZW term, nucleons (= Skyrmions) have an additional interaction to the electromagnetic field  $A_\mu$ . Under the external electromagnetic fields, the anomalous coupling induces the additional electric charge.

*Skyrmions and anomaly.* — We adopt the Skyrme model for a concrete illustration in this article. The essential idea of the Skyrme model is to unify baryons and mesons: baryons are described as topological solitons of mesons. This

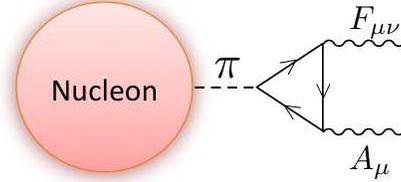


Figure 1: A schematic figure for electric charge generation of a nucleon.

model, known to reproduce experimental data of nucleons within 30% accuracy, is suitable for our purpose. This is because we concentrate on the anomalous contribution to baryons, which is described by the coupling between mesons and photons shown in Fig. 1. Any baryons wearing mesonic clouds will follow our mechanism of anomalous charge generation.

The action of two-flavor Skyrme model [2, 5, 6] coupled with electromagnetic field is

$$S = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{mass}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{F_\pi^2}{16} \text{tr}(\hat{R}_\mu \hat{R}^\mu) + \frac{1}{32e_s^2} \text{tr}([\hat{R}_\mu, \hat{R}_\nu][\hat{R}^\mu, \hat{R}^\nu]),$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{F_\pi^2}{16} m_\pi^2 \text{tr}(U + U^\dagger - 2), \quad \hat{R}_\mu = D_\mu U U^\dagger,$$

where  $m_\pi$  and  $F_\pi$  are the pion mass and the pion decay constant, respectively.  $e_s$  is a dimensionless constant and  $D_\mu U \equiv \partial_\mu U + ieA_\mu[q, U]$  with  $q \equiv \text{diag}(2/3, -1/3)$ . The pseudo-scalar field  $U$  is an  $SU(2)$  matrix which transforms as  $U \rightarrow G_L U G_R^\dagger$  with  $G_L \in SU(2)_L$  and  $G_R \in SU(2)_R$ . In the following, we use dimensionless variables:  $r \rightarrow r/(e_s F_\pi)$  and  $m_\pi \rightarrow (e_s F_\pi) m_\pi$ . In the Skyrme model, a general hedgehog-type ansatz in the absence of the electromagnetic background is written as

$$U = G U_0 G^\dagger = G \exp(i f(r) \hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau}) G^\dagger, \quad (1)$$

$$G = a_0 + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \in SU(2)_{L+R}, \quad (a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1),$$

<sup>1</sup> This is study in collaboration with M, Eto (Yamagata Univ.), K, Hashimoto, H, Iida (RIKEN) and T, Ishii (Univ. of Cambridge), and summarized in Ref. [1]

where  $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  are Pauli matrices, and  $(a_0, \mathbf{a})$  are moduli parameters spanning  $SU(2)_{L+R} \simeq S^3$ . We treat electromagnetic effects as a perturbation in terms of  $e$ . The equation of motion gives

$$\left(\frac{r^2}{4} + 2\sin^2 f\right) f'' + \frac{r}{2} f' + \sin(2f) \left(f'^2 - \frac{1}{4} - \frac{\sin^2 f}{r^2}\right) - \frac{m_\pi^2 r^2}{4} \sin f = 0.$$

Solving this under the boundary conditions,  $f(0) = \pi$  and  $f(r \rightarrow \infty) = 0$ , one obtains a solution with baryon number  $B = 1$ . The solution is a topological soliton, called Skyrmion.

We focus on the coupling between mesons and photons in the WZW term. In the two-flavor case, this can be given by [7, 4, 3]

$$S_{\text{WZW}} = - \int d^4x A_\mu \left( \frac{eN_c}{6} j_B^\mu + \frac{1}{2} j_{\text{ann}}^\mu \right), \quad (2)$$

$$j_B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}[R_\nu R_\rho R_\sigma], \quad (3)$$

$$j_{\text{ann}}^\mu = - \frac{ie^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \text{tr}[\tau_3(L_\sigma + R_\sigma)], \quad (4)$$

where  $j_B^\mu$  is a baryon current giving an integer baryon number,  $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ ,  $R_\mu = \partial_\mu U U^\dagger$ , and  $\epsilon^{0123} = -1$  in this article.

In the presence of background electromagnetic fields, not only the first term but also the second term in Eq. (2) is important. The electric charge  $Q$  with the contribution from anomaly ( $N_c = 3$ ) is written as

$$Q = I_3 + N_B/2 + Q_{\text{ann}}/2, \quad (5)$$

where  $N_B = \int d^3x j_B^0$  and  $Q_{\text{ann}} = \int d^3x j_{\text{ann}}^0$ . Thus, the Gell-Mann-Nishijima formula is corrected under background electromagnetic fields. Substituting Eq. (1) into Eq. (4), we obtain

$$\begin{aligned} j_{\text{ann}}^\mu &= \frac{ie^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} P_\sigma, \\ P_\mu &= 4i \left[ (\partial_\mu f) \hat{x}_3^{\text{rot}} + \frac{\sin(2f)}{2} \partial_\mu (\hat{x}_3^{\text{rot}}) \right], \\ \hat{x}_3^{\text{rot}} &= (a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) \hat{x}_3 \\ &\quad + 2(a_1 a_3 + a_0 a_2) \hat{x}_1 + 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) \hat{x}_2. \end{aligned}$$

This is a classical anomalous current for the general hedgehog solutions.

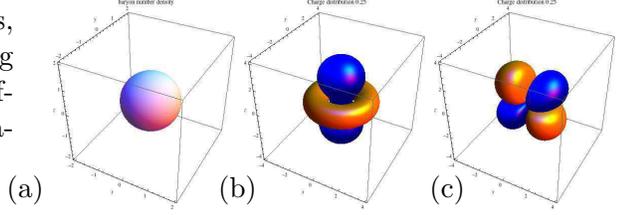


Figure 2: The constant-height surfaces of (a) density distribution of baryon number, (b) electric charge under magnetic field along the 3rd-axis, and (c) electric charge under magnetic field along the 1st-axis.

*Induced charges from quantized Skyrmion.* — To obtain physical values of the anomalous charge depending on the baryon states, we need to quantize the Skyrmion. By solving a quantum mechanics of the  $S^3$  moduli parameters on the Skyrmion, quantum states of a nucleon with spin quantized along  $x^3$  are given by  $\psi_{p\uparrow} = (a_1 + ia_2)/\pi$ , etc.[5]. We evaluate matrix elements of the anomalous current,

$$\langle j_{\text{ann}}^\mu \rangle_{I_3, S_3} \equiv \int d\Omega_3 \psi_{I_3, S_3}^* j_{\text{ann}}^\mu(a_0, \mathbf{a}) \psi_{I_3, S_3},$$

where  $\int d\Omega_3$  denotes the integration over the  $S^3$ , and  $\psi_{I_3, S_3}$  is the baryon states labeled by the third components of isospin and spin. The matrix elements are calculated as

$$\langle j_{\text{ann}}^\mu \rangle_{I_3, S_3} = \frac{ie^2 N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \langle P_\sigma \rangle_{I_3, S_3},$$

$$\langle P_0 \rangle_{I_3, S_3} = 0,$$

$$\langle P_a \rangle_{I_3, S_3}^{a=1,2} = -\frac{16i}{3} I_3 S_3 \left( f' - \frac{\sin(2f)}{2r} \right) \hat{x}_a \hat{x}_3,$$

$$\langle P_3 \rangle_{I_3, S_3} = -\frac{16i}{3} I_3 S_3 \left[ \left( f' - \frac{\sin(2f)}{2r} \right) \hat{x}_3^2 + \frac{\sin(2f)}{2r} \right].$$

In the following, we concentrate on the case with magnetic-field backgrounds  $B_i$ . The anomalous charge density is indeed induced in nucleons:

$$\langle j_{\text{ann}}^0 \rangle_{I_3, S_3} = \frac{ie^2 N_c}{48\pi^2} B_i \langle P_i \rangle_{I_3, S_3}. \quad (6)$$

Figure 2 shows the baryon number distribution, and the anomalous charge distribution under magnetic field along the 3rd- and the 1st-axes

of quantized Skyrmions at  $m_\pi = 0$ . The configurations of the charge distribution look like wave functions of an electron in a hydrogen atom.

In contrast, we find that the matrix element of the spatial component of the current density vanishes,  $\langle j_{\text{anm}}^i \rangle_{I_3, S_3} = 0$ . Thus, the electric current is not induced [8].

Let us calculate the total electric charge from the anomalous effect of  $\langle P_i \rangle_{I_3, S_3}$  over the whole space gives

$$\int d^3x \langle P_i \rangle_{I_3, S_3} = \begin{cases} 0 & (i = 1, 2), \\ -\frac{16\pi i}{9} (4I_3 S_3) c_0 & (i = 3), \end{cases}$$

where  $c_0 = \int dr \{r^2 f' + \sin(2f)\}$ . Its numerical value is  $c_0 = (-5.32, -12.3, -10.2, -7.32)$  for pion masses  $m_\pi = (0, m_\pi^{\text{phys}}/2, m_\pi^{\text{phys}}, 2m_\pi^{\text{phys}})$ , respectively ( $m_\pi^{\text{phys}} \equiv 0.263$  is the physical value of the pion mass in the unit of  $eF_\pi$ , determined from the mass splitting between nucleon and  $\Delta$  [5]). We obtain the anomalous charge for nucleons

$$Q_{\text{anm}} = \frac{4e^2 N_c}{27\pi} I_3 S_3 \frac{c_0 B_3}{(e_s F_\pi)^2}. \quad (7)$$

Equation (7) shows that an electric charge is actually induced by the anomalous effect *even for a neutron*. We further find that dipole moment vanishes while quadrupole moment appears as a leading multipole [8].

*Observation.* — Let us argue possibilities to observe the anomalous charge. First, we estimate the amount of induced charge in a nucleon. Using Eq. (7), we obtain  $Q_{\text{anm}} \sim e \times 10^{-20} I_3 S_3 [\text{G}^{-1}] \times B_3 [\text{G}]$ . Under the terrestrial magnetic field  $B \sim 1[\text{G}]$ , the induced charge  $Q_{\text{anm}}$  is about  $10^{-20}e$ , which would be too small to observe. On the surface of a magnetar, which is a neutron star with very strong magnetic field of order  $10^{15}[\text{G}]$  [9],  $Q_{\text{anm}}$  is about  $10^{-5}e$ . In heavy ion collisions, magnetic field of order  $10^{17}[\text{G}]$  would be created [?]. However,  $Q_{\text{anm}}$  is about  $10^{-3}e$  even for such an extremely strong magnetic field. Hence, it is natural that the electric charge of neutrons has never been detected until now.

Next, electric dipole moment (EDM) of nucleons is not induced from the anomaly. This is consistent with the experimental results that there is no evidence for the existence of neutron EDM (see, e.g., [10]), which is performed under a magnetic field. In our study, the leading multipole is a quadrupole,  $Q_{33} = -2Q_{11} = -2Q_{22} \sim e \times 10^{-19} I_3 S_3 [\text{fm}^2 \text{G}^{-1}] \times B_3 [\text{G}]$ . Its experimental measurement would be interesting.

To see the universality of the generation of the anomalous charge, confirmation in other approaches is desirable. For instance, lattice QCD simulation with external electromagnetic fields is a reliable approach. Holographic QCD is also helpful for gaining insights.

We have found that a neutron has a nonzero electric charge in external magnetic fields. Neutrons play an important role on the frontiers of hadron physics, such as neutron stars and heavy-ion collisions, where strong magnetic fields exist. Such neutrons would have anomalous charges which may be physically significant. Our results will bring new aspects of the dynamics of hadrons.

- [1] M. Eto *et al.*, [arXiv:1103.5443].
- [2] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. A260, 127, (1961).
- [3] J. Wess and B. Zumino Phys. Lett. **B37**, 95 (1971).
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983); Nucl. Phys. **B223**, 433 (1983).
- [5] G. S. Adkins *et al.*, Nucl. Phys. **B228**, 552 (1983).
- [6] G. S. Adkins *et al.*, Nucl. Phys. **B233**, 109 (1984).
- [7] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. **D77**, 014021 (2008).
- [8] M. Eto *et al.*, [arXiv:1109.0020].
- [9] C. Thompson and R. C. Duncan, Mon. Not. R. Astron. Soc. **275**, 255 (1995).
- [10] C. A. Baker *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 131801 (2006).

# 四元数を用いたドメインウォールフェルミオン格子シミュレーション

## A DWF Lattice QCD Simulation using Quaternion Basis <sup>1</sup>

古井 貞隆 (Sadataka Furui)

帝京大学理工学部、大学院理工学研究科, 320-8551 宇都宮市豊郷台 1 - 1.

### 概要

フェルミオンのフレーバー数を増やすと QCD には紫外固定点の他に赤外固定点が現れることが Banks-Zaks の理論から期待されており、Schrödinger Functional の方法では、フレーバー数  $N_f$  が  $12 \leq N_f \leq 16$  で Conformal Window が現れるという格子シミュレーションの結果が得られている。一方 Grunberg の effective charge の理論では、Conformal Field Amplitude は非摂動領域からの補正を受け Conformal Window は  $4 \leq N_f \leq 6$  であると主張されている。

赤外固定点が Conformal Window の近くに存在すると、運動量 0 に近づくにつれて QCD の有効結合定数がある一定値に収束することが期待されるが、MOMスキームで計算した有効結合定数は  $\alpha/\pi \sim 1$  の一定値に近づくことは  $N_f = 3$  が Conformal Window に近いことを示している。フェルミオンのスピノルを八元数で表示したときの triality 対称性の扱いの違いが  $N_f$  に 3 倍の差を与えていると考えられる。3 ループ diagram からのグルオンの磁気的質量は、Charm クォークループの場合  $T = T_c$  で  $T_c$  程度の値を与える。

## 1 序論

摂動論的 QCD では  $\beta$  関数が

$$\begin{aligned}\beta(g) &= -\left(\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} + \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} + \beta_2 \frac{g^7}{(16\pi^2)^3}\right) \\ \beta_0 &= 11 - \frac{4}{3}T(R)N_F\end{aligned}\quad (1)$$

の形を持ち、 $SU(N)$  の表現  $R$  が fundamental 表現のとき  $N_F = 16.5$  で  $\beta_0 = 0$  になることが分かる。これが Banks-Zaks 赤外固定点 [1] とよばれる点である。Appelquist 達 [2] は Schrödinger Functional の方法  $12 \leq N_f \leq 16$  のとき赤外領域の系の振る舞いはこの赤外固定点で与えられると主張した。

Grunberg[3, 4] はフレーバーの数の変化に応じて 2 つの相構造が存在し、

$$\tilde{\beta}(\alpha) = -\beta_0\alpha^2 + \tilde{\beta}_1\alpha^3 - \dots, \quad (2)$$

ただし  $\tilde{\beta}_1 = \rho\beta_0$  で、パラメータ  $\rho$  は  $N_f = 16.5$  で  $\tilde{\beta}(\alpha) = 0$  を満たし一般の  $N_f$  に対して  $\tilde{\beta}(\alpha) = -\beta_0\alpha^2 + \beta_1\alpha^3$  が真の  $\beta(\alpha)$  と一致するように取れることを示した。彼は  $\alpha_{IR,UV}$  を

$$\tilde{\alpha}_{IR,UV} = \pm\tilde{\epsilon}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_{30}}{\beta_{20}}\tilde{\epsilon} + \dots\right) \quad (3)$$

ただし  $\tilde{\epsilon} = (-\frac{\beta_0}{\beta_{20}})^{1/2}$ 、 $\beta_{i0}$  は  $N_f = 16.5$  における  $\beta_i$  のように決め、Conformal Window が  $4 \leq N_f \leq 6$  となることを示した。

DWF ゲージ配位 [5] をクーロンゲージで行ったシミュレーション [6, 7, 8]、JLab グループの電子散乱データからの有効結合定数  $\alpha_s$  の解析 [10]、ホログラフィー理論による解析 [11] も同じ運動量依存性を示している。

## 2 四元数、八元数と triality

É.Cartan は Hamilton の四元数  $\mathcal{H}$  に新しい虚数単位  $l$  を加えた  $\mathcal{H} + l\mathcal{H}$  が G2 対称性をもつ八元数を構成することを示した [12]。八元数は triality 対称性という、互いに変換することのできる 3 つの表現を持っている。

フェルミオンのスピノル  $\phi$  と  $C\phi = \psi'$  は

$$\phi = \xi_0 + \xi_{14}i + \xi_{24}j + \xi_{34}k = \begin{pmatrix} \xi_0 + i\xi_{34} & i\xi_{14} - \xi_{24} \\ i\xi_{14} + \xi_{24} & \xi_0 - i\xi_{34} \end{pmatrix} \quad (4)$$

<sup>1</sup>2011 年 8 月 2 4 日 基研研究会 “ 熱場の量子論とその応用 ” での講演

$$C\phi = \xi_{1234} - \xi_{23}i - \xi_{31}j - \xi_{12}k = \begin{pmatrix} \xi_{1234} - i\xi_{12}, & -i\xi_{23} + \xi_{31} \\ -i\xi_{23} - \xi_{31} & \xi_{1234} + i\xi_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

同様にして  $\psi$  と  $C\psi = \psi'$  は

$$\psi = \xi_4 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k = \begin{pmatrix} \xi_4 + i\xi_3, & i\xi_1 - \xi_2 \\ i\xi_1 + \xi_2 & \xi_4 - i\xi_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$C\psi = \xi_{123} - \xi_{234}i - \xi_{314}j - \xi_{124}k = \begin{pmatrix} \xi_{123} - i\xi_{124}, & -i\xi_{234} + \xi_{314} \\ -i\xi_{234} - \xi_{314} & \xi_{123} + i\xi_{124} \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように定義される。

これらは Self-dual なゲージ場 (インスタントン)  $x_1, x_2, x_3$  とユニークな結合をして図のような 3 ループのグルーオンやゲージボソンの磁氣的相互作用による self energy  $m_{mag}$  の大きさはクォーク質量に依存し、charm quark の場合  $T \sim T_c$  で  $m_{mag} \sim T_c$  を与える [9]。

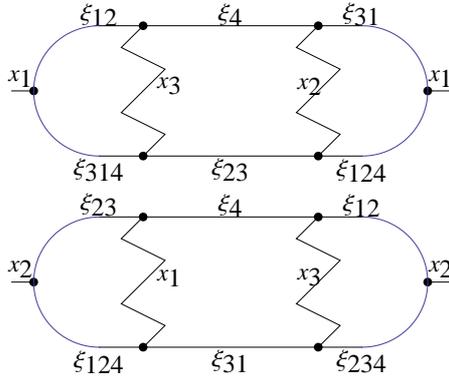


図 1: Transverse gluon self energy diagram  $\Pi_{ii}$

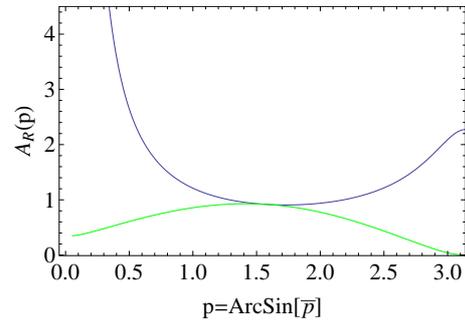


図 2:  $M=-1.8$  の DWF の 5 次元目の空間の右巻き固有関数 (上) とそれに  $p^2$  を掛けた関数 (下)

### 3 Domain Wall Fermion と triality

Domain Wall Fermion は 5 次元目の空間に、 $m(s) = M \text{sign}(s)$  で与えられる質量関数を持ち、方程式

$$D_F\psi(x, s) = (i\gamma_\mu\partial_\mu + i\gamma_5\partial_s + im(s))\psi(x, s) = 0 \quad (8)$$

を満たす。固有関数  $\psi = U(s, \lambda, p)u(\lambda, p, \alpha)$  は RBC/UKQCD のゲージ配位に使われた  $M = -1.8$  を使うと、運動量空間で図 2 のようになることが分かる。

$M$  が正のときは左巻き波動関数が赤外発散を持つのに反して  $M$  が負のときは右巻き波動関数が赤外発散をもつ。右、左は定義によるので問題ではなく、 $p^2$  を掛けると赤外発散はないことが重要である。

シミュレーションでは  $s$  の座標空間で、左巻きと右巻きに符号の異なる同じ大きさの位相回転を行い、 $s = 0$  と  $s = L_s - 1$  における波動関数の四元数表示

$$\Psi_{0,L/R} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}_{L/R} \quad \text{and} \quad \Psi_{L_s-1,L/R} = \begin{pmatrix} a_{L_s-1} & b_{L_s-1} \\ c_{L_s-1} & d_{L_s-1} \end{pmatrix}_{L/R} \quad (9)$$

が Quaternion Reality の条件

$$\begin{pmatrix} a_{L_s-1} & b_{L_s-1} \\ c_{L_s-1} & d_{L_s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 e^\gamma & f \\ 0 & \zeta^{-1} e^{-\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^1 e^{-\gamma} & \bar{f} \\ 0 & \zeta^{-1} e^\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

が近似的に成り立つように回転位相を調節した。但し Corrigan-Goddard[13] に倣って

$$f = \frac{d_0 e^\gamma - \frac{1}{a_{L_s-1}} e^{-\gamma}}{c_{L_s-1} \zeta^{-l} + c_0 \zeta^l}, \quad \bar{f} = \frac{\frac{1}{d_{L_s-1}} e^\gamma - a_0 e^{-\gamma}}{c_0 \zeta^{-l} + c_{L_s-1} \zeta^l}. \quad (11)$$

$\bar{f} = \overline{f(\bar{\gamma}, -\frac{1}{\bar{\zeta}})}$ ,  $\zeta^{2l} = c_0/c_{L_s-1}$  にとつた。回転位相を選ぶことが triality の 1 つのセクターを選ぶことと対応していると考えられる。

この方法で求めた  $\alpha_s(p)$ , 陽子の形状因子などは [7, 8] に示した。

## 4 結論

左巻きと右巻き四元数のペアを組み合わせた八元数は triality 対称性を持ち、ドメインウォールフェルミオンで MOM スキームを使うと 1 つの sector を取り出すことができる。MOM スキームで求めた格子シミュレーションの赤外領域の有効結合定数が運動量にあまり依存しないことは系が Conformal Window に近いことを示唆している。しかし、更に大きな格子でのシミュレーションが必要である。

有限温度の transverse gluon の磁氣的質量はクォーク質量に依存するが、charm quark の場合  $T \sim T_c$  で  $m_{mag} \sim T_c$  を与える。QCD の熱力学的圧力  $P = -T \log Z/V$  が 1 ループで負になる問題 [14, 15, 16] は  $g^6$  のオーダーの熱力学ポテンシャルを計算することの必要性を示しているが、self-dual なグルーオンを 2 個交換する diagram がここにも寄与すると予想される。

粒子検出器の電子が属する triality とは別の triality に属する素粒子が、Georgi[17] の提案する unparticle と同じような振る舞いを示すかも知れない問題である。

## 参考文献

- [1] Banks, T., Zaks, A., On the phase structure of vector-like gauge theories with massless fermion, Nucl. Phys. **B196**, 189 (1982).
- [2] Appelquist, T., Fleming, G. T., Neil, E. T. : Lattice Study of the Conformal Window in QCD-like Theories, Phys. Rev. Lett. **100**, 171607 (2008), Errata Phys. Rev. Lett. **102**, 149902 (2009).
- [3] Grunberg, G.: A proposal to solve the Landau ghost and renormalon problems, Phys. Lett. **B349**, 469 (1995).
- [4] Grunberg, G.: Conformal Window and Landau Singularity, JHEP 0108(2001) 019, hep-ph/0104098v2
- [5] Allton, C. et al. (RBC/UKQCD collaboration) : 2+1 flavor domain wall QCD on a  $(2\text{fm})^3$  lattice, light meson spectroscopy with  $L_s = 16$ , Phys. Rev. **D76**, 014504 (2007), hep-lat/0701013.
- [6] Furui, S., Naka, J., H. : Roles of the quark field in the infrared lattice Coulomb gauge and Landau gauge QCD, PoS(Lattice 2007), 301 (2007), arXiv:0708.1421 [hep-lat].
- [7] Furui, S.: Chiral Symmetry and BRST Symmetry Breaking, Quaternion Reality and the Lattice Simulation, SCGT09 conf. proc. ed. by Fukaya et al., World Scientific, p.398.
- [8] Furui, S.: Domain Wall Fermion Lattice Simulation in Quaternion Basis, QCHS IX conf. proc. ed. by Llanes-Estrada and Pelaez, AIP 1343 p.534.
- [9] Furui, S. in preparation
- [10] Deur, A., Burkert, V., Chen, J. P., Korsch, W. : Experimental determination of the effective strong coupling constant. Phys. Lett. **B650**, 244 (2006), Phys. Lett. **B665**, 349 (2008).
- [11] Brodsky, S. J., de Téramond, G., Deur, A. : Nonperturbative QCD Coupling and its  $\beta$  function from Light-Front Holography : Phys. Rev. **D81**, 096010 (2010), arXiv:1002.3948 [hep-ph].
- [12] Cartan, É.: *The theory of Spinors*, Dover Pub. (1966) p.118. [*La Theorie des Spinors*, Paris, Hellman (1938).]
- [13] Corrigan, E., Goddard, P. : An n Monopole Solutions with 4n-1 Degrees of Freedom, Comm. Math. Phys. **80** 575, (1981).
- [14] Linde, A. D.: Infrared problem in the thermodynamics of the Yang Mills Gas, Phys. Lett. **B96**, 289 (1980).
- [15] Ipp, A., Kajantie, K., Rebhan, A., Vuorinen, A.: The pressure of deconfined QCD for all temperatures and quark chemical potential, Phys. Rev. **D74**, 045016 (2006).
- [16] Kalashnikov, O. K.: QCD at Finite Temperature, Fortsch. Phys. **32**, 525 (1984).
- [17] Georgi, H.: Unparticle Physics, Phys. Rev. Lett. **98**, 221601 (2007).

# Equation of state and magnetic monopoles in hot $SU(2)$ gluodynamics

高知大学総合情報センター 石黒克也

## 1 はじめに

本研究では格子 QCD の手法を用いて、有限温度  $SU(2)$  ゲージ理論における状態方程式と磁気的モノポールの関係について考察した。クォーク・グルーオンプラズマ (QGP) 相における磁気的モノポールの役割については、これまで多くの数値計算によりその重要性を示唆する結果が得られている。近年、Chernodub-Zakharov[1] は有限温度相転移点近傍での monopole liquid picture を提唱し、QGP 相における磁気的自由度の重要性を指摘している。また Chernodub 等はその描像に基づき、磁気的モノポールと同様に非摂動的な量に対して重要な役割を果たすと考えられているセンターボートックスの自由度を用いて、QGP 相での状態方程式へのそれらの寄与を議論している [2]。本研究ではこれらの先行研究をふまえ、QGP 相における磁気的モノポールが状態方程式、特に trace anomaly に対してどのような寄与をするのか考察する。なお、磁気的モノポールからの寄与に関しては、モノポール有効作用を用いた研究 [3] もあるが、本研究はそれとは異なるアプローチとなっている。

## 2 クォーク閉じ込め機構と双対超伝導体描像

クォーク閉じ込め機構に対する有力なシナリオの一つとして、QCD 真空の双対超伝導体描像が挙げられる。これは通常の超伝導体でクーパー対が凝縮することにより磁束が絞られる現象に対し、QCD 真空では磁気的モノポールが凝縮し、クォーク間のカラー電場が絞られ、クォーク閉じ込めが実現するというシナリオである。't Hooft により提案された Abelian projection[4] の方法に基づく数値シミュレーションでは、以下のようにモノポールを定義する。 $SU(2)$  ゲージ理論の場合には、まず  $SU(2)$  リンク変数  $U_\mu(s)$  を次のように分解することで、Abelian gauge field  $\theta_\mu(s)$  を抜き出し、

$$U_\mu(s) = C_\mu(s)u_\mu(s), \quad (1)$$

$$C_\mu(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} & -c_\mu^*(s) \\ c_\mu(s) & \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} \end{pmatrix}, \quad u_\mu(s) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

これを用いて Abelian field strength  $\Theta_{\mu\nu}(s)$  を以下のように表す。

$$\Theta_{\mu\nu}(s) = \partial_\mu\theta_\nu(s) - \partial_\nu\theta_\mu(s) = \bar{\Theta}_{\mu\nu}(s) + 2\pi n_{\mu\nu}(s) \quad (-\pi < \bar{\Theta}_{\mu\nu} \leq \pi) \quad (3)$$

ここで  $n_{\mu\nu}(s)$  はブラケットを貫く Dirac string の数を意味している。格子上のモノポール  $k_\mu(s)$  は DeGrand-Toussaint の方法 [5] に従い、次のように定義する。

$$k_\mu(s) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu n_{\rho\sigma}(s + \hat{\mu}). \quad (4)$$

この定義を用いて、これまでに多くの格子シミュレーションが実施されており、閉じ込めに関して重要な量である弦張力に対しては、モノポールの自由度から測定した量が元のゲージ場から測定した量を再現するモノポールドミノナンスが観測されている。これは閉じ込めに対してモノポールの自由度が重要な役割を担っていることを意味している。今回注目する有限温度系においても、空間 2 方向で張った spatial Wilson loop から測定される空間的弦張力に対してモノポールドミノナンスが観測されており [6]、閉じ込め相のみならず、非閉じ込め相においてもモノポールは重要な自由度であることが知られている。

### 3 計算方法と結果

これまでの先行研究をふまえ、磁氣的モノポールの状態方程式に対する寄与、特に trace anomaly への寄与を以下のような方法で測定した。数値計算には Wilson 作用 ( $\beta = 2.10 - 2.66$ ) を用い、 $T = 0$  系は  $16^4$  格子で 1000 個の配位、 $T \neq 0$  系は  $18^3 \times 4$  格子で 5000 個の配位を用いた。格子間隔・温度に関しては文献 [7, 8] に従った。また、モノポールを同定するために最大可換ゲージ固定 [9] を採用した。

まず、モノポールの周りのプラケット  $\Sigma$  に注目し、local plaquette density を定義する。

$$\rho_P = \begin{cases} 1, & \text{if } P \in \Sigma \\ 0, & \text{if } P \notin \Sigma \end{cases} \quad (5)$$

$\rho_P$  を用いると、モノポールの周りとそれ以外の部分の action density を定義でき、これを specific action density と呼ぶ。

$$\langle s_P \rangle^{\text{mon}} = \frac{\langle \sum_P \rho_P S_P \rangle}{\langle \sum_P \rho_P \rangle}, \quad \langle s_P \rangle^{\text{rest}} = \frac{\langle \sum_P (1 - \rho_P) S_P \rangle}{\langle \sum_P (1 - \rho_P) \rangle}, \quad (6)$$

$S_P$  は plaquette action である。図 1 は specific action density の  $\beta$  依存性を表しており、 $\langle s_P \rangle^{\text{mon}}$  と  $\langle s_P \rangle^{\text{rest}}$  の違いが明白に見てとれ、 $\langle s_P \rangle^{\text{mon}}$  が相転移に対して sensitive であることがわかる。

一方、連続理論での trace anomaly は、エネルギー・運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  を用いて

$$\theta(T) = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle \equiv \epsilon - 3p, \quad (7)$$

と定義される。ここで  $\epsilon$  は系のエネルギー密度、 $p$  は圧力を表している。格子上の trace anomaly は、時間方向の格子サイズ  $N_t$  を用いて

$$\frac{\theta(T)}{T^4} = 6N_t^4 \left( \frac{\partial \beta(a)}{\partial \log a} \right) \cdot (\langle S_P \rangle_T - \langle S_P \rangle_0), \quad (8)$$

と定義される。 $\langle S_P \rangle_T$ 、 $\langle S_P \rangle_0$  はそれぞれ有限温度系 ( $T > 0$ )、ゼロ温度系 ( $T = 0$ ) での action density の期待値である。これより、trace anomaly に対するモノポールの周りのプラケットからの寄与を、温度  $T$  でのモノポール密度  $\rho(T)$  を用いて、次のように定義する。

$$\frac{\theta_{\text{reg}}^{\text{mon}}(T)}{T^4} = 6N_t^4 \left( \frac{\partial \beta(a)}{\partial \log a} \right) \cdot [\langle s_P \rangle_T^{\text{mon}} - \langle s_P \rangle_0^{\text{mon}}] \rho(T) \quad (9)$$

図 2 は (9) 式の温度依存性を表しており、相転移点近傍で有意な大きさをもって変化していることがわかる。

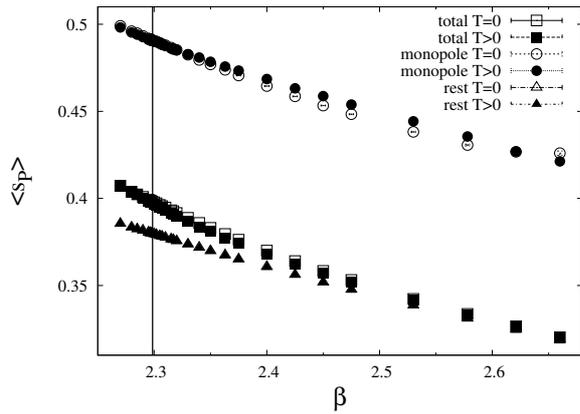


図 1: specific action density の  $\beta$  依存性。相転移点は  $\beta_c \simeq 2.30$ 。

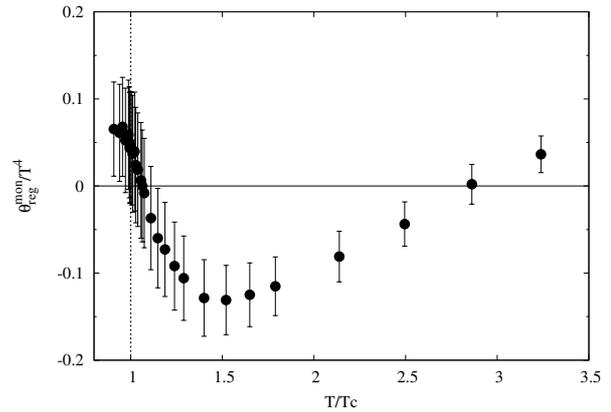


図 2: モノポールの周りのプラケットから測定した trace anomaly の温度依存性。

## 4 まとめ

本研究では有限温度  $SU(2)$  ゲージ理論における状態方程式と磁気的モノポールの関係を調べるため、磁気的モノポールが trace anomaly に及ぼす影響を考察した。特に、磁気的モノポールの周りの配位の trace anomaly への寄与を調べたところ、図 2 の結果を得た。これは  $18^3 \times 4$  という比較的小さな格子サイズでの計算ではあるが、Chernodub 等によってなされたセンターボックスでの計算と同様の結果となっている。今回得られた結果には、格子体積依存性、 $N_t$  依存性などまだ不確定要素が多く、定量的な議論をするためには今後より詳細な計算が必要となるが、磁気的モノポールの周りの配位はその他の部分と比較すると大きな揺らぎをもっており、trace anomaly に有意な影響を与えるなど、QGP 相における磁気的自由度の重要性を示唆していると考えられる。なお、本研究は理化学研究所 RICC および大阪大学核物理研究センター SX-8 を用いて実施された。

## 参考文献

- [1] M. N. Chernodub, V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. 98, 082002 (2007).
- [2] M. N. Chernodub, Aatsushi Nakamura, V. I. Zakharov, Phys. Rev. D78, 074021 (2008).
- [3] M. N. Chernodub et. al., PoS LAT2007, 174 (2007) [arXiv:0710.2547].
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B190(1981)455.
- [5] T. A. DeGrand, D. Toussaint, Phys. Rev. D22(1980)2478.
- [6] Shinji Ejiri, Phys. Lett. B376 (1996) 163.
- [7] J. C. R. Bloch, A. Cucchieri, K. Langfeld, T. Mendes, Nucl. Phys. B687, 76(2004).
- [8] J. Fingberg et. al., Nucl. Phys. B392, 493(1993) ; M. J. Teper, hep-th/9812187.
- [9] A. S. Kronfeld, M. L. Laursen, G. Schierholz, U. J. Wiese, Phys. Lett. B198, 516(1987).

# ヒストグラム法を用いた有限密度格子 QCD

中川義之 for WHOT-QCD Collaboration\*  
新潟大学自然科学研究科

## 1 序

初期宇宙や中性子星の内部など強い相互作用が支配的となるような超高温・高密度系の性質を明らかにする上で、第一原理計算である格子 QCD シミュレーションは必要不可欠である。しかし有限密度格子 QCD では符号問題やオーバーラップ問題があり、低密度領域で有効な方法はあるものの [1]、高密度 QCD の数値シミュレーションに関する手法はまだ確立していない。本研究では高密度領域でも適用可能な計算手法の確立を目的とし、ヒストグラム法と再重み付け法 (reweighting method) [2, 3]、さらに複素位相に関するキュムラント展開を用いて有限密度 QCD の数値シミュレーションを行う [4]。

## 2 ヒストグラム法

圧力などの熱力学量は分配関数から得られるが、これを格子 QCD で計算するためにはプラケットやクォーク行列式の計算が必要となる。ヒストグラム法ではゲージ配位をプラケットなどの量でラベルして、確率分布関数 (もしくは状態密度) を計算することで測定量の期待値を計算しようとするものである。ここでは時空平均をとったプラケット  $P$ 、及びゼロ化学ポテンシャルを基準としたクォーク行列式の絶対値  $F(\mu) = N_f \ln |\det M(\mu) / \det M(0)|$  でゲージ配位をラベルすることを考える。すると (ゼロ化学ポテンシャルを基準とした) 分配関数は

$$\frac{\mathcal{Z}(\beta, \mu)}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} \int \mathcal{D}U e^{i\theta(\mu)} |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P} = \int dP dF \langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F)} w_0(P, F, \beta, \mu) \quad (1)$$

と表すことができる。ここで

$$w_0(P', F', \beta, \mu) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} \int \mathcal{D}U \delta(P - P') \delta(F - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P} \quad (2)$$

はクォーク行列式の複素位相を無視したときの確率分布関数であり、

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P', F')} = \frac{\int \mathcal{D}U e^{i\theta(\mu)} \delta(P - P') \delta(F - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P}}{\int \mathcal{D}U \delta(P - P') \delta(F - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P}} = \frac{\langle \langle e^{i\theta(\mu)} \delta(P - P') \delta(F - F') \rangle \rangle_{(\beta, \mu)}}{\langle \langle \delta(P - P') \delta(F - F') \rangle \rangle_{(\beta, \mu)}} \quad (3)$$

は複素位相を除いたボルツマンの重みで計算した、クォーク行列式の複素位相の期待値である。 $\langle \langle \dots \rangle \rangle$  は複素位相を除いたボルツマンの重みで計算した期待値を表す。

分配関数を格子 QCD シミュレーションで正しく評価するためには、式 (1) の  $P$  と  $F$  に関する積分を正確に評価する必要がある。つまり確率分布  $w(P, F, \beta, \mu) = \langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F)} w_0(P, F, \beta, \mu)$  が最大となる  $(P, F)$  で多くの配位を用意する必要がある。しかし複素位相 (3) の  $P, F$  依存性が大きい場合は、 $w$  と  $w_0$  が最大になる点がズレてしまう。たくさんの配位を生成して  $w_0$  を精密に求めたとしても、複素位相によって  $w$  と  $w_0$  のピークの位置がズレてしまえば、そうして得られた配位から式 (1) の積分を正しく評価することはできない。

オーバーラップ問題と呼ばれるこの困難は、再重み付け法を用いることで次のような解決法が考えられる。 $(\beta, \mu)$  での確率分布関数は、 $(\beta_0, \mu_0)$  で配位をアップデートして得られる確率分布関数から

$$w_0(P, F, \beta, \mu) = R(P, F, \beta, \beta_0, \mu, \mu_0) w_0(P, F, \beta_0, \mu_0) \quad (4)$$

\*本研究は青木慎也氏 (筑波大)、江尻信司氏 (新潟大)、初田哲男氏 (東京大)、金谷和至氏 (筑波大)、前沢祐氏 (RIKEN)、大野浩史氏 (BNL)、斎藤華氏 (筑波大)、梅田貴史氏 (広島大) との共同研究である。

という式を通して得ることができる。ここで

$$R(P, F, \beta, \beta_0, \mu, \mu_0) = e^{6(\beta-\beta_0)N_{\text{site}}P} \frac{\left\langle \left\langle \delta(P' - P)\delta(F' - F) \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(\mu_0)} \right|^{N_f} \right\rangle \right\rangle_{(\beta_0, \mu_0)}}{\langle \langle \delta(P' - P)\delta(F' - F) \rangle \rangle_{(\beta_0, \mu_0)}} \quad (5)$$

であり、 $\beta = \beta_0$  とするとこれは複素位相を除いた重みで計算したクォーク行列式の期待値である。 $(\beta, \mu)$  でシミュレーションを行って得られる確率分布関数は  $(P, F)$  平面内の限られた領域しかカバーできない。しかしパラメータを変えてシミュレーションを行い、再重み付けで確率分布関数を繋ぎ合わせることで、 $(P, F)$  平面をより広範にカバーすることができる。こうすることで複素位相が大きな  $P, F$  依存性をもっている場合でも式(1)の被積分関数を最大にする点を押さえることができる。

### 3 複素位相に関するキュムラント展開

化学ポテンシャルがゼロから大きくなるとクォーク行列式の位相の揺らぎが大きくなり符号問題が生じる。つまり複素位相(3)の符号が激しく揺らいで、その期待値は統計誤差の範囲内でゼロになってしまう。ここでは符号問題を避けるために複素位相の期待値に対してキュムラント展開を行う：

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F, \mu)} = \exp \left[ i \langle \theta \rangle_c - \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c - \frac{i}{3!} \langle \theta^3 \rangle_c + \frac{1}{4!} \langle \theta^4 \rangle_c + \dots \right]. \quad (6)$$

3次までのキュムラントは中心モーメントと等しいが、4次だと

$$\langle \theta^4 \rangle_c = \left\langle \left( \theta - \langle \theta \rangle_{(P, F)} \right)^4 \right\rangle_{(P, F)} - 3 \left\langle \left( \theta - \langle \theta \rangle_{(P, F)} \right)^2 \right\rangle_{(P, F)}^2 \quad (7)$$

になる。ここで重要なのは、時間反転不変な系では奇数次のキュムラントがゼロになることである。というのは  $\mu \leftrightarrow -\mu$  の変換が時間反転に対応するが、この変換のもとで奇数次のキュムラントもまた符号を反転させるからである。そのため、

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F, \mu)} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c + \frac{1}{4!} \langle \theta^4 \rangle_c + \dots \right] \quad (8)$$

となり、これは正の実数となる。つまり複素位相に対してキュムラント展開を用いることで、符号問題はキュムラント展開の収束性の問題に置き換わるのである。

ここで問題になるのはキュムラント展開の収束性である。展開の収束性が理想的なのは位相がガウス分布するときである。逆にガウス分布から離れると展開の収束性はひどく悪くなると考えられる。例えば位相  $\theta(\mu) = N_f \Im \ln \det M(\mu)$  の周期性を考えて  $-\pi$  から  $\pi$  に制限するように  $\theta$  を計算してしまうと、その分布は化学ポテンシャルが大きくなるとガウス分布から大きく離れてしまう。我々に必要なのは位相がガウス分布に近い分布をするように  $\theta$  を計算することである。そこでここでは  $\theta$  の周期性を無視して  $-\infty$  から  $\infty$  の領域で定義し、

$$\theta(\mu) = N_f \Im \ln \det M(\mu) = N_f \int_0^{\mu/T} \Im \left[ \frac{\partial (\ln \det M(\mu))}{\partial (\mu/T)} \right]_{\bar{\mu}} d\left(\frac{\bar{\mu}}{T}\right) \quad (9)$$

のように  $\ln \det M(\mu)$  の  $\mu$  微分を計算してそれを積分することで  $\theta$  を求める。あとで見るようにこれで我々はガウス関数で良く近似される  $\theta$  の分布を得ることができる。

### 4 数値シミュレーションの結果

本研究では岩崎ゲージ作用及び  $O(a)$  改良されたウィルソンクォーク作用に、大きさが  $8^3 \times 4$  の格子を用いた<sup>1</sup>。図1は  $(\beta, \mu_0/T) = (1.5, 1.6), (1.5, 2.0), (1.5, 2.4)$  の3つのパラメータでシミュレーションを行い、再重み付け法で計算した  $(\beta, \mu/T) = (1.5, 2.0)$  での有効ポテンシャル  $V_0 = -\ln w_0$  を  $F$  の関数として

<sup>1</sup>シミュレーションの詳細に関しては [4] を参照。

プロットしたものである。 $(\beta, \mu_0/T) = (1.5, 2.0)$  だけでシミュレーションした場合は  $F \sim 50$  を中心とした狭い領域しかカバーできないが、異なるパラメータでのシミュレーション結果を再重み付けで繋ぎ合わせることでより広い領域で確率分布関数が得られていることがわかる。

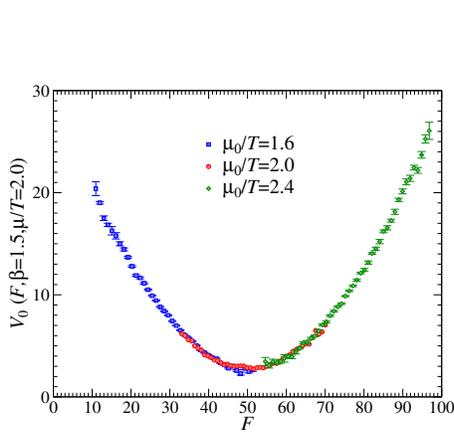


図 1: 異なるシミュレーションポイントで得られた  $\mu/T = 2.0$  の有効ポテンシャル  $V_0 = -\ln w_0$ 。

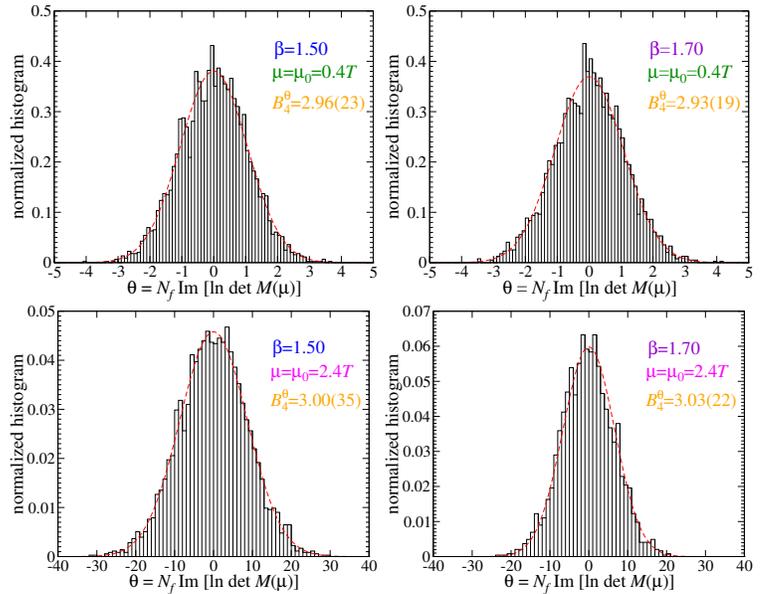


図 2:  $\mu/T = 0.4, 2.4$  でのクォーク行列式の位相分布。

図 2 はクォーク行列式の位相分布である。上段は  $\mu/T = 0.4$ 、下段は  $\mu/T = 2.4$  であり、左列は  $T/T_{pc} \approx 0.76$ 、右列は  $T/T_{pc} \approx 0.84$  である。それぞれの温度において化学ポテンシャルが大きくなるとともに位相が幅広く分布するのが見て取れる。さらに下段の高密度領域のデータを比べると、低温になると位相の分布が広がることがわかる。重要なのはいずれの場合でも位相がガウス分布に近い分布をしていることである。それぞれ破線で描かれているのはガウス関数でフィットした結果である。またガウス分布のときに 3 になるように規格化した 4 次の Binder キュムラント  $B_4^\theta$  の値を載せているが、3 に非常に近い値をとっている。以上から、式 (9) で求めたクォーク行列式の位相は高密度領域でもよくガウス関数で近似される分布をすることがわかり、クォーク行列式の複素位相がキュムラント展開に対して良い収束性をもつことが期待される。

## 5 まとめ

ここではヒストグラム法を用いた有限密度格子 QCD に関する研究の進展を報告した。異なるシミュレーションポイントで得られた確率分布関数から再重み付け法を用いることで、配位をラベルする変数の広い領域をカバーできる確率分布関数を得ることができた。複素位相の  $P, F$  依存性が大きい場合にはこのように複数のシミュレーションポイントでの確率分布関数を繋ぎ合わせることで、式 (1) の積分をより正確に評価することができる。またクォーク行列式の位相の新たな計算方法を提示し、位相がガウス関数でよく近似される分布をすることを低密度及び高密度領域で示した。

## References

- [1] S. Ejiri *et al.* [ WHOT-QCD Collaboration ], Phys. Rev. **D82**, 014508 (2010). [arXiv:0909.2121 [hep-lat]].
- [2] S. Ejiri, Phys. Rev. **D77**, 014508 (2008). [arXiv:0706.3549 [hep-lat]].
- [3] H. Saito *et al.* [ WHOT-QCD Collaboration ], Phys. Rev. **D84**, 054502 (2011). [arXiv:1106.0974 [hep-lat]].
- [4] Y. Nakagawa *et al.* [ WHOT-QCD Collaboration ], (PoS Lattice2011, to be published, 2011)

# 格子ゲージ理論による 2 次の輸送係数の測定

河野泰宏<sup>1</sup>、浅川正之<sup>1</sup>、北沢正清<sup>1</sup>、野中千穂<sup>2</sup>  
 阪大理<sup>1</sup>、名大KMI<sup>2</sup>

## 1 序

現在の高エネルギー重イオン衝突で生成される QCD 物質の時空発展は、完全流体モデルで良く再現されることが知られている。これは生成された物質が極めて低粘性であることを示唆しており、近年は粘性流体モデルによる時空発展の記述も活発に行われている。粘性流体モデルはインプットとして粘性係数・熱伝導度などの輸送係数を含んでいる。輸送係数は微視的理論（本研究では QCD）により決定されるべき物理量である。また、高エネルギー重イオン衝突で実現される温度領域は QCD の非摂動領域であり、輸送係数の決定には非摂動的手法が必要となる。本研究では、そのような手法の 1 つである格子ゲージ理論に基づいて、2 次の粘性流体力学の輸送係数に関する情報を第一原理的に抽出することを試みる。以下では、2 次の粘性流体力学として Israel-Stewart 理論に着目し、「ずり粘性係数と緩和時間の比」について議論する。

## 2 ずり粘性係数と緩和時間の比

粘性流体力学として最も単純な理論は Navier-Stokes (NS) 理論（1 次の粘性流体力学）である。しかし、NS 理論は因果律を破るなどの問題点が指摘されている [1]。NS 理論を因果律を満たすように拡張した相対論的粘性流体力学が Israel-Stewart (IS) 理論である [2]。IS 理論では応力テンソル  $\pi_{\mu\nu}$  の発展方程式は

$$\dot{\pi}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\tau_\pi}[\pi_{\mu\nu} + \dots] \quad (1)$$

のように与えられる。第二項以後は流体の非一様性に起因する項である。緩和時間  $\tau_\pi$  は  $\pi_{\mu\nu}$  が定常値に達する典型的な時間を表している。(1) 式から  $\pi_{\mu\nu}$  の時間相関の振る舞いは

$$\langle \pi_{\mu\nu}(t)\pi_{\mu\nu}(0) \rangle \simeq e^{-t/\tau_\pi} \langle \pi_{\mu\nu}^2(0) \rangle \quad (2)$$

となる。IS 理論は  $\tau_\pi$  の存在により因果的理論となり得る。 $\tau_\pi \rightarrow 0$  の極限で IS 理論は NS 理論に一致する。

一方、ずり粘性係数  $\eta$  は久保公式より次式で与えられる：

$$\eta = i \int d^3x \int_0^\infty dt t \langle [\pi_{12}(t, \vec{x}), \pi_{12}(0, \vec{0})] \rangle \quad (3)$$

恒等式

$$\langle [\pi_{12}(t), \pi_{12}(0)] \rangle = i \int_0^{1/T} d\lambda \dot{\pi}_{12}(t - i\lambda)\pi_{12}(0) \quad (4)$$

と、 $\pi_{12}$  の実時間相関に対して (2) 式を要請することで、(3) 式から

$$\eta \simeq \tau_\pi \int d^3x \int_0^{1/T} d\lambda \langle \pi_{12}(-i\lambda, \vec{x}) \pi_{12}(0, \vec{0}) \rangle \quad (5)$$

を得る。 $\lambda$  は虚時間である。したがって

$$\frac{\eta}{\tau_\pi} = \int d^3x \int_0^{1/T} d\lambda \langle T_{12}(-i\lambda, \vec{x}) T_{12}(0, \vec{0}) \rangle \equiv \int d^4x \langle T_{12}(x) T_{12}(0) \rangle \quad (6)$$

ここで流体の局所静止系  $\pi_{12} = T_{12}$  を仮定した ( $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソル)。

このように、ずり粘性係数と緩和時間の比  $\eta/\tau_\pi$  は Euclid 空間におけるエネルギー運動量テンソルの相関関数で与えられる。しかし、(6) 式は紫外発散量であり適切な正則化が必要である。本研究では真空の寄与を引き算することで発散を除去する：

$$\frac{\eta}{\tau_\pi} \Big|_0 \equiv \int d^4x \langle T_{12}(x) T_{12}(0) \rangle_{T \neq 0} - \int d^4x \langle T_{12}(x) T_{12}(0) \rangle_{T=0} \quad (7)$$

さらに (3) 式には原点の寄与が含まれていないことから、 $x \rightarrow 0$  における寄与も (6) 式から取り除く必要がある。演算子積展開 (OPE) を用いると [3]、 $x \rightarrow 0$  において

$$\langle T_{12}(x) T_{12}(0) \rangle \simeq C_T \frac{1}{|x|^8} + \sum_\mu C_\mu \langle T_{\mu\mu}(0) \rangle \delta^{(4)}(x) \quad (8)$$

$C_T$ 、 $C_\mu$  は摂動論で決定される係数である。ここで第一項は (7) 式により除去される。第二項 (contact term) は温度に依存するため (7) 式では除去できない。leading order の OPE の結果 [4] より、

$$\sum_\mu C_\mu \langle T_{\mu\mu}(0) \rangle = \frac{2}{3} \langle T_{00} \rangle + \frac{1}{6} \langle F^2 \rangle = -\frac{\epsilon + P}{2} + \frac{1}{6} \langle F^2 \rangle \quad (9)$$

を得る。 $\epsilon$  はエネルギー密度、 $P$  は圧力、 $\langle F^2 \rangle$  はグルーオン凝縮である。ここで leading order の計算では  $\epsilon - 3P$  の寄与を無視できることを用いて、 $\langle T_{00} \rangle = -\epsilon$  を  $-\frac{3}{4}(\epsilon + P)$  で置き換えた。(7) 式から contact term の寄与も引き算することで、物理的な  $\eta/\tau_\pi$  が得られる：

$$\frac{\eta}{\tau_\pi} \Big|_{phys} = \frac{\eta}{\tau_\pi} \Big|_0 + \frac{\epsilon + P}{2} - \frac{1}{6} \langle F^2 \rangle_0 \quad (10)$$

$\langle T_{12}(x) T_{12}(0) \rangle$ 、 $\epsilon$ 、 $P$ 、 $\langle F^2 \rangle$  はいずれも格子シミュレーションの観測量であり、 $\eta/\tau_\pi$  は格子シミュレーションで直接測定可能な物理量である。

### 3 SU(3) 格子ゲージシミュレーション

本研究では、Wilson ゲージ作用を用いて、格子間隔  $a$  の等方格子で SU(3) 格子ゲージシミュレーションを行った。ゲージ結合定数  $\beta$ 、空間方向のサイズ  $L_s$  に関して、 $\beta = 6.499$ ,  $L_s = 1.6[\text{fm}]$ 、 $\beta = 6.205$ ,  $L_s = 2.4[\text{fm}]$ 、 $\beta = 6.000$ ,  $L_s = 3.0[\text{fm}]$ 、 $\beta = 6.000$ ,  $L_s = 1.5[\text{fm}]$  の 4 種類を用意した。各格子の時間方向のサイズ  $aN_\tau = 1/T$  は、温度領域  $0.5 \lesssim T/T_c \lesssim 4$  に対応するように数種類用意した ( $N_\tau$  は格子点の数、 $T_c$  は臨界温度)。また、各  $\beta$  に対して最大の  $N_\tau$  をもつ格子を真空として採用した。ゲージ配位のアップデートには熱浴法と過緩和法を併用し、300,000 – 2,000,000 のゲージ配位を生成した。誤差の評価はジャックナイフ

法を用いた。エネルギー運動量テンソルは、 $T_{\mu\nu} = 2\text{Tr} [F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}]$  で定義し、field strength  $F_{\mu\nu}$  は、空間対称性を考慮して clover 型のプラケットで構成した。(10) 式の第一項、第二項は上記の  $T_{\mu\nu}$  の定義を用いて測定した ( $\epsilon - 3P$  の寄与は無視できるため)。第三項については、例えば文献 [5] と同様に standard なプラケットを用いて測定した。

図 1 は  $\eta/\tau_\pi$  の測定結果である。体積および格子間隔依存性はともに小さいことが見て取れる。図 2 は、媒質中の横波の伝搬速度  $v^2 = \frac{\eta}{\tau_\pi T_s}$  を示している ( $s$  はエントロピー密度)。 $1.3 \lesssim T/T_c \lesssim 4$  において誤差の範囲内で  $v^2 \sim 0.5$  とほぼ一定値をとり、IS 理論が因果律を満たすことを示唆する結果が得られた。

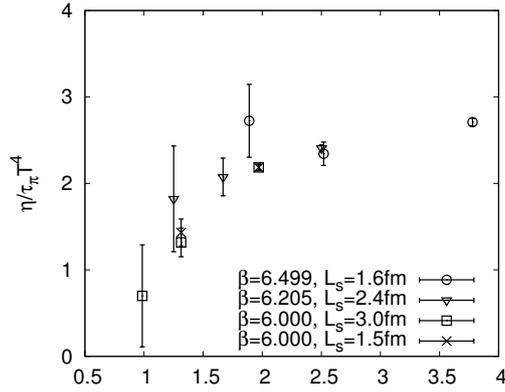


図 1:  $\eta/\tau_\pi$  の温度依存性。

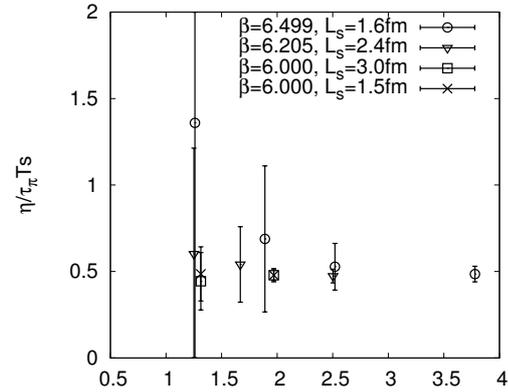


図 2: 媒質中の横波の伝搬速度。

## 4 まとめ

本研究では、SU(3) 格子ゲージシミュレーションを用いて、 $0.5 \lesssim T/T_c \lesssim 4$  における粘り係数と緩和時間の比  $\eta/\tau_\pi$  の測定を行った。 $\eta/\tau_\pi$  は、久保公式に緩和時間近似を適用し、適切な正規化を行うことで、Euclid 空間でのエネルギー運動量テンソルの相関関数に関係づけることができ、格子シミュレーションにより直接測定することができた。また、得られた  $\eta/\tau_\pi$  を用いて媒質中の横波の伝搬速度についても評価を行い、 $1.3 \lesssim T/T_c \lesssim 4$  において誤差の範囲内で  $v^2 \sim 0.5$  とほぼ定数の結果を得た。

## 参考文献

- [1] W. A. Hiscock and L. Lindblom, *Annals Phys.* **151**, 466 (1983).
- [2] W. Israel and J. M. Stewart, *Annals Phys.* **118**, 341 (1979).
- [3] H. Osborn and A. C. Petkou, *Annals Phys.* **231**, 311 (1994).
- [4] S. Caron-Huot, *Phys. Rev.* **D79**, 125009 (2009).; T. Springer, C. Gale, S. Jeon and S. H. Lee, *Phys. Rev. D* **82**, 106005 (2010).
- [5] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, *Nucl. Phys. B* **469**, 419 (1996).

# Spectral analysis of charmonium from QCD sum rules and the maximum entropy method

Philipp Gubler<sup>1</sup>, Kenji Morita<sup>2</sup> and Makoto Oka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tokyo Institute of Technology

<sup>2</sup> Yukawa Institute for Theoretical Physics,  
Kyoto University

## Abstract

Charmonium spectral functions at finite temperature are studied using QCD sum rules and the maximum entropy method. As a result,  $J/\psi$ ,  $\eta_c$ ,  $\chi_0$  and  $\chi_1$  dissolve into the continuum already at temperatures around or slightly above the critical temperature  $T_c$ .

## 1 Introduction

The method of QCD sum rules [1] provides a powerful tool for investigating the properties of hadrons at finite temperature directly from QCD [2]. Using this approach the charmonium system was studied recently [3], and evidence for a considerable change just above  $T_c$  in the spectral functions of various channels was found. To specify the nature of this change is the major goal of the present study. For this task we employ the Maximum Entropy Method (MEM), which is applicable to QCD sum rules [4] and has the advantage that one does not have to introduce any strong assumption about the functional form of the spectral function, such as the ‘‘pole + continuum’’ ansatz, which is often used in QCD sum rule studies. This approach is especially suitable for the investigation of spectral functions at finite temperature, whose behavior can change drastically above the deconfinement temperature  $T_c$ . In these proceedings, we can only show the most important results of our investigation, while more details can be found in [5, 6].

## 2 Formalism

The QCD sum rule approach makes use of the analytic properties of the correlator of some general local operator  $J(x)$ , which in this study stands for  $\bar{c}\gamma_\mu c(x)$ ,  $\bar{c}\gamma_5 c(x)$ ,  $\bar{c}c(x)$  and  $\bar{c}\gamma_5\gamma_\mu c(x)$  in the vector, pseudoscalar, scalar and axialvector channel, respectively. Using a dispersion relation, one can connect the values of the correlator calculated in the deep-Euclidean region to an integral of the spectral function  $\rho^J(s)$ . After applying the Borel transform, one arrives at the following expression:

$$\mathcal{M}^J(M^2) = \int_0^\infty ds e^{-s/M^2} \rho^J(s). \quad (1)$$

In this equation, the left-hand side can be calculated analytically using the operator product expansion (OPE). To obtain the spectral function  $\rho^J(s)$  one therefore has to invert the integral

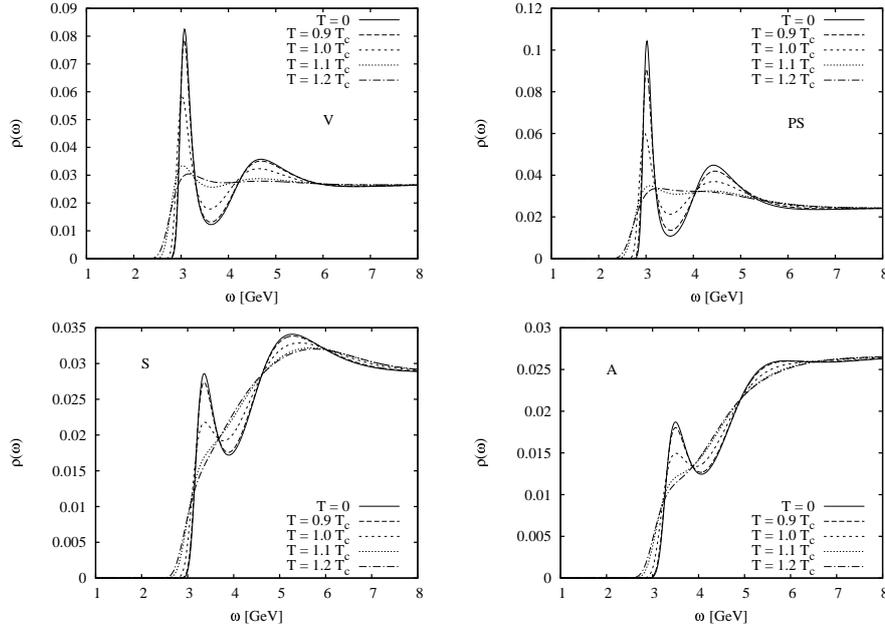


Figure 1: Spectral functions in the vector (top left), pseudoscalar (top right), scalar (bottom left) and axialvector channel (bottom right). For obtaining these curves the default model was chosen to be a constant with a value adjusted to the perturbatively calculated spectral function at large energy.

of Eq. (1). This is, however, an ill-posed problem and can not be solved rigorously. Nevertheless, using Bayes' theorem, it is possible to obtain the most probable form of  $\rho^J(s)$ , given Eq. (1) and additional information on the spectral function such as positivity and asymptotic values. This is the essential idea of the MEM approach, for the concrete implementation in the case of QCD sum rules, see [4].

Using this method, we investigate the charmonium spectral functions at finite temperature in various channels. For charmonia not much above  $T_c$ , all the finite temperature effects can be included into the temperature dependent condensates owing to the large separation scale in the OPE [2]. The temperature dependencies of the condensates are obtained as in [3], where the relation between the gluon condensate and the energy momentum tensor is employed to give the value of the gluon condensate as a function of the energy density and pressure:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= G_0^{\text{vac}} - \frac{8}{11} [\epsilon(T) - 3p(T)], \\
 G_2 &= -\frac{\alpha_s(T)}{\pi} [\epsilon(T) + p(T)].
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

The thermodynamic quantities  $\epsilon(T)$ ,  $p(T)$  and the effective temperature dependent coupling constant  $\alpha_s(T)$  are then extracted from quenched lattice QCD calculations [7, 8]. Afterwards, the above results for the condensates are plugged into the MEM analysis of the sum rules and the respective changes of the spectral function is investigated.

### 3 Results

Obtained spectral functions of the vector, pseudoscalar, scalar and axialvector channels at several temperatures are shown in Fig. 1. Here, to eliminate the possible effect of the transport peak at  $\omega = 0$ , we have used for all channels (except the pseudoscalar channel, where such a peak is known not to appear) a derivative sum rule, in which the contribution of the transport peak is eliminated. Furthermore, for this analysis we have used a default model chosen to be a constant with a value adjusted to the perturbatively calculated spectral function at large energy.

First, it is instructive to look at the spectral function at zero temperature. For the positions of the various peaks, corresponding to  $J/\psi$ ,  $\eta_c$ ,  $\chi_0$  and  $\chi_1$ , we can extract the values:

$$\begin{aligned} m_{J/\psi} &= 3.06 \text{ GeV}, & m_{\eta_c} &= 3.02 \text{ GeV}, \\ m_{\chi_0} &= 3.36 \text{ GeV}, & m_{\chi_1} &= 3.50 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Comparing these values to the experimental masses, one observes that all the states are reproduced in the right order and with a precision of about 50 MeV.

Turning now to the results at finite temperature, it is seen that the lowest peaks of all channels disappear (“melt”) just above the critical temperature  $T_c$ . This melting effect is caused by a sudden change of the gluonic condensates around  $T_c$ , which can be related to the behavior of the energy density and pressure of gluonic matter in this temperature region. These results quantitatively disagree with the earlier findings of lattice studies [9], which suggest that both  $\eta_c$  and  $J/\psi$  can survive at temperatures of up to  $1.5 T_c$  or higher and it remains to be seen whether or not the two methods will converge to compatible conclusions when more accurate analyses will become available in the future. A more thorough discussion on all important details of this study will be given in [6]. Furthermore, we note that the same calculation can be done also for bottomonium channels. Such an investigation is presently in progress, preliminary results are shown in the article of K. Suzuki in these proceedings.

### Acknowledgments

This work was supported by KAKENHI under Contract Nos. 22105503, 19540275 and by YIPQS at the Yukawa Institute for Theoretical Physics. P.G. gratefully acknowledges the support by the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists (Contract No. 21.8079). K.M. thanks for the support by FIAS.

### References

- [1] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979); **B147**, 448 (1979).
- [2] T. Hatsuda, Y. Koike and S.H. Lee, Nucl. Phys. **B394**, 221 (1993).
- [3] K. Morita and S.H. Lee, Phys. Rev. Lett. **100**, 022301 (2008).
- [4] P. Gubler and M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124**, 995 (2010).
- [5] P. Gubler, K. Morita and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107**, 092003 (2011).
- [6] P. Gubler, K. Suzuki, K. Morita and M. Oka, in preparation.
- [7] G. Boyd *et al*, Nucl. Phys. **B469**, 419 (1996).
- [8] O. Kaczmarek *et al*, Phys. Rev. D **70**, 074505 (2004).
- [9] M. Asakawa and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **92**, 012001 (2004).

# 汎関数繰りこみ群

仲野英司 高知大・理

## 概要

汎関数繰りこみ群の基本的な考え方を紹介する。その応用範囲は広いので、主に連続相転移における臨界現象への応用について解説する。

## 1 臨界現象と Wilson の繰りこみ群

ここでは、よく議論されている  $d$  次元 Ising モデルを例にとり、議論を進める。図は縦軸温度  $T$ 、横軸外部磁場  $h$  をパラメタにとった相図を示している。中心の太い線分が一次転移に対応しており、その上先端が臨界点になる。臨界点に近づくとき、いろいろな熱力学的量の発散がみられる。これらは、臨界指数で特徴づけられており、 $t = T - T_c$  とすると、基本的な量、例えば、相関長  $\xi$ 、比熱  $C_h$ 、感受率  $\chi$ 、秩序変数  $\phi$  は、次のような振る舞いをする：

$$\xi \sim t^{-\nu}, C_h \sim t^\alpha, \chi \sim t^{-\gamma}, \phi \sim |t|^\beta (\sim h^{1/\delta}) \quad (1)$$

これらの臨界指数には、経験的に次のような関係則（スケーリング関係則）が知られており、独立な指数は 2 つだけになる：

$$\delta = 1 + \gamma/\beta, \alpha + 2\beta + \gamma = 2, \gamma = 2(2 - \eta)\nu, \alpha = 2 - d\nu \quad (2)$$

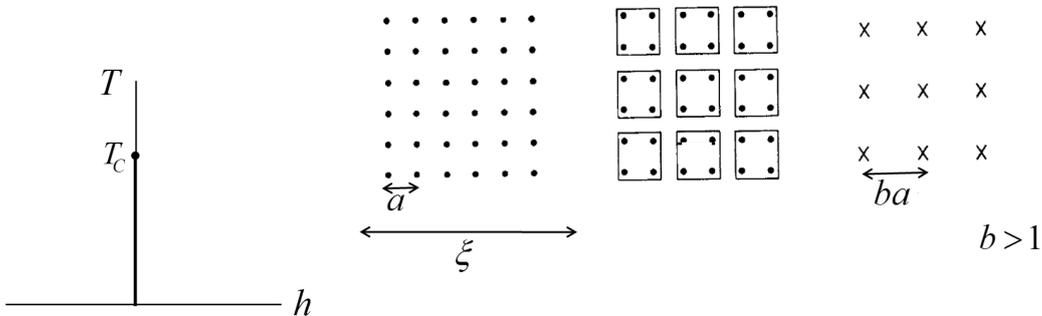


図 1: Left : Ising model phase diagram, and right : Kadanoff's block spin transformation

スケーリング則に関して、Kadanoff はブロックスピンの考えを導入して説得力のある説明を与えた：図のように今相関長が Ising スピンの間隔  $a$  に比べて十分に大きい場合を考える。 $a$  よりも少し大きな領域  $ab$  のスピンの「ある平均」をとる（ブロックスピン）。ここで  $\xi \gg ab$  ( $b > 1$ )。ブロックスピンは相関長よりも十分に小さい領域で平均化されたものなので、ブロックスピン当たりの自由エネルギー  $F_s$  はもとのスピンのそれと比べると引数の違いだけでほとんど同じ形（部分的に）をとると想像できる。つまり、

$$F_s(J, h) \text{ per original spin} \quad (3)$$

$$F_s(Jb^{\Delta_t}, hb^{\Delta_h}) \text{ per block spin} \quad (4)$$

ここで、 $J$  は最近接スピン相互作用を表す。 $\Delta_{t,h}$  は  $b$  のブロックスピンに対して、パラメタがどのように変更を受けるかを示す指数である。ブロックスピンは、領域  $b^d$  で平均化されたも

のなので、系を因数  $b$  だけズームアウトすれば、自由エネルギーには次のようなスケール則が (部分的に) 期待できる：

$$F_s(J, h) = b^{-d} F_s(Jb^{\Delta_t}, hb^{\Delta_h}) \quad (5)$$

物理的考察から結合定数  $J$  は臨界点近傍では温度と同じようにスケールするので、 $J \propto t$  と読み替えられる。このような考察から、熱力学的量は、自由エネルギーの微分から得られるので、自由エネルギーのスケールする部分  $F_s(t, h)$  が臨界指数のスケール則を導くと考えられる。上記の関係は、十分大きな相関長、つまり、臨界点近傍でよく成り立つだろうと予想される。ただし、より基本的な 2 つの指数  $\Delta_{t, h}$  の具体的な数値は、この議論では与えることができない。後に Wilson は、繰りこみ群を用いてそれらを具体的に計算する方法を与えた。この Wilson の繰りこみ群の方法は、単に臨界指数を計算するだけのものではなく、有効理論の考え方をきれいに整備したもので、場の理論における繰りこみの考え方を大幅に変更する契機を与えた。このあたりの議論は、Wilson の原論文や Goldenfeld の教科書などを参考文献に挙げる。

次に Wilson の繰りこみ群の方法を少し説明する [1]。ここでは、Ising モデルの低エネルギー有効理論である  $\phi^4$  理論を例に挙げる。系の静的性質に興味があるので  $d$  次元のユークリッド系で話を進めると、ラグランジアン (ユークリッド・ハミルトニアン) 密度は

$$H_\Lambda[\phi] = \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} r\phi^2 + \frac{1}{4} u\phi^4 \quad (6)$$

と与えられる。ここで  $\Lambda$  は Ising モデルのスピン間隔の逆数におおよそ対応する、つまり、 $a \sim 1/\Lambda$ 。よって  $\Lambda$  は計算上便宜的に導入される UV カットオフとは意味が異なることに注意してほしい。Wilson の方法は、Kadanoff のブロックスピンの考えを場の理論的に定式化したもので、一対一の対応が見つかる。まず、汎関数 (分配関数) を評価するにあたり、ブロックスピン平均への対応として、スピン間隔  $\Lambda \sim 1/a$  から  $\Lambda - d\Lambda \sim 1/ab$  に対応する部分を積分する：

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi_{k < \Lambda} e^{-\int H_\Lambda[\phi]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{k < \Lambda - d\Lambda} \left[ \int \mathcal{D}\phi_{\Lambda < k < \Lambda - d\Lambda} e^{-\int H_\Lambda[\phi]} \right] \\ &\equiv \int \mathcal{D}\phi_{k < \Lambda - d\Lambda} e^{-\int H_{\Lambda - d\Lambda}[\phi]} \end{aligned} \quad (7)$$

$H_{\Lambda - d\Lambda}[\phi]$  はブロックスピンに対する有効ハミルトニアンに対応する。経路積分は原理的にすべてのループ効果を含むので、 $\Lambda$  より小さなスケール  $\Lambda - d\Lambda$  での有効ハミルトニアンは対称性の許すあらゆる項を含む：

$$H_{\Lambda - d\Lambda}[\phi] = \frac{1}{2} a (\nabla\phi)^2 + \dots + \frac{1}{2} r'\phi^2 + \frac{1}{4} u'\phi^4 + \dots \quad (8)$$

すべての結合定数が積分前と異なることに注意する。

次に、ズームアウトに対応する操作として、すべての変数、パラメタを因数  $b$  でリスケールする。つまり、長さの単位を積分する前の元のサイズに取りなおす。これは運動量空間では

$$k \rightarrow bk \quad (9)$$

と表される。通常、微分項最低次の係数  $a$  に関しては、要するに積分前後で理論を比べられるように、これを 1 に保つように場をリスケールする。

これら 2 つの操作：1) 運動量殻  $\Lambda < k < \Lambda - d\Lambda$  上の積分、2) リスケール  $k \rightarrow bk$  のもと、理論がどのように低エネルギー側で変化していくかを追跡するのが、今の場合の繰りこみ群になる。後でもう少し説明するが、各項の次元解析から、この一連の変換 (繰りこみ群) で重要になる係数 (relevant) は、最初の低次数の数項に限られる。この 2 つの操作における各係数の変化を摂動論で評価してみると、結局 2 次と 4 次の係数に関して次の繰りこみ群方程式 (Flow 方程式) が得られる：

$$\begin{aligned} \partial r &= (2 - \eta)r + 12\Omega_4 u (\Lambda^2 - r) \\ \partial u &= (\epsilon - 2\eta)u - 36\Omega_4 u^2 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $b \rightarrow 1$  の連続極限をとり、一連の操作を微分方程式で表した。これは、系の上部臨界次元  $d = 4$  からのズレ  $\epsilon = 4 - d$  による展開の最低次の結果である。 $\eta$  は場のリスケージング (係数  $a$ ) に現れる異常次元であり、 $\eta \sim O(\epsilon^2)$  の高次の寄与である。臨界次元では、揺らぎ間の相互作用が消えるので自明な解を与える。 $\Omega_4$  はループ積分に現れる 4 次元立体角である。上の各 Flow 方程式を眺めると、最初の項は、リスケージングの分で、2 番目の項がループ積分からの寄与である。ここでの繰りこみ群 (Flow 方程式) は、基本的にスケール変換であり、臨界点では系の相関長が無大になるので、臨界点は、スケール変換不変の点、つまり Flow 方程式が止まる点 (固定点) に対応する。固定点は二つあり、一つは、自明な点  $r^* = u^* = 0$  で、もうひとつは非自明な臨界点 (Wilson-Fisher Fixed Point) に対応する：

$$\begin{aligned} r^* &= -\frac{\epsilon}{6}\Lambda^2 + O(\epsilon^2) \\ u^* &= \frac{\epsilon}{36\Omega_4} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、4 次の結合定数が臨界点近傍では  $\epsilon$  に比例して、小さいことが分かる。また、この固定点でのポテンシャルは有限の場の期待値を与えるように思えるが、場もリスケールされているので、実際の期待値はゼロである。固定点の存在は、Flow 方程式における運動量殻積分の寄与とリスケージングの寄与との競合で決まる。 $r$  と  $u$  以外の高次の係数は、この繰りこみ群の変換のもとでは、ついには消えてしまう (irrelevant)。この固定点から臨界指数を導くには、Kadanoff のブロックスピン変換との対応をみれば、直ちにわかる。つまり、系がスケール変換で固定点 (臨界点) に近づくにつれて、パラメタ (ここでは  $r$  が relevant パラメタになる) がどのように変換されるかを見ればよい。別の言い方をすれば、ここでは係数  $r$  が系を臨界にするか、しないかを定めるチューニングパラメタになる。具体的には、固定点近傍で、Flow 方程式を  $r - r^*$  について線形化し、その固有値が基本的な指数 (ここでは  $\Delta_t$ ) を与える：

$$\Delta_t \sim 2 - \epsilon/3 + O(\epsilon^2) \quad (12)$$

ここで、 $r - r^* \propto T - T_c$  と温度に対応させたが、これは有効理論 ( $\phi^4$  理論) がどのような微視的モデルに対応しているかという物理的考察から与えられるもので、他の熱力学変数に対応させてもよい。もうひとつの基本的な指数  $\Delta_h$  に関しては、対称性を破る項  $-h\phi$  を導入してもよいし、他の臨界指数を求めて、スケージング則から導いてもよい。

通常われわれは、物理の対象として 3 次元に興味があるが、上の解析は 4 次元の漸近的近傍で成り立つ話になる。結論を 3 次元に持っていくことは、非摂動的な操作であり簡単にはいれないが、例えば、摂動展開項がすべて足し算可能であるとして演繹する方法や、以下に示すように、始めから 3 次元で非摂動的に評価する方法もある。

## 2 汎関数繰りこみ群

ここでは、Wilson の繰りこみ群の考え方を非摂動的に実践する方法を紹介する。基本的な考えかたは、まったく上記と同じで、Kadanoff のブロックスピンの考えを定式化したものであるが、摂動展開や  $\epsilon$  展開を用いず、繰りこみ群方程式 (Flow 方程式) を非摂動的に導出するという点だけが異なる。先に進む前に場の理論をすこし思い出してみる。われわれは通常、有効ポテンシャルや相関関数に興味があるので、その生成汎関数  $Z[J]$  を評価したい。

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int \varphi J} \quad (13)$$

連結 Green 関数に対しては、その対数を取ったものが生成汎関数となる：

$$\begin{aligned} W[J] &= \ln Z[J], \\ \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \langle \varphi(x) \rangle = \phi, \quad \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_c, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$Z[J]$  や  $W[J]$  が求められれば、問題が解けたことになる。汎関数繰りこみ群は、これらを系統的かつ非摂動的に評価する枠組みを与えようとする。汎関数繰りこみ群には、主に2つの流儀があるので、それぞれ紹介する。

## 2.1 Wilson/Wegner-Houghton/Polchinski

以下の方法は主に Polchinski によって導入された方法であるが、基本的には Wilson の方法を具体化したもので、他にも同様の方法が存在する [1, 2, 4]。Ising モデルのスピン間隔  $a \sim 1/\Lambda$  に対応した  $\Lambda$  を導入するためと、後の便利のために UV のカットオフ関数を導入する：

$$K_\Lambda(p) \simeq \begin{cases} 1 & \text{for } p < \Lambda \\ 0 & \text{for } p > \Lambda \end{cases} \quad (15)$$

これは、 $p = \Lambda$  である程度の幅を持つステップ関数と思ってよい。これを自由場のプロパゲーターに付ける、つまり、Propagator  $\sim K_\Lambda(p)/p^2$  とすると、系に、近似的にスピン間隔  $a \sim 1/\Lambda$  (或いは Lattice 間隔) が導入される。繰りこみ群方程式を導くためには2つの操作が必要であると説明したが、まず、その一つの運動量殻上での経路積分を実行する。カットオフ関数を用いると系の作用は、

$$S_\Lambda[\phi] = \int_p \frac{1}{2} \frac{p^2}{K_\Lambda(p)} \phi_p \phi_{-p} + S_{\text{int}}[\phi] \quad (16)$$

と与えられる。生成汎関数は

$$Z[J, \Lambda, S_\Lambda] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi] + \int_\Lambda J\phi} \quad (17)$$

となる。

ここで、 $\Lambda$  よりも少しだけ低エネルギーの  $\Lambda - d\Lambda$  における有効作用  $S_{\Lambda-d\Lambda}[\phi]$  がどのようなになるかが問題になる。生成汎関数自体は、 $\Lambda - d\Lambda$  の有効作用を用いて表現しても変わらないはずだから、以下のような条件が成り立つ：

$$Z[J, \Lambda, S_\Lambda] = Z[J, \Lambda - d\Lambda, S_{\Lambda-d\Lambda}] \quad (18)$$

この条件から作用の変化分が導かれる、 $dS_\Lambda = S_{\Lambda-d\Lambda} - S_\Lambda$ 。

また、2つめの操作としてリスケーリングを行う。これは、先に述べたように場のスケーリングを決めてやればよい： $A$  を任意の実数とすれば、運動量空間で  $\phi(p) = A^{d-d_\phi} \phi(Ap)$ 、 $d_\phi = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$  として、その他すべての変数をリスケールする。

$b$  の代わりに、運動量殻に対して「繰りこみ群の時間」 $t$  を導入する： $e^{-t\Lambda} < p < \Lambda$ 。  $t$  を用いることは本質的ではないが良く使われる。 $t \rightarrow 0$  の極限（微分）をとって、2つの操作から得られる Flow 方程式は結局次のようになる：

$$\frac{dS[\phi]}{dt} = - \int_p \frac{K}{p^2} \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi_{-p}} \frac{\delta S}{\delta \phi_p} + \frac{2p^2}{K} \phi_p \frac{\delta S}{\delta \phi_p} \right] - \int_p \left[ \phi_p p \cdot \partial_p \frac{\delta S}{\delta \phi_p} + d_\phi \phi_p \frac{\delta S}{\delta \phi_p} \right] \quad (19)$$

摂動論のときと同じように、最初の項は運動量殻積分からの寄与、2番目の項がリスケーリングによる寄与に対応する。この Flow 方程式に従って有効作用  $S_\Lambda[\phi]$  がスケール発展する [4]。

## 2.2 繰りこみ群の流れについて

汎関数繰りこみ群は、非摂動的方法なので、繰りこみが進んだ低エネルギー側の有効理論は一般に対称性が許す全ての項が生成されます（場の非多項式になります）。そこで、通常やられるように簡単な次元解析によって各項を分類してみます。

$$-S = \int dx^d \left[ \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda_4 \phi^4 + \dots \right] \quad (20)$$

それぞれの変数と係数について質量次元を求めると  $[S] = 0, [\phi] = (d-2)/2, [\lambda_2] = 2, [\lambda_4] = 4-d, \dots$  となります。係数つまり結合定数の次元に注目すると、それが正（負）であれば単純なスケール変換で増加（減少）するので、繰りこみ変換での Flow が発散（収束）します。つまり、これらの正の次元をもった係数（relevant variables）が臨界値でない限り、系の Flow は固定点に収束しないということになります。今考えているスカラー理論では、質量項の次元が常に 2 なので、 $\lambda_2$  が系を臨界点に調節するためのパラメタになります。そのほかの係数は次元に依ります。

ここで、場の理論における繰りこみ可能性との関係についてすこし述べます。すでに知られているように結合定数の質量次元から繰りこみ可能（不可能）な項を分類できます：

$$\lambda_i = \begin{cases} \text{relevant (s-renormalizable) if } [\lambda_i] > 0 \\ \text{irrelevant (nonrenormalizable) if } [\lambda_i] < 0 \\ \text{marginal (renormalizable) if } [\lambda_i] = 0 \end{cases} \quad (21)$$

汎関数繰りこみ群では、少しでも繰りこみを進めると全ての項が生成されると述べましたが、無限にある irrelevant 係数が完全に独立に Flow して収拾がつかなくなるわけではなく、低エネルギーでは有限個の relevant 係数の関数として振舞います。relevant 係数は一般に有限個なので、無限次元の全係数空間における、それらが張る部分空間によって低エネルギー側が支配されることとなります。これは、もし大きな  $\Lambda$  の極限で系を有限な理論にもっていくことができれば、全ての物理量を繰りこみ可能な結合定数だけで記述できるということになります。例えば、Gauss 固定点や Wilson-Fisher 固定点の極近傍から湧き出る方向の Flow に対して、それらの固定点は UV 安定になるので、その Flow 上で連続な場の理論を構築することができます。Polchinski は彼の汎関数繰りこみ群方程式から出発して、繰りこみ可能な結合定数の各次数ごとに以上のことを証明しました [2]。つまり、摂動的繰りこみ可能性をダイアグラムの方法とは別の方法で証明したことになります。数値計算を用いて非摂動的に Flow を評価した場合でも、十分低エネルギーで非繰りこみ可能な係数が繰りこみ可能な係数に引かれて収束する様子を明確に見ることができます [4]。

### 2.3 Nicol-Chang, Wetterich

ここでは、生成汎関数から Legendre 変換して得られる有効作用（一様系ではいわゆる有効ポテンシャル）に関する汎関数繰りこみ群方程式を導きます。これに関連する先駆的な仕事は Wetterich らによって成されました [5, 6]。有効作用  $\Gamma[\phi]$  は  $\delta W[J]/\delta J(x) = \langle \varphi(x) \rangle = \phi(x)$  として

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int \phi J \quad \text{at} \quad \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) \quad (22)$$

と与えられます。ここで、UV カットオフ  $\Lambda$  とは別に、次のように運動量  $k (< \Lambda)$  でのカットオフを導入します：

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -S[\varphi] + \int \varphi J - \Delta S_k[\varphi] \right] \quad (23)$$

ここでスケール依存する質量項を導入しました：

$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_q R_k(q) \varphi(-p) \varphi(p) \quad (24)$$

$R_k(q)$  はカットオフ関数で  $R_k(q)|_{k \rightarrow 0} = 0$  を満たす適当な関数で、典型的には図のように  $q = k$  において急で連続的に変化します。このカットオフ関数は、低エネルギーのモードに対して質量を与えるので“IR カットオフ”の役割をもちます。IR カットオフを最後にはゼロにもっていくわけですが、IR 異常のある連続相転移などの記述に対しては都合がよく、これによって大

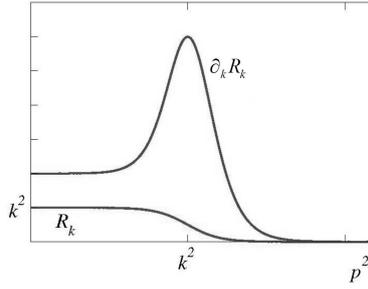


図 2: Typical IR cutoff function and its derivative

かに運動量  $k < q < \Lambda$  をもつ高エネルギーモードだけが経路積分に寄与するので、 $\Lambda$  を固定すれば、スケール  $k$  に依存した汎関数が定義されます。スケール依存する有効作用は、Legendre 変換においてカットオフを含む項を考慮し、 $W_k = \ln Z_k[J]$  として、次のように定義されます：

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + \int \phi J - \Delta S_k[\phi] \quad (25)$$

$\Gamma_k[\phi]$  は、 $R_0(q) = 0$  なので、全てのモードが積分され元の完全な有効作用を再現します： $\Gamma[\phi] = \Gamma_k[\phi]$ 。つまり、スケール  $\Lambda$  においてある基本的な理論或いはそのスケールでの有効理論から出発して、より低いスケール  $k$  までのモードが積分され低エネルギーの有効作用が得られます。Wetterich らの方法は、これを  $\Lambda$  での境界条件つき微分方程式（繰りこみ群方程式）に書き換えてから、汎関数を評価しようというものです：上記の方程式を  $k$  で微分して整理すれば、

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k[\phi] &= -\partial_k W_k[\phi] - \int \frac{\delta W_k}{\delta J(x)} \partial_k J(x) - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\ &= \frac{1}{2} \int_{x,y} G(x,y) \partial_k R_k = \frac{1}{2} \int \partial_k R_k \left[ \Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k \right]^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

$\Gamma_k^{(2)}[\phi] = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi(p) \delta \phi(-p)}$  は完全な 2 点関数で、 $G_k(x,y)$  はその逆でプロパゲーターです。最後の式を見ると完全な 2 点関数を用いた One-loop 計算になっています。ただし、 $R_k(p)$  の典型的な形から解るように、 $\partial_k R_k(p)$  は運動量表示で  $p = k$  に鋭い山をもつので、その部分の寄与が微分方程式で順に取り入れられるという構造になっています。

この汎関数の微分方程式を解くには、積分の中の  $\Gamma_k^{(2)}[\phi]$  に対する情報が必要になります。一般に  $n$  点関数の方程式は、 $\Gamma_k[\phi]$  に対する微分方程式の両辺を  $n$  回汎関数微分すれば得られます：一様系では、

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k^{(2)}[\phi; p] &= - \int_q \partial_k R_k(q) G_k(q)^2 \Gamma_k^{(4)}[\phi; p, -p, q, -q] \\ \partial_k \Gamma_k^{(4)}[\phi; p_1, p_2, p_3, p_4] &= \int_q \partial_k R_k(q) G_k(q)^2 \Gamma_k^{(4)}[\phi; p_1, p_2, q, -p_1 - p_2 - q] \\ &\quad \times \Gamma_k^{(4)}[\phi; p_3, p_4, q, -p_3 - p_4 - q] G(p_1 + p_2 + q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) G_k(q)^2 \Gamma_k^{(6)}[\phi; p_1, p_2, p_3, p_4, q, -p] \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (27)$$

となります。このように  $n$  点関数の微分方程式には  $n + 2$  点関数の情報が必要になり、この関係がずっと続きます。つまり、方程式が閉じていないので一般に厳密に解くことはできません。これは、先ほども述べたように、場の理論の非摂動的な方法では対称性の許す全ての項が生成されるからです。

## 2.4 近似法－Derivative expansion

汎関数繰りこみ群の微分方程式を実際に解くには、状況や興味に適した近似法を用いる必要があります。一つは上で示した方程式のヒエラルキーを途中で切断してしまう、というやり方です。これに関しては  $n$  点関数の運動量依存性も得られるような近似法も提案されています [7]。また、相転移などの記述に適した方法としてよく用いられる方法として Derivative expansion があります。これは、カットオフ関数の性質と汎関数繰りこみ群の微分方程式の性質から導かれます：図から解るように微分方程式の Loop 積分において  $q \leq k$  の運動量だけが寄与します。もしスケール  $k$  よりも小さな外部運動量  $\{p_i\} < k$  に興味がある場合は、もっと大まかに言うと  $n$  点関数  $\Gamma_k[\phi; p_1, \dots, p_n]$  において全ての外部運動量が小さい場合  $\{p_i\} \simeq 0$ 、これらのセクターの微分方程式は、近似的に他のセクターと分離してそれらだけで閉じます。よって、外部運動量ゼロ周りでの展開として、低次の微分項を補正として取り入れます：

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\phi] &= \int U_k(\phi) + \frac{1}{2} \tilde{Z}_k(\phi) (\nabla\phi)^2 + O(\nabla^4) \\ U_k(\phi) &= \sum_{n=0} \Gamma_k^{(2n)}[0; 0, \dots, 0] \phi^{2n}\end{aligned}\quad (28)$$

ここで、 $\tilde{Z}_k(\phi)$  は微分を含まない汎関数で、定数項  $\tilde{Z}_k(0)$  は波動関数の繰りこみに成ります。 $U_k(\phi)$  は一様系の相関を導くときに必要な有効ポテンシャルになります。汎関数  $U_k(\phi)$  と  $\tilde{Z}_k(\phi)$  は原理的には元の  $\Gamma_k[\phi]$  に対する繰りこみ群方程式に代入して数値計算などで求めることができます。異常次元が大きくないと期待できる場合は  $\tilde{Z}_k = 1$  とさらに近似して (Local potential approximation, LPA)、 $U_k$  だけの閉じた方程式に落とすことができます。この LPA は、 $O(N)$  モデルのように内部自由度がある場合や波動関数繰りこみが重要になる空間 2 次元以下の低次元でなければ、それほど悪くない近似になります。このように一般の有効ポテンシャル  $\Gamma_k[\phi]$  を微分の最低次で切断して、もとの微分方程式に返してやれば、有効ポテンシャル  $U_k(\phi)$  に関して次のような閉じた方程式が得られます：

$$\partial_k U_k(\phi) = \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial_k R_k(q)}{q^2 + U_k^{(2)}(\phi) + R_k(q)} \quad (29)$$

LPA やそれ以上の近似を用いて有効ポテンシャルを求める利点としては、まず揺らぎが非摂動的に取り入れられるので、一般に相転移自体の有無も含んだ系の相構造を詳しく知ることができます。更に、相転移近傍において、最初に紹介した臨界次元直下でのイプシロン展開を使わずに直接興味ある次元で非摂動的に臨界指数を評価できます。臨界指数やスケーリング関係はユニバーサルな性質ですが、汎関数繰りこみ群の利点は、臨界領域の大きさやそこでの熱力学的量の定量的な振る舞いなど、非ユニバーサルな系固有の性質を評価できる点にあります。

ここでは、リスケーリングを施さずに繰りこみ群方程式を導いたので、直接有効作用 (有効ポテンシャル) を評価しています。固定点から臨界指数やスケーリング関数を求めたい場合は、 $k$  でリスケールする必要がありますが、波動関数の繰りこみは十分小さい  $k$  の領域で  $Z_{k \rightarrow 0} \sim (k/\Lambda)^{-\eta}$  と振舞うので、場の理論と同様に  $Z_k$  を繰りこむ必要があります：

$$\tilde{\phi} = \sqrt{Z_k} k^{(2-d)/2} \phi, \quad \tilde{U}_k(\tilde{\phi}) = k^{-d} U_k(\phi) \quad (30)$$

このように、全ての変数を  $k$  によって無次元化すればよい。これらの変数によって書き換えられた Flow 方程式において、運動量積分とリスケールとの競合から、系の固定点を見つけることができます。固定点から得られるユニバーサルな性質に関しては、摂動論のときと並行した議論ができます。

## 3 Flow 方程式 カイラル有効モデル

次に応用例を挙げて、Flow 方程式の具体的な解き方を 2 つ挙げます。以下では、カイラル有効モデルの一つである Quark-meson model (QM model) を扱います [6]。興味あるパラメ

タ領域で相転移や臨界点が存在するかは、与えられる微視的ラグランジアンに依存しますが、QM model は、カイラル極限では  $O(4)$  モデルに帰着し、破れの項がある場合は有限密度領域に QCD で期待されている臨界点 (critical end point) と同じ 3 次元 Ising モデルに属する臨界点を示します。ラグランジアンは、3 カラーと 2 フレーバーで、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\partial\!\!\!/ - g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi)^2 - U(\sigma, \vec{\pi}), \quad (31)$$

ここで  $\psi$  はクォーク、 $\phi = (\sigma, \vec{\pi})$  はシグマとパイオンに対応する場で、そのポテンシャルは、

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2)^2 - h\sigma, \quad (32)$$

と与えられます。 $h$  に比例する項が破れの効果になります。このモデルは、フェルミオンとボソンが入っている比較的簡単な応用例といえます。

Derivative expansion および LPA を採用して、次のようなスケール依存した有効作用からスタートします：

$$\Gamma_k[\psi, \bar{\psi}, \phi] = \int d^4x [\bar{\psi} (\not{\partial} + g(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi)^2 + U_k(\rho)], \quad (33)$$

$U_k(\rho)$  は、 $\rho = \frac{1}{2}\phi^2$  と置いたときのスケール依存する有効ポテンシャルになります。有限温度とバリオン数の化学ポテンシャルは、いつものようにユークリッド空間での時間軸を松原振動数に、微分を  $\partial_\tau \rightarrow \partial_\tau - \mu$  のように、それぞれ置き換えることで導入できます。

ここで、後の計算のために最適化したカットオフ関数を用意します：フェルミオンとボソンにそれぞれ

$$\begin{aligned} R_{F,k}(q) &= (\not{q} + i\mu\gamma_0) \left( \sqrt{\frac{\tilde{q}_0^2 + k^2}{\tilde{q}_0^2 + \mathbf{q}^2}} - 1 \right) \theta(k^2 - \mathbf{q}^2) \\ R_{B,k}(\mathbf{q}) &= (k^2 - \mathbf{q}^2) \theta(k^2 - \mathbf{q}^2), \end{aligned} \quad (34)$$

を用います。ここで  $\tilde{q}_0 = q_0 + i\mu$ 。一様系では、 $U_k(\rho)$  の極小値が  $\rho = \rho_{0,k}$  (スケール依存する場の期待値) で与えられたとすれば、 $\Omega_k(T, \mu; \rho_{0,k}) \equiv U_k(\rho_k)$  が熱力学的ポテンシャルになります。これらのカットオフ関数を用いると松原和と運動量積分が解析的に実行できて、次のような Flow 方程式が得られます：

$$\partial_k \Omega_k(T, \mu; \rho_{0,k}) = \frac{k^4}{12\pi^2} \left[ 3 \frac{1 + 2n_B(E_\pi)}{E_\pi} + \frac{1 + 2n_B(E_\sigma)}{E_\sigma} - 2\nu_q \frac{1 - n_F^+(E_q) - n_F^-(E_q)}{E_q} \right] \quad (35)$$

ここで  $n_B(x) = [e^{x/T} - 1]^{-1}$  と  $n_F^\pm(x) = [e^{(x \mp \mu)/T} + 1]^{-1}$  は分布関数です。右辺に出てくるエネルギー  $E_{\pi,\sigma,q} = \sqrt{k^2 + M_{\pi,\sigma,q}^2}$  において、質量がスケール依存します： $M_\pi^2 = \bar{\Omega}'_k$ ,  $M_\sigma^2 = \bar{\Omega}'_k + 2\rho_{0,k}\bar{\Omega}''_k$ ,  $M_q^2 = 2g^2\rho_{0,k}$ 。ただし、これらは破れの項も含めたポテンシャル  $\bar{\Omega}_k = \Omega_k + h\sqrt{2\rho}$  の微分を  $\rho_{0,k}$  で評価したものです。

具体的な Flow 方程式の解き方として、2 つ紹介します [6, 8]。一つ目は、期待値  $\rho_{0,k}$  の周りでテイラー展開を行う方法です：

$$\bar{\Omega}_k(T, \mu; \rho) = \sum_{m=0}^N \frac{a_{m,k}}{m!} (\rho - \rho_{0,k})^m. \quad (36)$$

これを Flow 方程式に戻せば、停留値条件  $\frac{d\bar{\Omega}_k}{d\sigma} - h = 0$  のもとの展開係数に関するそれぞれの Flow 方程式が得られます：

$$\partial_k a_{0,k} = \frac{h}{\sqrt{2\rho_{0,k}}} \partial_k \rho_{0,k} + \partial_k \Omega_k, \quad (37)$$

$$\partial_k \rho_{0,k} = - \frac{\partial_k \Omega'_k}{h/(2\rho_{0,k})^{3/2} + a_{2,k}}, \quad (38)$$

$$\partial_k a_{2,k} = a_{3,k} \partial_k \rho_{0,k} + \partial_k \Omega''_k, \quad (39)$$

$$\partial_k a_{3,k} = \partial_k \Omega'''_k. \quad (40)$$

ここでは場の6次までの展開になっています。上記の方程式は結合定数に対して非摂動的になっていることがわかります。この方程式は、 $\Lambda$ での境界条件のもと容易に解くことができます。

次に有効ポテンシャルの形を数値的に求める方法として、Grid methodを紹介します。この方法では、図のように、場の空間を差分化してそれぞれのサイトの値を微分方程式から決めます。これらの方法を用いて有効ポテンシャルを評価すると、この系はある有限の温度・密度

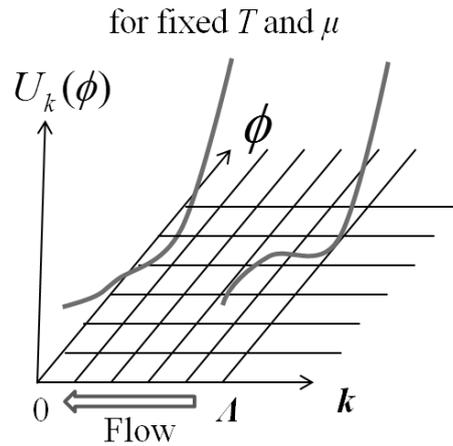


図 3: Flow of potential in grid space

$(T_c, \mu_c)$  のところに critical end point を持つことがわかります。例えば、比較のために  $\mu = 0$  と  $\mu = \mu_c$  において、秩序変数  $\langle \sigma \rangle$ 、 $M_\pi$ 、 $M_\sigma = \xi^{-2}$  の温度依存性を図に示します：相関長が

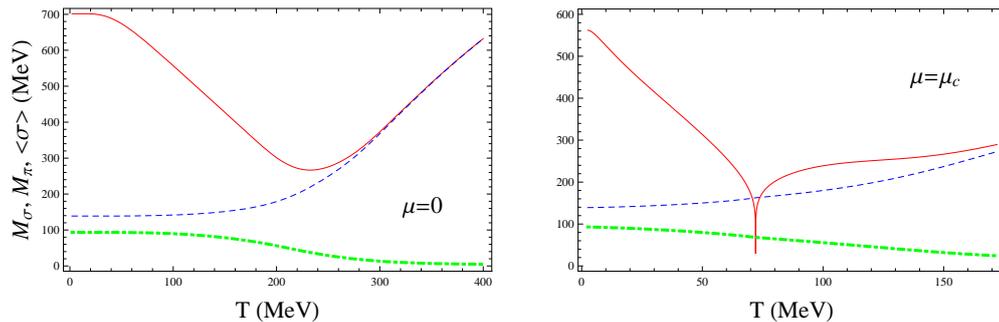


図 4:  $\langle \sigma \rangle$  : dot-dashed,  $M_\pi$  : dashed, and  $M_\sigma$  : solid.

大きくなるので臨界点近傍では  $M_\sigma$  が急激に減少していることがわかります。これらの振る舞いから臨界指数や臨界領域を見積もることができます。

## 4 まとめ

- Legendre 有効作用  $\Gamma(\phi)$  に対する Wilson による繰りこみ群の非摂動的定式化をおこなった。ここでは UV scale  $\Lambda$  に加えて、IR カットオフスケール  $k$  を導入し、 $k$  依存する有効作用  $\Gamma_k(\phi)$  に関する繰りこみ群方程式を導いた。 $k = \Lambda$  においてある基本的なモデルあるいは有効モデル (繰りこみ可能、不可能を問わず) から出発し、この Flow 方程式を  $k = 0$  まで解けば、原理的に完全な有効作用  $\Gamma_0(\phi) = \Gamma(\phi)$  が得られる。
- Flow 方程式 (繰りこみ群方程式) によって、有効作用或いは有効ポテンシャルを直接評価することができる。系のユニバーサルな性質に特に興味がある場合は、 $k$  でリスケールした無次元化量に対する Flow 方程式から固定点を見つける。
- Flow 方程式を実際に解くには、場の汎関数空間においてある程度切断を行い、近似的に方程式を閉じた形にする必要がある。近似法として Derivative Expansion と更に Local Potential Approximation を紹介した。
- 主にスカラー理論に対して議論してきたが、フェルミオンに対する拡張も同様に行うことができる [6]。また、カイラル有効理論を例に挙げて、有限温度・密度の導入を行った [6]。その他、冷却原子系やゲージ理論に対する応用は、例えば文献 [3, 6, 9, 10] やその reference を参考にしてほしい。

## 参考文献

- [1] K. G. Wilson, J. B. Kogut, Phys. Rept. **12**, 75-200 (1974).
- [2] J. Polchinski, Nucl. Phys. B231 (1984) 269-295
- [3] B. Delamotte, [cond-mat/0702365].
- [4] C. Bagnuls, C. Bervillier, Phys. Rept. **348**, 91 (2001). [hep-th/0002034].
- [5] C. Wetterich, Nucl. Phys. B352 (1991) 529-584
- [6] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. 363 (2002) 223-386
- [7] J. -P. Blaizot, R. Mendez Galain, N. Wschebor, Phys. Lett. **B632**, 571-578 (2006). [hep-th/0503103].
- [8] E. Nakano, et al., Phys. Lett. **B682**, 401-407 (2010). [arXiv:0907.1344 [hep-ph]].
- [9] J. Polonyi, Central Eur. J. Phys. **1**, 1-71 (2003). [hep-th/0110026].
- [10] H. Gies, [hep-ph/0611146].

# Phase Transition due to Quantum Dissipation

Ken-Ichi Aoki and Tamao Kobayashi

(Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University)

e-mail: aoki@hep.s.kanazawa-u.ac.jp, ballblue@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

The phase transition here is the quantum-to-classical phase transition. Consider a quantum system of the double well potential. Due to the tunneling, the system is oscillating and symmetric, which we call ‘quantum’. With dissipation effects, the tunneling is suppressed, and the ground state is localized to break the symmetry, which we call ‘classical’. Then, there must be a ‘phase transition’ between these two states. Our subject is to evaluate the critical dissipation for this phase transition.

It is non-trivial to include dissipative effects in the quantum mechanics, since there is no simple Hamiltonian to realize friction proportional to the velocity. We take the Caldeira-Leggett model[1], where dissipation comes out of the microscopic origin, The model consists of a target system and environment degrees of freedom of infinitely many harmonic oscillators,

$$S[q, \{x_\alpha\}] = \int dt \left\{ \frac{1}{2} M \dot{q}^2 - V_0(q) + \sum_\alpha \left[ \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2 - q C_\alpha x_\alpha \right] \right\}. \quad (1)$$

The target variable and each environmental variable are coupled linearly with coupling constant  $C_\alpha$ . Due to these couplings, the energy of the target system is transferred to the environmental oscillators, and it exhibits as dissipation effects. To describe the effective target dynamics, we integrate out the environmental degrees of freedom. Then the non-local interactions of the target variable emerge as,

$$\Delta S_{\text{NL}} = \frac{\eta}{4\pi} \int ds d\tau \frac{(q(s) - q(\tau))^2}{|s - \tau|^p}, \quad (2)$$

where  $\eta$  is an effective coupling constant to represent the strength of dissipation and parameter  $p$  denotes the damping rate of the non-local interactions.

In the Euclidean path integral formalism, the quantum mechanical system is equivalent to a one-dimensional statistical system. If we approximate the system using the minimum degrees of freedom, that is, two states per site, it is transformed into the Ising spin chain with long range interactions. Long range Ising models have its own long history and it has been understood that with strong enough long range interactions there occurs the spontaneous magnetization.

For the long range Ising models, we evaluated the critical dissipative interactions to bring about the spontaneous magnetization. We developed a new method of the Block Decimation Renormalization Group (BDRG) and the Finite Range Scaling (FRS) method [2]. Our results obtained by a simple calculation with a very small size of the computational resources give results which are almost same as the large scale Monte Carlo studies.

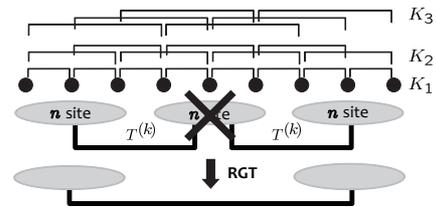


Figure 1: BDRG procedure

We show the BDRG method in Fig.1 in case of range  $n = 3$ . The DRG is a block spin transformation method formulated by Wilson to calculate the partition function.[3] In the case that

there are non-nearest neighbor interactions, the original DRG does not work. So we developed its extended version, the BDRG, which may accomodate long range interactions.

We consider a system with long range interactions with coupling constants  $K_m$ . We set the maximal range of interactions to be  $n$  and investigate the infinite range limit by increasing  $n$ , one by one. First, we divide spins into blocks of size  $n$ . Then there are interactions only between nearest neighbor blocks. Next, the middle block in Fig.1 is decimated, namely, is integrated for all possible states of the block. Then the renormalization transformation is defined and can be repeated by making a product of Transfer matrices,  $T^{(k+1)} = T^{(k)} \cdot T^{(k)}$ , where  $T^{(k)}$  matrix represents the interactions between  $k$ -th renormalized neighboring blocks.

By BDRG we calculate the susceptibility of the system with a finite range interactions exactly. We increase  $n$  to see the change of the susceptibility and defines the corresponding scaling exponent  $\beta$  as follows,

$$\log \chi(n = \infty) \Rightarrow \sum_n^{\infty} \log \chi(n) - \log \chi(n-1) \Rightarrow \sum_n^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta(p,\eta)}. \quad (3)$$

Using the exponent we estimate the divergent point of the susceptibility and it gives the critical dissipation. That is, the infinite  $n$  behavior of the susceptibility is controlled by the zeta function  $\zeta(\beta)$ , which has a pole singularity at  $\beta = 1$ . Finally, the critical  $\eta$  is determined by the condition  $\beta(p, \eta) = 1$ . This method of using finite range systems to evaluate the infinite range divergence is the Finite Range Scaling method we have developed.

We move on to BDRG for quantum mechanics with a double well potential  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda x^4$ . Note that states on a site is infinite dimensional in quantum mechanics and  $T$  matrix is defined by bi-local potential  $W$  as,

$$T = e^{-W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)} = \langle x_1 x_2 \cdots x_n | \hat{U} | y_1 y_2 \cdots y_n \rangle. \quad (4)$$

Here we introduce a new complete state set  $a_n$  and redefine  $T$  matrix,

$$\begin{aligned} T &= e^{-\tilde{W}(a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_n)} = \langle a_1 \cdots a_n | \hat{U} | b_1 \cdots b_n \rangle \\ &= \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \langle a_1 \cdots a_n | x_1 \cdots x_n \rangle \langle x_1 \cdots x_n | \hat{U} | y_1 \cdots y_n \rangle \langle y_1 \cdots y_n | b_1 \cdots b_n \rangle \\ &= \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \psi_{a_1}^*(x_1) \cdots \psi_{a_n}^*(x_n) e^{-W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)} \psi_{b_1}(y_1) \cdots \psi_{b_n}(y_n), \end{aligned} \quad (5)$$

where site variables  $x$ ,  $y$  and  $z$  is replaced with the complete set indices  $a, b$  and  $c$ .

Now we approximate the states with only 2 states. We take the linear combination of two states, the ground state  $|0\rangle$  and the 1st excited state  $|1\rangle$  of the double well potential without dissipation ( $\eta = 0$ ),  $\psi_{\uparrow, \downarrow} = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ . We call this type of 2-state approximation as the ground state approximation. Hereafter, our aim is to evaluate the plausibility of our BDRG and FRS methods in the effective Ising model with the ground state approximation.

For example, in  $n = 2$ , initial  $T$  matrix is calculated as follows,

$$\begin{aligned} T &= e^{-W(a_1 a_2, b_1 b_2)} = \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \psi_{a_1}^*(x_1) \psi_{a_2}^*(x_2) \psi_{b_1}(y_1) \psi_{b_2}(y_2) \\ &\times \exp \left[ -\frac{m(x_1 - x_2)^2}{4\epsilon} - \frac{m(x_2 - y_1)^2}{2\epsilon} - \frac{m(y_1 - y_2)^2}{4\epsilon} - \frac{\epsilon}{2} (V(x_1) + V(x_2) + V(y_1) + V(y_2)) \right] \\ &- \frac{\eta}{2\pi} \epsilon^{2-p} \left[ \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} (y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2^p} \left( (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\epsilon$  is the discretization step. The first group of terms are the original kinetic terms, the second are the potential terms, and the last are dissipation terms given by the CL non-local interactions. In the ground state approximation, generally,  $2^{2n}$  integrations of  $2n$ -dimensions are necessary to get the initial  $T$  matrix of BDRG. To evaluate these large dimensional integration, we adopt the Monte Carlo itegration method.

We show our numerical results. Fig.2 shows a behavior of  $\beta$  versus  $\eta$  for  $n = 5, 6, 7$  at  $\lambda = 0.04$ . We take the following parameters: the damping factor  $p = 1.9$ , the discretization step  $\epsilon = 0.9$ , the number of configurations for Monte Carlo integration =6 million. The FRS exponent  $\beta$  changes smoothly from the weak coupling region to the strong coupling region and the critical point  $\eta_c$  is given by the point  $\beta = 1$ . In this case,  $\eta_c$  reads 0.18.

At the end, we have our preliminary results of  $\eta_c$  versus  $\lambda$  in Fig.3 comparing with the results of earlier researches. Our results and those of sophisticated Monte Carlo simulation[4] supports complementary parameter regions, and they seem to be smoothly connected. Also the instanton results looks consistente with our results. We also note that a non-perturbative renormalization group approach.[5] gives restuls at a very large  $\lambda$  region beyond this plot area.

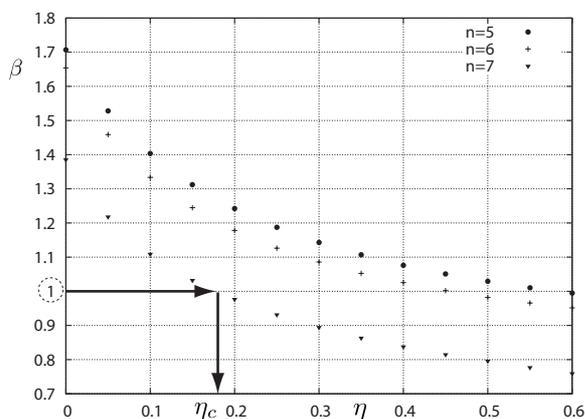


Figure 2: An example behavior of  $\beta$

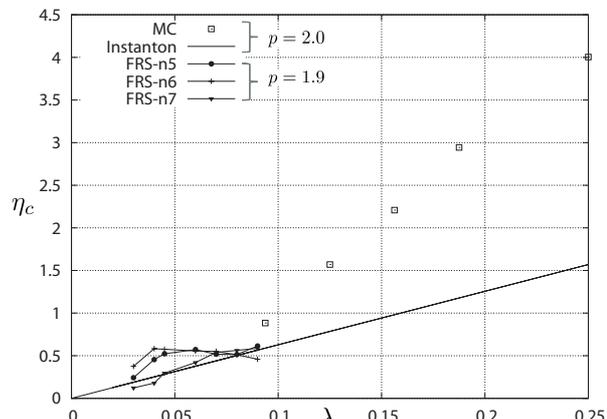


Figure 3: Critical dissipation compared with other approaches

## References

- [1] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46**, 211(1981); Ann. of Phys. **149**, 374(1983).
- [2] K-I. Aoki, T. Kobayashi and H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **119**, 509(2008).
- [3] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773(1975).
- [4] T. Matsuo, Y. Natsume and T. Kato, J. Phys. Soc. Jpn. **75**, 103002(2006).
- [5] Ken-Ichi Aoki and Atsushi Horikoshi, Phys. Lett. A **314**, 177(2003).

## **Bose-Einstein condensation and thermalization of the quark-gluon plasma**

Jean-Paul Blaizot

*Institut de Physique Théorique, CNRS/URA 2306,  
CEA/DSM-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France*

This talk is based on two recent papers [1] and [2], in which appropriate references to the topics discussed can be found.

### **I. INTRODUCTION**

There is ample evidence from the RHIC experiments, and now from the LHC, that the matter produced in ultra-relativistic heavy ion collisions is strongly interacting: this is manifest in the absorption of jets, commonly attributed to a large energy loss in matter, and the collective behavior responsible for the elliptic flow. Particularly striking, in the latter case, is the success of hydrodynamics, suggesting perfect fluid behavior with a low ratio of viscosity to entropy density.

The strongly coupled character of the quark-gluon plasma that is revealed by the data is at first sight puzzling. Does this imply that the initial concept of the quark-gluon plasma, based on QCD asymptotic freedom, is wrong ? Is the coupling constant truly large ? The answers to both these questions are negative [1]. I argue in the talk that a resolution of the puzzle relies on the fact that quark-gluon plasmas are effectively multi-scale systems, in which modes with different wavelengths are differently coupled. In particular long-wavelength modes, akin to collective excitations, are strongly coupled even if the coupling constant is small.

A further puzzle is the success of hydrodynamics. To be applicable, hydrodynamics requires some degree of local equilibration. To understand how this is achieved, that is, to understand the detailed mechanisms by which the partonic degrees of freedom of the initial nuclear wavefunctions get freed and subsequently interact to lead to local equilibrium, is a challenging problem. Some elements of a possible scenario for how this happens are presented in this talk.

### **II. THE OVERPOPULATED QUARK-GLUON PLASMA**

Let us recall that the density of gluons that make most of the wave function of nuclei at high energy grows as nuclei are boosted to higher energy. This growth eventually “saturates” when non linear QCD effects start to play a role. This phenomenon is characterized by a particular momentum scale, called the saturation momentum  $Q_s$ . Partons in the wave function have different transverse

momenta  $k_T$ . Those with  $k_T > Q_s$  are in a dilute regime; those with  $k_T < Q_s$  are in the saturated regime. Note that at saturation, naive perturbation theory breaks down, even though  $\alpha_s(Q_s)$  may be small if  $Q_s$  is large: the saturation regime is a regime of weak coupling, but the large gluon density induces non perturbative effects.

In collisions of nuclei, the gluons that contribute dominantly to the energy density of the produced matter are freed over a time scale of order  $\tau_0 \sim Q_s^{-1}$ , and have typical transverse momenta of order  $Q_s$ . Their contribution to the energy density is  $\epsilon_0 \sim Q_s^4/\alpha_s$ , while their number density is  $n_0 \sim Q_s^3/\alpha_s$ . One may characterize this initial distribution of gluons by the dimensionless combination  $n_0 \epsilon_0^{-3/4} \sim 1/\alpha_s^{1/4}$ . In comparison, in an equilibrated system of gluons at temperature  $T$ ,  $\epsilon_{\text{eq}} \sim T^4$ ,  $n_{\text{eq}} \sim T^3$ , so that  $n_{\text{eq}} \epsilon_{\text{eq}}^{-3/4} \sim 1$ . There is therefore a mismatch, by a large factor  $\alpha_s^{-1/4} \gg 1$  (in weak coupling asymptotics,  $\alpha_s \ll 1$ ), between the value of  $n\epsilon^{-3/4}$  in the initial condition and that in an equilibrated system of gluons. We interpret this mismatch as an ‘‘overpopulation’’ of the initial distribution.

Gluons in a plasma become massive as a result of their interactions, and the number of massive gluons can be controlled by a chemical potential. It is easy to show, however, that a chemical potential will not help decreasing the overpopulation if the system is driven to equilibrium by *elastic collisions alone*. In this case, Bose condensation will occur, leading to an equilibrium state in which most of the particles are to be found in the condensate, while most of the energy density remains carried by thermal particles. Note that inelastic, particle number changing, processes preclude the possibility that the true equilibrium state is a Bose condensate, but it leaves open the possibility that a transient condensate develops during the evolution of the system.

### III. KINETIC EVOLUTION DOMINATED BY ELASTIC COLLISIONS

In order to address the question of how the system evolves towards its equilibrium state, we rely in [2] on a simple kinetic equation of the form  $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)f(\mathbf{k}, X) = C_k[f]$ , where  $C_k[f]$  is the usual collision integral for 2 to 2 processes. We ignore here possible mean field contributions in the left hand-side: we assume that such terms are responsible for instabilities of various kinds whose main effect is isotropize the momentum distribution on a short time scale, and maintain at least some degree of isotropy in spite of the fast longitudinal expansion that takes place in heavy ion collisions.

One finds, in the small angle approximation for the collision integral, that the dynamics is governed by two scales,  $\Lambda_s$  and  $\Lambda$ , obtained from

$$\frac{\Lambda\Lambda_s}{\alpha_s} \equiv - \int_0^\infty dp p^2 \frac{df}{dp}, \quad \frac{\Lambda\Lambda_s^2}{\alpha_s^2} \equiv \int_0^\infty dp p^2 f(1+f). \quad (1)$$

Remarkably, in the regime where  $f \gg 1$  ( $f \sim 1/\alpha_s$ ), all dependence on  $\alpha_s$  disappears. Thus, the typical collision time,  $t_{\text{scat}} = \Lambda/\Lambda_s^2$ , is independent of  $\alpha_s$ . A simple analysis reveals that provided one is not too close to equilibrium  $t_{\text{scat}} \sim t$ . This, together with energy conservation,  $\Lambda_s \Lambda^3 \sim \text{constant}$ , is enough to fix the evolution of the two scales. In the absence of longitudinal expansion, one gets  $\Lambda_s \sim Q_s \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{3}{7}}$  and  $\Lambda \sim Q_s \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{7}}$ . Thermalization occurs typically when  $\Lambda_s \sim \alpha_s \Lambda$ , i.e., for  $t_{\text{th}} \sim \frac{1}{Q_s} \left(\frac{1}{\alpha_s}\right)^{\frac{7}{4}}$ .

Inelastic particle production or annihilation processes modify the collision integral, but in the overpopulated regime, the dependence of the collision time on  $\Lambda_s$  and  $\Lambda$  remains unchanged. Thus, quite remarkably, including the effects of inelastic scattering does not change the scaling behaviour for  $\Lambda_s$  and  $\Lambda$ . There are modifications of the treatment of the condensate however. As we have already mentioned, inelastic processes will inevitably lead to an equilibrium state without a condensate. The question then arises of whether such a condensate can exist as a transient state for a sufficient amount of time to influence the dynamics of the system. Of course, the answer to this question can only be obtained after a detailed numerical analysis of the solution of the transport equation.

#### IV. SUMMARY

This talk argues that, because of the large initial (over)population of the low momentum modes expected at weak coupling, the quark-gluon plasma formed in the early stages of heavy ion collisions is strongly interacting with itself up to parametrically late times when the system thermalizes. In addition, a transient Bose–Einstein condensate may develop during the approach to equilibrium.

#### Acknowledgements

This research is supported by the European Research Council under the Advanced Investigator Grant ERC-AD-267258.

- 
- [1] J. -P. Blaizot, “Weakly and strongly coupled degrees of freedom in the quark-gluon plasma,” *Acta Phys. Polon. Supp.* **4**, 641-646 (2011). [arXiv:1108.3049 [hep-ph]].
- [2] J. -P. Blaizot, F. Gelis, J. Liao, L. McLerran, R. Venugopalan, “Bose–Einstein Condensation and Thermalization of the Quark Gluon Plasma,” [arXiv:1107.5296 [hep-ph]], to be published in *Nucl. Phys. A*

# 1次元トラス内におけるボース・フェルミ混合系の動的性質

首都大理工<sup>1</sup>, お茶大アカプロ<sup>2</sup>

柴藤亮介<sup>1</sup>, 西村拓史<sup>2</sup>

## 1 はじめに

1995年、JILAのグループにより原子気体のボース・アインシュタイン凝縮体(BECs)が観測された[1]。極低温原子気体は原子間相互作用の強さや系の次元、粒子数などを記述するパラメータを高い精度で制御できる特徴を持ち、不純物を含まない理想的な系であることから、量子多体問題の理論を検証する試金石として精力的に研究が進められている。2002年には量子統計性の異なる粒子(ボース粒子、フェルミ粒子)を混合させ、ボース・アインシュタイン凝縮とフェルミ縮退が同時に実現するボース・フェルミ(BF)凝縮体が観測された[2]。BF混合系では引力相互作用によるフェルミ縮退の不安定性[3, 4]や複合フェルミオン( $C = BF$ )の生成[5]、ユニタリティ極限近傍におけるBF対形成の研究[6]など様々な興味深い現象が確認されている。

本研究では、1次元トラス内におけるBF混合系のダイナミクスを解析することで量子多体相関(特にBF対相関)が系に与える役割を考察する。変形ポテンシャルを与えて初期基底状態を作りポテンシャル切断後のダイナミクスを調べると、自発的対称性の破れからの回復によるソフトモードが発現する。これはハートリー・フォック(HF)近似では現れない特有のモードで、量子多体相関の影響で生じた結果であると考えられる。このような量子多体相関による物理学は原子核理論分野における「変形核」でも議論されており、極低温原子気体の研究分野のみならず学際的な立場からの取り組みであると言える。また、葉巻型ポテンシャルやトラス内における1次元ボース系の実験研究[7, 8]が進んでいる一方でBF混合系は未だ実現されていないため、本研究は実験グループへの具体的提言となるであろう。

## 2 定式化

BF混合系のハミルトニアンとして、

$$H = E_R(\tilde{H}_b + \tilde{H}_f + \tilde{H}_{bb} + \tilde{H}_{bf}) \equiv E_R \tilde{H}, \quad E_R = \frac{\hbar^2}{mR^2} \quad (1)$$

を採用する。 $\hbar$ ,  $R$ ,  $m$ ,  $E_R$ はそれぞれプランク定数、トラスの半径、粒子の質量、無次元の定数である。各部分のハミルトニアンとそれらの運動量表示<sup>1</sup>は、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_b &= \int_0^{2\pi} d\theta \Phi^\dagger(\theta) \left[ -\frac{\nabla_\theta^2}{2\tilde{m}_b} + \tilde{V}_b \cos \theta \right] \Phi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\kappa^2}{2\tilde{m}_b} b_\kappa^\dagger b_\kappa + \frac{\tilde{V}_b}{2} (b_\kappa^\dagger b_{\kappa-1} + b_{\kappa-1}^\dagger b_\kappa) \right] \\ \tilde{H}_f &= \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta) \left[ -\frac{\nabla_\theta^2}{2\tilde{m}_f} + \tilde{V}_f \cos \theta \right] \Psi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\kappa^2}{2\tilde{m}_f} c_\kappa^\dagger c_\kappa + \frac{\tilde{V}_f}{2} (c_\kappa^\dagger c_{\kappa-1} + c_{\kappa-1}^\dagger c_\kappa) \right] \\ \tilde{H}_{bb} &= \frac{\tilde{g}_{bb}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \Phi^\dagger(\theta) \Phi^\dagger(\theta) \Phi(\theta) \Phi(\theta) = \frac{\tilde{g}_{bb}}{4\pi} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa_4=-\infty}^{\infty} b_{\kappa_1}^\dagger b_{\kappa-\kappa_1}^\dagger b_{\kappa-\kappa_4} b_{\kappa_4} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>以下のような場の演算子の運動量表示を導入した。

$$\Phi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa\theta}}{\sqrt{2\pi}} b_\kappa, \quad \Psi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa\theta}}{\sqrt{2\pi}} c_\kappa,$$

$\Phi(\theta)$ はボース場の演算子、 $\Psi(\theta)$ はフェルミ場の演算子、 $b_\kappa^\dagger(b_\kappa)$ ,  $c_\kappa^\dagger(c_\kappa)$ はそれぞれボース粒子の生成(消滅)演算子、フェルミ粒子の生成(消滅)演算子である。

$$\tilde{H}_{bf} = \frac{\tilde{g}_{bb}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \Phi^\dagger(\theta) \Psi^\dagger(\theta) \Psi(\theta) \Phi(\theta) = \frac{\tilde{g}_{bf}}{2\pi} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa_4=-\infty}^{\infty} b_{\kappa_1}^\dagger c_{\kappa-\kappa_1}^\dagger c_{\kappa-\kappa_4} b_{\kappa_4} \quad (2)$$

と書ける。 $\tilde{g}_{bb}(\tilde{g}_{bf})$  はボース粒子間 (ボース・フェルミ粒子間) 相互作用を表している。 $\kappa$  は重心運動量であり  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_3 + \kappa_4$  を満たしている。

以下に、系のダイナミクスからエネルギースペクトルを導出する手順を示す。

- (1) 変形ポテンシャル  $\tilde{V} = \tilde{V}_f = \tilde{V}_b \neq 0$  で系を歪ませている状態で、基底状態  $|g(N_b, N_f)\rangle$  を準備する。
- (2) ポテンシャルを外し ( $\tilde{V} = 0, t = 0$ )、歪みの秩序変数の平均値  $o_\alpha(t) \equiv \langle \psi(t) | O_\alpha | \psi(t) \rangle$  を計算する。

ここで、歪みの秩序変数は

$$O_b \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \Phi^\dagger(\theta) \cos \theta \Phi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (b_\kappa^\dagger b_{\kappa-1} + b_{\kappa-1}^\dagger b_\kappa), \quad (3)$$

$$O_f \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta) \cos \theta \Psi(\theta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (c_\kappa^\dagger c_{\kappa-1} + c_{\kappa-1}^\dagger c_\kappa) \quad (4)$$

と定義されており、時間依存する状態  $|\psi(t)\rangle$  は、初期状態  $|\psi(0)\rangle = |g(N_b, N_f)\rangle$  のシュレディンガー方程式を解くことで得られる。

- (3)  $o_{\alpha(t)}$  のフーリエ変換  $D_\alpha(\omega)$  を導出する。

$$\frac{D_\alpha(\omega)}{2\pi} = C_\alpha \delta(\omega) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n>m}^{\infty} D_{\alpha nm} [\delta(\omega - \Delta_{nm}) + \delta(\omega + \Delta_{nm})] \quad (5)$$

ここで、

$$D_{\alpha nm} \equiv \langle \psi(0) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | O_\alpha | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \psi(0) \rangle, \quad C_\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} D_{\alpha nn}, \quad \Delta_{nm} \equiv \tilde{E}_n - \tilde{E}_m \quad (6)$$

である。このエネルギースペクトル  $D_\alpha(\omega)$  の振動数  $\omega$  依存性から量子多体相関の効果を調べていく。

### 3 結果

量子多体相関の効果を調べるために HF 近似を用いた計算との比較を行った。図 1 はエネルギースペクトルの振動数  $\omega$  依存性を示しており、実線が厳密計算、斜線が HF 近似を用いた計算結果である。また粒子数は  $N_b = N_f = 6$ 、原子間相互作用は  $g_{bf} = -1$ 、 $g_{bb} = \pi/2N_b \times (-2.0)$  を採用しており、引力相互作用の場合を想定している<sup>2</sup>。

図 1(左) はボース粒子のエネルギースペクトル  $D_B(\omega)$  である。厳密計算と HF 近似計算が共に似たような振動数領域でスペクトルが観測されているように見えるが、厳密計算における低振動数領域の大きなピークが特徴的である。これは変形ポテンシャルの切断後、自発的対称性の破れからの回復による南部・ゴールドストーン (NG) モードに対応したソフトモードであると考えられる。

また図 1(右) はフェルミ粒子のエネルギースペクトル  $D_F(\omega)$  である。HF 近似では高振動数領域にピークが発現しており、これはフェルミ粒子の従う量子統計性により励起エネルギーが比較的大きくなるためである。一方で厳密計算では低振動数領域に最も大きなピークが見られている。HF 近似では記述できない量子多体相関 (BF 間引力) がスペクトルに影響を与えた結果、ボース粒子と連動した振る舞いが出現していると考えられる。

<sup>2</sup>当日のポスター発表では斥力相互作用の場合の結果も示したが、紙面の都合上ここでは割愛する。

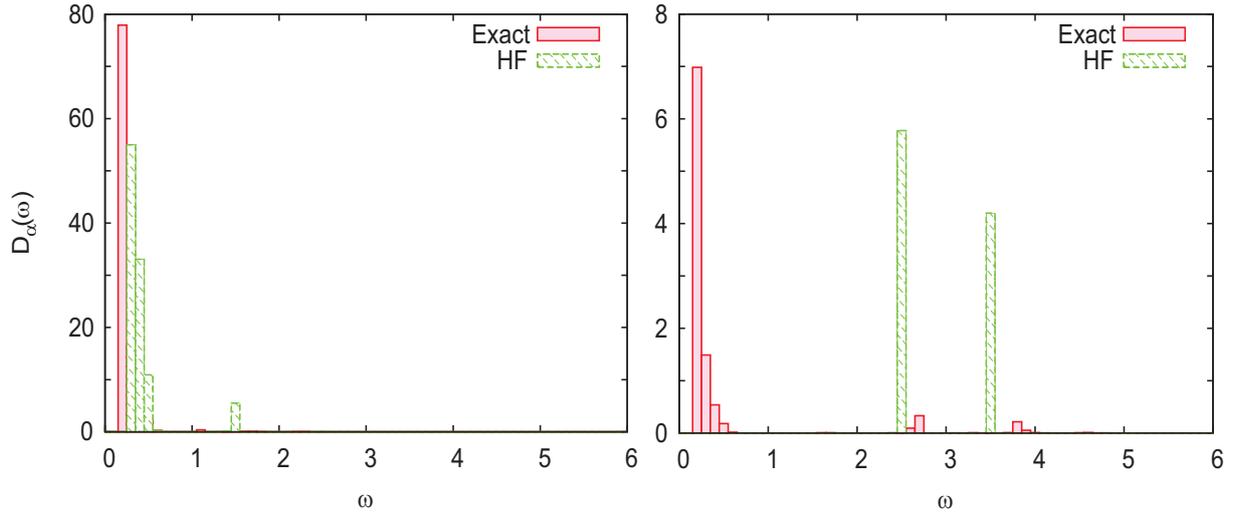


図 1:  $N_b = N_f = 6$ ,  $g_{bf} = -1$ ,  $g_{bb} = \pi/2N_b \times (-2.0)$  におけるエネルギースペクトル  $D_\alpha(\omega)$  ( $\alpha = B, F$ ) を振動数  $\omega$  に対してプロットした。実線 (斜線) が厳密計算 (HF 近似) による結果を示している。(左図) ボース粒子のスペクトル  $D_B(\omega)$  (右図) フェルミ粒子のスペクトル  $D_F(\omega)$  である。

## 4 まとめ・今後の展望

1 次元トーラス内における BF 混合系のダイナミクスを厳密計算により解析した。エネルギースペクトルを計算した結果、NG モードに対応するソフトモードが発現し、初期基底状態が対称性の破れの回復により崩壊していくことが予想できる。これは HF 近似を用いた計算では決して現れないスペクトルであり量子多体相関が系の集団運動に影響を与えていると考えられる。今後は BF 対相関の寄与を探り、より詳細な多体効果の理解を進めていきたい。

## 参考文献

- [1] M.H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995)
- [2] Z. Hadzibabic et al, Phys. Rev. Lett. **88**, 160401 (2002)
- [3] T. Miyakawa, T. Suzuki, and H. Yabu, Phys. Rev. A. **64**, 033611 (2001)
- [4] Giovanni Modugno et al., Science, **297**, 2240 (2002)
- [5] A. Storozhenko et al., Phys. Rev. A. **71**, 063617 (2005)
- [6] T. Watanabe et al., Phys. Rev. A. **78**, 033601 (2008)
- [7] A. Gorlitz et al, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001)
- [8] J. A. Sauer et al, Phys. Rev. Lett. **87**, 270401 (2001)

# Analysis of the chiral phase transition and the color superconductivity by evaluating the Wilsonian effective potential in thermal gauge theories

Ken-Ichi Aoki and Daisuke Sato

*Institute for Theoretical Physics, Kanazawa University*

Kazuhiro Miyashita

*Aichi Shukutoku University*

## Abstract

We investigate properties of the spontaneous chiral symmetry breaking and the color superconductivity in finite density QCD by using non-perturbative renormalization group. When we lower the renormalization scale, effective 4-fermi interactions are generated by the gauge interactions, which consequently bring about the spontaneous symmetry breakdown at the low energy scale. We analyze the behavior of these 4-fermi coupling constants to obtain the critical density for color superconductivity at zero temperature.

## 1 Introduction

In high energy region quantum chromodynamics (QCD) is verified by using the perturbation theory due to the asymptotic freedom. On the other hand, the strong gauge interactions in low energy region bring about the quark confinement and the spontaneous chiral symmetry breakdown (S $\chi$ SB) as non-perturbative phenomena. Furthermore various phase structures are expected at finite temperature and finite density.

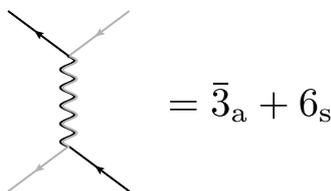


Figure 1: diquark channel exchanging one gluon.

The spontaneous chiral symmetry breakdown and the color superconductivity at zero temperature and finite density are our targets of this article. First of all we explain the color superconductivity briefly. The color superconductivity is the phenomenon that the condensation of quark-quark pair (diquark) breaks the color symmetry. The condensation is caused by the attractive interaction of the antitriplet channel of diquark. Let's see quark-quark interactions due to one-gluon exchange (Fig. 1). To diagonalize the interaction Hamiltonian, we take irreducible representations in the color space of the quark-quark state, that is, antisymmetric state and a symmetric state. We rewrite the direct product of two color generators at the gauge vertices of the Feynman diagram in the following way,

$$\sum_{A=1}^{N_c^2-1} T_{a'a}^A T_{b'b}^A = -\frac{N_c+1}{4N_c} (\delta_{aa'}\delta_{b'b} - \delta_{ab'}\delta_{a'b}) + \frac{N_c-1}{4N_c} (\delta_{aa'}\delta_{b'b} + \delta_{ab'}\delta_{a'b}). \quad (1)$$

We find that the antitriplet state is the attractive channel while the sextet state is the repulsive channel. Due to this attractive interaction, the antisymmetric state of diquark may have non-zero expectation value at low temperature and high density:

$$\langle (\bar{\psi}^C)_i^a \gamma^5 \psi_j^b \rangle \sim \varepsilon_{ij} \epsilon^{abc}, \quad (2)$$

where  $\varepsilon_{ij}$  and  $\epsilon^{abc}$  are antisymmetric tensors in the flavor and the color spaces, respectively.

We need some non-perturbative methods to analyze these phenomena. The lattice QCD known as a first principle calculation is a very effective method, however, the sign problem arises at finite density. The Dyson-Schwinger (DS) equations are usually limited to the ladder approximation, where the dependence on the gauge-fixing parameter is a serious problem.

The non-perturbative renormalization group (NPRG) method [1] is a complementary approach, where we can use the approximations without these difficulty. The central object in NPRG is the effective action  $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$ , which is defined by integrating fields with higher momentum than the scale  $\Lambda$  in the partition function:

$$Z = \int \prod_{p < \Lambda} d\phi_{<}(p) \prod_{\Lambda < p < \Lambda_0} d\phi_{>}(p) e^{-S_0[\phi_{<} + \phi_{>} ; \Lambda_0]} = \int \prod_{p < \Lambda} d\phi_{<}(p) e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{<} ; \Lambda]}. \quad (3)$$

The NPRG equation describes the dependence of the Wilsonian effective action  $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$  on the renormalization scale (momentum cutoff)  $\Lambda$  in terms of differential equations,

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda] = \beta[S_{\text{eff}}; \Lambda]. \quad (4)$$

The right side of this equation, called the  $\beta$  function (actually, a functional), is evaluated by infinitesimally lowering the scale  $\Lambda$  in Eq. (3)

In this article, we report the analyses of the  $S\chi$ SB and the color superconductivity at zero temperature and finite density in 3-flavor QCD. In NPRG language, two types of 4-fermi operators, scalar type and vector type, are automatically generated by the QCD interaction when we lower the renormalization scale. The scalar type operators are the source of  $S\chi$ SB just like Nambu–Jona-Lasinio model. On the other hand, the vector type operators bring about the spontaneous color symmetry breaking at low temperature and high density.

So far, the color superconductivity has been analyzed by using the ladder DS equation. In our analysis of using NPRG, diagrams beyond the ladder approximation can be taken into account, which we call the non-ladder contributions. We will evaluate the critical chemical potential for the color superconductivity by analyzing the NPRG running behaviors of the effective 4-fermi coupling constants. This is a first step analysis towards the evaluation of the diquark condensates themselves.

## 2 Non-perturbative renormalization group

Several types of the NPRG equation for quantum field theory have been derived in Refs. [2, 3, 4]. We adopt the Wegner–Houghton (WH) equation [2, 5] among them. The WH equation is given by differentiating Eq. (3) with respect to  $\Lambda$ . We parametrize the renormalization scale  $\Lambda$  by  $t \equiv \log \Lambda_0/\Lambda$  and transform all variables into dimensionless ones by taking  $\Lambda$  as a moving unit of mass. Then we have the following functional differential equation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_{\text{eff}}[\Phi; t] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \delta(1 - |p|) \text{Str} \ln \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)_{p, -p} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \delta(1 - |p|) \delta(1 - |q|) \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \Phi_p} \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)_{p, -q}^{-1} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \Phi_{-q}} \\ &\quad + D S_{\text{eff}} - \int_0^1 \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Phi_p \left( d_\Phi + \frac{\eta_\Phi}{2} + p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta \Phi_p} S_{\text{eff}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\Phi$  represents all types of fields (scalars, spinors, vectors, and so on),  $d_\Phi$  is the mass-dimension of  $\Phi$  and “Str” is the super-trace for generally Grassmann-valued matrices. We introduce the wave function renormalization to normalize the kinetic term of each field, which adds the anomalous dimension term  $\eta_\Phi$  of each field.

Here we explain the physical meanings of the right-hand side of the WH equation (5) briefly (see [1] for details). The first and second terms are represented by ring-type and dumbbell-type diagrams

of Fig. 2 respectively, whose external lines represent fields having the momentum lower than  $\Lambda$ . In those diagrams the momentum  $l$  of every internal line is the shell mode which satisfies the condition  $|l| = \Lambda$ . These diagrams are nothing but the quantum corrections due to the shell mode fields, while the low momentum modes are “external” source fields. Among all the loop diagrams using the shell mode propagators, only the tree and the one-loop diagrams survive, because diagrams with two or more loops do not contribute to the derivative with respect to  $t$  (or  $\Lambda$ ). The rest of terms in Eq. (5) come out of the rescaling of fields which are necessary to make all the variables dimensionless using the moving unit  $\Lambda(t)$ . Change of the effective action due to these terms are called the canonical scaling. There is an another origin of rescaling ( $\eta_\Phi$ ), which is the normalization of the kinetic term of each field.

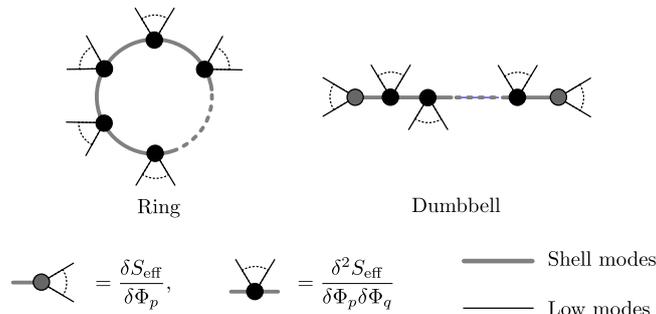


Figure 2: Ring-type diagrams and Dumbbell-type diagrams

### 3 Procedure of solving NPRG equation in QCD

In this section, we will explain how to solve NPRG in QCD. The NPRG equation is a functional differential equation and it is the first order equation in  $t$  ( $\Lambda(t)$ ). We solve it as an initial value problem, that is, we start with an initial (ultraviolet) condition and solve it downward in  $\Lambda(t)$ .

As the initial condition, we set the initial renormalization scale  $\Lambda_0$  to be large enough so that the obtained renormalization group flow well approximates the renormalized trajectory corresponding to the infinite  $\Lambda_0$  limit. At this scale  $\Lambda_0$ , we take the standard bare action of QCD:

$$S_{\text{eff}}|_{\Lambda=\Lambda_0} = S_0[\bar{\psi}, \psi, A] = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(\not{\partial} - g_s A)\psi + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\}, \quad (6)$$

where we ignore the current mass of the quarks and the action has the exact chiral symmetry. Solving the NPRG equation, we get the effective action  $S_{\text{eff}}(\Lambda)$  at the renormalization scale  $\Lambda$ , which exhibits the low-energy information including the  $S_\chi\text{SB}$  and the color superconductivity.

We can not exactly solve the equation (5), and we have to develop an appropriate approximation method. In general approximation is defined by projecting the original functional differential equation (5) onto some small dimensional sub-space. Here we adopt the so-called local potential approximation (LPA), where we ignore all corrections to the effective action containing derivative of fields. Then the effective action is limited to be local potential terms and the fixed (non-moving) kinetic terms. In other words our subspace here is a function space of local potentials instead of the general functional space. Actually we set all the external fields in Fig. 2 to have the vanishing momentum, that is,

$$\Phi(p) = (2\pi)^D \delta^D(p) \cdot \Phi. \quad (7)$$

In this approximation, we can expand the effective action  $S_{\text{eff}}$  in terms of all possible local operators respecting symmetries of QCD. Then, expressing the right-hand side of (5) by these local operators, we obtain the  $\beta$  functions for the coupling constants of the operators. In fact, however, we can not evaluate an infinite number of the  $\beta$  functions for infinitely higher-dimensional operators. Due to the canonical scaling, we suppose that the contributions of higher dimensional operators are relatively smaller. Therefore we truncate operators having more than a certain mass-dimension. By checking

the convergence of physical quantities with respect to the order of the truncation, we may confirm the reliability of the truncation itself.

The massless QCD with  $N_f$  flavors has the following chiral and color symmetry,

$$SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times SU(N_c) \times U(1)_V. \quad (8)$$

The effective action generated by NPRG equation necessarily respects this symmetry since the  $\beta$  function does not break any global symmetry in the initial action  $S_0$ . As for the working ground of NPRG equation, we adopt the complete 4-fermi operator space satisfying this symmetry[6]. Ignoring the operators which are not generated by QCD gauge interactions, the 4-fermi operators we need are the following 4 operators,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2, \\ \mathcal{O}_2 &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2, \\ \mathcal{O}_{c1} &= (\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu T^a\psi)^2, \\ \mathcal{O}_{c2} &= (\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu T^a\psi)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

On the other hand, we truncate higher order corrections to the gauge interactions themselves since we consider that they are not important for analysis of these symmetry breakings treated here.

Finally the effective action we analyze is

$$S_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, A; \Lambda] = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(\not{\partial} - g_s(\Lambda)\not{A})\psi + \sum_i^{4\text{-fermi}} \frac{G_i(\Lambda)}{2N_f N_c} \mathcal{O}_i(\bar{\psi}, \psi) + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\}. \quad (10)$$

Here we use the Landau gauge ( $\alpha = 0$ ) because it has been known to be a good gauge for LPA.

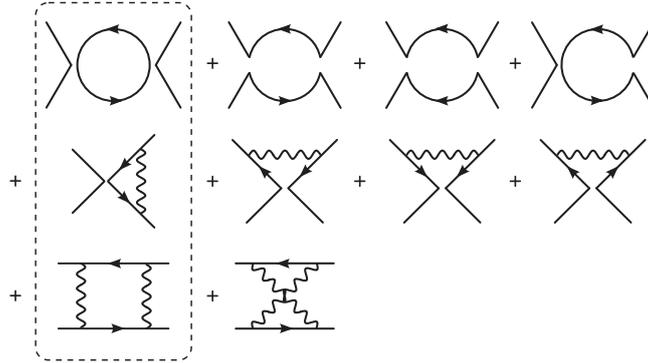


Figure 3: All diagrams giving the  $\beta$  functions for 4-fermi operators in our framework. The diagrams surrounded by the dashed line are called the ladder-type diagrams.

The special diagrams (similar to the Feynman diagrams), are used in order to calculate the  $\beta$  functions. In LPA the internal-line momenta of the dumbbell-type diagrams can not take the shell mode because the external-line momenta are all vanishing. Therefore the dumbbell-type diagrams do not contribute, so that we evaluate only the ring-type diagrams, which are drawn in Fig. 3.

Using these  $\beta$  functions, the NPRG equation is now written down as a set of ordinary differential equations as follows.

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{dt} &= -2g_1 + \frac{1}{N_f N_c} \left\{ 3g_1^2 + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) g_{c1}^2 + 2(N_f N_c + 1)g_1 g_2 + \left(N_c - \frac{1}{N_c}\right) g_1 g_{c2} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) g_{c1} \alpha_s + \frac{3N_f N_c}{16\pi^2} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) \alpha_s^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_2}{dt} &= -2g_2 + \frac{1}{N_f N_c} \left\{ N_f N_c g_1^2 + (N_f N_c - 1)g_2^2 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) g_{c2}^2 + \left(N_c - \frac{1}{N_c}\right) g_2 g_{c2} \right\} \\ &\quad - \frac{3}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) g_{c2} \alpha_s - \frac{3N_f N_c}{16\pi^2} \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) \alpha_s^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_{c1}}{dt} = & -2g_{c1} + \frac{1}{N_f N_c} \left\{ 2 \left( N_c - \frac{3}{2N_c} \right) g_{c1}^2 + 6g_1 g_{c1} + \left( N_f - \frac{1}{N_c} \right) g_{c1} g_{c2} + 2g_2 g_{c1} \right\} \\ & + \frac{3}{\pi} \left\{ g_1 + \frac{1}{2} \left( N_c - \frac{2}{N_c} \right) g_{c1} \right\} \alpha_s + \frac{9N_f N_c}{32\pi^2} \left( N_c - \frac{8}{3N_c} \right) \alpha_s^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_{c2}}{dt} = & -2g_{c2} + \frac{1}{N_f N_c} \left\{ \frac{1}{2} \left( N_f + N_c + \frac{4}{N_c} \right) g_{c2}^2 + \frac{N_f}{2} g_{c1}^2 - 4g_2 g_{c2} \right. \\ & \left. - \frac{3}{\pi} \left( g_2 - \frac{1}{N_c} g_{c2} \right) \alpha_s - \frac{3}{32\pi^2} N_f N_c \left( N_c - \frac{8}{N_c} \right) \alpha_s^2. \right. \end{aligned} \quad (14)$$

Here 4-fermi coupling constants are transformed into dimensionless ones,  $g_i = \Lambda^2(t)G_i/4\pi^2$ . Note that using dimensionless variables are essential for the direct correspondence between the fixed point of the renormalization group flow and the phase boundary (in case of 2nd order phase transition). By this transformation, we can reveal the fixed-point structure of the  $\beta$  functions [7]. The first term,  $-2g_i$ , in the above beta functions represents the canonical scaling contribution due to this transformation, and it suppresses the 4-fermi interactions. The quadratic terms coming from the ring-type diagrams generally enhance the 4-fermion interactions. Therefore, there is a point where these opposite effects are canceled, that is, a fixed point (a zero of  $\beta$  function), which corresponds to the phase boundary.

As for the gauge coupling constants, we adopt the following (N)PRG equation given by the one-loop perturbation,

$$\frac{d}{dt}\alpha_s = \frac{\beta_0}{2\pi}\alpha_s^2, \quad (15)$$

where  $\beta_0 = 11N_c/3 - 2N_f/3$  and  $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ . Also we introduce the infrared cutoff effect [10] that the gauge coupling constant stop increasing at a proper low energy scale, which is naturally expected by the confinement. Adopting the cutoff scheme in Ref. [11], the running gauge coupling constant is given explicitly as follows (Fig. 4),

$$\alpha_s(\Lambda) = \begin{cases} \frac{4\pi}{\beta_0 \log(\Lambda^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} & (\Lambda > \Lambda_{\text{IF}}) \\ \frac{4\pi}{\beta_0 \log(\Lambda_{\text{IF}}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} + \frac{4\pi [\log(\Lambda_1/\Lambda)]^2 - [\log(\Lambda_1/\Lambda_{\text{IF}})]^2}{\beta_0 \log(\Lambda_1/\Lambda_{\text{IF}}) [\log(\Lambda_{\text{IF}}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)]^2} & (\Lambda_1 < \Lambda < \Lambda_{\text{IF}}) \\ \frac{4\pi}{\beta_0 \log(\Lambda_{\text{IF}}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} - \frac{4\pi \log(\Lambda_1/\Lambda_{\text{IF}})}{\beta_0 [\log(\Lambda_{\text{IF}}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)]^2} & (\Lambda < \Lambda_1) \end{cases} . \quad (16)$$

Here we take a fixed scale for  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}} \cdot e^{-1}$ , and  $\Lambda_{\text{IF}}$  is left as an infrared cutoff scale parameter. Because the scale  $\Lambda_{\text{IF}}$  is rather arbitrary, we will check the dependence of our results on this parameter.<sup>1</sup> As for the initial condition to solve the NPRG equations, we take following values

$$\Lambda_0 = M_Z = 91.1 \text{ GeV}, \quad \alpha_s(\Lambda_0) = 0.1176, \quad (17)$$

and also we set  $N_f = N_c = 3$ , and  $\Lambda_{\text{QCD}} = 241 \text{ MeV}$ .

If we take the initial renormalization scale  $\Lambda_0$  at which the perturbation theory of QCD works well, we can set the 4-fermi coupling constants  $g_i$  to be zero at  $\Lambda_0$ . When we lower the renormalization scale  $\Lambda$ , the 4-fermi operators are generated by gauge interactions, that is, two diagrams in third line of Fig. 3, having only the gauge interactions. The 4-fermi operators are normally irrelevant at low energy scale because of its mass dimension larger than 4. However in case that gauge interactions are strong enough, 4-fermi interactions are generated sufficiently large so that the self interactions may overwhelms the canonical scaling, that is, they become relevant. This change of the relevance of 4-fermi operators, from irrelevant to relevant, characterizes the  $S\chi\text{SB}$  at low energy in QCD.

The critical gauge coupling constant for the  $S\chi\text{SB}$  obtained by NPRG method is equivalent to that by the ladder DS equation if we use the  $\beta$  function of the ladder-type diagrams (in Fig. 3) only. Note that we can easily add non-ladder diagrams to the  $\beta$  function in our NPRG framework, which may improve the dependence on the gauge-fixing parameter.

<sup>1</sup>Physical quantities like the chiral condensates are not sensitive to the choice of the infrared cutoff scale  $\Lambda_{\text{IF}}$ [11]

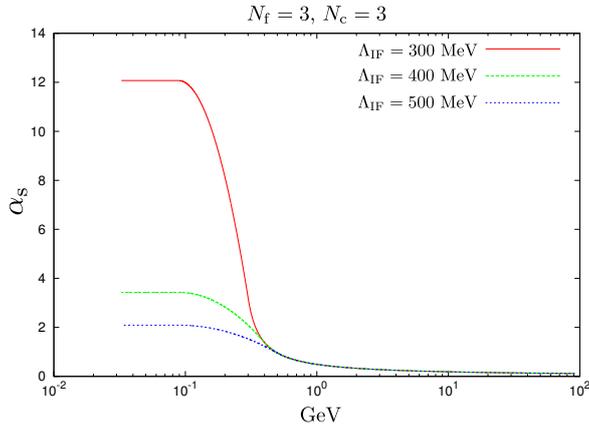


Figure 4: The running gauge coupling constant with infrared cutoff

## 4 Introducing the bare mass

As noted before, no effective operator breaking the chiral symmetry can be generated in the effective action by NPRG equation. To deal with the spontaneous breakdown of the chiral symmetry, we introduce a mass term in the effective action as follows [6]:

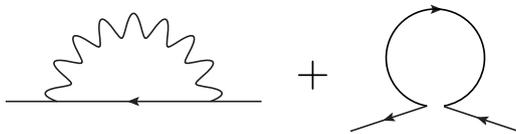
$$S_{\text{eff}}(\text{massless}) + \int d^4x m(m_0; \Lambda) \bar{\psi} \psi, \quad (18)$$

where  $m(m_0; \Lambda_0) = m_0$  is a bare mass which is also regarded as an external source for chiral condensates. Due to this explicit chiral breaking mass, the 4-fermi  $\beta$  functions are modified [6].

If the bare mass  $m_0$  is finite, the running mass  $m(m_0; \Lambda)$  is increased by the gauge interaction and the 4-fermi interactions at the infrared scale (Fig. 6). We obtain the spontaneously generated mass at the infrared scale by taking the zero bare mass limit (the chiral limit),

$$m_{\text{dyn.}} = \lim_{m_0 \rightarrow +0} \lim_{\Lambda \rightarrow 0} m(m_0; \Lambda). \quad (19)$$

To confirm that this method works well, we check the behaviors of the effective mass operator in detail as a function of the bare mass and the renormalization scale. In the left graph of Fig. 6, we plot the effective mass (with mass dimension, not scaled by  $\Lambda$ ) for each bare mass at zero temperature and zero density. The dashed lines connect the same renormalization scale points. We see a “the phase transition” at some lower scale. At high-energy scale, the effective mass vanishes when the bare mass goes towards zero. Below some scale, however, behavior of the effective mass changes drastically, and there remains a finite effective mass even in the zero bare mass limit.

Figure 5:  $\beta$  function of mass

A different view is shown in the right graph of Fig. 6, where the renormalization flow of the 4-fermi coupling constant  $g_{c1}$  (dimensionless, rescaled by  $\Lambda$ ) is added. We see that the effective mass increases rather suddenly just when the 4-fermi coupling constant is increased to have a peak. The dashed lines connect the same bare mass points. The quarks are decoupled from the interactions when the effective mass is much larger than the renormalization scale. Therefore, at the infrared limit, the effective mass (with mass-dimension) converges towards a finite certain value while the 4-fermi coupling constants (dimensionless variables) vanishes according to the canonical scaling.

As shown in the right graph of Fig. 6, the peak value of the 4-fermi coupling constant increases when we lower the bare mass. In the ladder approximation without the operator expansion, we can prove that

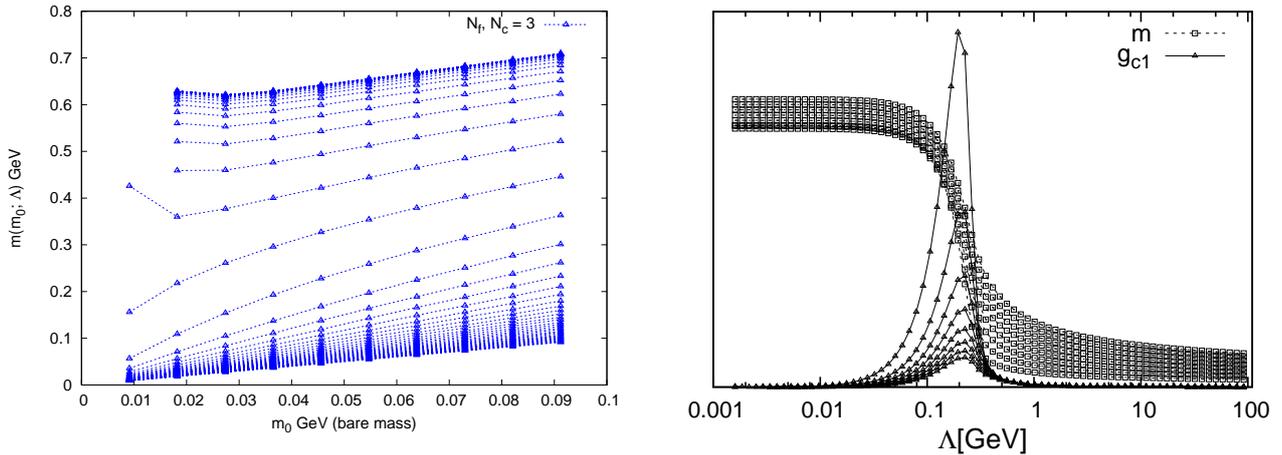


Figure 6: Renormalization group flows of the effective mass and 4-fermi coupling constants at zero temperature and zero density.

the scalar-type 4-fermi coupling constant corresponds to the susceptibility of the chiral condensates with respect to the bare mass. Hence, taking the zero bare mass limit, this scalar-type 4-fermi coupling constant will be increased to be infinite at the transition scale, and the behavior of the effective mass with respect to  $\Lambda$  is very similar to the second-order phase transition. Also in our calculation with non-ladder effects included, we may claim the correspondence between the spontaneous chiral symmetry breakdown and the divergence of the scalar type 4-fermi coupling constant in case of vanishing bare mass. It should be mentioned here that the 4-fermi  $\beta$  functions in Eqs. (11) – (14) do not contain any higher dimensional operators in the LPA due to the exact chiral symmetry. This is called the perfectness of this operator coordinates. Inclusion of the bare mass term breaks this feature and there appear 6-fermi operators which contributes to 4-fermi  $\beta$  functions. In this stage of calculation we ignore this sort of operator mixings, because naively they have only small effects after evaluating the chiral limit.

## 5 Property of 4-fermi operators

We discuss basic properties of 4-fermi operators in relation to the spontaneous breakdown of the chiral and the color symmetries. Only two 4-fermi coupling constants,  $g_1$  and  $g_{c1}$ , appear in the  $\beta$  function of the effective mass [6]. These operators are projected onto a scalar-type 4-fermi operator as follows,

$$\frac{G_1}{2N_f N_c} \mathcal{O}_1 + \frac{G_{c1}}{2N_f N_c} \mathcal{O}_{c1} = \frac{1}{2N_f N_c} \left[ \frac{2}{N_f N_c} G_1 + \frac{1}{N_f} \left( 1 - \frac{1}{N_c^2} \right) G_{c1} \right] \times \sum_{I=0}^{N_c^2-1} \left[ (\bar{\psi} \lambda_I \psi)^2 - (\bar{\psi} \lambda_I \gamma_5 \psi)^2 \right] + \dots, \quad (20)$$

where  $\lambda_I$  is the generator of  $U(N_f)$ . Therefore  $g_1$  and  $g_{c1}$  are related to the susceptibility of the chiral condensates.

Other 4-fermi operators,  $\mathcal{O}_2$  and  $\mathcal{O}_{c2}$ , are vector-type operators for quark-antiquark pair. Using these 4-fermi operators, we can construct the following scalar-type operator for diquark,

$$\mathcal{O}_d = \left( \bar{\psi}_i^C \epsilon^a \psi_j \right) \left( \bar{\psi}_j \epsilon^a \psi_i^C \right) - \left( \bar{\psi}_i^C \epsilon^a \gamma_5 \psi_j \right) \left( \bar{\psi}_j \epsilon^a \gamma_5 \psi_i^C \right), \quad (21)$$

where  $i, j$  are flavor indices and  $(\epsilon^a)^{bc} \equiv \epsilon^{abc}$  is the antisymmetric tensor in the color space. This operator  $\mathcal{O}_d$  is coupled to the color antisymmetric (attractive) channel of diquark, and has been considered to induce the color superconductivity in the analysis of NJL-like effective models. Hence we suppose that  $\mathcal{O}_2$  and  $\mathcal{O}_{c2}$  trigger the diquark condensates in the framework of NPRG, which will be confirmed below.

In order to effectively take account of the symmetry breakdown of the color symmetry, we introduce a Majorana mass term explicitly breaking the color symmetry as follows,

$$S_{\text{eff}} + \frac{1}{2} \Delta^{ija}(\Delta_0; \Lambda) \bar{\psi}_i^C \epsilon^a \gamma_5 \psi_j + (\text{h.c.}), \quad (22)$$

where the mass term  $\Delta_0^{ija}$  is also regarded as the external field for the diquark condensates. The  $\beta$  function of  $\Delta^{ija}$  consists only of the 4-fermi coupling constants,  $g_2$  and  $g_{c2}$ . This fact confirms that operators,  $\mathcal{O}_2$  and  $\mathcal{O}_{c2}$ , generate the diquark condensates. In addition, according to analogy of the chiral condensates, we consider that these coupling constants represent the susceptibility divergence of the diquark condensates.

We will not proceed to direct evaluation of the diquark condensates in this report. In the next section, however, we will study the change of RG flows of the 4-fermi coupling constants due to finite density, which will give us a clue about the color superconductivity phase transition at zero temperature and finite density.

## 6 Results

Fig. 7 shows RG of 4-fermi coupling constants with various values of the chemical potential. Here we ignore finite-density effects to the running of the gauge coupling constant.

We should mention here that the scalar-type 4-fermi coupling constants,  $g_1$  and  $g_{c1}$ , diverge at infrared region obeying the behavior of the susceptibility of the chiral condensates if we make the bare mass smaller to be zero. The vector-type 4-fermi coupling constants,  $g_2$  and  $g_{c2}$ , corresponding to the susceptibility of the diquark condensates, also diverge because the  $\beta$  functions of  $g_1$  and  $g_{c1}$  include not only the self coupling constants but also  $g_2$  and  $g_{c2}$ . This mixing between the scalar-type and the vector-type 4-fermi operators comes from the non-ladder effects. Of course we do not conclude the color superconductivity from this divergence of  $g_2$  and  $g_{c2}$ .

Let us look at the chemical potential dependence in detail. The absolute value of peaks of the scalar-type 4-fermi coupling constants ( $g_1$  and  $g_{c1}$ ) are larger than the vector-type ones at low density ( $\mu = 0.01$  GeV). Increasing the chemical potential, the vector type 4-fermi operators are enhanced while the scalar type ones remain rather stable. Finally the vector-type 4-fermi coupling constants diverge at a density ( $\mu \sim 0.26$  GeV). This behavior implies the color superconductivity phase transition occurs due to high density.

Next we evaluate the critical density  $\mu_c$  for the color superconducting phase transition. In Fig. 8 we plot the inverse of the peak value of  $g_{c2}$  with respect to density  $\mu$ , where points connected by a line are those with the same bare mass  $m_0$ . The critical density  $\mu_c$  is given by a point at which the inverse of the peak value goes to zero. We show the dependence of  $\mu_c$  on the bare mass in the left graph of Fig. 9, where we extrapolate  $\mu_c$  linearly to get the zero bare mass limit.

The dependence of the extrapolated critical densities  $\mu_c$  on the infrared cutoff scale  $\Lambda_{\text{IF}}$  is small as shown in the right graph of Fig. 9.

We conclude that the critical chemical potential for the color superconductivity at zero temperature reads

$$\mu_c = 0.16 \text{ GeV} \quad (\Lambda_{\text{IF}} = 0.393 \text{ GeV}) \quad (23)$$

Note that our result above is approximately a half of that which has been obtained by other methods until now. We expect that the critical density might become larger if we use the two-loop  $\beta$  function for the gauge coupling constant.

## 7 Summary

We analyzed the color superconductivity at zero temperature and finite density by using the WH equation, one of the methods of NPRG. In this report, we worked with the one-loop  $\beta$  function for the gauge coupling constant and the complete  $\beta$  functions in the 4-fermi operator space respecting the chiral symmetry of QCD. We have taken into account the diagrams beyond the ladder approximation.

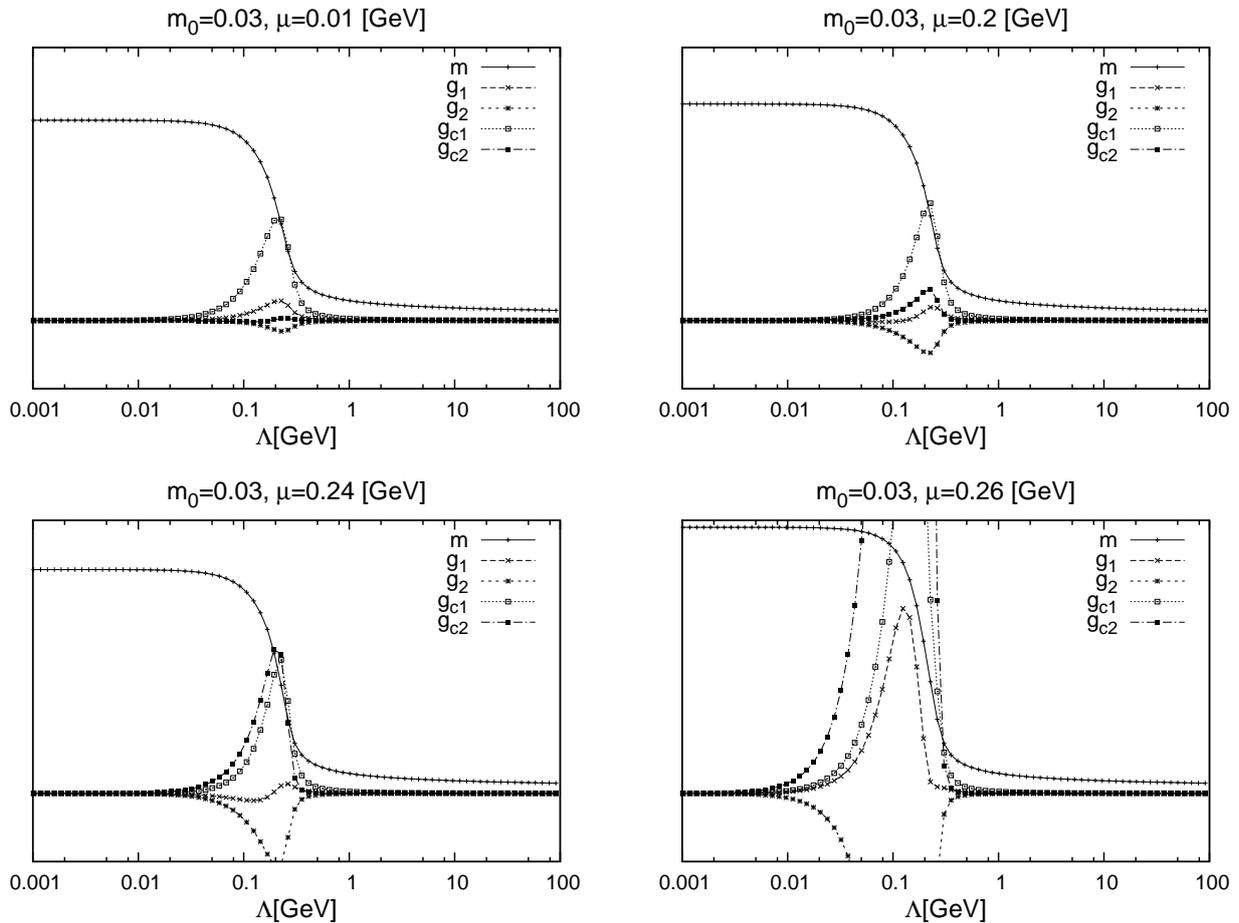


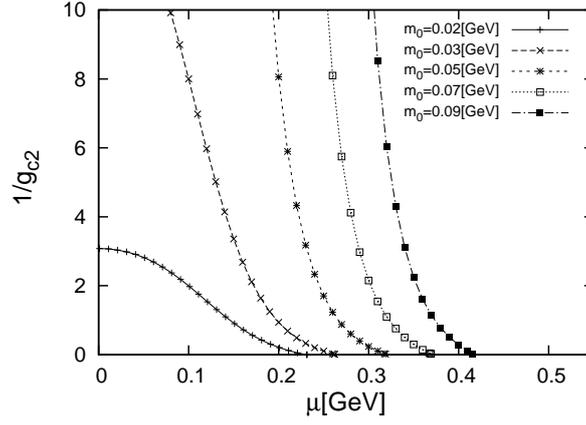
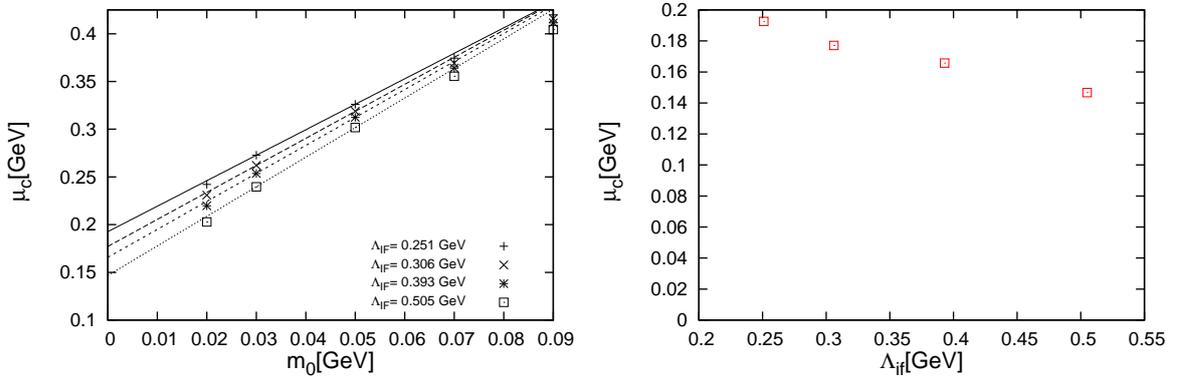
Figure 7: Dependence of the effective mass  $m(\Lambda)$  and the 4-fermi couplings constants  $g_i(\Lambda)$  on the renormalization scale  $\Lambda$ . The bare mass  $m_0$  is fixed and the chemical potential is different in each graph.

We introduced two types of mass operators explicitly breaking the chiral and the color symmetries in order to evaluate the size and the criticality of the spontaneous breakdown of these symmetries. These masses at the initial renormalization scale are nothing but the external fields giving the chiral and the diquark condensates, respectively.

We have classified the 4-fermi operators into two categories, which are the scalar type operator generating the chiral condensates and the vector type ones generating the diquark condensates. According to this observation, we investigated the running behavior of the 4-fermi coupling constants at zero temperature and finite density. We obtained the critical density (chemical potential) by evaluating the divergence point of the 4-fermi operators responsible for the color superconductivity. This is the first result of the critical density for the color superconductivity in the NPRG (LPA) framework with non-ladder effects included.

## References

- [1] K. Aoki, *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 1249 (2000).
- [2] F. J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev. A* **8**, 401 (1973).
- [3] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984).
- [4] C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **301**, 90 (1993).
- [5] T. E. Clark, B. Haeri and S. T. Love, *Nucl. Phys. B* **402**, 628 (1993) [arXiv:hep-ph/9211261].
- [6] K. I. Aoki and K. Miyashita, *Prog. Theor. Phys.* **121**, 875 (2009).
- [7] K. I. Aoki, K. Morikawa, J. I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, *Prog. Theor. Phys.* **102**, 1151 (1999) [arXiv:hep-th/9908042].

Figure 8:  $1/(\text{the peak value of } g_{c2})$  vs. densityFigure 9: The left figure shows the zero bare mass extrapolation of the critical density  $\mu_c$ , and the right figure plots the extrapolated critical density for the different values of the infrared cutoff scale  $\Lambda_{\text{IF}}$ .

- [8] K. I. Aoki, K. Takagi, H. Terao and M. Tomoyose, Prog. Theor. Phys. **103**, 815 (2000) [arXiv:hep-th/0002038].
- [9] K. I. Aoki, K. Morikawa, J. I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, Phys. Rev. D **61**, 045008 (2000) [arXiv:hep-th/9908043].
- [10] K. Higashijima, Phys. Rev. D **29**, 1228 (1984).
- [11] K. I. Aoki, M. Bando, T. Kugo, M. G. Mitchard and H. Nakatani, Prog. Theor. Phys. **84**, 683 (1990).
- [12] I. A. Shovkovy, Found. Phys. **35**, 1309 (2005) [arXiv:nucl-th/0410091].

# Hydrodynamic Effects on the Color Glass Condensate in Non-Equilibrium and Non-Boost Invariant Systems

門内晶彦<sup>1</sup>、平野哲文<sup>2,1</sup>

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻<sup>1</sup>、上智大学理工学部機能創造理工学科<sup>2</sup>

## 1 はじめに

高エネルギー重イオン衝突反応においてはクォークグルーオンプラズマ (QGP) [1] が生成されると考えられているが、この中で  $\tau \sim 1-10$  fm/c の中間領域において高温物質は完全流体に近い振る舞い [2] をすることが知られている。一方で衝突前の原子核はカラーグラス凝縮 (CGC) [3] の描像によって記述されるとされるが、大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) における重イオン衝突実験において観測された中央ラピディティ<sup>\*1</sup> 付近の粒子生成は  $dN_{ch}/d\eta_p = 1584 \pm 4(\text{stat}) \pm 76(\text{sys})$  と、CGC による従来の予測  $dN_{ch}/d\eta_p \sim 1200$  よりも大きい [4]。ここで CGC におけるパラメータは、相対論的重イオン衝突加速器 (RHIC) 実験のラピディティ分布と直接比較したときコンシステントとなるよう決められているが、中間段階における流体的な時空発展の効果が取り入れられていないため、これらを見積もる必要があると考えられる。この研究では、衝突軸方向への QGP の粘性流体による非ブースト不変な時空発展が、CGC のラピディティ分布を基とした初期条件に与える影響を RHIC と LHC それぞれの場合について評価する [5]。この中で、粘性流体の効果によって CGC の分布は有意で非自明な変化を受けること、それにより LHC での実験データと予測の違いが説明されうることを見る。

## 2 相対論的粘性流体による時空発展

相対論的流体力学において、保存流がないとき熱力学量は流速  $u^\mu$  に対するエネルギー運動量テンソルの分解

$$T^{\mu\nu} = (e_0 + \delta e + P_0 + \Pi)u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi)g^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \quad (1)$$

として与えられる。ここで  $e_0$  はエネルギー密度、 $P_0$  は静水圧、 $W^\mu$  はエネルギー散逸流、 $\Pi$  は体積粘性応力、 $\pi^{\mu\nu}$  はずれ粘性応力、 $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$  は計量を表す。ただし熱力学的安定性の要請からエネルギー密度補正は  $\delta e = 0$  である。局所的なエネルギー流を流速とするランダウフレーム  $T^\mu_{\nu} u^\nu = e_0 u^\mu$  をとると  $W^\mu = 0$  となるため、体積粘性とずれ粘性が残る。

相対論的な粘性流体方程式は、エネルギー運動量保存則  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  と構成方程式からなる。ここでは緩和の効果を持った Israel-Stewart の二次理論 [6] を一般の系に拡張した構成方程式 [7]

$$D\Pi = \frac{1}{\tau_\Pi} \left( -\Pi - \zeta_{\Pi\Pi} \frac{1}{T} \nabla_\mu u^\mu - \zeta_{\Pi\delta e} D \frac{1}{T} + \chi_{\Pi\Pi}^b \Pi D \frac{1}{T} + \chi_{\Pi\Pi}^c \Pi \nabla_\mu u^\mu + \chi_{\Pi\pi} \pi^{\mu\nu} \nabla_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} \right), \quad (2)$$

$$D\pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\tau_\pi} \left( -\pi^{\mu\nu} + 2\eta \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} + \chi_{\pi\pi}^b \pi D \frac{1}{T} + \chi_{\pi\pi}^c \pi^{\mu\nu} \nabla_\rho u^\rho + \chi_{\pi\pi}^d \pi^{\rho\langle\mu} \nabla_\rho u^{\nu\rangle} + \chi_{\pi\Pi} \Pi \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} \right), \quad (3)$$

<sup>\*1</sup> ラピディティは  $y = (1/2) \ln[(E + p_z)/(E - p_z)]$  として定義されるが、実験では massless 近似である擬ラピディティが用いられる。慣用的に  $\eta$  が使われるが、後述のずれ粘性と区別するためここでは  $\eta_p$  を用いている。

を用いる。ただし  $D = u^\mu \partial_\mu$  及び  $\nabla^\mu = \partial^\mu - u^\mu D$  は局所静止系における時間微分と空間微分を表す。 $\eta$  はずれ粘性係数、 $\zeta_{\text{III}}, \zeta_{\text{III}\delta e}$  は体積粘性係数、 $\tau_\Pi, \tau_\pi$  は緩和時間、 $\chi_{\text{III}}^b, \chi_{\text{III}}^c, \chi_{\text{II}\pi}, \chi_{\pi\pi}^b, \chi_{\pi\pi}^c, \chi_{\pi\pi}^d, \chi_{\pi\text{II}}$  はその他の 2 次の輸送係数である。初期ラピディティ分布の歪みを考察するには、非平衡かつ衝突軸方向に非ブースト不変な系を考える必要がある。そのためまずこれらの方程式を、衝突軸に垂直な横方向の時空発展を近似的に無視した (1+1) 次元の相対論的座標において解くことを考える。このとき流速ラピディティ  $Y_f$  を用いて、流速を  $u^\mu = (\cosh Y_f, 0, 0, \sinh Y_f)$  と書くことができる。

流体モデルによる評価を行うには、系の性質を表す状態方程式と輸送係数、および初期条件を与える必要がある。状態方程式については最新の格子 QCD 計算の結果に依るもの [8] を用いる。粘性係数については第一原理計算が困難であるため、モデルを導入する。ずれ粘性係数は AdS/CFT 対応から予想される下限値  $\eta = s/4\pi$  [9] を用いる。2 つの体積粘性係数は線形応答の交差項に対応するもので、流体力学的関係式を用いて一般的な体積粘性係数と  $\zeta = (\zeta_{\text{III}} + c_s^2 \zeta_{\text{III}\delta e})/T$  の関係がある。ここでは非平衡統計演算子法 [10] を拡張したものから  $\zeta = \frac{5}{2}(\frac{1}{3} - c_s^2)\eta$  を使用する。二次の輸送係数については、一次の輸送係数を基に相対論的運動学から導出する。

初期時刻を  $\tau_0 = 1 \text{ fm}/c$  とし、初期エネルギー密度にはモンテカルロ版 [11] の Karzeev-Levin-Nardi モデル [12] による CGC のエネルギー分布を用いる。このとき飽和スケール  $Q_s$  は、衝突軸に垂直な平面の座標  $x_\perp$  に対し

$$Q_{s,A}^2(x; x_\perp) = 2 \text{ GeV}^2 \frac{T_A(x_\perp)}{1.53 \text{ fm}^{-2}} \left( \frac{0.01}{x} \right)^\lambda, \quad (4)$$

として与えられる。ここで  $T_A(x_\perp)$  は厚み関数、 $x$  はパートンの縦方向の運動量比である。 $\lambda$  は CGC 分布のラピディティ依存性に関わるパラメータであり、RHIC の実験データとの直接比較から  $\lambda = 0.28$  をとる。粘性量の初期条件は、完全流体と粘性流体の場合で同じエネルギー運動量テンソルを考えるために  $\Pi(\eta_s) = \pi^{\mu\nu}(\eta_s) = 0$  とおく。初期流速は Bjorken 解  $u^\tau(\eta_s) = 1$  をとる。

### 3 結果

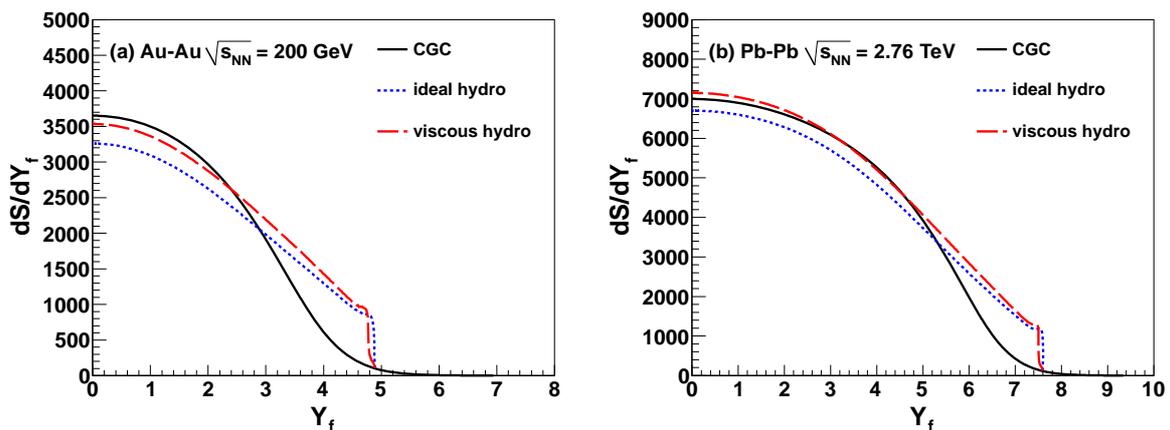


図 1 (a) RHIC および (b) LHC におけるラピディティ分布。実線、点線および鎖線は、初期 CGC 分布、完全流体補正を受けた分布および粘性流体補正を受けた分布を表す。

ラピディティ分布は、 $dN_{\text{ch}}^{\text{hydro}}/dy \approx (2/3) \times (1/3.6) \times dS/dY_f$  としてエントロピーの流速ラピディティ分布を通して計算する [13]。これは凍結などを用いて粒子描像に変換すると初状態と終状態の比較

が困難であるため、相対論的な massless ガス極限においては、粒子密度とエントロピー密度の比が次元解析から温度に依存しないこと、流体素片中の流速ラピディティ  $Y_f$  が平均的に運動量空間のラピディティ  $y$  と対応していることを用いている。分布は  $T_f = 0.16$  TeV の等温超曲面を出てくるエントロピー流速から構築する。

RHIC における  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV の Au-Au 衝突、および LHC における  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV の Pb-Pb 衝突における CGC のラピディティ分布と、完全 / 粘性流体力学的な変形を受けた後のラピディティ分布を図 1 に示す。完全流体の場合には、RHIC、LHC 双方について外向きのエントロピー流によって分布が緩やかになる傾向が見られる。粘性流体の場合はエントロピー生成によって分布がかさ上げされる効果があるため、粘性係数の強さに応じて完全流体よりも傾きはやや急となる。もし、流体効果によって RHIC において傾きが緩やかになるのであれば、本来の初期条件はより傾きが急である、つまり真の  $\lambda$  がより大きいはずであるので、現在のパラメータ設定が示すように LHC における効果が RHIC のそれより小さいとき、LHC においてラピディティ分布はより大きくなると考えられる。また粘性補正が大きく真の  $\lambda$  があまり変わらない場合も、LHC においてはエントロピー生成が強くなるため粒子生成は大きくなると考えられる。この結果は、CGC の予想と実験結果の違いを流体効果によって説明できる可能性があることを示している。

## 4 まとめと展望

粘性流体モデルの理論的・数値的枠組みを構築し、CGC の初期分布に対する衝突軸方向の非ブースト不変な膨張の効果を見積もった。その結果、外向きのエントロピー流とエントロピー生成の二つの効果によりラピディティ分布の歪みが生じること、それにより CGC の予想と LHC の実験結果の差 [4] が説明されうる事を示した。今後の展望としては、 $\lambda$  を決定するためのパラメータ依存性の議論や、running coupling の効果を含めた rcBK による CGC [14] の導入、横方向の流速の効果を評価してより定量的な議論を行うための (3+1) 次元粘性流体モデルの構築がある。

## 参考文献

- [1] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **23** (2005) 1.
- [2] T. Hirano, N. van der Kolk and A. Bilandzic, *Lect. Notes Phys.* **785** (2010) 139.
- [3] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian and R. Venugopalan, arXiv:1002.0333 [hep-ph].
- [4] K. Aamodt *et al.* [ALICE Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 252301.
- [5] A. Monnai and T. Hirano, *Phys. Lett. B* **703** (2011) 583; arXiv:1106.3726 [nucl-th].
- [6] W. Israel and J. M. Stewart, *Annals Phys.* **118** (1979) 341.
- [7] A. Monnai and T. Hirano, *Nucl. Phys. A* **847** (2010) 283.
- [8] S. Borsanyi *et al.*, *JHEP* **1011** (2010) 077.
- [9] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601.
- [10] A. Hosoya, M. a. Sakagami, and M. Takao, *Annals Phys.* **154** (1984) 229.
- [11] H. J. Drescher and Y. Nara, *Phys. Rev. C* **75** (2007) 034905; *C* **76** (2007) 041903.
- [12] D. Kharzeev and E. Levin, *Phys. Lett. B* **523** (2001) 79; D. Kharzeev, E. Levin and M. Nardi, *Nucl. Phys. A* **730** (2004) 448 [Erratum-ibid. *A* **743** (2004) 329].
- [13] K. Morita, S. Muroya, C. Nonaka and T. Hirano, *Phys. Rev. C* **66** (2002) 054904.
- [14] J. L. Albacete and A. Dumitru, arXiv:1011.5161 [hep-ph].

# Novel Kinetic Theory Describing Ultrasoft Fermionic Mode

佐藤大輔 (京大 理), 日高義将 (理研)

## 1 導入

多体系においてはほとんどの場合、系の自由度の多さゆえに正確な計算が困難である。したがって結合定数  $e$  が小さい場合 ( $e \ll 1$ ) には、摂動計算が広く用いられている。しかし粒子の質量が無視できる程度の高温 ( $T$ ) におけるフェルミオン-ボソン系 (湯川模型、量子電磁力学 (QED)、量子色力学 (QCD) など) では、素朴な摂動計算が信頼できない場合がある。

その事に関して、フェルミオンの伝播関数に関する解析の場合に説明する (図 1)。考えるエネルギー領域が  $eT$  程度の場合、hard thermal loop (HTL) 近似 [1] と呼ばれる素朴な 1 ループ近似が適用できることが知られている。この近似は Vlasov 方程式と等価である [2]。この近似の結果、ノーマルフェルミオンおよびプラズミーノと呼ばれるフェルミオンの集団運動が出現することが知られている。一方エネルギーが  $e^2T$  程度かそれ以下の場合、HTL 近似はもはや適用できない。このエネルギー領域では resummation<sup>1</sup>を行う必要がある [4, 5]。その手続きは以下の通りである：

1. 粒子の熱質量および崩壊幅を resum した伝播関数を用いる
2. 梯子型のダイアグラムを全て足し上げる

この手法を用いた解析の結果、存在が示唆されていた [5] 集団運動の存在が確立した [4]。

しかしながらこの手続きには、場の理論に基づいた systematic な導出があるわけではない。また、梯子型ダイアグラムの足し上げが物理的には何に対応するのかが不明瞭であった。そこで我々はこの resummation を使った手法と等価な運動論的方程式を Kadanoff-Baym 方程式から導出し、この点を明らかにした。以下でそれについて述べる。

## 2 Kadanoff-Baym 方程式

紙面の都合上、湯川模型および QCD の場合は省略し、QED の場合に限りて導出を行う。ここでの計算はクーロンゲージを採用し、Keldysh 形式を用いて行う。

フェルミオンの集団運動を Kadanoff-Baym 方程式を使って解析するには、以下の状況を考えれば良い。熱平衡系に十分弱いフェルミオンの外場 ( $\eta(x)$ ) を加え、それによってフェルミオンの集団運動 ( $\Psi(x)$ ) を生じさせる。そのような状況での Kadanoff-Baym 方程式は以下の通りである：

$$\partial_y^2 K^\mu(x, y) + eS^<(x, y)\gamma^\mu\Psi(y) = \int d^4z(-K^\nu(x, z)\Pi_\nu^{\mu R}(y, z) + S^<(x, z)\delta\Gamma^\mu(z, y)), \quad (1)$$

$$\partial_x K^\mu(x, y) + ie\gamma_\nu D^{\nu\mu<}(x, y)\Psi(x) = i \int d^4z(-\Sigma^R(x, z)K^\mu(z, y) + D^{\nu\mu<}(z, y)\delta\Gamma_\nu(x, z)). \quad (2)$$

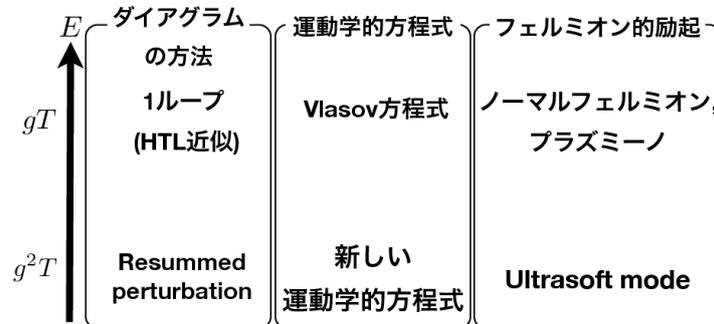


図 1: 各エネルギースケールにおけるダイアグラムの解析手法、運動学的方程式、およびそれらの結果存在が示唆されるフェルミオンの励起。

<sup>1</sup>ボソンの伝播関数の解析における resummation は [3] を参照。

ここで、

$$S^{\lessdot}(x, y) \equiv \langle \bar{\psi}(y)\psi(x) \rangle, \quad D_{\mu\nu}^{\lessdot}(x, y) \equiv \langle a_\nu(y)a_\mu(x) \rangle, \quad K^\mu(x, y) \equiv \langle \psi(x)a^\mu(y) \rangle \quad (3)$$

を導入した。ただし、 $\psi(x)$  ( $a^\mu(x)$ ) はフェルミオン (ボソン) 場のゆらぎである。また、 $\Sigma^R(x, y)$ 、 $\Pi_{\mu\nu}^R(x, y)$ 、 $\delta\Gamma^\mu(x, y)$  は、それぞれフェルミオンおよびボソンの遅延自己エネルギー、vertex 補正である。

一方、考える集団運動 ( $\Psi(x)$ ) の時間発展は以下の式で与えられる：

$$i\partial_x\Psi(x) = \eta(x) + \eta_{\text{ind}}(x). \quad (4)$$

$\eta_{\text{ind}}(x) \equiv eK(x, x)$  は我々が知りたい量であるフェルミオンの自己エネルギー ( $\Sigma^R(x)$ ) を使って  $\eta_{\text{ind}}(x) = \int d^4y\Sigma^R(x-y)\Psi(y)$  と書けるため、結局我々がやるべきことは式 (1) および (2) から  $K^\mu(x, y)$  を求める事に帰着する。

ここで2つの近似を行う。1つめは、gradient 展開と呼ばれるものである。まず、時空の座標  $x$  および  $y$  を使って、その平均  $X \equiv (x+y)/2$  および差  $s \equiv x-y$  を定義する。ここで、 $X$  は平均場の座標に対応するため、 $\partial_X \sim e^2T$  である。一方後でみるように、 $s$  はゆらぎの相関関数の引数である。ゆらぎの起源は熱的なものなので、 $\partial_s \sim T$  である。したがって、 $\partial_s$  に比べて  $\partial_X$  を無視する事ができる。

さて、ここで運動量空間に移るために Wigner 変換を行う。Wigner 変換は任意の関数  $f(x, y)$  を使って以下のように定義される：

$$f(k, X) \equiv \int d^4s f(X+s/2, X-s/2)e^{ik\cdot s}. \quad (5)$$

次に2つめの近似を説明する。今外場 ( $\eta$ ) が十分小さい場合を考えているため、系は熱平衡状態からほとんど離れていない。従って式 (1) および (2) に現れる伝播関数を、以下の熱平衡時における相互作用がない場合のそれで置き換える事ができる：

$$S^{\lessdot(\text{eq})}(k) = \not{k}\rho^0(k)n(k^0), \quad D_{\mu\nu}^{\lessdot(\text{eq})}(k) = \rho^0(k)N(k^0)P_{\mu\nu\text{T}}(k). \quad (6)$$

ここで  $\rho^0(k) \equiv 2\pi\text{sgn}(k^0)\delta(k^2)$ 、 $n(k^0) \equiv (e^{k^0/T} + 1)^{-1}$ 、 $N(k^0) \equiv (e^{k^0/T} - 1)^{-1}$  である。また、横波成分への射影演算子  $P_{\mu\nu\text{T}}(k) \equiv g_{\mu i}g_{\nu j}(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)$  を導入した。ただし、 $\hat{k}^i \equiv k^i/|k|$  である。ただし  $K^\mu$  は平衡時に0であるため、そのまま残す。さらに、自己エネルギーは熱平衡時における1ループの値を用い、vertex 補正は非平衡状態における1ループの値を用いる：

$$\{\not{k}, \Sigma^R(k)\} = m_{\text{f}}^2 - 2i\zeta_{\text{f}}k^0, \quad \Pi_{\mu\nu}^R(k) = m_{\text{b}}^2P_{\mu\nu\text{T}}(k), \quad (7)$$

$$\delta\Gamma^\mu(k, X) = e^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{l}}{2k \cdot l} \gamma^\mu K_\nu(l, X). \quad (8)$$

ここで、 $m_{\text{f}}^2 \equiv e^2T^2/4$ 、 $m_{\text{b}}^2 \equiv e^2T^2/6$  である。フェルミオンの崩壊幅 ( $\zeta_{\text{f}} \sim e^2T \ln(1/e)$ ) は leading-log の精度でしか計算されていないため、表式を書く事はできない。

この2つの近似の結果、以下の運動論的方程式が得られる。

$$(2iv \cdot \partial_X \pm \frac{\delta m^2}{|k|} + 2i\zeta_{\text{f}})\not{A}_\pm(\mathbf{k}, X) = 2e\psi(N(|k|) + n(|k|))\Psi(X) \\ + e^2\gamma_i\psi(N(|k|) + n(|k|))P_{\text{T}}^{\nu i}(v) \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|l|} \frac{sv^\alpha\gamma_\nu \pm v_{l\nu}\gamma^\alpha}{|k||l|v \cdot v_l} \Lambda_{s\alpha}(l, X). \quad (9)$$

ここで、 $K^\mu(k, X) \equiv 2\pi\delta(k^2)(\theta(k^0)\Lambda_+^\mu(\mathbf{k}, X) + \theta(-k^0)\Lambda_-^\mu(-\mathbf{k}, X))$ 、 $v^\mu \equiv (1, \hat{\mathbf{k}})$ 、 $v_l^\mu \equiv (1, \hat{\mathbf{l}})$ 、 $\delta m^2 \equiv m_{\text{b}}^2 - m_{\text{f}}^2$  を導入した。

ダイアグラムの方法	運動論的方程式
熱質量	質量項
崩壊幅	衝突項
梯子型ダイアグラムの足し上げ	外力項への補正

表 1: resummed perturbation と運動論的方程式との対応関係。

さて、各項の意味を見てみよう。まず左辺第 1 項は、相互作用がない場合の時間発展を表す項であり、Boltzmann 方程式における駆動項に対応する。第 2 項は、伝播関数に自己エネルギーとしてではなく、通常の質量として  $m_f$  と  $m_b$  を入れた時にも出てくる。このため、この項はフェルミオンおよびボソンの質量に由来する。この項を質量項と呼ぶ事にする。第 3 項は散乱振幅の 2 乗を使って表すことができ、衝突項に対応する。ただし、 $K^\mu$  が平衡時に 0 になる事により、緩和時間近似を行った時の形になっている。一方右辺第 1 項は、平均場との相互作用に由来しており、外力項に対応する。第 2 項は、vertex 補正  $\delta\Gamma_\nu$  に由来するため、外力の補正であると解釈する。ここで、駆動項以外の項の形は、Boltzmann 方程式におけるそれとは異なっている事に注意する。この事は、Boltzmann 方程式の場合とは違い、今時間発展を調べている量  $K^\mu$  が異なる粒子間の相関関数であることに由来する。

また、この運動論的方程式から計算した  $\Sigma^R(p)$  は、[4] において resummed perturbation を使って計算されたものと一致する。このことから、我々が導出した運動論的方程式と resummed perturbation は等価であると言える。したがって、resummed perturbation における各手続きを運動学的に解釈できる。その結果は、熱質量は質量項に、崩壊幅は衝突項に、梯子型ダイアグラムは外力の補正項に対応するというものである (表 1)。

最後に、ここで行った 2 つの近似は弱結合性から正当化される事に注意する。1 つめは  $\partial_X \sim e^2 T$ 、 $\partial_s \sim T$  より明らかである。2 つめの近似が必要十分である事を見るために、運動論的方程式の各項の大きさを評価しよう。まず自己エネルギーを 1 ループで近似したことから、質量項および衝突項が出現した。これらの項は  $e^2 T \Lambda$  程度の大きさである。また、vertex 補正を 1 ループで近似したため、外力の補正項が出現した。この項の大きさも  $e^2 T \Lambda$  程度である。一方駆動項は、 $\partial_X \sim e^2 T$ 、 $k \sim T$  より、 $e^2 T^2 \Lambda$  程度の大きさである。考えている項が全て同程度であるため、ここで使った 1 ループ近似は leading order の寄与のみを考える限り必要十分である事がわかる；2 ループ以上の効果は駆動項より小さく、無視できる。

### 3 まとめ

我々は線形応答領域における Kadanoff-Baym 方程式に gradient 展開を用いる事によって、フェルミオンの集団運動を解析できる新しい運動論的方程式を導出した。この運動論的方程式から計算した  $\Sigma^R(p)$  は、resummed perturbation から計算されたものと一致したため、その運動論的方程式は resummed perturbation と等価である事がわかった。この事は resummed perturbation の基礎付けを与える。また、この等価性を使って resummed perturbation の手続きの運動学的な解釈を与えた (表 1)。

### 参考文献

- [1] H. A. Weldon, Phys. Rev. D **26**, 2789 (1982); **40**, 2410 (1989).
- [2] J. P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **390**, 589 (1993); **417**, 608 (1994).
- [3] J. P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **570**, 326 (2000).
- [4] D. Satow and Y. Hidaka, arXiv:1109.0088 [hep-ph].
- [5] V. V. Lebedev and A. V. Smilga, Annals Phys. **202**, 229 (1990).

# Stochastic Equations in Black Hole Backgrounds and Non-equilibrium Fluctuation Theorems

総合研究大学院大学 岡澤 晋  
E-mail: okazawas@post.kek.jp

## 1 ブラックホール熱力学

ブラックホールが熱力学法則とよく似た関係式を満たすことはよく知られており [1]、詳しく研究されてきた。簡単のため球対称なブラックホールを考えると、ブラックホールホライズンを通過するエネルギー  $\Delta M$  とホライズン面積変化  $\Delta A_{BH}$  の関係は第一法則と同様に

$$T_H \Delta S_{BH} = \Delta M \quad (1)$$

と表され、 $S_{BH} = A_{BH}/4G$  をブラックホールエントロピー、 $T_H = 1/8\pi GM$  を Hawking 温度 [2] と呼ぶ。ここでは  $c = \hbar = k_B = 1$  とする単位系を用いるが、Hawking 温度は  $\hbar$  に比例する量であり、曲がった時空中の場の量子効果としてブラックホールから黒体輻射が発せられる際の温度である。熱力学第二法則はブラックホールエントロピーを含む形で拡張され、

$$\Delta S_{BH} + \Delta S_{\text{matter}} \geq 0 \quad (2)$$

と表される。これは「拡張された第二法則」と呼ばれる。

我々の研究の目標は、これらブラックホールの熱力学を生み出しているミクロな性質を捉えることである。熱力学は系の微視的構造に依らない大変強力な理論体系であるが、そのような記述を超えて、ブラックホールの微視的構造に依存するような現象の記述を目指している。そのために、非平衡状況下でのブラックホールの性質に注目する。

## 2 揺らぎの定理

非平衡統計力学の近年の発展の一つとして、揺らぎの定理 [3, 4] が知られている。この定理の主張を単純化して述べると

$$\frac{\text{Prob}(\text{entropy difference} = \Delta S)}{\text{Prob}(\text{entropy difference} = -\Delta S)} = e^{\Delta S} \quad (3)$$

というものである。微視的には  $\Delta S < 0$  となる過程が必ず存在することを示している点が重要である。この定理の積分形として、 $\langle \dots \rangle \equiv \int d(\Delta S) P(\Delta S) \dots$  として

$$\langle e^{-\Delta S} \rangle = 1 \quad (4)$$

も得られ、特に非平衡過程での仕事と自由エネルギーの関係  $\langle e^{-W/T} \rangle = e^{-\Delta F/T}$  は Jarzynski 等式 [5] と呼ばれている。ここから、Jensen 不等式  $\langle e^x \rangle \geq e^{\langle x \rangle}$  を用いると

$$\langle \Delta S \rangle \geq 0 \quad (5)$$

という第二法則が示される。

時間反転対称性を持った系から如何にして第二法則を導くか？という古くからの問題に部分的に解答を与えているのがこの揺らぎの定理である。

### 3 stretched horizon での Langevin 方程式

我々は [6] において球対称ブラックホール時空中でのスカラー場の量子論を考え、ブラックホールホライズン直上でのスカラー場の有効理論の構築を行った。具体的には、 $r = r_H$  (horizon) から  $r = r_H + \epsilon$  (stretched horizon) までの場の自由度を積分することによって有効理論を導いた。曲がった時空中の場の理論では真空の定義が一意ではなく、異なる真空間で非自明な Bogoliubov 変換が起こり得る。無限過去からブラックホールが存在する時空の場合、ホライズンの外側（もしくは内側）のみを記述出来る座標系とホライズンをまたいで正則な座標系で生成消滅演算子の定義が食い違っており、両座標系における真空は

$$|0\rangle_K \sim \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega_k}{\kappa}n} |n^L\rangle |n^R\rangle \quad (6)$$

のように関係している。左辺はホライズンをまたいで正則な座標系での真空、右辺は最大拡張されたブラックホール時空の “左右” で定義された  $n$  粒子状態の重ね合わせである。ここで表れる “左右” の場は Schwinger-Keldysh 法に現れる 2 つの場（もしくは thermo field dynamics の 2 つの場）と同じ構造を持っており、Schwinger-Keldysh 法を用いて Langevin 方程式を導く方法がそのまま適用出来る。我々は正則な座標で定義された真空  $|0\rangle_K$  を用いて上記の領域  $[r_H, r_H + \epsilon]$  の積分を実行し、以下の有効運動方程式を得た。

$$(\partial_t - \partial_{r_*})\phi^r(t, r_*)|_{r=r_H+\epsilon} = \xi(t) \quad (7)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \simeq T_H \delta(t - t'). \quad (8)$$

ここで  $\phi^r \equiv (\phi^R + \phi^L)/\sqrt{2}$  はスカラー場の古典的成分、 $\xi$  はノイズで、上記のような相関を持つものである。 $\simeq$  と記した部分は  $T_H$  を固定して  $\hbar \rightarrow 0$  とする極限での表式という意味である。以下、そのような Hawking 輻射以外の量子効果を無視する近似をとる。

有効運動方程式のノイズ期待値をとると  $\langle (\partial_t - \partial_{r_*})\phi^r \rangle = 0$  が得られるが、これはブラックホールから出てくる波は存在しないという条件 (ingoing boundary condition) になっている。stretched horizon ではこの条件が量子的に破れており、ノイズとして外向き波 (Hawking 輻射) が存在するという物理的解釈が出来る。

### 4 ブラックホールの揺らぎの定理

ホライズン上での有効運動方程式とホライズンの外での通常の運動方程式を合わせて全系のダイナミクスとし、スカラー場の発展に関する確率微分方程式が書き下せる。スカラー場が  $t = 0$  にある初期状態  $\phi_i$  から出発して  $t = \tau$  までに経路  $\Gamma_\tau$  をとる確率と  $t = 0$  にある初期状態  $\phi_f$  から出発して時間反転経路  $\Gamma_\tau^\dagger$  をとる確率の比は

$$\frac{P^F[\Gamma_\tau|\phi_i]P^{eq}(\phi_i)}{P^R[\Gamma_\tau^\dagger|\phi_f]P^{eq}(\phi_f)} = \exp \left[ \frac{1}{T_H} \int^{\Gamma_\tau} dt \dot{\phi}_{l,m} \partial_{r_*} \phi_{l,m}|_{r=r_H+\epsilon} + \frac{1}{T_H} (\Delta H_M - \Delta F_M) \right] \quad (9)$$

と求まる。但し、どちらの場合も初期状態は平衡状態にあると仮定し、何らかの外部パラメータ操作を考えている。外部パラメータの動かし方が順方向であることを示す添字が  $F$  であり、逆方向であることを示す添字が  $R$  である。右辺の第一項目はスカラー場のエネルギー運動量テンソルを用いて書きなおすことができ、

$$\int^{\Gamma_\tau} dt \dot{\phi}_{l,m} \partial_{r_*} \phi_{l,m}|_{r=r_H+\epsilon} = \int dt dA_{BH} T_t^r(t, r = r_H + \epsilon) \quad (10)$$

となるが、右辺は stretched horizon を出入りするエネルギーなので、ブラックホール熱力学第一法則 (1) より  $T_H \Delta S_{BH}$  に書き直すことが出来て

$$\frac{P^F[\Gamma_\tau|\phi_i]P^{eq}(\phi_i)}{P^R[\Gamma_\tau^\dagger|\phi_f]P^{eq}(\phi_f)} = \exp[(\Delta S_{BH} + \Delta S_{\text{matter}})[\Gamma_\tau]] \quad (11)$$

を得る。ここで  $\Delta S_{\text{matter}} \equiv (\Delta H_M - \Delta F_M)/T_H$  と定義した。従って、時間間隔  $\tau$  で順方向の外部パラメータ変化に伴う総エントロピー変化  $\Delta S_{\text{tot}}$  を得る確率  $\rho^F(\Delta S_{\text{tot}})$  は

$$\begin{aligned} \rho^F(\Delta S_{\text{tot}}) &\equiv \int \mathcal{D}\Gamma_\tau P^F[\Gamma_\tau|\phi_i]P^{eq}(\phi_i)\delta(\Delta S_{\text{tot}}[\Gamma_\tau] - \Delta S_{\text{tot}}) \\ &= e^{\Delta S_{\text{tot}}} \int \mathcal{D}\Gamma_\tau^\dagger P^R[\Gamma_\tau^\dagger|\phi_f]P^{eq}(\phi_f)\delta(\Delta S_{\text{tot}}[\Gamma_\tau^\dagger] + \Delta S_{\text{tot}}) = e^{\Delta S_{\text{tot}}} \rho^R(-\Delta S_{\text{tot}}) \end{aligned} \quad (12)$$

を満たす。これがブラックホールと物質場に対する揺らぎの定理である。ここから、Jarzynski 型の積分形揺らぎの定理

$$\langle e^{-(\Delta S_{BH} + \Delta S_M)} \rangle = 1 \quad (13)$$

が得られ、Jensen 不等式を用いると拡張された第二法則 (2) が全経路に関する平均の意味で示される。

$$\langle (\Delta S_{BH} + \Delta S_M) \rangle \geq 0. \quad (14)$$

揺らぎの定理からわかることは、 $(\Delta S_{BH} + \Delta S_M)[\Gamma_\tau] < 0$  となる経路  $\Gamma_\tau$  が存在しなければならないということである。

## 5 課題

本研究では重力場のダイナミクスを無視したが、Hawking 輻射によるブラックホールの蒸発等、情報喪失問題へ繋がる大変面白い問題を考える上ではそのような近似を超えることが必要不可欠である。また、揺らぎの定理は非平衡統計力学における一つの成果ではあるが、非平衡の特性を十分に捉えられているかという点に関しては疑問が残っている。両分野のさらなる知見が本研究を前進させる上で望まれる。

ここで用いた stretched horizon での Langevin 方程式 (8) を導く方法は、membrane paradigm と呼ばれるホライズンダイナミクスの記述法に応用可能と思われ、現在研究中である。

## References

- [1] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun.Math.Phys. **31** (1973),161
- [2] S. W. Hawking, Commun.Math.Phys. **43** (1975),199
- [3] D. J. Evans, E. G. D. Cohen and G. P. Morriss, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 2401-2404.
- [4] G. E. Crooks, J. Stat. Phys. **90** (1998), 1481-1487.
- [5] C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 2690-2693, arXiv:9610209 [cond-mat].
- [6] S. Iso and S. Okazawa, Nucl.Phys.**B851** 380-419

# グラフェンにおけるカイラル対称性の破れ・回復と Kekulé 歪み

荒木 康史\*

(東京大学)

## 1 はじめに

炭素原子の単原子層によって構成されるグラフェン (graphene) は、2004 年に実験的観測が成功して以来 [1]、実験・理論の双方で活発な研究が行われている。単層グラフェン上の電子・正孔の励起は、低エネルギーにおいては線形の分散関係 (“Dirac cone” 構造) に従うことが知られている [2]。これは低エネルギー有効理論を (2+1) 次元の Dirac fermion として記述することができることを意味し [3]、したがってグラフェンは場の理論の立場からも大きな関心を集めている。

グラフェンの物理において注目を集めている問題の一つとして、Coulomb 相互作用による自発的ギャップ生成の有無の問題がある [4]。仮に電子間の相互作用が存在しなければ、その分散関係は Dirac cone 構造に従い、ギャップは存在しない (半金属として振舞う)。一方、Coulomb 相互作用が十分強ければ、電子と正孔はペアを作って凝縮し (エキシトン凝縮)、ギャップを生成して絶縁体として振舞うことが予想される。これは、フェルミオンの質量項の生成に相当する。グラフェンの場合はフェルミオンの伝播速度 (Fermi 速度)  $v_F$  が光速の約 1/300 倍と非常に遅いため、真空中のグラフェンにおける Coulomb 相互作用の実効的な強さは通常の量子電磁気学 (QED) よりも  $v_F^{-1}$  倍の強さとなり、このギャップ生成の有無が問題視される。このようなグラフェンの系は、フェルミオンを含んだ強結合の U(1) ゲージ理論として記述できる [5]。そのため、量子色力学 (QCD) における自発的カイラル対称性の破れ (および、それに伴うクォーク質量生成) とのアナロジーを活用し、様々な理論的研究が行われている。筆者らは先行研究において、正方格子上で U(1) ゲージ理論の強結合展開の手法を用いて、強結合の極限ではカイラル対称性が破れていることを示し、また対称性の破れに伴う南部-Goldstone モードの振舞いについても見積もった [6]。

一方、グラフェンのギャップ生成メカニズムとしては、これ以外に外的要因でギャップを開くものも存在する。その一つが Kekulé 歪みである [7]。これは、六角格子のサイト間ホッピングの強さの空間分布によって特徴付けられ、吸着原子によってこのようなパターンを示すことが第一原理計算によって明らかになっている [8]。Kekulé 歪みは、カイラル対称性を破らないが、電子間相互作用が無い場合でも歪みの強さに比例したギャップを生成する。十分強い Coulomb 相互作用下でカイラル対称性と Kekulé 歪みが互いに及ぼす影響に関しては、低エネルギー領域では未だ明らかにされていない。

本研究では、カイラル対称性と Kekulé 歪みの相互の影響を明らかにするため、グラフェンの六角格子構造を残した U(1) ゲージ理論を有効模型として用いる。前研究 [6] と同様の強結合展開の手法をこの模型に適用し、強い Coulomb 相互作用の下での系の振舞いについて議論する。その結果、強結合極限では確かにカイラル対称性が破れるが、外部から十分大きな Kekulé 歪みを導入すると、強結合極限においてもカイラル対称性が回復されることを示す。

## 2 有効模型

グラフェンの有効作用を構築するにあたって拠り所とするのは、隣接サイト間のホッピングを記述する tight-binding Hamiltonian である:

$$H = - \sum_{\mathbf{r} \in A} \sum_{i=1,2,3} [h a^\dagger(\mathbf{r}) b(\mathbf{r} + \mathbf{s}_i) + \text{H.c.}] . \quad (1)$$

ここで  $a(b)$  は、六角格子の部分格子たる三角格子  $A(B)$  上の各サイトにおける電子の消滅演算子であり、 $\mathbf{s}_{i=1,2,3}$  は 1 つの  $A$  サイトから、3 つ存在する最隣接の  $B$  サイトへの方向ベクトルである (格子間隔  $a = |\mathbf{s}_i| = 1.42 \text{ \AA}$ )。  $h$  は隣接サイト間のホッピングの強さであり、これを用いて Fermi 速度  $v_F = (3/2)ah = 3.02 \times 10^{-3}$  (実験値) と表される。この Hamiltonian のエネルギー固有値は、運動量空間中の 2 つの Dirac 点  $\mathbf{K}_\pm$  の周囲で Dirac cone 構造  $E(\mathbf{K}_\pm + \mathbf{k}) = v_F |\mathbf{k}| + O(k^2)$  を示す。この系は部分格子  $A$  と  $B$  の入れ替えに関して対称であり、これは連続極限では U(1)<sub>A</sub> カイラル対称性に拡張される。

Kekulé 歪みは、ホッピングの強さ  $h$  に空間変調

$$\delta h_i(\mathbf{r}) = \frac{\Delta}{3} \left[ e^{i(\mathbf{K}_+ \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.} \right] \quad (2)$$

\*araki@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

を加えたものとして記述される。ここで  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{K}_+ - \mathbf{K}_-$  であり、 $\Delta$  は Kekulé 歪みの強さを示す外部パラメータである。Kekulé 歪みは部分格子対称性 (カイラル対称性) を破らないが、エネルギー固有値は  $E(\mathbf{K}_\pm + \mathbf{k}) \simeq v_F \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \Delta^2}$  となり、ギャップを生じる。

(1) 式から虚時間 ( $\tau'$ ) 形式で経路積分を構築することにより、フェルミオンの有効作用  $S_F$  が得られる。時間方向も連続極限をとらずに格子化し、格子間隔  $a_{\tau'}$  を計算の便宜上  $a$  と等しくとる。これにより 2 つのダブリングが生じるが、ここではこのダブリングをスピンの縮退度に対応させる。すなわち、1 種類のフェルミオンで、この系の電子および正孔励起が記述される。

正方格子上のゲージ理論と同様に、フェルミオンと電磁場の相互作用はリンク変数  $U_{\tau'}(\mathbf{r}, \tau') = \exp \left[ ie \int_{\tau'}^{\tau'+a_{\tau'}} d\tau' A_0 \right]$  を導入することによって記述される。フェルミオンの伝播速度  $v_F$  は光速に比べて非常に遅いため、電場の遅延効果 (磁場) は無視できると近似する。すなわち、空間方向のリンク変数は全て 1 と取る。リンク変数を用いると、ゲージ場の運動項は

$$S_G = \sqrt{3}\beta \sum_{\mathbf{r} \in A} \left[ 3 - \frac{1}{2} \sum_{j=1,2,3} (U_{\tau'}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_j, \tau') U_{\tau'}^*(\mathbf{r}, \tau') + \text{c.c.}) \right] \quad (3)$$

と記述される。 $\beta \equiv v_F \epsilon / e^2$  は結合定数の逆数に相当し、ここでは強結合展開の展開パラメータとして用いる。

### 3 強結合展開による解析

以上で得られた有効作用を用い、経路積分を  $\beta$  によって展開し各項ごとに分配関数を求める:

$$Z = \int [d\chi^\dagger d\chi][dU] e^{-S_F - S_G} = \int [d\chi^\dagger d\chi][dU] e^{-S_F} \left( 1 - S_G + \frac{S_G^2}{2} + \dots \right). \quad (\chi = a, b) \quad (4)$$

ここでは展開の 0 次の項のみを考える。これは  $\beta = 0$ 、すなわち強結合極限に相当する。先にリンク変数を全て積分すると、 $-(1/4)n_\chi(x)n_\chi(x+a_{\tau'})$  なる 4-Fermi 項が生成される ( $n_\chi(x) = \chi^\dagger(x)\chi(x)$  はサイト  $x$  での局所的な電子密度)。部分格子  $A, B$  間の電子密度の差 ( $n_a - n_b$ ) に対応する補助場  $\sigma$  を導入して Stratonovich-Hubbard 変換を行うことにより、系の有効作用はフェルミオンの 2 次形式で表される。ここで、補助場  $\sigma$  は自発的に起こった部分格子対称性 (カイラル対称性) の破れの秩序変数に相当し、フェルミオンの質量項を与える。

フェルミオン場に関する経路積分を行うことにより、強結合展開の 0 次における分配関数  $Z^{(0)}$ 、および  $A, B$  サイトのペアあたりの有効ポテンシャル  $F_{\text{eff}}^{(0)}(\sigma; \Delta) = -\frac{1}{V N_{\tau'}} \ln Z^{(0)}$  が得られる。 $F_{\text{eff}}^{(0)}$  はボソン場  $\sigma$  の関数として振舞い、かつ Kekulé 歪みの大きさ  $\Delta$  を外部パラメータとしてもつ (図 1)。 $F_{\text{eff}}^{(0)}(\sigma; \Delta)$  の最小値を与える  $\sigma$  は期待値を与えるが、この系ではそれは  $\Delta$  の関数として表される。図 2 に示すように、 $\sigma(\Delta)$  は  $\Delta = 0$  の周囲では 2 次関数的に増加するが、十分大きい  $\Delta$  では減少し 0 となる。その臨界値は  $\Delta_C/3h = 0.485$  であり、2 次相転移の振舞いを示す。これはすなわち、外部から Kekulé 歪みを導入することにより、自発的に破れていたカイラル対称性が回復されることを意味している。ダイアグラムの的には、Kekulé 歪みが大きくなるほど伝播関数が小さくなりフェルミオン・ルー

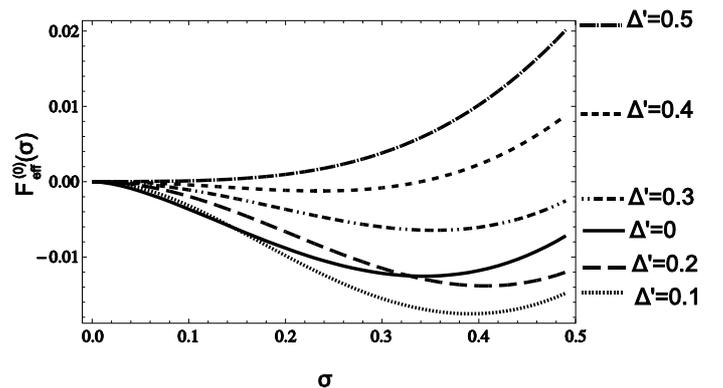


図 1: 様々な Kekulé 歪みの大きさ  $\Delta' = \Delta/3h$  における、有効ポテンシャル  $F_{\text{eff}}^{(0)}(\sigma; \Delta)$  の振舞い。ポテンシャルの最小値を与える  $\sigma$  は  $\Delta$  の関数として表される。

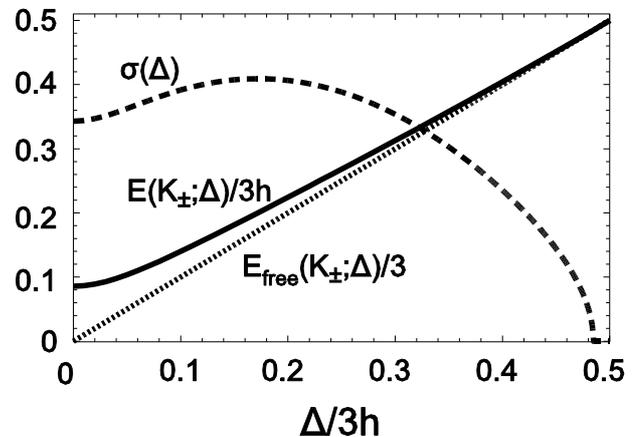


図 2: Kekulé 歪みの大きさ  $\Delta$  に対する、カイラル対称性の破れの大きさ  $\sigma$ 、およびそれらに伴うギャップの大きさ  $E(\mathbf{K}_\pm; \Delta)$  の振舞い。 $E_{\text{free}}(\mathbf{K}_\pm; \Delta) = |\Delta|$  は電子間に相互作用が無い場合のギャップの大きさである。

ブの効果は抑制されるため、ループから生じる対数発散の影響が小さくなり、ポテンシャルの極小点が0に近づくとして理解できる。

カイラル対称性の自発的破れと Kekulé 歪みの影響により、フェルミオンが得るギャップの大きさは  $E(\mathbf{K}_{\pm}; \Delta) = \sqrt{[v_F \sigma(\Delta)/2a_T]^2 + \Delta^2}$  となり、これも  $\Delta$  の関数として振舞う (図 2)。相互作用が無い場合はギャップは Kekulé 歪みのみによって生成される。したがって電磁場との相互作用を導入すると、 $\Delta < \Delta_C$  では、自由粒子の場合よりも  $\sigma(\Delta)$  の分だけギャップが大きくなる。一方、 $\Delta > \Delta_C$  の場合は、部分格子対称性 (カイラル対称性) が破れないため、自由粒子の場合からギャップの大きさは変化しない。

## 4 結論

本研究では、実効的に強い Coulomb 相互作用の下での、グラフェンの自発的なカイラル対称性の破れについて議論を行った。系を記述する有効模型として六角格子上で定義された U(1) ゲージ理論を導入し、強結合展開の手法により Coulomb 相互作用の強結合極限における系の振舞いについて考察した。その結果、強結合極限では部分格子対称性 (カイラル対称性) が自発的に破れてフェルミオンが質量ギャップを獲得する一方、部分格子対称性を破らないような Kekulé 歪みを外場として導入すると、自発的に破れた部分格子対称性が回復されることを示した。これは定性的には、歪みによって生じた強いホッピングの効果により、部分格子間の電荷の移動が好まれ、全体として電荷分布が平坦化されるものと理解できる。部分格子対称性の破れと Kekulé 歪みの関係により、フェルミオンの持つギャップの大きさは自由粒子の場合から変化し、単に Kekulé 歪みの大きさに比例したものではなくなる。このような振舞いは、グラフェンを電子デバイスとして応用する場合のギャップの大きさの調整 (ギャップ・エンジニアリング) にも影響を及ぼすと期待される。

この研究では強結合展開の最低次 (強結合極限) のみを考えたが、実際の系では展開の各次数の効果を検討する必要がある。展開の 1 次では隣接サイト間の相互作用に相当する項が生成されるが、このような相互作用は隣接ホッピングの強さの分布、すなわち Kekulé 歪みを自発的に生成しうる。同一サイト (Hubbard 相互作用)、および隣接サイト間の相互作用などを取り入れた有効模型においては、電荷密度波 (部分格子対称性が破れた) 相や Kekulé 歪みの相など、多彩な相構造が存在することが知られている [9, 10]。筆者は、強結合展開の枠組み内でもこのような相構造が得られるかどうかを研究中である。また、有限の化学ポテンシャルや有限温度を導入した場合、およびフォノンによって介される相互作用を考慮した場合の系の振舞いについても研究を行うことを検討している。

## 謝辞

青木秀夫氏、C. Detar 氏、J. Drut 氏、初田哲男氏、野村健太郎氏、佐々木勝一氏には、有益な議論や助言をいただいたことを感謝する。本研究は、日本学術振興会の特別研究員奨励費 (DC1, No.22.8037) の補助によるものである。

## 参考文献

- [1] K. S. Novoselov *et al.*, *Science* **306**, 666 (2004).
- [2] P. E. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
- [3] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [4] Reviewed in A. H. Castro Neto, *Physics* **2**, 30 (2009).
- [5] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin and V. A. Miransky, *Phys. Rev. D* **64**, 105028 (2001).
- [6] Y. Araki and T. Hatsuda, *Phys. Rev. B* **82**, 121403(R) (2010); Y. Araki, *Annals Phys. (N. Y.)* **326**, 1408 (2011).
- [7] N. A. Viet, H. Ajiki and T. Ando, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 3036 (1994).
- [8] M. Farjam and H. Rafii-Tabar, *Phys. Rev. B* **79**, 045417 (2009).
- [9] S. Raghu, X.-L. Qi, C. Honerkamp and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 156401 (2008).
- [10] C. Weeks and M. Franz, *Phys. Rev. B* **81**, 085105 (2010).

# Staggered-Wilson fermion における Aoki phase の強結合解析

中野 嵩士<sup>1,2</sup>, 三角樹弘<sup>1</sup>, 木村太郎<sup>3</sup>, 大西 明<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 京都大学基礎物理学研究所, <sup>2</sup> 京都大学理学研究科,  
<sup>3</sup> 東京大学総合文化研究科

## 概要

近年, 格子 QCD 数値計算を大幅に高速化し得る新しい格子 fermion の構成法が提案された. ここでは Staggered fermion に taste-splitting mass を導入することで Staggered に基づく Wilson や overlap が構成される. これらの格子 fermion 特に Staggered-Wilson fermion の実用化に際して重要になるのが parity-broken phase (Aoki phase) の性質である. 我々は Staggered-Wilson fermion における相構造を, 強結合格子 QCD 特にホッピングパラメータ展開を用いて調べ, 特定のクォーク質量領域に Aoki phase が存在することを示した. またパイオン質量が相境界でゼロになることを確認し, 従来の Wilson fermion と同様にカイラル極限が定義出来ることを示した.

## 1 導入

格子場の理論は量子色力学 (QCD) の非摂動的解析を可能にする最も強力な理論である. この理論では時空を離散化することによってモンテカルロ計算による経路積分の実行が可能になる. しかし, 格子上の fermion にはダブリング問題と呼ばれる難問が存在し, カイラル対称性などの QCD に不可欠な性質を格子 fermion に課すとダブラーと呼ばれる余分な自由度が出現してしまう. この問題は Nielsen-Ninomiya の no-go 定理 [1] として知られているが, この定理の前提条件を適切に破ることで問題を解決する方法が現在までいくつか提案されている. 例えば Wilson fermion は, カイラル対称性をあらわに破る項 (Wilson term) を導入し, ダブラーを重くし, 連続極限で decouple させている [2]. Overlap & Domain-wall fermions はこの Wilson fermion に基づいて構成され, 格子間隔分だけ変更された擬カイラル対称性を厳密に保つことに成功している [3, 4]. 一方, Staggered fermion はダブラー数を減らしそれらをフレーバーと解釈することで 4 フレーバー QCD を実現する [5]. しかし, これらの格子 fermion は非常に大きな数値計算コストを必要とするか, もしくは現実の QCD を記述出来ないという問題を抱えており更なる発展が期待されてきた.

近年, 格子 QCD 数値計算を大幅に高速化し得る新しい格子 fermion (Staggered-Wilson, Staggered-Overlap) が提唱された [6, 7, 8]. Staggered-Wilson は, Staggered にカイラル対称性をあらわに破る項 (flavored mass) を導入し, ダブラーを取り除くことで 1 自由度 (Hoelbling's type) もしくは 2 自由度 (Adams's type) の fermion を実現しており Wilson fermion の Staggered version だと言える. Staggered-Overlap はこの Staggered-Wilson を kernel に持つ Overlap である. これらの新しい fermion には, 既存の格子 fermion に比べて 2 つの利点がある. 1 つ目はアノマリーの相殺が起こらないと言う点であり, これは従来の Staggered と比較した場合の利点である [6]. 従来の Staggered はダブラーを物理的な fermion として扱うため, アノマリーが相殺して U(1) 問題等アノマリーが深く関わる現象を記述出来ない可能性がある. 一方, Staggered-Wilson, Staggered-overlap ではアノマリーが再現されるので現象論的に好ましい性質が実現されている. 2 つ目は従来の Wilson や overlap と比較した場合の利点であり, 数値計算上のコストが低く高速計算が可能であるという点である [9]. Wilson や overlap が 4 成分スピノルを格子点に定義しているのに対して, その Staggered versions は 1 成分スピノルに基づいている. これはモンテカルロ計算で最もコストが必要になるディラック演算子の行列サイズが 16 分の 1 になっていることを意味しており, これまで

高い計算コストが問題であるとされてきた overlap の性質を大幅に改善出来る。しかしこれらの格子 fermion を格子 QCD に応用するためには数値計算上の特質を調べ、場合によっては適切な改良を加える必要もある。その指標となり得るのが Staggered-Wilson における Aoki phase の有無とその性質である。Staggered-Wilson は Wilson と類似の性質を持つため、Aoki phase (parity-broken phase)[10, 11] が現れると考えられる。元々 Wilson fermion では parity-broken phase の相境界が二次相転移であり、クォーク質量をそこに調節することでカイラル極限を定義することが出来た。我々が調べるべきは Staggered-Wilson においても同様の相構造が存在し、QCD を再現するためのカイラル極限を取ることが可能であることを示すことである。Staggered-Wilson における Aoki phase の先行研究として Gross-Neveu model を用いた計算があり [12], このモデルの範囲内では Aoki phase の出現とカイラル極限の存在が確認されている。また、格子上における空間の対称性の破れの影響を調べる意味でも Aoki phase を調べることは重要である。Staggered-Wilson は shift symmetry などの離散対称性の一部を破ることが知られている [7, 8]。もしこの破れの影響が大きく lattice artifact を増大させる場合には、格子 fermion の相構造-Aoki phase-などに影響が現れると考えられる。したがって Aoki phase の存在を調べることは対称性の破れの lattice artifact への影響を見る点でも重要である。

本研究では、Staggered-Wilson fermion における Aoki phase (parity-broken phase) を強結合格子 QCD を用いて調べる。特に、パリティ対称性が保たれる真空の周りでホッピングパラメータ展開の方法を用いて相構造を解析する。具体的にはパイオン凝縮の計算から特定のクォーク質量領域に Aoki phase が存在することを示し、またパイオン質量が相境界でゼロになりカイラル極限を定義できることを示す。

## 2 Staggered-Wilson fermion

Staggered-Wilson fermion は、taste (Staggered fermion におけるフレーバー) を split するような flavored mass を導入し、連続極限において低エネルギーでダブラーを効かないようにする fermion である。Staggered fermion は連続極限において 4 フレーバーの理論になるが、Staggered-Wilson fermion は連続極限において 2 フレーバー (Adams's type)[6, 7] や 1 フレーバー (Hoelbling's type)[8] の理論となる。Flavored mass は、Wilson term を一般化した項である。Wilson term は、naive fermion (ダブラーを取り除いていない格子 fermion) における 16 個の fermion 自由度を 5 種類の質量に分ける。よって、1 種類の fermion を物理的粒子として扱うことができる。

Flavored mass の重要な条件として  $\gamma_5$  エルミート性がある。これにより fermion 行列式の正定値性を保証することができる。Adams's type と Hoelbling's type のスピン-フレーバー構造はそれぞれ  $1 \otimes \gamma_5, 1 \otimes \sigma_{\mu\nu}$  となる。このようなスピン-フレーバー構造により、縮退していたダブラーの質量が分離し、フレーバー数を変えることができる。

Hoelbling's type の flavored mass は以下のように 2 hopping term から成る。

$$M_s = \frac{i}{2\sqrt{3}} \sum_{\mu < \nu} \epsilon_{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu (C_\mu C_\nu + C_\nu C_\mu) , \quad (1)$$

$$C_\mu = \frac{1}{2} (V_\mu + V_\mu^\dagger) , \quad (2)$$

$$(\eta_\mu)_{xy} = (-1)^{\sum_{\nu < \mu} x_\nu} \delta_{x,y} , \quad (3)$$

$$(\epsilon_{\mu\nu}) = (-1)^{x_\mu x_\nu} \delta_{x,y} . \quad (4)$$

ここで,  $(V_\mu)_{x,y} = U_{\mu,x} \delta_{x+\hat{\mu},y}$  である. Staggered-Wilson fermion の作用は,

$$S_F = \sum_{xy} \bar{\chi}_x [\eta_\mu D_\mu + r(2 + M_s) + m_0]_{xy} \chi_y . \quad (5)$$

となる. 第一項は, Staggered fermion の運動項である.

$$D_\mu = \frac{1}{2} (V_\mu - V_\mu^\dagger) , \quad (6)$$

また,  $r$  は任意のパラメータである. この fermion は, 3 種類の質量の fermion に分かれる. それによって, 連続極限において 1 フレーバーの理論を構成できる. 本研究では, Hoelbling's type の Aoki phase について解析する.

### 3 ホッピングパラメータ展開

ホッピングパラメータ展開 [10] を用いて, Aoki phase を解析する. ホッピングパラメータ展開は, クォーク質量の逆数で, パリティの破れていない真空の周りで展開する手法である. そのためホッピングパラメータ  $K$  を用いて, クォーク場を  $\chi \rightarrow \sqrt{2K} \chi$  と変換しておく. ただし,  $K = 1/[2(m_0 + 2r)]$  である. 変換後の作用は,

$$S_F = \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x + K \sum_{x,y,\mu} \eta_{\mu,x} (D_\mu)_{xy} + 2Kr \sum_x \bar{\chi}_x (M_s)_{xy} \chi_y . \quad (7)$$

となる.  $r$  は任意のパラメータであるので, 簡単のため, 以降  $r = 2\sqrt{2}$  で計算する.

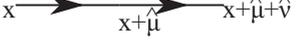
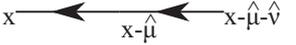
	$\langle \chi \bar{\chi} \rangle_0 = -1$
	$K \eta_{\mu,x} U_{\mu,x}$
	$-K \eta_{\mu,x} U_{\mu,x}^\dagger$
	$2K r i \eta_{\mu\nu} U_{\mu,x} U_{\nu,x+\mu} / (2^3 \sqrt{3})$
	$-2K r i \eta_{\mu\nu} U_{\nu,x+\mu}^\dagger U_{\mu,x}^\dagger / (2^3 \sqrt{3})$

図 1: ホッピングパラメータ展開のための Feynman ルール (Hoelbling's type).

まず, カイラル凝縮とパイオン凝縮を一点関数から計算する. Feynman ルール (図 1) から一点関数に関するホッピングパラメータ展開は図 2 となる. これから 以下の一点関数に関する方程式が導かれる.

$$\begin{aligned} -\Sigma_x &\equiv \langle M_x \rangle = \langle \bar{\chi} \chi \rangle \\ &= \langle M_x \rangle_0 + 2K^2 \sum_\mu \Sigma_{x+\hat{\mu}} \Sigma_x - 2 \cdot \frac{1}{24} (Kr)^2 \sum_{\mu \neq \nu} \Sigma_x \Sigma_{x+\hat{\mu}+\hat{\nu}} . \end{aligned} \quad (8)$$

図 2 において他のダイアグラムも存在するが, ダイアグラム同士の相殺やグラスマン数の性質より消える. 次に, 平均場  $\Sigma_x = \sigma_x + i\epsilon_x \pi_x$  を導入する.  $\sigma_x, \pi_x$  はそれぞれカイラル凝縮とパイオン凝縮を表す. ただし,  $\epsilon_x = (-1)^{\sum_\mu x_\mu}$  である. 平均場  $\Sigma_x = \sigma_x + i\epsilon_x \pi_x$  を式 (8) に代入すると以下のようになる.

$$-(\sigma + i\epsilon_x \pi) = -1 + 2K^2 \cdot 4 (\sigma^2 + \pi^2) - 2 \cdot \frac{1}{24} (Kr)^2 \cdot 4 \cdot 3 (\sigma + i\epsilon_x \pi)^2 . \quad (9)$$

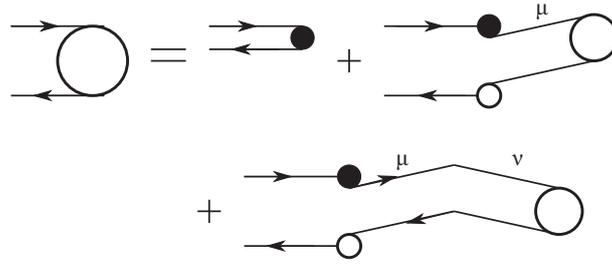


図 2: ホッピングパラメータ展開を用いた強結合極限での一点関数.

この方程式の解は, 方程式の実部と虚部から求めることができる. この方程式の解として, parity の破れていない解と破れている解の 2 種類の解が存在する. parity の破れていない解は,

$$\sigma = 1, \quad \pi = 0. \quad (10)$$

となる. 一方, parity の破れている解は,

$$\sigma = \frac{1}{16K^2}, \quad \pi = \pm \sqrt{\frac{1}{16K^2} \left(1 - \frac{1}{16K^2}\right)}. \quad (11)$$

となる.

このことから  $|K| > 1/4$  のときパリティの破れた相が存在することを確認した. しかし, ホッピングパラメータ展開による解析では,  $|K| > 1/4$  のときパリティの破れた解が真空として実現するかどうか決めることができない. そのため, 真空を決めるためには, 有効ポテンシャルによる解析を行う必要がある.

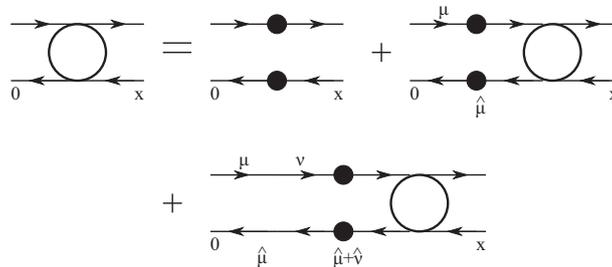


図 3: ホッピングパラメータ展開を用いた強結合極限での二点関数.

次に, パイオン質量を二点関数から計算する. 二点関数に関するホッピングパラメータ展開は図

3 となる. これから以下の二点関数に関する方程式が導かれる.

$$\begin{aligned}
S(0, x) &\equiv \langle M_0 M_x \rangle = \langle \bar{\chi}_0^a \chi_0^a \bar{\chi}_x^b \chi_x^b \rangle \\
&= -\delta_{0x} N_c \\
&\quad - K^2 \langle \bar{\chi}_0^a \chi_0^a \bar{\chi}_0^c (\eta_{\mu,0}) \rangle^2 \left[ U_{\mu,0}^{cd} \chi_{\hat{\mu}}^d \bar{\chi}_{\hat{\mu}}^e (U_{\mu,0}^\dagger)^{ef} \right. \\
&\quad \left. + (U_{\mu,-\hat{\mu}}^\dagger)^{cd} \chi_{-\hat{\mu}}^d \bar{\chi}_{-\hat{\mu}}^e U_{\mu,-\hat{\mu}}^{ef} \right] \chi_0^f \bar{\chi}_x^b \chi_x^b \rangle \\
&\quad - \left( 2Kr i \frac{1}{2^3 \sqrt{3}} \right)^2 \langle \bar{\chi}_0^a \chi_0^a \bar{\chi}_0^c (\eta_{\mu,0}) \rangle^2 \left[ (U_{\mu,0} U_{\nu,0+\hat{\mu}})^{cd} \chi_{\hat{\mu}+\hat{\nu}}^d \bar{\chi}_{\hat{\mu}+\hat{\nu}}^e (U_{\nu,0+\hat{\mu}}^\dagger U_{\mu,0}^\dagger)^{ef} \right. \\
&\quad \left. + (U_{\nu,0-\hat{\nu}}^\dagger U_{\mu,0-\hat{\mu}-\hat{\nu}}^\dagger)^{cd} \chi_{-\hat{\mu}-\hat{\nu}}^d \bar{\chi}_{-\hat{\mu}-\hat{\nu}}^e (U_{\mu,0-\hat{\mu}-\hat{\nu}} U_{\nu,0-\hat{\nu}})^{ef} \right. \\
&\quad \left. + (U_{\mu,0} U_{\nu,0+\hat{\mu}-\hat{\nu}}^\dagger)^{cd} \chi_{\hat{\mu}-\hat{\nu}}^d \bar{\chi}_{\hat{\mu}-\hat{\nu}}^e (U_{\nu,0+\hat{\mu}-\hat{\nu}} U_{\mu,0}^\dagger)^{ef} \right. \\
&\quad \left. + (U_{\nu,0} U_{\mu,0-\hat{\mu}+\hat{\nu}}^\dagger)^{cd} \chi_{-\hat{\mu}+\hat{\nu}}^d \bar{\chi}_{-\hat{\mu}+\hat{\nu}}^e (U_{\mu,0-\hat{\mu}+\hat{\nu}} U_{\nu,0}^\dagger)^{ef} \right] \chi_0^f \bar{\chi}_x^b \chi_x^b \rangle. \tag{12}
\end{aligned}$$

次に, リンク変数を消去し, parity の破れていない真空での条件 ( $\langle \chi \bar{\chi} \rangle = -1$ ) を用いる.

$$S(0, x) = -\delta_{0x} N_c - K^2 \sum_{\pm\mu} S(\hat{\mu}, x) + \left( 2Kr \frac{1}{2^3 \sqrt{3}} \right)^2 \sum_{\substack{\pm\mu, \pm\nu \\ (\mu \neq \nu)}} S(\hat{\mu} + \hat{\nu}, x). \tag{13}$$

さらに, 二点関数に関してフーリエ変換を行うと, 二点関数の運動量表示  $S(p)$  は以下のように与えられる.

$$S(p) = N_c \left[ -2K^2 \sum_{\mu} \cos p_{\mu} + 4 \left( 2Kr \frac{1}{2^3 \sqrt{3}} \right)^2 \sum_{\mu \neq \nu} \cos p_{\mu} \cos p_{\nu} - 1 \right]^{-1}. \tag{14}$$

$S(p)$  の極がメソン質量に対応し, 以下の式から求めることができる.

$$-2K^2 \sum_{\mu} \cos p_{\mu} + 4 \left( 2Kr \frac{1}{2^3 \sqrt{3}} \right)^2 \sum_{\mu \neq \nu} \cos p_{\mu} \cos p_{\nu} - 1 = 0. \tag{15}$$

ただし, Staggered fermion におけるパイオン質量の求め方には, 注意が必要である. 平均場  $\Sigma_x = \sigma_x + i\epsilon_x \pi_x$  で既に導入したように, Staggered fermion ではパイオンは  $\gamma_5$  に対応する時空因子 ( $\epsilon_x$ ) を伴い, 運動量・エネルギーに対応する運動量は  $p = (im_{\pi}a + \pi, \pi, \pi, \pi)$  と表される. よって, パイオン質量, 即ちゼロ運動量での pole energy を求めるには, 運動量  $p = (im_{\pi}a + \pi, \pi, \pi, \pi)$  を代入して  $m_{\pi}$  について式 (15) を解けばよい. よって, パイオン質量  $m_{\pi}$  は

$$\cosh(m_{\pi}a) = 1 + \frac{1 - 16K^2}{6K^2}. \tag{16}$$

となる. この結果から  $|K| < (>) 1/4$  のときパイオン質量が正 (負) になっていることがわかる. また, 相境界  $|K| = 1/4$  のときパイオン質量がゼロになり, カイラル極限が定義できることが示された.  $|K| > 1/4$  のとき, パイオン質量が takyonic となるが, これはパリティの破れていない真空の周りで展開したことによるものである. 有効ポテンシャルにおける解析を行うと  $m_{\pi}^2 > 0$  となるはずである.

## 4 まとめと展望

Staggered-Wilson fermion における Aoki phase (parity-broken phase) を強結合格子 QCD を用いて調べた。パリティの破れていない真空の周りでホッピングパラメータ展開を用いて相構造を解析した。結果、パイオン凝縮の計算から、クォーク質量領域  $\hat{M}^2 < 4$  に Aoki phase が存在することが示された。また、パイオン質量の計算から、相境界でパイオンがゼロ質量になりカイラル極限が定義できることがわかった。この結果は Staggered-Wilson を従来の Wilson と同様の方法で格子 QCD に応用出来ることを強く示唆している。将来の展望としては、有効ポテンシャルの解析によりパイオン質量を求めるという方向性がある。ホッピングパラメータ展開は対称性が自発的に破れた真空を間接的にしか見出せないが、有効ポテンシャルによる計算ではパリティが破れた真空を直接的に調べることができる。

## 参考文献

- [1] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); Nucl. Phys. B **193**, (1981) 173; Phys. Lett. B **105**, (1981) 219.
- [2] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, (1974) 2445.
- [3] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25**, (1982) 2649; N. Neuberger, Phys. Lett. B **427**, (1998) 353.
- [4] D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **288**, (1992) 342; V. Furman and Y. Shamir, Nucl. Phys. B **439**, (1995) 54.
- [5] J. B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, (1975) 395; L. Susskind, Phys. Rev. D **16**, (1977) 3031; H. S. Sharatchandra, H. J. Thun and P. Weisz, Nucl. Phys. B **192**, (1981) 205.
- [6] D. H. Adams, Phys. Rev. Lett. **104**, (2010) 141602
- [7] D. H. Adams, Phys. Lett. B **699**, (2011) 394.
- [8] C. Hoelbling, Phys. Lett. B **696**, (2011) 422.
- [9] P. de Forcrand, A. Kurkela and M. Panero, PoS Lattice2010 (2011) 080.
- [10] S. Aoki, Phys. Rev. D **30**, (1984) 2653.
- [11] S. Aoki, Phys. Rev. D **33**, 2377 (1986); **34**, (1986) 3170; Phys. Rev. Lett. **57**, (1986) 3136; Nucl. Phys. B **314**, (1989) 79.
- [12] M. Creutz, T. Kimura and T. Misumi, Phys. Rev. D **83**, (2011) 094506.

# ゼロおよび純虚数化学ポテンシャルにおける、 3 フレーバー QCD のクォーク質量依存性

佐々木 崇宏<sup>A</sup>, 境 祐二<sup>A</sup>, 河野 宏明<sup>B</sup>, 八尋正信<sup>A</sup>  
九大院理<sup>A</sup>, 佐賀大理工<sup>B</sup>

## 1 はじめに

有限温度 ( $T$ ) ・有限化学ポテンシャル ( $\mu$ ) における QCD 相図を解明することは、ハドロン物理学の重要課題の一つであり、宇宙進化の過程を理解するためにも重要である。しかし有限  $\mu$  領域において、QCD の第一原理計算である格子 QCD 計算は符号問題をもち、その実行が困難である。一方で、Polyakov-loop extended Nambu-Jona-Lasino 模型 (PNJL 模型) などの有効模型 [1] は多くの不定性を含むため、予言性が小さい。有効模型の不定性を軽減する方法として、符号問題がない領域での格子計算と比較し模型を評価する方法がある。格子計算結果の再現性が高い有効模型を用いることで、QCD 相図に対して信頼性の高い予言を行えると期待できる。

2+1 フレーバー系の格子計算によって、以下の二つの領域において相転移のクォーク質量依存性が調べられている。一つ目の領域は、ゼロ化学ポテンシャル領域である。 $\mu = 0$  におけるカイラル相転移と閉じ込め相転移はクロスオーバーであると考えられているが、クォーク質量を軽くすることで一次相転移に変化する。相転移次数が変化するクォーク質量は未だ分かっていないため、格子計算による解析が進められている [2]。二つ目の領域は、純虚数化学ポテンシャル領域である。 $\theta = \text{Im}(\mu/T)$  と定義したとき、QCD は  $\theta$  に対して  $2\pi/3$  の周期性をもっており、この周期性は Roberge-Weiss 周期性と呼ばれている [3]。RW 周期性により  $\theta = \pi/3 \text{ mod } 2\pi/3$  において高温領域では一次相転移が起こり、RW 相転移と呼ばれている。RW 相転移が始まる点  $(\theta, T) = (\pi/3, T_{\text{RW}})$  は RW 端点と呼ばれており、近年では RW 端点における転移次数のクォーク質量依存性が注目されている。格子計算では縮退した 3 フレーバー系において計算が行われ、質量が軽い領域では一次相転移、質量が中程度の領域では二次相転移、質量が大きな領域では一次相転移が起こるといった結果が得られている [4]。

本研究では、上記の領域における相転移次数のクォーク質量依存性を、Polyakov-loop に依存した結合を導入された PNJL 模型によって解析した [6]。さらに、 $\mu = 0$  におけるカイラル相転移および  $\theta = \pi/3$  における RW 相転移について、相転移次数の  $(m_l, m_s)$  依存性を解析し Columbia プロットを作成した。

## 2 Entanglement PNJL 模型

3 フレーバー PNJL 模型のラグランジアンは以下のように表される [1]。

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\nu D^\nu - \hat{m}_0)q + G_S \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda_a q)^2] - G_D [\det \bar{q}(1 + \gamma_5)q + \det \bar{q}(1 - \gamma_5)q] - \mathcal{U} \quad (1)$$

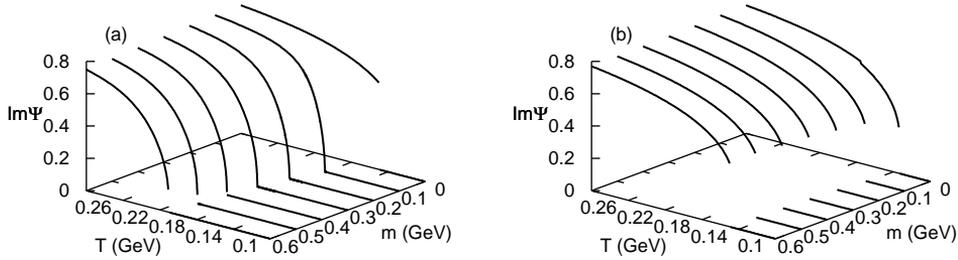


図 1  $\theta = \pi/3$  における、変形 Polyakov loop ( $\Psi$ ) の虚部の温度 ( $T$ ) およびクォーク質量 ( $m_l = m_s = m$ ) 依存性。

ここで  $q$  は 3 フレーバーのクォーク場を表し、 $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_l, m_l, m_s)$  である。 $D^\nu$  はグルーオン場による共変微分、 $\lambda_a$  は Gell-Mann 行列である。3 項目は Kobayashi-Maskawa-'t Hooft 相互作用であり、フレーバー空間での行列式の形になっている [7, 8]。

PNJL 模型に含まれる有効相互作用の起源は、グルーオンを介したクォーク間の相互作用である。従って、有効結合定数は Polyakov loop ( $\Phi$ ) に依存すると考えられる [9]。そこで本研究では、PNJL 模型の 4 点結合定数に対して現象論的に導入された entanglement 結合:

$$G_S(\Phi) = G_S [1 - \alpha_1 \Phi \Phi^* - \alpha_2 (\Phi^3 + \Phi^{*3})] \quad (2)$$

を用いた [5]。この結合に含まれるパラメーターは、本研究では  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.25, 0.1)$  としている [6]。Entanglement 結合が導入された PNJL 模型を以下では EPNJL 模型と呼ぶ。

### 3 計算結果

図 1 は、 $\theta = \pi/3$  において変形 Polyakov loop ( $\Psi \equiv \Phi e^{i\theta}$ ) の虚部の、温度とクォーク質量依存性を表している。ただし、ここでは縮退した 3 フレーバー系を考えている ( $m_l = m_s = m$ )。Im $\Psi$  は C 対称性の秩序変数であるため、 $\theta = \pi/3$  では C 対称性が自発的に破れる相転移が起こる。図 1(a) は EPNJL 模型による計算結果である。 $m$  が小さい領域と大きい領域で相転移は一次相転移であり、中間領域では二次相転移になっている。この振る舞いは、格子計算によって予言された振る舞いと一致している [4]。一方で、図 1(b) は PNJL 模型による計算結果である。この場合は、どの質量領域でも相転移が一次相転移であり、格子計算から得られる振る舞いを再現できない。従って、格子計算から予言された  $\theta = \pi/3$  における転移次数のクォーク質量依存性を再現するためには、Entanglement 結合の導入が重要である。

図 2 は相転移次数の振る舞いを、 $m_l - m_s$  平面であらわした図である。図 2(a) は、 $\mu = 0$  におけるカイラル相転移の次数を表している。カイラル極限 ( $m_l = m_s = 0$ ) では一次相転移であり、一次相転移領域とクロスオーバー領域の境界を描いている。EPNJL 模型によって、格子計算 [2] から得られている結果に近い結果が得られた。しかし、この境界線の定量的な位置は未だ不確定であるため、より慎重な議論が必要である。図 2(b) は、 $\theta = \pi/3$  における C 対称性の破れの次数を表している。これは EPNJL 模型によって得られた結果であり、カイラル極限と

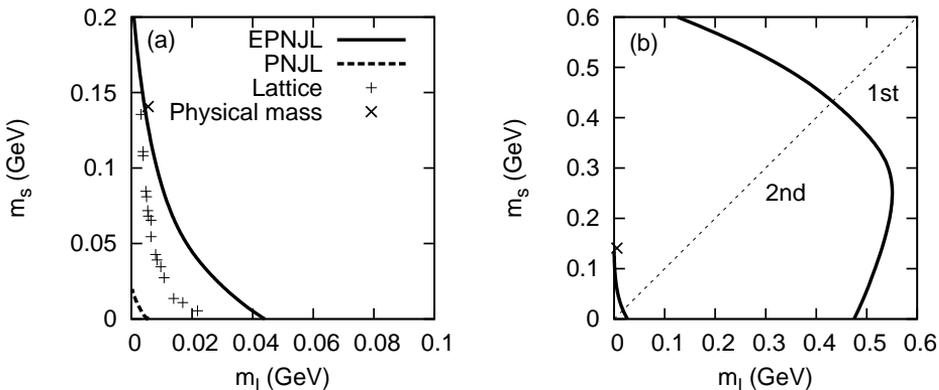


図 2 相転移次数のクォーク質量依存性。(a) はゼロ化学ポテンシャルにおけるカイラル相転移の次数を、(b) は  $\theta = \pi/3$  における C 対称性の破れの次数を表している。× 印は、物理的なクォーク質量を表している。

$m$  が大きい領域は一次相転移、中間領域は二次相転移になっている。図 1(a) の計算は、この図上で対角線状に相当する。同様の計算を PNJL 模型で行った場合、転移次数は全領域で一次相転移であった。物理的なクォーク質量をとった場合、EPNJL 模型では二次相転移、PNJL 模型では一次相転移である。

## 4 まとめ

本研究では、3 フレーバー PNJL 模型に Entanglement 結合  $G_s(\Phi)$  を導入して、 $\mu = 0$  および  $\theta = \pi/3$  における相転移のクォーク質量依存性を解析した。その結果、EPNJL 模型は格子計算の結果を定性的に再現できることが分かった。特に、 $\theta = \pi/3$  における転移次数を再現するためには、Entanglement 結合の導入が重要である。さらに EPNJL 模型のよって、RW 端点の相転移次数を  $m_l - m_s$  平面上で予言した。

## 参考文献

- [1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004); Phys. Rev. D. **77**, 114028 (2008).
- [2] P. de Forcrand and O. Philipsen, Phys. J. High Energy Phys. **01**, 077 (2007).
- [3] A.Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. B**275**, 734, (1986)
- [4] P. de Forcrand and O. Philipsen, Phys. Rev. Latt. **105**, 152001 (2010).
- [5] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno and M. Yahiro, Phys. Rev. D**82**, 076003 (2010).
- [6] T. Sasaki, Y. Sakai, H. Kouno and M. Yahiro, arXiv:hep-ph/1105.3959 (2011).
- [7] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **44**, 1422 (1970); M. Kobayashi, H. Kondo and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **45**, 1955 (1971).
- [8] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8(1976); Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976); **18**, 2199(E) (1978).
- [9] K.-I. Kondo, Phys. Rev. D **82**, 065024(2010).

# 拡張された PQM 模型を用いたコンパクト天体現象における QCD 相転移

上田 宏史<sup>A</sup>、中野 嵩士<sup>AB</sup>、Marco Ruggieri<sup>B</sup>、大西 明<sup>B</sup>、住吉 光介<sup>C</sup>  
京大理<sup>A</sup>、京大基研<sup>B</sup>、沼津高専<sup>C</sup>

## 1 導入

近年量子色力学 (QCD) 相図が多くの注目を集めている。理論的には、第一原理計算である格子 QCD や、有効模型である Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型、Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型 [1]、Polyakov loop extended Quark Meson (PQM) 模型 [2] などを用いて様々な研究が進められている。ところが、格子 QCD のモンテカルロ計算では符号問題のため大きなバリオン化学ポテンシャルでの計算は困難であり、また有効模型ではモデルやパラメータ依存性が大きいいため、有限の化学ポテンシャル領域の相構造、特に QCD 臨界点の位置はよくわかっていない。そのため、QCD 相図を決める上で重要な QCD 臨界点の探索が RHIC での Beam Energy Scan (BES) プログラムにより行われているが、臨界点の化学ポテンシャルが大きい場合には重イオン衝突実験で届かない。そこで化学ポテンシャルの大きな高密度物質が生成されるサイトとして、コンパクト天体現象が注目されている。コンパクト天体現象では、荷電中性条件からクォーク毎に化学ポテンシャルの異なる非対称核物質 [アイソスピン化学ポテンシャル  $\delta\mu \neq 0$ ] が生成されるため、QCD 相転移を議論するには、 $\delta\mu$  を含む 3 次元の QCD 相図を考える必要がある。

本研究では、ベクトル結合を取り入れた PQM 模型を用いて、3 次元 (温度  $T$ , バリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$ , アイソスピン化学ポテンシャル  $\delta\mu$ ) の QCD 相図を求め、ブラックホール形成過程で生成される物質の熱的変数 ( $T, \mu_B, \delta\mu$ ) [3] や中性子星の内部の熱的変数 ( $T = 0$  MeV,  $\mu_B, \delta\mu$ ) [4] と比較することにより、これらの現象での QCD 相転移について議論を行う [5]。

## 2 Polyakov loop extended Quark Meson 模型

PQM 模型は、カイラル相転移を含む QM 模型 (quark meson model) にポリヤコフループを取り入れることにより、QCD の閉じ込めの性質を持たせた模型である。

フレーバー数  $N_f = 2$ 、カラー  $N_c = 3$  の PQM 模型でのラグランジアンは、クォーク場、シグマメソン場、パイオン場、ベクトルメソン場、ポリヤコフループ変数をそれぞれ  $q, \sigma, \pi, \omega_\mu, \mathbf{R}_\mu, \Phi, \bar{\Phi}$  とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PQM} = & \bar{q} [i \not{D} - g_\sigma (\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) - g_\nu \gamma^\mu (\omega_\mu + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}_\mu)] q + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 \\ & - U(\sigma, \boldsymbol{\pi}) - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbf{R}_{\mu\nu} \mathbf{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\nu^2 (\omega_\mu \omega^\mu + \mathbf{R}_\mu \cdot \mathbf{R}^\mu) \quad (1) \end{aligned}$$

と与えられる。ここで  $\boldsymbol{\tau}$  はフレーバー空間でのパウリ行列、 $D$  は  $\not{D} = \gamma_\mu \partial^\mu - i\gamma_0 A_0$ 、 $\omega_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}$  は  $\omega, \rho$  メソンのフィールドテンソルである。メソンポテンシャルは次のように与える。

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - v^2)^2 - c\sigma \quad (2)$$

第1項は  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  のカイラル対称性を持ち、第2項は対称性を破る項である。各パラメータは真空で、 $m_\pi = 139\text{MeV}$ ,  $m_\sigma = 700\text{MeV}$ ,  $m_q = 335\text{MeV}$ ,  $\langle\sigma\rangle = f_\pi = 92.4\text{MeV}$  となるように決めた。またベクトルメソンの質量は  $m_v = 770\text{MeV}$  とした。クォークとベクトルメソンの結合定数  $g_v$  はフリーパラメータとする。ポリヤコフープポテンシャルは次のように与える。

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})}{T^4} = -\frac{a(T)}{2}\Phi\bar{\Phi} + b(T)\log[1 - 6\Phi\bar{\Phi} - 3(\Phi\bar{\Phi})^2 + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3)] \quad (3)$$

$$a(T) = a_0 + a_1\frac{T_0}{T} + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2, \quad b(T) = b_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \quad (4)$$

$\mathcal{U}$  の温度依存性は格子 QCD による pure Yang-Mills sector の熱力学性質を合わせるように決める [6]。ここで  $a_0 = 3.51$ ,  $a_1 = -2.47$ ,  $a_2 = 15.2$ ,  $b_3 = -1.75$  である。

平均場近似を行い、クォークの積分を実行して有効ポテンシャルを得る。有効ポテンシャルは u、d クォークの化学ポテンシャルをそれぞれ  $\mu_u, \mu_d$  として、

$$\Omega_{PQM} = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}) + U(\sigma, \pi = 0) + \Omega_{\bar{q}q}(\mu_u; \Phi, \bar{\Phi}, \sigma) + \Omega_{\bar{q}q}(\mu_d; \Phi, \bar{\Phi}, \sigma) + \frac{1}{2}m_v^2[(\omega_0)^2 + (R_0^3)^2] \quad (5)$$

となる。クォーク・反クォークの寄与は、 $m_q = g_\sigma\sigma$ ,  $E_q = \sqrt{\vec{p}^2 + m_q^2}$  として、

$$\Omega_{\bar{q}q}(\mu; \Phi, \bar{\Phi}, \sigma) = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \left[ \frac{N_c E_q \theta(\Lambda^2 - \vec{p}^2)}{T} + \ln g(\mu; \Phi, \bar{\Phi}, \sigma) + \ln g(-\mu; \bar{\Phi}, \Phi, \sigma) \right] \quad (6)$$

$$g(\mu; \Phi, \bar{\Phi}, \sigma) = 1 + 3\Phi e^{-\frac{(E_q - \mu)}{T}} + 3\bar{\Phi} e^{-\frac{2(E_q - \mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_q - \mu)}{T}} \quad (7)$$

となる。ここでカットオフは  $\Lambda = 600\text{MeV}$  とした。

### 3 結果

式 (5) の有効ポテンシャルを用いて計算した QCD 相図と、ブラックホール形成過程で生成される物質や中性子星の内部の  $(T, \mu_B, \delta\mu)$  とを比較することにより、これらの現象での QCD 相転移について議論した。以下、u, d クォークの化学ポテンシャルの差を  $\delta\mu = (\mu_d - \mu_u)/2$ 、バリオン化学ポテンシャルを  $\mu_B = 3(\mu_u + \mu_d)/2$  とする。

図1の左図は、核子のみを含む相対論的平均場を用いた状態方程式 [8] を用いて  $\beta$  平衡を課して計算した中性子星物質の  $(T, \mu_B, \delta\mu)$  [4] と比較したものである。QCD 臨界点は  $\delta\mu$  が増加すると低温側に移動し、用いる模型・パラメータセットによってはある  $\delta\mu$  以上で、図に示すように一次相転移線が消失する。このため図1の左図に用いた模型・パラメータセットでは、中性子星内部でのクォーク物質への相転移が通常考えられている一次相転移ではなくクロスオーバーの相転移を起こしている。

図1の右図は  $40M_\odot$  の星が重力崩壊する時に生成される物質の各時刻での  $(T, \mu_B, \delta\mu)$  [3] と比較したものである [5]。図1の右図では、ブラックホール形成過程に置いて生成される物質の温度

とバリオン化学ポテンシャルが QCD 臨界点に達していることがわかる。NJL 模型、PNJL 模型、PQM 模型の比較、ベクトル結合依存性については [5] を参照していただきたい。

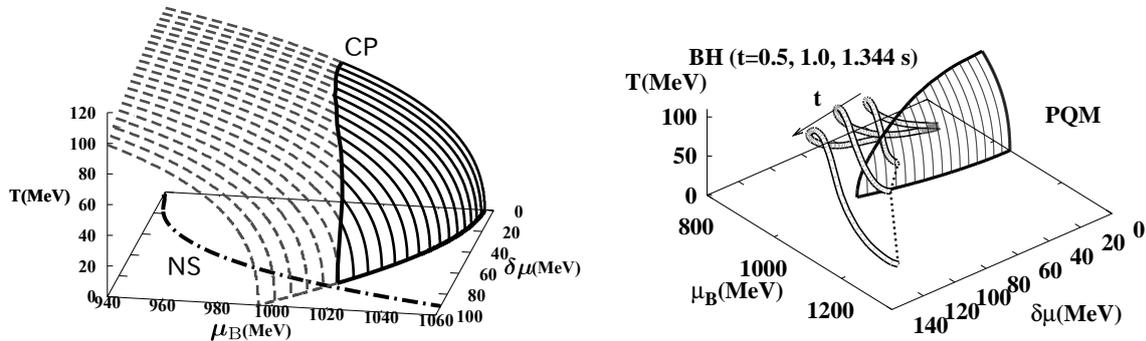


図 1: 左図: 3次元  $(T, \mu_B, \delta\mu)$  QCD 相図 [クロスオーバー (破線)、1次相転移 (実線)。QCD 臨界点 (二つの境界面の境)] と中性子星物質  $(T = 0 \text{ MeV}, \mu_B, \delta\mu)$  (一点鎖線)。右図: 一次相転移の境界面 (実線) と BH 形成過程において核でバウンスしてから時間  $t = 0.5, 1.0, 1.344 \text{ s}$  での  $(T, \mu_B, \delta\mu)$  分布 (二重線)[5]。

## 4 まとめと展望

ベクトル結合を取り入れて拡張した PQM 模型を用いた QCD 相図と、中性子星の内部・ブラックホール形成過程において生成される物質の温度・バリオン化学ポテンシャル・アイソスピン化学ポテンシャルとを比較することにより、これらの現象での QCD 相転移の議論を行った。この結果として、中性子星の内部で QCD 相転移線の  $\delta\mu$  依存性のため、クォーク物質への相転移が従来考えられていた 1 次相転移ではなく、連続相転移になる可能性を示唆した。またブラックホール形成過程で生成される物質の温度・化学ポテンシャルが QCD 臨界点に達する可能性を示唆した。本研究では、コンパクト天体現象の計算に QCD 相転移を含まない状態方程式を用いているが、より正確な議論を行うために、クォークとハドロン両方の自由度を含み、QCD 臨界点を含むような状態方程式を構築していきたい。

## 参考文献

- [1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004).
- [2] B.-J. Schaefer, J. M. Pawłowski and J. Wambach, Phys. Rev. D **76**, 074023 (2007).
- [3] K. Sumiyoshi, S. Yamada, H. Suzuki and S. Chiba, Phys. Rev. Lett. **97**, 091101 (2006).
- [4] A. Ohnishi, D. Jido, T. Sekihara and K. Tsubakihara, Phys. Rev. C **80**, 038202 (2009).
- [5] A. Ohnishi, H. Ueda, T. Z. Nakano and M. Ruggieri, K. Sumiyoshi, Phys. Lett. B, to appear, arXiv:1102.3753 [nucl-th]
- [6] S. Roessner, C. Ratti, and W. Weise, Phys. Rev. D **75** 034007(2007).
- [7] V. Skokov, B. Friman, E. Nakano, K. Redlich and B. J. Schaefer, Phys. Rev. D **82**, 034029(2010)
- [8] Y. Sugahara and H. Toki, Nucl. Phys. A **579**, 557(1994).

# QCD Sum Rules Based on Canonical Commutator Relations

<sup>a</sup>早田 智也、<sup>a,b</sup>初田 哲男、<sup>a</sup>佐々木 勝一

(<sup>a</sup>東京大学、<sup>b</sup>理研)

E-mail: t.hayata@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

## 1. はじめに

量子多体系や場の量子論を用いて記述される系において、真空の対称性の破れを特徴づける物理を理解することは、一つの重要な目標である。そのために、ギンツブルグ-ランダウ的な対称性に基づく手法に始まり、平均場近似のような自己無撞着的な真空の再定義、カイラル摂動論のような低エネルギー有効理論等様々な手法が考案されてきた。その中でも、系の詳細に依らず一般的に成り立つ手法として、スペクトル関数に対する和則があげられる。和則は、カレント相関のスペクトル関数に重みを付けて積分する (和を取る) ことで、スペクトルに現れる collective mode や composite particle の共鳴と真空の構造に関連する期待値 (オーダーパラメータ)、つまり低エネルギーの物理と真空の構造を結びつける定量的な関係式を与える。例えば QCD では、カイラル対称性の破れがハドロンの物理を支配するという描像を定量的に理解するための式として、和則は広く受け入れられてきた。しかし、QCD における和則は、Shifman 達に始まる演算子積展開 (OPE) と分散関係に基づいた、ダイアグラムの与えられる和則であり [1]、強結合性や強い非線形性が効いているとされる QCD の真空において本当に成り立つかは決して自明ではなく、先の描像や格子ゲージ理論などの他の手法による計算との整合性からその正しさが保証されているのが現状である。また、この導出では和則本来の強みである相互作用の詳細に依らずに成り立つという性質も明らかではない。

ゲージ場の量子論上で、ダイアグラムに頼らず厳密な和則を構築するための一般的な枠組みを与え、その枠組みの中で QCD 和則の正しさや、動力学の何が効いて和則が成り立つのかを解明することは、対称性の破れが低エネルギー物理を支配するという描像を、有効的な自由度についてのラグランジアンからでなく、素な自由度についてのラグランジアンから理解することができる非常に重要な仕事である。

本研究では、Kugo、Ojima による BRST 不変ラグランジアンに基づく非可換ゲージ理論の正準量子化と [2, 3]、相対論的系に拡張した Thomas-Reiche-Kuhn 和則をもとに、既存の QCD 和則を包含するような、対称性の破れと低エネルギー物理の定量的関係式を非摂動的に導出する一般的な枠組みの構築をおこなった。

## 2. 理論形式と応用

次のような保存カレントの相関に対するスペクトル関数  $\rho(q^2)$  を考える。

$$\rho(q^2) = -\frac{1}{3q^2} \sum_p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q-p) \langle 0 | j_\mu(0) | p \rangle \langle p | j^\mu(0) | 0 \rangle \quad (1)$$

スペクトル関数に重みを付けて積分を行い、ハミルトニアンとの交換関係を用いて表すと次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s^n \rho(s) = -\frac{1}{3} \int d^3x \langle 0 | [\dots [j_\mu(0, \vec{x}), \underline{H}] \dots, \underline{H}]_{2n-1}, j^\mu(0) | 0 \rangle \quad (2)$$

ここで、一般性を失わずに積分を  $q^0$  軸方向だけで表せること ( $\vec{q} = 0$  のフレームを取れること) を用いた。また、 $2n-1$  はハミルトニアンと交換関係を取る回数を表す。このままの表式では、場の量子論に特有の発散が現れてしまうので、次のように高エネルギーでの漸近形を引き算することで繰り込みを行う。

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s^n (\rho(s) - \rho^{\text{con}}(s)) = -\frac{1}{3} \int d^3x \langle 0 | [\dots [j_\mu(0, \vec{x}), \underline{H}] \dots, \underline{H}]_{2n-1}, j^\mu(0) | 0 \rangle_{\text{NP}} \quad (3)$$

ここで、NP は真空期待値から摂動論的寄与を引き算したことを表す。これにより、スペクトル関数の積分では低エネルギー部分が主要な寄与となり、低エネルギーの共鳴と真空の構造を結びつける関係式を与える和則となる。また、右辺の交換関係は、正準形式の非可換ゲージ場の量子論を用いて計算される。

QCD の動力学を決めるハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & -gA_0^a \bar{q}_f \gamma^0 t^a q_f + \bar{q}_f (-i\gamma^k D_k - m_f) q_f + \frac{1}{2} ((\vec{E}^a)^2 + (\vec{H}^a)^2) + \vec{E}^a \cdot (\nabla A_0^a \\ & - gf_{abc} \vec{A}^b A_0^c) + \partial_k B^a A^{ak} - \frac{\alpha}{2} (B^a)^2 + i\Pi_c^a \Pi_c^a + gf_{abc} \Pi_c^a A_0^b c^c - i\partial^k \bar{c}^a D_k^{\text{ad}} c^a \end{aligned} \quad (4)$$

順番に、クォークとグルーオンの運動エネルギーと相互作用エネルギー項、ガウスの法則による束縛項と共変ゲージによるゲージ固定項、ゴーストの寄与を表す。ここで、 $q_f, \bar{q}_f, A_\mu^a, B^a, E_k^a, c^a, \bar{c}^a, \Pi_c^a, \Pi_c^a$  はそれぞれクォーク、グルーオン、ゴーストのハイゼンベルグ演算子であり、正準交換関係  $\{q, \bar{q}\}, [A^a, B^b], [A_i^a, E^{bj}], \{c^a, \Pi_c^b\}, \{\bar{c}^a, \Pi_c^b\}$  を満たす。これに物理的状態は BRST 電荷を持たないという条件を加えたものが、QCD の正準形式の全てである。

以上の、繰り込まれたモーメント型の和則と QCD の正準形式 (交換関係) を用いて、全ての和則は与えられる。まず、この手法が正しく働くことを確認するために、QCD の交換関係だけから Weinberg 和則が導けることを示す。Weinberg 和則はベクターカレント  $j_\mu^{(\rho)} = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)$ 、軸性ベクターカレント  $j_\mu^{(A_1)} = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu \gamma^5 u - \bar{d}\gamma_\mu \gamma^5 d)$  の差についての和則であり、定義からカイラル対称性が、明らかに、もしくは動力学的に破れている場合のみ 0 でない値を持つ。一次のモーメントについての和則は、カレントとハミルトニアンとの交換関係の一つだけ含み、次のようにクォークの双線形演算子のみを右辺に持つ。

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s(\rho_A(s) - \rho_V(s)) = \langle 0 | \frac{4m_u}{3} \bar{u}u + \frac{4m_d}{3} \bar{d}d | 0 \rangle \quad (5)$$

この結果は、OPE から与えられる和則とも一致する。次に、二次のモーメントの和則は、ハミルトニアンとの交換関係 3 回から与えられ、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s^2(\rho_A(s) - \rho_V(s)) = & \langle 0 | 2im_q^2 \bar{q} \overleftrightarrow{D} q - \frac{16}{3} m_q^3 \bar{q}q \\ & + \frac{\pi}{2} \alpha_s (\bar{u}_L \gamma_\mu t^a u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu t^a d_L) (\bar{u}_R \gamma^\mu t^a u_R - \bar{d}_R \gamma^\mu t^a d_R) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

右辺にはクォークの 4 点凝縮が現れ、その係数は OPE の結果とも一致する。さらに、交換関係による和則は OPE による手法では近似的に無視されているクォーク質量の高次にあたる双線形項を含んでいる。我々の手法では、クォーク質量が小さいという仮定を必要とせず、厳密に右辺を計算することができ、交換関係による和則の強みが現れている。これらの項は、軽いクォーク以外についての和則、例えばストレンジクォークについての和則では無視できないものである。

次に、ベクターカレントの和則に移り、一次のモーメントについて深く考察する。単純に交換関係のみから得られる裸の和則は次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s \rho_V(s) = \langle 0 | \frac{i}{3} \bar{u} \overleftrightarrow{D}_k \gamma^k u - m_u \bar{u}u + (u \leftrightarrow d) | 0 \rangle \quad (7)$$

ここで、 $k$  は空間方向に走る。次に正則化関数を導入し、繰り込みを考える。Fujikwa によるダイアグラムによらないアノマリーの導出で指摘されたように [4]、明白に 4 次元を保って正則化する理論では、正則化された (裸の) 運動方程式は次のように与えられる。

$$\langle 0 | \bar{u}(i\overleftrightarrow{D} - m)u | 0 \rangle = \text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} f\left(\frac{\overleftrightarrow{D}^2}{M^2}\right) e^{ikx} \quad (8)$$

ここで、 $f$  はゲージ共変的な正則化関数である。 $M$  が十分大きいとして展開すると、運動方程式はスペクトル関数の連続部分として和則の左辺に吸収される 4 次発散する項と、ゲージ場の強さ  $G^2$  で表される有限項で表される。この結果を和則に代入することで繰り込まれた和則が得られ、ベクターカレントに現れる  $\rho$  メソンの共鳴は、カイラル凝縮やグルーオン凝縮と関係付けられる。ここでの重要な点は、和則の両辺の発散を単純には消去できないことである。明白な 4 次元で、ゲージ共変性を保つように正則化関数を導入すると、 $G^2$  のように、非自明な有限項が現れることがある。現在、和則の表式の正則化関数への依存性や OPE から得られる結果との整合性を検討している。

さらに、我々の手法の利点として、OPE では計算されていない、半整数のモーメント型の和則を与えることができる。

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s^{\frac{n}{2}} \rho(s) = -\frac{1}{3V} \langle 0 | \{ [\dots [Q_\mu, H] \dots, H]_{n-1}, Q^\mu \} | 0 \rangle \quad (9)$$

ここで、 $Q^\mu = \int d^3x j^\mu(0, \vec{x})$ 。例えば、 $n = \frac{1}{2}$  の和則は系の電荷揺らぎに関係した和則となる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \sqrt{s} \rho(s) &= -\frac{2}{3V} \langle 0 | Q_\mu Q^\mu | 0 \rangle \\ &= -\frac{8}{3V} \langle 0 | Q_0^2 | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

現在、これらの和則の物理的な応用についても検討をすすめている。

#### まとめ

QCD の交換関係のみから QCD 和則を導出する新しい枠組みを構築することができた。これは、Kugo、Ojima による非可換ゲージ理論の演算子形式と、適切な UV 発散の繰り込みにより、原子核理論における TRK 和則を相対論的に拡張したものを計算することで、低エネルギー物理と対称性の破れの定量的関係式を与える枠組みである。

QCD にこの手法を適用することで、厳密な Weinberg 和則を得ることができた。さらに、ベクターカレントや軸性ベクターカレントについての和則も得ることができるが、詳細は検討中である。さらに、OPE では調べられることのなかった半整数モーメントの和則の表式を与えることができた。

我々の方法で得られた表式の正則化関数への依存性、半整数モーメント和則の物理的な応用、媒質中での QCD 和則への拡張、などは興味深い今後の研究課題である。

#### 参考文献

- [1] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979); **147** 448 (1979).
- [2] T. Kugo and I. Ojima, Phys. Lett. B **73**, 459 (1978).
- [3] T. Kugo, “ゲージ場の量子論 I,II” (培風館, 1989).
- [4] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **44**, 1733 (1980); Phys. Rev. D **23**, 2262 (1981)

# 有限温度でのボトモニウムにおける QCD 和則の MEM 解析

鈴木 溪<sup>1</sup>, Philipp Gubler<sup>1</sup>, 森田 健司<sup>2</sup>, 岡 真<sup>1</sup>  
東京工業大学<sup>1</sup>, 京都大学 基礎物理学研究所<sup>2</sup>

## 1 導入

高温のクォーク・グルーオン・プラズマ相において、カラーに関するデバイ遮蔽効果によりクォーク間に働く閉じ込めポテンシャルは消失し、クォークがクォークの非閉じ込め状態へ遷移することが予想されている [1]。重イオン衝突実験においては、 $J/\psi$  や  $\Upsilon$  などのクォーク・グルーオン・プラズマの形成を示唆する証拠が観測されており、ハドロンの物質からのクォーク・グルーオン・プラズマの形成を示唆する証拠として考えられている。このような測定結果を理論的に再現するために、これまでに数多くの理論研究が為されており、格子 QCD やポテンシャル模型を用いた方法によって、クォーク・グルーオン・プラズマの消失温度が導出されている。クォーク・グルーオン・プラズマの消失温度を求めるためには、スペクトル関数の温度依存性を解析すればよく、スペクトル関数を導出するために今回我々が用いた方法が QCD 和則である。

QCD 和則 [2] は QCD の非摂動領域の性質を第一原理的に解析する方法の一つであり、クォーク凝縮やグルーオン凝縮などの真空の性質とハドロンのスペクトル関数を結びつける関係式から、ハドロンの質量や崩壊幅といった物理的な値を引き出す強力な手段である。さらに、クォーク凝縮やグルーオン凝縮は温度依存性が知られているため、これらの値を用いることで、QCD 和則を有限温度におけるハドロンの性質を解析する方法として適用することができる。QCD 和則の従来の方法では、「一粒子状態 + 連続状態」という現象論的な仮定を導入することで、スペクトル関数に付随する物理量が導出されてきたが、近年、QCD 和則に最大エントロピー法 (MEM) を適用することで、これらの仮定を導入せずにスペクトル関数を直接導出することが可能となった [3]。

我々の以前の研究では、QCD 和則に MEM を適用し、チャーモニウムのスペクトル関数の温度依存性を解析することで、 $J/\psi$  がおよそ  $1.2T_c$  で消失するという結果を得た [4]。本研究で行うボトモニウムの解析は、チャーモニウムと同様の方法を用いて行われるが、双方のスペクトル関数の温度に対する振る舞いは大きく異なり、「温度応答性」及び「励起状態の存在」という 2 点について特徴的な性質を示す。チャーモニウムの場合、スペクトル関数はある一定の温度において突然消失するが、ボトモニウムの場合、広い温度領域に渡り徐々に消失していく。また、我々の以前の研

究で得られたチャーモニウムのスペクトル関数のピークは、基底状態の情報のみを含む結果であるが、本研究で得られたボトモニウムのピークには基底状態だけでなく、それより高エネルギーの励起状態の情報も混合している。現段階の我々の方法では、基底状態と励起状態を分離することはできないが、今後は、スペクトル関数の residue や質量シフトの温度変化を分析することで、基底状態に対する励起状態の振る舞いを議論する予定である。

## 2 手法

QCD 和則では、ハドロンの OPE と被積分関数としてスペクトル関数を含むエネルギー積分が分散関係によって関係づけられる。Borel 変換後の QCD 和則は

$$\mathcal{M}^J(\nu) = 4m_b^2 \int_0^\infty ds e^{-s\nu} \rho^J(s) \quad (1)$$

となる。左辺の OPE は摂動論的なクォークコニウム相関関数と非摂動論的な凝縮項から構成される。質量次元 4 までの展開において、凝縮項はグルーオン凝縮 (スカラーグルーオン凝縮  $G_0(T) = \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle_T$ ) 及びツイスト-2 グルーオン凝縮  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^{\alpha\mu\sigma} G_{\sigma}^{\alpha\nu} \rangle_T = (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu})G_2(T)$ ) のみを考えれば良い。グルーオン凝縮はエネルギー運動量テンソルと対応づけられ [5]、温度に依存する熱力学量 (エネルギー密度  $\epsilon(T)$ 、圧力  $p(T)$ 、強い相互作用の結合定数  $\alpha_s(T)$ ) を用いて、

$$G_0(T) = G_0^{\text{vac}} - \frac{8}{11}[\epsilon(T) - 3p(T)], \quad G_2(T) = -\frac{\alpha_s(T)}{\pi}[\epsilon(T) + p(T)] \quad (2)$$

と表せる。これらの熱力学量はクエンチ近似による格子 QCD によって計算された数値を用いる。

## 3 結果

各々のチャンネル (ベクトル ( $\Upsilon$ )、擬スカラー ( $\eta_b$ )、スカラー ( $\chi_{b0}$ )、軸性ベクトル ( $\chi_{b1}$ )) に対して得られたスペクトル関数を図 1 に示す。まず、ゼロ温度におけるピーク的位置はそれぞれ  $m_\Upsilon = 9.63\text{GeV}$ ,  $m_{\eta_b} = 9.55\text{GeV}$ ,  $m_{\chi_{b0}} = 10.18\text{GeV}$ ,  $m_{\chi_{b1}} = 10.44\text{GeV}$  となる。これらの結果は実験値と比べてやや高い数値となっているが、得られたピークには基底状態だけでなく励起状態が混合しているため、それによる高エネルギー側へのシフトを考慮すれば妥当な結果である。

次に有限温度におけるスペクトル関数の振る舞いについて議論する。有限温度におけるスペクトル関数は温度上昇に伴い、段々とピークが減少する。 $\Upsilon$  と  $\eta_b$  は  $2.5T_c$  以上でもピークが残っている。一方、 $\chi_{b0}$  と  $\chi_{b1}$  は  $2.0 - 2.5T_c$  において完全にピークが消失し、基底状態・励起状態の全てが消失することが確認できる。

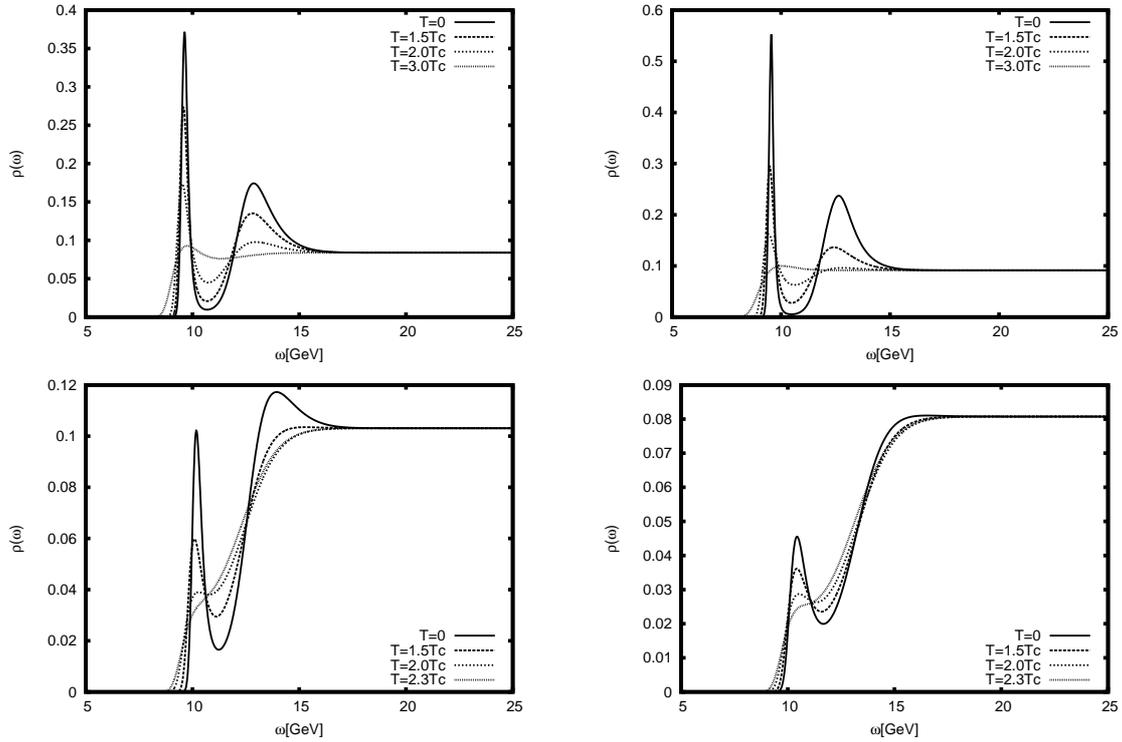


図1 スペクトル関数。ベクトル（左上）擬スカラー（右上）スカラー（左下）軸性ベクトル（右下）。

## 4 まとめと展望

本研究では、QCD 和則に MEM を適用し、ボトモニウムの特ラクトル関数の温度依存性を解析した。ゼロ温度においては、ボトモニウムの基底状態に対応するピークが得られ、励起状態が混合していることを考慮すれば実験値と定性的に一致するハドロン質量が得られた。有限温度においては、 $\Upsilon$  と  $\eta_b$  の消失温度は  $2.5T_c$  以上、 $\chi_{b0}$  と  $\chi_{b1}$  の消失温度は  $2.0 - 2.5T_c$  という結果が得られた。これらの結果を踏まえ、今後はピークの residue の解析から基底状態と励起状態の振る舞いを分離し、励起状態の消失温度について再現・議論を試みる予定である [6]。

## 参考文献

- [1] T. Matsui and H. Satz, Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).
- [2] M. A. Shifman, A. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979).
- [3] P. Gubler and M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124**, 995 (2010).
- [4] P. Gubler, K. Morita, and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107**, 092003 (2011).
- [5] K. Morita and S. Lee, Phys. Rev. Lett. **100**, 022301 (2008).
- [6] K. Suzuki, P. Gubler, K. Morita, and M. Oka, in preparation .

# 純粋状態量子力学の量子熱力学への変質

奥山 進治

三重大学大学院工学研究科

## 1. はじめに

Bender, Brody および Meister[1]は温度がゼロの純粋状態量子力学で井戸型ポテンシャル中に閉じ込められた粒子を考え、井戸の幅と量子状態をうまくコントロールすることにより Carnot サイクルの類似物を構成し、仕事を取り出せることを見出した。さらに、その効率が  $\eta = 1 - E_C/E_H$  で与えられることを示した。ここで、 $E_H(E_C)$ はサイクルの等温膨張(圧縮)過程における内部エネルギーの類似物としてのハミルトニアン期待値である。しかし、この効率は温度の類似物を定義しない。

ここでは、Shannon エントロピーに対して Clausius の等式を要請することにより、温度の類似物が導入でき、その結果、純粋状態量子力学が量子熱力学に形式的に変質することを示す[2]。

## 2. 純粋状態量子力学における熱力学的類似物

まず、ハミルトニアンの期待値  $E = \langle \psi | H | \psi \rangle$  が内部エネルギーの対応物であるとする。内部エネルギーの類似物の変化は  $\delta E = (\delta \langle \psi | H | \psi \rangle) + \langle \psi | H (\delta | \psi \rangle) + \langle \psi | \delta H | \psi \rangle$  である。ここでハミルトニアンの変化を仕事の変化、熱量の変化を量子状態の変化と対応させると

$$\delta'Q \leftrightarrow (\delta \langle \psi | H | \psi \rangle) + \langle \psi | H (\delta | \psi \rangle) \quad (1)$$

$$-\delta'W \leftrightarrow \langle \psi | \delta H | \psi \rangle \quad (2)$$

であり、熱力学第一法則の形式、 $\delta E = \delta'Q - \delta'W$  となっていることがわかる。

## 3. 井戸型ポテンシャルの 2 状態モデル

1次元井戸型ポテンシャルの中に閉じ込められた1個の粒子を考える。Bender たち[1]は Carnot サイクルの類似物(図1)を構成し井戸の幅と等温過程の類似物(A → B, C → D)を  $\delta E = 0$  によって定義した。一方、断熱過程の類似物(B → C, D → A)は式(1)がゼロであるように定義される。固有状態ベクトルを  $\{|u_n\rangle\}_n$ 、エネルギー固有値を  $\{E_n\}_n$  とすると  $H|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle$  である。量子状態  $|\psi\rangle$  は展開係数によって

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |u_n\rangle, \quad (3)$$

$$\sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (4)$$

となる。ハミルトニアンの期待値は展開係数とエネルギー固有値によって  $E = \sum_n E_n |a_n|^2$  と表せ、壁の移動の時間スケールは  $\hbar/E$  より十分大きいとすると熱量の類似物の変化は

$$\delta'Q = \sum_n E_n \delta |a_n|^2 \quad (5)$$

である。

1次元井戸型ポテンシャルにおいてエネルギー固有値は  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2mL^2$  であり、2状態モデルにおいてハミルトニアンの期待値は

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\xi + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(1-\xi) \quad (6)$$

である。 $L$ は井戸の幅、 $m$ は粒子の質量であり、 $|a_1|^2 \equiv \xi \in [0,1]$ とし規格化条件、式(4)を用いた。式(5)により展開係数の変化は熱量の類似物の変化であり

$$\delta'Q = -\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\delta\xi \quad (7)$$

となる。一方、仕事の類似物の変化は $\delta'W = (\pi^2\hbar^2/mL^3)(4-3\xi)\delta L$ であり、圧力の類似物は $f = (\pi^2\hbar^2/mL^3)(4-3\xi)$ となる。

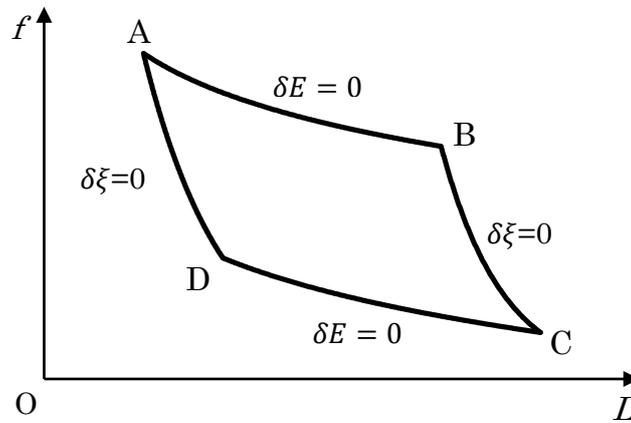


図1. Bender たちの Carnot サイクルの類似物の構成

#### 4. エントロピーと温度を基本とした類似性の解釈

Bender たちは巨視的熱力学(等温過程で内部エネルギーの変化がない場合)と量子力学の類似性について議論した。ここで、我々は等温過程でのエネルギー等分配則ではなくエントロピーを定義して議論をする。エントロピーには物理的な乱雑さを表す von Neumann エントロピー、情報量を表す Shanonn エントロピーがあるが、von Neumann エントロピーは純粋状態量子力学においてはゼロであり適さない。そこで Shanonn エントロピー

$$S^S = -k \sum_n |a_n|^2 \ln |a_n|^2 \quad (8)$$

を導入すると、2状態モデルにおいて Shanonn エントロピーの変化は

$$\delta S^S = k \ln\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \delta\xi \quad (9)$$

である。

Schrödinger 方程式の時間反転不変性を考慮し、Clausius の等式の類似物

$$\delta S^S = \frac{\delta'Q}{T} \quad (10)$$

を要請する。 $T$ は温度の類似物である。

式(7), (9), (10)により2状態モデルにおける展開係数  $\xi$  は

$$\xi(L, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mL^2 kT}\right)} \quad (11)$$

となる。ただし  $T > 0$  では  $1/2 < \xi(L, T) < 1$  であり、 $\xi(L, T)$ は励起状態にある。

一般には式(5), (8), (10)により

$$|a_n|^2 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (12)$$

$$S^S = -k \sum_n \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \ln \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

となる。ここで  $Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$  とした。式(13)の値は正準密度行列の von Neumann エントロピーの値に一致している。また、純粋状態量子力学が量子熱力学に変質していることが分かる。また、図2のような Carnot サイクルを構成する(ただし、状態A  $\rightarrow$  B(状態C  $\rightarrow$  D)での温度の類似物は  $T_H(T_C)$ とする)。

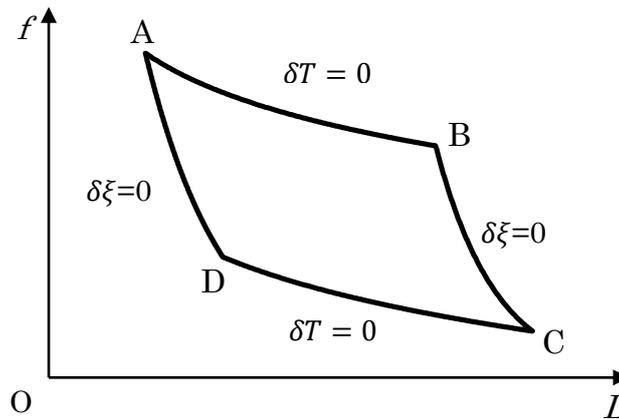


図2. カルノーサイクルの類似物の構成

このとき効率は  $1 - T_C/T_H$  であり古典的効率と同じ形となる。ただし、等温過程において内部エネルギーの変化はゼロではない。

## 5. まとめ

純粋状態量子力学が Shannon エントロピーを導入し、Clausius の等式を要請することにより量子熱力学に変質することを見出した。また、純粋状態から混合状態へのあらわな崩壊は出現しない。しかし、Carnot サイクルの効率は古典的な値と同じ形をとることが分かった。

## 参考文献

- [1] C. M. Bender, D. C. Brody, and B. K. Meister, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 4427 (2000)
- [2] S. Abe and S. Okuyama, Phys. Rev. E **83**, 021121 (2011)