素粒子論研究電子版 Vol.19（2014）No.2 TIT/HEP-639

超弦理論における時空のコンパクト化

— Spacetime Compactifications in String Theory —

木村 哲士 (Tetsuji Kimura)

tetsuji@th.phys.titech.ac.jp

東京工業大学大学院理工学研究科 基礎物理学専攻 素粒子論研究室 (伊藤・今村研)

まえがき

これは平成 26 年 (2014 年)10 月 14 日から 16 日にかけて実施した茨城大学大学院での集中講義用のノートである。このノートでは、1985 年以来のヘテロティック弦理論における Calabi-Yau 空間を用いたコンパクト化という、超弦理論ではもはや古典的ともいうべきコンパクト化の議論を行う。超弦理論における時空のコンパクト化では超対称変換と幾何学に深い関係があるため、超対称性と Killing 方程式、特殊ホロノミー群多様体なども合わせて紹介する。ここまでは標準的な教科書でも紹介しているテーマだが、さらに最終章では 2014 年現在の発展を紹介する。フラックスコンパクト化から始まり、nongeometric string background の導入、この具現化である generalized geometry や doubled formalism、そしてエキゾチックブレーンやそれらに伴う低次元超重力理論の変形について触れる。これらを通じて超弦理論のコンパクト化を考え直すと、アインシュタインが導入した一般座標変換不変性と同様に、超弦理論の双対性も時空構造に寄与するべきであるという考えに到達するだろう。

このノートの作成にあたり、これまで筆者が大学院生となった 1999 年から積み重ねてきた超重力理論の勉強ノートを整理し、また新しい点を追加した。なるべく記号や定義などが一貫する様に注意して書き直しているが、不完全な部分が残っているかもしれない。参考とした文献はこのノートの末尾に掲載する。出版物でなくとも、有用だと思われる研究者の方々や筆者自身の公開ノートのリンク先を掲載した。ただし全てを網羅することは不可能であるため、筆者が触れたことのある文献の引用に留める。そのため参考文献はかなりの偏りがあり、また不完全であることを、特に関係者の方々にはご容赦願いたい。

謝辞

2014 年 10 月に集中講義の機会を与えて下さった茨城大学の百武慶文さんをはじめとする教員の方々に感謝致します。これまでの共同研究者の方々や所属した研究・教育機関の皆さん、国内や海外での研究会などのイベントで知り合った多くの皆さんのおかげで、このノートを執筆することができました。ここにお礼申し上げます。また、私が厳しい環境において公私共に叱咤激励して下さっている多くの方々に感謝致します。

2014 年度、私は岩波風樹会からの研究奨励金を頂いております。

目 次

1　超対称変換

このノートでは、平坦な 4 次元 Minkowski 時空の計量の符号を

$$\eta_{ab} \;=\; \mathrm{diag.}(-,+,+,+)\,, \tag{1.1}$$

とする (mostly plus signature)。しばらくは [1,2] を参考に進める。超対称性についての教科書としては他に [3,4] を挙げる。議論が進めば内容が込み入ってくるので、その都度参考文献などを列挙する。

1.1　超対称性

超対称性とは、次の変換の下で理論 (作用積分) が不変であることをいう:

$$|\,\mathrm{boson}\,\rangle \;\longleftrightarrow\; |\,\mathrm{fermion}\,\rangle \tag{1.2}$$

この変換の下で理論が不変であるためには、ボソン (boson) とフェルミオン (fermion) の (力学的) 自由度が常に釣り合っている必要がある。ボソンは可換なスカラー場・ベクトル場・テンソル場で記述され、フェルミオンは反可換なスピノール場で記述される [1]。

1.2　準備

スピノールは時空次元に依存する量である。任意の時空次元での定義は第 3.1 節 (及び付録 B) で議論するとして、ここでは 4 次元時空でのスピノールを議論する。まずは Dirac のガンマ行列が従う Clifford 代数を用意する:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} \;=\; 2\eta^{ab}\,. \tag{1.3}$$

ここで時空の添字を a, b などで表現した [2]。この定義により、$\gamma^{\hat{0}}$ のみが反エルミートで残りはエルミート (hermitian) であることが分かる。これを一言で表示する方法がある:

$$(\gamma^a)^\dagger \;=\; \gamma_a \;=\; -\gamma^{\hat{0}}\gamma^a(\gamma^{\hat{0}})^{-1}\,. \tag{1.4}$$

以上のルールさえ守っていれば、ガンマ行列はどのような表示でも構わない。

---

[1] ゴーストなど負ノルムを運ぶ場についてはこの限りではないが、この講義では触れない。
[2] 後ほど曲がった時空上の場の理論を考えるときには別の添字が登場するので注意。付録 A.1 参照。

カイラリティ(chirality) 演算子 γ_5 とその性質を次で定義する:

$$\gamma_5 \equiv -\mathrm{i}\,\gamma^{\hat{0}}\gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{2}}\gamma^{\hat{3}}\,, \qquad (\gamma_5)^2 = +1\,, \qquad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5\,. \tag{1.5}$$

荷電共役行列 C とその性質を次で定義する:

$$C^\dagger = C^{-1} = C^{\mathrm{T}} \equiv -C\,, \tag{1.6a}$$

$$C(\gamma^a)C^{-1} = -(\gamma^a)^{\mathrm{T}}\,, \qquad C(\gamma^{a_1\cdots a_n})C^{-1} = (-1)^{[\frac{n+1}{2}]}(\gamma^{a_1\cdots a_n})^{\mathrm{T}}\,. \tag{1.6b}$$

この行列 C も、この定義さえ満たせばどのような表示でも構わない。

スピノール場の理論を構成するときに必要な Dirac 共役と荷電共役を定義する:

$$\overline{\psi} \equiv \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^{\hat{0}}\,, \tag{1.7a}$$

$$\psi^c \equiv C\overline{\psi}^{\mathrm{T}}\,. \tag{1.7b}$$

ここで ψ は Dirac スピノールであるとした。

ガンマ行列には有益な恒等式がいくつかある。ここでは Fierz 恒等式を紹介する。任意の Dirac スピノール $\lambda, \chi, \psi, \varphi$ と任意の 4×4 行列 M, N について、次が成り立つ:

$$(\overline{\lambda}M\chi)(\overline{\psi}N\varphi) = -\frac{1}{4}\sum_A(\overline{\lambda}M\mathcal{O}_A N\varphi)(\overline{\psi}\mathcal{O}^A\chi)\,, \tag{1.8a}$$

$$\mathcal{O}_A = \Big\{1,\ \gamma_a,\ \gamma_5,\ \mathrm{i}\gamma_5\gamma_a,\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\gamma_{ab}\Big\}\,. \tag{1.8b}$$

1.3 Wess-Zumino 模型

超対称理論として最も単純な相互作用系である Wess-Zumino 模型を紹介する。この模型ではボソンとフェルミオンとして次の場が登場する:

実スカラー場	$A(x)$, $F(x)$
実擬スカラー場	$B(x)$, $G(x)$
Majorana スピノール場	$\psi(x)$

表 1: Wess-Zumino 模型における物質場

ここで擬スカラー場とは、パリティ変換 (parity, 空間座標の符号反転) $x^i \to -x^i$ で符号が反転するスカラー場であり、Majorana スピノール場とは Dirac スピノール場の荷電共役が自分自身になっているものである:

$$\psi \equiv \psi^c = C\overline{\psi}^{\mathrm{T}}\,, \qquad \overline{\psi} = \psi^{\mathrm{T}}C\,. \tag{1.9}$$

これらの場が相互作用する最も単純な Lagrangian は次の様に与えられる:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_g\,, &(1.10\text{a})\\
\mathscr{L}_0 &\equiv -\frac{1}{2}(\partial_a A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_a B)^2 - \frac{1}{2}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2\,, &(1.10\text{b})\\
\mathscr{L}_m &\equiv -\frac{m}{2}\Big\{\overline{\psi}\psi - 2AF + 2BG\Big\}\,, &(1.10\text{c})\\
\mathscr{L}_g &\equiv -\frac{g}{2}\Big\{-\overline{\psi}(A + \mathrm{i}\gamma_5 B)\psi + (A^2 - B^2)F - 2ABG\Big\}\,. &(1.10\text{d})
\end{aligned}$$

ここで $\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^a\partial_a$ である。パラメータ m, g はそれぞれ質量パラメータ、結合定数とみなされる。A, B, ψ には運動項が存在するが、F, G にはそれに該当する項がない。このため F, G は補助場と呼ばれる。この補助場について運動方程式を評価しよう:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F} = F + mA - \frac{g}{2}(A^2 - B^2)\,, &(1.11\text{a})\\
0 &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial G} = G - mB + gAB\,. &(1.11\text{b})
\end{aligned}$$

これにより F, G は他の場で与えられる。これを (1.10) に代入してみよう:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_a A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_a B)^2 - \frac{1}{2}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi - \frac{m^2}{2}A^2 - \frac{m^2}{2}B^2 - \frac{m}{2}\overline{\psi}\psi \\
&\quad + \frac{mg}{2}A(A^2 + B^2) + \frac{g}{2}\overline{\psi}(A + \mathrm{i}\gamma_5 B)\psi - \frac{g^2}{8}(A^2 + B^2)^2\,. &(1.12)
\end{aligned}$$

これにより運動項を持つ力学場 A, B, ψ が全て同じ質量 $|m|$ を持つことが分かった。

Lagrangian (1.10) は、次の様なボソンとフェルミオンの間の変換の下で不変になる:

$$\begin{aligned}
\delta A &= \overline{\varepsilon}\psi = (\delta A)^\dagger\,, \qquad \delta B = -\mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi = (\delta B)^\dagger\,, &(1.13\text{a})\\
\delta F &= \overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi = (\delta F)^\dagger\,, \qquad \delta G = \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi = (\delta G)^\dagger\,, &(1.13\text{b})\\
\delta\psi &= \partial\!\!\!/(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\varepsilon + (F + \mathrm{i}\gamma_5 G)\varepsilon\,, &(1.13\text{c})\\
\delta\overline{\psi} &= \delta\psi^{\mathrm{T}}C = -\overline{\varepsilon}\,\partial_a(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\gamma^a + \overline{\varepsilon}(F + \mathrm{i}\gamma_5 G)\,. &(1.13\text{d})
\end{aligned}$$

ここで ε は時空座標に依存しないフェルミオン的な変換パラメータである。もっと具体的に言えば、ε は Majorana スピノールである。そしてこれは ψ と反可換であり、ボソン場とは可換である。この変換の下で Lagrangian (1.10) の変化分は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_0 &= \frac{1}{2}\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\gamma^a\gamma^b\partial_b\psi + \overline{\varepsilon}(F + \mathrm{i}\gamma_5 G)\gamma^a\psi\Big\}\,, &(1.14\text{a})\\
\delta\mathscr{L}_m &= m\,\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\gamma^a\psi\Big\}\,, &(1.14\text{b})\\
\delta\mathscr{L}_g &= -\frac{g}{2}\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)^2\gamma^a\psi\Big\}\,. &(1.14\text{c})
\end{aligned}$$

これにより (1.14) は全て全微分で与えられるため、作用積分は不変である。

1.4 超対称ゲージ理論

ベクトルゲージ場を含む超対称多重項 (ベクトル多重項) は次で構成される:

ベクトルゲージ場	$A_a(x)$
実擬スカラー場	$D(x)$
Majorana スピノール場	$\lambda(x)$

表 2：超対称ゲージ理論の物質場

これらを用いた最も単純な理論である、超対称 $U(1)$ ゲージ理論 (超対称 Maxwell 理論) の Lagrangian を与えよう:

$$\mathscr{L} \;=\; -\frac{1}{4\mathrm{g}^2}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\overline{\lambda}\partial\!\!\!/\lambda + \frac{1}{2\mathrm{g}^2}D^2 \,. \tag{1.15}$$

ここで g はゲージ結合定数。これは次の超対称変換の下で不変である:

$$\delta A_a \;=\; \overline{\varepsilon}\gamma_a\lambda \;=\; (\delta A_a)^\dagger \,, \tag{1.16a}$$

$$\delta D \;=\; \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda \;=\; (\delta D)^\dagger \,, \tag{1.16b}$$

$$\delta\lambda \;=\; -\frac{1}{2}F_{ab}\gamma^{ab}\varepsilon + \mathrm{i}\gamma_5\varepsilon D \,, \tag{1.16c}$$

$$\begin{aligned} \delta\overline{\lambda} \;&=\; \delta\lambda^{\mathrm{T}}C \;=\; -\frac{1}{2}F_{ab}(\gamma^{ab}\varepsilon)^{\mathrm{T}}C + \mathrm{i}D(\gamma_5\varepsilon)^{\mathrm{T}}C \\ &=\; \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}F_{ab} + \mathrm{i}D\overline{\varepsilon}\gamma_5 \,, \end{aligned} \tag{1.16d}$$

$$\therefore \quad \delta\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\partial_a\Big\{ -\frac{1}{2}F_{bc}\,\overline{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda - F^{ab}\,\overline{\varepsilon}\gamma_b\lambda + \mathrm{i}D\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\lambda \Big\} \,. \tag{1.16e}$$

ここで $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{\mathrm{T}}C$, $(\gamma^{ab})^{\mathrm{T}} = -C\gamma^{ab}C^{-1}$, $(\gamma_5)^{\mathrm{T}} = +C\gamma_5C^{-1}$ を用いている。Lagrangian の変化分は全微分で与えられるので、理論は不変である。

2　4次元超重力理論

2.1　一般相対論

2.1.1　一般座標変換と共変微分

曲がった時空における一般座標変換は次で与えられる:

$$x^{\mu} \ \to \ x'^{\mu} \ = \ x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)\,. \tag{2.1}$$

この変換についての共変微分を導入する。そのため、まずは x から $x + \mathrm{d}x$ への無限小平行移動を評価しよう:

$$\begin{aligned} A_{\nu}(x) \quad &\to \quad A^{||}_{\nu}(x + \mathrm{d}x) \ = \ A_{\nu}(x) + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}(x) A_{\rho}(x)\, \mathrm{d}x^{\mu}\,, & \text{(2.2a)} \\ A^{\nu}(x) \quad &\to \quad A^{||\nu}(x + \mathrm{d}x) \ = \ A^{\nu}(x) + \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu}(x) A^{\rho}(x)\, \mathrm{d}x^{\mu}\,. & \text{(2.2b)} \end{aligned}$$

この無限小平行移動における差が一般座標変換に対して共変になる様に、共変微分が定義される:

$$\begin{aligned} A_{\nu}(x + \mathrm{d}x) - A^{||}_{\nu}(x + \mathrm{d}x) \ &\equiv \ \nabla_{\mu} A_{\nu}(x)\, \mathrm{d}x^{\mu} \quad \to \quad \nabla_{\mu} A_{\nu} \ \equiv \ \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} A_{\rho}\,, & \text{(2.3a)} \\ A^{\nu}(x + \mathrm{d}x) - A^{||\nu}(x + \mathrm{d}x) \ &\equiv \ \nabla_{\mu} A^{\nu}(x)\, \mathrm{d}x^{\nu} \quad \to \quad \nabla_{\mu} A^{\nu} \ \equiv \ \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} A^{\rho}\,. & \text{(2.3b)} \end{aligned}$$

ここで $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}(x)$ をアフィン (affine) 接続という。一般に下付き添字の交換については対称でも反対称でもない:

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \ = \ \Gamma^{\rho}{}_{(\nu\mu)} + \Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}\,, \qquad \Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]} \ \equiv \ T^{\rho}{}_{\nu\mu}\,. \tag{2.4}$$

特に反対称部分 $T^{\rho}{}_{\nu\mu}$ をトーション (torsion, 捩率) と呼ぶ。トーションが存在する空間を Riemann-Cartan 空間と呼ぶ。トーションがない場合は単に Riemann 空間である。

次の様に Christoffel 記号を導入する:

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\,\mu \end{matrix} \right\} \ = \ \Gamma^{\rho}_{0\nu\mu} \ \equiv \ \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \Big(\partial_{\nu} g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\nu\mu} \Big)\,. \tag{2.5}$$

これはアフィン Levi-Civita 接続とも言う。これらを用いると $\Gamma^{\rho}_{(\nu\mu)}$ やアフィン接続そのものは次の様に与えられる:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}{}_{(\nu\mu)} \ &= \ \Gamma^{\rho}_{0\nu\mu} - T_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}\,, & \text{(2.6a)} \\ \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \ &= \ \Gamma^{\rho}_{0\nu\mu} + K^{\rho}{}_{\nu\mu}\,, & \text{(2.6b)} \end{aligned}$$

$$K^{\rho}{}_{\nu\mu} \;\equiv\; T^{\rho}{}_{\nu\mu} - T_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}\,. \tag{2.6c}$$

この $K^{\rho}{}_{\nu\mu}$ はコントーション (contorsion) と呼ばれる。トーションがゼロになるとき、アフィン接続は Levi-Civita 接続になる。今後、特にトーションがゼロになるときの共変微分を明示したい時には

$$\nabla^0_{\mu} A_{\nu} \;\equiv\; \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{0\nu\mu} A_{\rho}\,, \tag{2.7}$$

という表記を用いる。

共変微分の交換関係から、曲率 $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)$ が定義される:

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A_{\sigma} \;&=\; -R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)\, A_{\rho} + 2T^{\rho}{}_{\mu\nu}\, \nabla_{\rho} A_{\sigma}\,, && (2.8\mathrm{a})\\
R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) \;&\equiv\; \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\,. && (2.8\mathrm{b})
\end{aligned}$$

曲率から、Ricci 曲率 $R_{\mu\nu}$、スカラー曲率 R が定義できる:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} \;&\equiv\; R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}\,, && (2.9\mathrm{a})\\
R \;&\equiv\; g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu}\,. && (2.9\mathrm{b})
\end{aligned}$$

これらについては次の関係式が存在する:

$$\begin{aligned}
R_{\rho\sigma\mu\nu} \;&=\; -R_{\rho\sigma\nu\mu} \;=\; -R_{\sigma\rho\mu\nu}\,, && (2.10\mathrm{a})\\
R^{\rho}{}_{[\sigma\mu\nu]} \;&=\; -2\nabla_{[\mu} T^{\rho}{}_{\nu\sigma]} - 4T^{\lambda}{}_{[\mu\nu} T^{\rho}{}_{\sigma]\lambda}\,, && (2.10\mathrm{b})\\
R_{[\mu\nu]} \;&=\; \nabla_{\lambda} T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + 2\nabla_{[\mu} T^{\rho}{}_{\nu]\rho} - 2T^{\rho}{}_{\lambda\rho} T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + 2T^{\rho\sigma}{}_{[\mu} T_{\nu]\rho\sigma}\,. && (2.10\mathrm{c})
\end{aligned}$$

さらに $T^{\rho}{}_{\mu\nu} = 0$ のときは $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ も成立する。

一般相対論では、共変微分が計量に作用するとき次の条件 (計量条件) を導入する:

$$\nabla_{\rho}\, g_{\mu\nu} \;\equiv\; 0\,. \tag{2.11}$$

2.1.2　Einstein 方程式

ここで時空の運動方程式を考えよう。それは次の様に与えられる:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \;=\; \kappa^2 T_{\mu\nu}\,. \tag{2.12}$$

右辺の $T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー・運動量テンソルであり、$\kappa^2 = 8\pi G$ は Newton 重力定数。特に左辺を $G_{\mu\nu}$ と表示することが多い。この方程式を場の理論として導出するために次の Lagrangian を考える [3]:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_{\mathrm{G}} + \mathscr{L}_{\mathrm{M}}\,, && (2.13\mathrm{a}) \\
\mathscr{L}_{\mathrm{G}} &\equiv \frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\,R\,, && (2.13\mathrm{b}) \\
\mathscr{L}_{\mathrm{M}} &\equiv \sqrt{-g}\times(\text{物質場の Lagrangian } \mathscr{L}_{\mathrm{matter}})\,, && (2.13\mathrm{c}) \\
\sqrt{-g} &= \big(-\det g_{\mu\nu}\big)^{\frac{1}{2}}\,. && (2.13\mathrm{d})
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ は Einstein-Hilbert の Lagrangian と呼ばれる。なお、全ての Lagrangian に $\sqrt{-g}$ が付いているのは、曲がった時空での作用積分が一般座標変換で不変になるためである。Lagrangian を時空間積分することで作用積分を定義したが、曲がった時空では d^4x は一般座標変換で不変ではなく、$\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ が不変である。

見通しを良くするため、作用積分における変分原理を記述しよう。上の Lagrangian で与えられる作用積分について、計量 $g_{\mu\nu}$ で変分を実行する:

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\kappa^2}R + \mathscr{L}_{\mathrm{matter}}\right\} \equiv S_{\mathrm{G}} + S_{\mathrm{matter}}\,, && (2.14\mathrm{a}) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\,, \qquad \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}\,. && (2.14\mathrm{b})
\end{aligned}$$

ここで便利な公式を列挙しておく [6]:

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\,\delta g_{\rho\sigma}\,, && (2.15\mathrm{a}) \\
\delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\,, && (2.15\mathrm{b}) \\
\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\rho\,\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu\,\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\,, && (2.15\mathrm{c}) \\
\delta(\sqrt{-g}R) &= \sqrt{-g}\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\rho\big(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\big) - \partial_\nu\big(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\big)\,. && (2.15\mathrm{d})
\end{aligned}$$

すると、変分原理から次が示される:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_{\mathrm{G}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{\mathrm{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}} \\
&= \frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\Big\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \kappa^2 T_{\mu\nu}\Big\}\,. && (2.16)
\end{aligned}$$

[3] 今後、結合定数 $2\kappa^2$ が物質場の作用積分に表記される場合があるが、場の再定義で適宜補うと良い。

2.2　Lie 微分

時空の対称性や、そこから得られる Noether カレントや保存電荷などを定量的に扱う場合には、一般座標変換の前後における「時空の同一座標値」での場の無限小変換則を評価する必要がある。この無限小変換則を与える微分は Lie 微分と呼ばれ、任意の関数 $f(x)$ について次の様に定義される [4]:

$$x \to x' = x + \xi(x) \text{ の下で} \qquad \delta_{\mathrm{L}} f(x) \ \equiv \ f'(x) - f(x) \,. \tag{2.17}$$

一般座標変換によって関数 $f(x)$ は $f'(x')$ に変換される。ここで Lie 微分は、同一座標値における差を評価する (詳細な議論は、例えば [7] を参照)。具体的にスカラー場 $\phi(x)$・共変ベクトル場 $A_\mu(x)$・反変ベクトル場 $A^\mu(x)$・対称テンソル場 $g_{\mu\nu}(x)$ についてそれぞれの Lie 微分を付録 I.3 に列挙しておくのは有益であろう。その中でも特に、時空の計量 $g_{\mu\nu}$ についての関係式が重要である:

$$\delta_{\mathrm{L}} g_{\mu\nu} \ = \ -\nabla^0_\mu \, \xi_\nu - \nabla^0_\nu \, \xi_\mu \,. \tag{2.18}$$

この Lie 微分の下で $g_{\mu\nu}$ が不変 ($\delta_{\mathrm{L}} g_{\mu\nu} = 0$) の時、時空には ξ^μ 方向に沿った並進対称性が存在する。その対称性をアイソメトリー (isometry) と呼ぶ。また ξ^μ を Killing ベクトルと呼び、$\delta_{\mathrm{L}} g_{\mu\nu} = 0$ を満たす Killing ベクトルの方程式を Killing 方程式と呼ぶ。

2.3　多脚場とスピン接続

スピノール場は、時空の Lorentz 対称性において非自明な振る舞いをする場であると定義されている。一般座標変換について非自明な振る舞いをするとして定義されているものではない。しかし、一般に曲がった時空での場の理論を考えようとすると、スピノール場を曲がった空間で扱う方法が欲しくなる。そのために、曲がった時空とその接空間を行き来する記述を導入する必要がある。この二つの空間を行き来するための場を多脚場 (vielbein) と呼び、時空の計量を分割して定義する:

$$g_{\mu\nu}(x) \ \equiv \ \eta_{ab} \, e_\mu{}^a(x) \, e_\nu{}^b(x) \,, \qquad \eta_{ab} \ = \ g_{\mu\nu}(x) \, e_a{}^\mu(x) \, e_b{}^\nu(x) \,, \tag{2.19a}$$

$$e_\mu{}^a \, e_a{}^\nu \ = \ \delta^\nu_\mu \,, \qquad e_a{}^\mu \, e_\mu{}^b \ = \ \delta^b_a \,. \tag{2.19b}$$

多脚場を用いて、接空間で定義されているガンマ行列を曲がった時空に乗せる:

$$\gamma^\mu \ \equiv \ e_a{}^\mu \, \gamma^a \,. \tag{2.20}$$

[4] 荷電粒子のゲージ対称性などは一般に内部対称性であった。これは同一座標値での場の位相のゲージ変換を考える。時空の対称性についても同様の概念が必要である。そのために Lie 微分が導入される。

多脚場の定義から、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を一つ定めても多脚場が一意に定まるわけではなく、空回りする自由度がある。これも一種のゲージ変換であり、局所 Lorentz 変換と呼ぶ:

$$e_\mu{}^a \ \to \ e'_\mu{}^a \ = \ e_\mu{}^b(x)\,\Lambda_b{}^a(x)\,, \qquad \eta_{cd}\,\Lambda_a{}^c\,\Lambda_b{}^d \ = \ \eta_{ab}\,. \tag{2.21}$$

局所 Lorentz 変換の変換パラメータ $\Lambda_a{}^b(x)$ は一般に時空座標に依存する。そのため、この変換に対する共変微分を定義する必要がある。接空間上のベクトル $A^a(x)$ における無限小局所 Lorentz 変換を次で与えよう:

$$\delta A^a(x) \ = \ -\lambda^a{}_b(x) A^b(x)\,, \qquad \lambda^{ab} \ = \ \eta^{bc}\,\lambda^a{}_c \ = \ -\lambda^{ba}\,. \tag{2.22}$$

スピン接続と呼ばれる新たなゲージ場 $\omega_\mu{}^a{}_b(x)$ を導入して、局所 Lorentz 変換に対する共変微分を定義する:

$$D_\mu A^a(x) \ \equiv \ \partial_\mu A^a + \omega_\mu{}^a{}_b(x)\,A^b(x)\,, \qquad \omega_\mu{}^{ab} \ = \ \eta^{bc}\,\omega_\mu{}^a{}_c \ = \ -\omega_\mu{}^{ba}\,, \tag{2.23a}$$

$$\delta\omega_\mu{}^a{}_b \ = \ \partial_\mu\lambda^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c\,\lambda^c{}_b + \omega_{\mu b}{}^c\,\lambda^a{}_c \ = \ D_\mu\lambda^a{}_b\,. \tag{2.23b}$$

一般の表現に従う場 $\phi^i(x)$ に対するこの共変微分を、Lorentz 生成子 M^{ab} を用いて表記しておこう:

$$D_\mu\phi^i(x) \ = \ \Big\{\delta^i_j\,\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_\mu{}^{ab}(\mathsf{M}_{ab})^i{}_j\Big\}\phi^j(x)\,, \tag{2.24a}$$

$$(\mathsf{M}_{ab})^i{}_j \ = \ \begin{cases} 0 & \text{スカラー}\,, \\ \mathrm{i}(\delta^i_a\,\eta_{jb} - \delta^i_b\,\eta_{ja}) & \text{ベクトル (テンソル)}\,, \\ \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^{ab})^i{}_j & \text{スピノール}\,. \end{cases} \tag{2.24b}$$

この共変微分から、スピン接続に対する曲率を定義する事が出来る:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^i \ \equiv \ -\frac{\mathrm{i}}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)\,(\mathsf{M}_{ab})^i{}_j\,\phi^j\,, \tag{2.25a}$$

$$R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega) \ = \ \partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c\,\omega_\nu{}^{cb} - \omega_\nu{}^a{}_c\,\omega_\mu{}^{cb}\,. \tag{2.25b}$$

時空の計量 $g_{\mu\nu}$ について計量条件 $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ (2.11) を課したのと同等な条件を多脚場で表現すると次の様になる:

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ D_\mu e_\nu{}^a - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\,e_\rho{}^a \ = \ \nabla_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b\,e_\nu{}^b \\ &\equiv \ \mathcal{D}_\mu e_\nu{}^a\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

これを多脚場条件 (vielbein postulate) と呼ぶ。この定義により、スピン接続もアフィン接続に内蔵されていたトーションを一般に内蔵し得ることが分かる:

$$D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a \ = \ -2T^\rho{}_{\mu\nu}\,e_\rho{}^a\,. \tag{2.27}$$

多脚場条件を用いると、アフィン接続から得られる曲率 $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)$ (2.8) とスピン接続から得られる曲率 $R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)$ (2.25) が同等であることが分かる:

$$\begin{aligned} R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) &= \eta_{bc}\, e_a{}^{\rho}\, e_{\sigma}{}^{c}\, R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega) \,, && (2.28a) \\ R^{\rho}{}_{\mu}(\Gamma) \;=\; g^{\sigma\nu}\, R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) &= e_{\mu}{}^{c}\, e_a{}^{\rho}\, \delta_b^d\, R^{ab}{}_{cd}(\omega) \;=\; R^{\rho}{}_{\mu}(\omega) \,, && (2.28b) \\ R(\Gamma) \;=\; R^{\mu}{}_{\mu}(\Gamma) &= R^{a}{}_{a}(\omega) \;=\; R(\omega) \,. && (2.28c) \end{aligned}$$

これにより、曲がった時空の場の理論を一般に扱う場合、(2.13) で与えた Einstein-Hilbert 作用はスピン接続でも記述できる。

なお、共変微分の記号が混乱する場合があるので、接続を明示して

$$\nabla_{\mu} \;\equiv\; D_{\mu}(\Gamma) \,, \qquad \mathcal{D}_{\mu} \;\equiv\; D_{\mu}(\omega, \Gamma) \,, \tag{2.29}$$

とする場合がある。

2.4　局所的超対称性・超重力理論

ここでは、超対称性を時空座標に依存した局所的超対称性 (つまりゲージ対称性) に格上げした理論を考える。超対称代数には並進の生成子 $\mathsf{P}_{\mu} = e_{\mu}{}^{a}\mathsf{P}_a$ が自然に組み込まれていた [3,4]。超対称性をゲージ化するとは、つまり並進対称性をゲージ化することであり、それは一般座標変換に他ならない。そのため、ゲージ化された超対称性理論は、重力理論を含むことになる。そして、一般相対論において時空の接空間が持っている、生成子 P_a と M_{ab} で構成される Poincaré 代数は、次の超 Poincaré 代数に拡張される:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}[\mathsf{M}_{ab}, \mathsf{M}_{cd}] &= \eta_{ac}\,\mathsf{M}_{bd} + \eta_{bd}\,\mathsf{M}_{ac} - \eta_{ad}\,\mathsf{M}_{bc} - \eta_{bc}\,\mathsf{M}_{ad} \,, && (2.30a) \\ [\mathsf{M}_{ab}, \mathsf{P}_c] &= \mathrm{i}\,\eta_{bc}\,\mathsf{P}_a - \mathrm{i}\,\eta_{ac}\,\mathsf{P}_b \,, && (2.30b) \\ [\mathsf{P}_a, \mathsf{P}_b] &= 0 \,, && (2.30c) \\ [\mathsf{M}_{ab}, \mathsf{Q}_{\alpha}] &= -\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma_{ab})_{\alpha}{}^{\beta}\mathsf{Q}_{\beta} \,, && (2.30d) \\ [\mathsf{P}_a, \mathsf{Q}_{\alpha}] &= 0 \,, && (2.30e) \\ \{\mathsf{Q}_{\alpha}, \overline{\mathsf{Q}}^{\beta}\} &= -2\mathrm{i}\,(\gamma^a)_{\alpha}{}^{\beta}\,\mathsf{P}_a \,. && (2.30f) \end{aligned}$$

重力理論は、素粒子論の言葉で言えばスピン 2 の重力子 (グラビトン, graviton) の理論である。重力子は多脚場 $e_{\mu}{}^{a}(x)$ が担う。重力理論を超対称化すると、スピン $\frac{3}{2}$ のフェルミオン的な粒子を運ぶ場 $\Psi_{\mu}(x)$ が必要になる。このフェルミオンはグラビティーノ

(gravitino) と呼ばれ、Rarita-Schwinger 場として記述される。この $\Psi_\mu(x)$ はゲージ化された超対称変換のゲージ場とみなすことも可能である。

多脚場と Rarita-Schwinger 場のみで構成される単純超重力理論は次で与えられる [5]:

$$\mathscr{L} \ = \ \frac{e}{2\kappa^2}\Big\{ \widehat{R} - \frac{1}{2}\overline{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \widehat{D}_\nu \Psi_\rho \Big\} \, . \tag{2.31}$$

ここで次の定義を導入している:

$$\begin{aligned} e \ &\equiv \ \det e_\mu{}^a \ = \ \sqrt{-g} \, , & (2.32\text{a}) \\ \widehat{R} \ &= \ \widehat{R}^{ab}{}_{\mu\nu} \, e_a{}^\mu \, e_b{}^\nu \, , & (2.32\text{b}) \\ \widehat{R}^{ab}{}_{\mu\nu} \ &= \ \partial_\mu \widehat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} + \widehat{\omega}_\mu{}^a{}_c \, \widehat{\omega}_\nu{}^{cb} - \widehat{\omega}_\nu{}^a{}_c \, \widehat{\omega}_\mu{}^{cb} \, , & (2.32\text{c}) \\ \widehat{D}_{[\nu} \Psi_{\rho]} \ &= \ \Big\{ \partial_{[\nu} + \frac{1}{4} \widehat{\omega}_{[\nu}{}^{ab} \gamma_{ab} \Big\} \Psi_{\rho]} \, , & (2.32\text{d}) \\ \widehat{\omega}_{\mu ab} \ &= \ \omega_{\mu ab} + \frac{1}{8} \Big(\overline{\Psi}_\mu \gamma_a \Psi_b - \overline{\Psi}_\mu \gamma_b \Psi_a + \overline{\Psi}_a \gamma_\mu \Psi_b \Big) \, . & (2.32\text{e}) \end{aligned}$$

(2.27) と比較すると、$\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$ で定義されるスピン接続と共変微分は、グラビティーノを起源とするトーションを持つことが分かる:

$$\widehat{D}_\mu e_\nu{}^a - \widehat{D}_\nu e_\mu{}^a \ = \ \frac{1}{4} \overline{\Psi}_\mu \gamma^a \Psi_\nu \, . \tag{2.33}$$

単純超重力理論 (2.31) は、一般座標変換 δ_G、局所 Lorentz 変換 δ_L、そして局所超対称変換 δ_Q の下で不変である:

$$\begin{aligned} \delta_G e_\mu{}^a \ &= \ \xi^\nu \, \partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu \xi^\nu \, e_\nu{}^a \, , & \delta_G \Psi_\mu \ &= \ \xi^\nu \partial_\nu \Psi_\mu + \partial_\mu \xi^\nu \Psi_\nu \, , & (2.34\text{a}) \\ \delta_L e_\mu{}^a \ &= \ -\lambda^a{}_b \, e_\mu{}^b \, , & \delta_L \Psi_\mu \ &= \ -\frac{1}{4} \lambda^{ab} \gamma_{ab} \, \Psi_\mu \, , & (2.34\text{b}) \\ \delta_Q e_\mu{}^a \ &= \ \frac{1}{4} \overline{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \, , & \delta_Q \Psi_\mu \ &= \ \widehat{D}_\mu \epsilon \ = \ \Big(\partial_\mu + \frac{1}{4} \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} \gamma_{ab} \Big) \epsilon \, . & (2.34\text{c}) \end{aligned}$$

ξ^μ, $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$, $\epsilon = C\overline{\epsilon}^{\mathrm{T}}$ はそれぞれの変換のパラメータであり時空座標に依存する。

後々議論する時空のコンパクト化において、コンパクト化された空間の情報は、グラビティーノの超対称変換則 $\delta_Q \Psi_\mu = \widehat{D}_\mu \epsilon$ の振る舞いに支配される。

2.5　微分形式

超重力理論では様々な種類の場が非自明な局所的変換を有する。その様な理論を記述するには、添字があまり登場しない方が見通しが良く、理論の構造が理解しやすくなる。

[5] 文献によって作用や共変微分の符号の定義にばらつきがある。それについては付録 C にまとめる。

そのような記述方法の一つに微分形式がある。ここでは微分形式を紹介し、今後の議論の助けにしよう。まずは計量の符号に依存しない共通部分を記述する。微分形式の基本単位は基底 $\mathrm{d}x^\mu$ である。これが p 個反対称積 (wedge product) の形で並んだ次の量を p-形式 (p-form) と呼ぶ:

$$A_p \;\equiv\; \frac{1}{p!}\,A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\,. \tag{2.35}$$

ここで $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ の添字は完全反対称である。p-形式 A_p と q-形式 B_q の外積 (exterior product) は、それらをそのまま並べれば良い:

$$\begin{aligned} A_p\wedge B_q \;&=\; \frac{1}{p!\cdot q!}\,A_{\mu_1\cdots\mu_p}B_{\nu_1\cdots\nu_q}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_q} \\ &=\; (-1)^{pq}\,B_q\wedge A_p\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

p-形式 A_p の外微分 (exterior derivative) を定義する:

$$\mathrm{d}A_p \;\equiv\; \frac{1}{p!}\,\partial_\nu A_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} \;\equiv\; F_{p+1}\,, \tag{2.37a}$$

$$F_{p+1} \;\equiv\; \frac{1}{(p+1)!}\,F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}\,, \tag{2.37b}$$

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} \;=\; (p+1)\,\partial_{[\mu_1}A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}\,. \tag{2.37c}$$

微分形式の外積に対する外微分は次の様に符号が定義される:

$$\mathrm{d}(A_p\wedge B_q) \;=\; (\mathrm{d}A_p)\wedge B_q + (-1)^p\,A_p\wedge(\mathrm{d}B_q)\,. \tag{2.38}$$

外微分は 2 回行うとゼロ ($\mathrm{d}^2=0$) になる:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2A_p \;&=\; \frac{1}{p!}\,\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}A_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_2}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}} \\ &=\; -\frac{1}{p!}\,\partial_{\nu_2}\partial_{\nu_1}A_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\nu_2}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}} \;=\; -\mathrm{d}^2A_p \\ &=\; 0\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

p-形式 A_p とベクトル場 X に対する内部積 (interior product) を定義する:

$$i_XA_p \;\equiv\; \frac{1}{p!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}X^{\mu_k}A_{\mu_1\cdots\mu_k\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{\mu_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\,, \tag{2.40a}$$

$$X \;\equiv\; X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.40b}$$

ここで $\widehat{\mathrm{d}x^\mu}$ は、その部分を除くという意味である。以上を用いると、第 2.2 節で扱った $x\to x+\xi$ における Lie 微分も微分形式で表現できる:

$$\delta_{\mathrm{L}}(\xi)A_p \;=\; -\mathcal{L}_\xi A_p\,, \qquad \mathcal{L}_\xi \;\equiv\; \mathrm{d}i_\xi + i_\xi\mathrm{d}\,, \qquad \xi \;=\; \xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.41}$$

2.5.1 D 次元 Lorentz 計量の時空における Hodge 双対

D 次元 Lorentz 計量での微分形式をまとめる。ここで $g_D = \det g_{\mu\nu}$ という記号が頻繁に登場する。まずは体積要素を次の様に定義する:

$$(\text{vol.})_D \ \equiv \ \sqrt{|g_D|}\, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D-1} \ = \ e^{\hat{0}} \wedge e^{\hat{1}} \wedge \cdots \wedge e^{(\widehat{D-1})} \, . \tag{2.42}$$

p-形式と体積要素に対しての Hodge 双対を次の様に導入する:

$$*\omega_p \ \equiv \ \frac{\sqrt{|g_D|}}{p!(D-p)!}\, \omega^{\mu_1 \cdots \mu_p}\, \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_p \nu_{p+1} \cdots \nu_D}\, \mathrm{d}x^{\nu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_D} \, , \tag{2.43a}$$

$$\begin{aligned} *1 \ &= \ \frac{\sqrt{|g_D|}}{D!}\, \varepsilon_{\nu_1 \cdots \nu_D}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_D} \ = \ -\sqrt{|g_D|}\, \mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D-1} \\ &= \ -(\text{vol.})_D \, . \end{aligned} \tag{2.43b}$$

ここで不変テンソルの規格化を $\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\cdots(\widehat{D-1})} = +1$ としている。微分形式、特に不変テンソル $\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D}$ の規格化については文献によって様々であるため、実際に計算をするときには注意を要する。特に Hodge 双対について、このノートでのルールは付録 D を参照すること。

2.5.2 微分形式による多脚場・スピン接続・曲率

第 2.3 節で導入した多脚場による記述は微分形式と相性が良い。多脚場 $e_\mu{}^a$ と基底形式 $\mathrm{d}x^\mu$ を組み合わせて 1-形式 $e^a = e_\mu{}^a \mathrm{d}x^\mu$ を導入し、これに対して外微分を作用していくだけで曲率が得られる。それを具体的に評価しよう。まずスピン接続とトーションについての微分形式は次で与えられる:

$$De^a \ \equiv \ \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \ = \ -2T^a \, , \tag{2.44a}$$

$$T^a \ \equiv \ \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \, , \qquad \omega^{ab} \ \equiv \ \omega_\mu{}^{ab}\, \mathrm{d}x^\mu \, . \tag{2.44b}$$

De^a は多脚場に対する共変微分 (2.23) を微分形式で表記したものである。(2.27) で登場したトーションの表記とは $T^\rho{}_{\mu\nu} = T^a{}_{\mu\nu}\, e_a{}^\rho$ でつながっている。共変微分についての微分形式を用いて、曲率が与えられる [6]:

$$D \wedge De^a \ = \ \mathrm{d} \wedge (De^a) + \omega^a{}_b \wedge De^b \ \equiv \ R^a{}_b \wedge e^b \, , \tag{2.45a}$$

$$R^a{}_b \ = \ \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \, , \qquad R^{ab} \ \equiv \ \frac{1}{2} R^{ab}{}_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \, . \tag{2.45b}$$

[6] 多脚場 1-形式 e^a、スピン接続 1-形式 ω^{ab}、トーション 2-形式 T^a、曲率 2-形式 R^{ab} については次数を省略することが多い。

2.5.3　微分形式による場の理論の運動項の表示

場の理論の運動項も微分形式を用いると簡単になる。ここでは Lorentz 符号での曲がった 4 次元時空について、第 1.3 節や第 1.4 節で登場した実スカラー場 $\phi(x)$ やベクトル場 $A_\mu(x)$ の運動項を表記しておこう (付録 D で接空間上の不変テンソルを $\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = +\alpha$ と規格化している):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi \wedge *\mathrm{d}\phi &= \Big\{ (\partial_\mu \phi)\, \mathrm{d}x^\mu \Big\} \wedge \Big\{ \frac{\sqrt{-g}}{3! \cdot 1!} (\partial^\nu \phi)\, \varepsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\, \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\lambda \Big\} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{3!} (\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi)\, \varepsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^\lambda \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{3!} (\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi)\, \varepsilon_{\nu\rho\sigma\lambda} \Big(\frac{1}{\alpha} \varepsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}\, \mathrm{d}^4 x \Big) \ = \ \mathrm{d}^4 x \frac{\sqrt{-g}}{3! \alpha} (\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi) \big(-3! \alpha^2\, \delta^\mu_\nu \big) \\
&= (-\alpha)\, \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, (\partial_\mu \phi)^2 \,,
\end{aligned} \tag{2.46a}$$

$$\begin{aligned}
F_2 \wedge *F_2 &= \Big\{ \frac{1}{2!} F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \Big\} \wedge \Big\{ \frac{\sqrt{-g}}{2! \cdot 2!} F^{\rho\sigma}\, \varepsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\, \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\delta \Big\} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{(2!)^3} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma}\, \varepsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\delta \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{(2!)^3} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma}\, \varepsilon_{\rho\sigma\lambda\delta} \Big(\frac{1}{\alpha} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\delta}\, \mathrm{d}^4 x \Big) \ = \ \mathrm{d}^4 x \frac{\sqrt{-g}}{(2!)^3 \alpha} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \Big(-(2!)^2 \alpha^2\, \delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \Big) \\
&= (-\alpha)\, \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \Big(\frac{1}{2!} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Big) .
\end{aligned} \tag{2.46b}$$

なお、ゲージ場の強さについては、ここで後の便宜を図って、$U(1)$ 群の場合と非可換群の場合の違いを明記しておく:

$$U(1)\ \text{群}: \quad A_1 \ = \ A_\mu\, \mathrm{d}x^\mu \,, \qquad F_2 \ = \ \mathrm{d}A_1 \,, \tag{2.47a}$$

$$\text{非可換群}: \quad A_1 \ = \ A^a_\mu T^a\, \mathrm{d}x^\mu \,, \qquad F_2 \ = \ \mathrm{d}A_1 - \mathrm{i} A_1 \wedge A_1 \,. \tag{2.47b}$$

ここで T^a は非可換群の生成子であり、次の性質を満たす:

$$(T^a)^\dagger \ = \ T^a \,, \qquad [T^a, T^b] \ = \ \mathrm{i} f^{ab}{}_c T^c \,, \qquad \mathrm{tr}_{\mathrm{R}}(T^a T^b) \ = \ C_{2\mathrm{R}}\, \delta^{ab} \,, \tag{2.48a}$$

$$(T_a)_b{}^c \ = \ \mathrm{i} f_{ba}{}^c \ = \ [\mathrm{ad}(T_a)]_b{}^c \,. \tag{2.48b}$$

ここで tr_{R} とは生成子 T^a のある表現 R におけるトレースを意味する。そして $C_{2\mathrm{R}}$ はその時の規格化因子である。

3　高次元超重力理論と超弦理論

3.1　様々な時空次元でのスピノール

高次元時空での超対称理論を理解するために、高次元時空での場の自由度を知っておく必要がある。まずは様々なスピノールの成分の数を紹介しよう。

時空次元 D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Dirac	$2_{\mathbb{C}}$	$2_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$
Majorana	$2_{\mathbb{R}}$	$2_{\mathbb{R}}$	$4_{\mathbb{R}}$	–	–	–	$16_{\mathbb{R}}$	$16_{\mathbb{R}}$	$32_{\mathbb{R}}$	$32_{\mathbb{R}}$
s-Majorana	–	–	–	$4_{\mathbb{R}}$	$8_{\mathbb{R}}$	$8_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–
Weyl	$1_{\mathbb{C}}$(S)	–	$2_{\mathbb{C}}$(C)	–	$4_{\mathbb{C}}$(S)	–	$8_{\mathbb{C}}$(C)	–	$16_{\mathbb{C}}$(S)	–
Majorana-Weyl	$1_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–	–	–	–	$16_{\mathbb{R}}$	–
s-Majorana-Weyl	–	–	–	–	$4_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–	–

表 3：$SO(D-1,1)$ Lorentz 対称性を持つ D 次元 Minkowski 時空でのスピノール. “s-” は「シンプレクティック」の略.

表 3 では質量殻外でのスピノールの成分の数をまとめている。それぞれの添字は各成分の体を示し、Weyl スピノールの欄における記号 “(S)” と “(C)” はそれぞれ、複素共役変換において「自分自身が複素共役」「複素共役である別の表現がある」ことを意味する。これらを見出す具体的な議論は、[6,8] を参考にして付録 B にまとめておいた。

なお、Lorentz 対称性の代わりに $SO(d)$ 回転対称性を持つ d 次元 Euclid 空間におけるスピノールの分類を付録 B の表 17 に、$SO(d-2,2)$ 回転対称性を持つ d 次元空間におけるスピノールの分類を表 18 に、それぞれまとめておく。特に Euclid 空間でのスピノールの分類は、第 4 章以後のコンパクト化された空間上に乗る「超対称性」の議論において重要である。

3.2　場の自由度

スカラー場以外は質量殻外のときと質量殻上 (on-shell) のときの自由度にずれが生じる。ここでは、一般の時空次元に済む様々な場の自由度勘定をまとめておく。なお、テンソル場についてはゲージ自由度を持つ場合、つまり質量項がゼロの場合を扱うとする。

3.2.1 質量殻外での自由度

ベクトル場 A_1 : D 成分全てが物理的自由度ではなく、$\delta A_1 = \mathrm{d}\lambda$ というゲージ変換の自由度 λ (1) が余分である:

$$\#(A_1) \;=\; D-1\,. \tag{3.1}$$

2 階反対称テンソル場 B_2 : 反対称成分 ${}_DC_2$ 全てが物理的自由度ではなく、$\delta B_2 = \mathrm{d}\lambda_1$ というゲージ変換の自由度 λ_1 ($\lambda_1 \sim \lambda_1 + \mathrm{d}\lambda$ なので自由度 $D-1$) が余分である:

$$\#(B_2) \;=\; {}_DC_2 - (D-1) \;=\; \frac{1}{2}(D-1)(D-2) \;=\; {}_{D-1}C_2\,. \tag{3.2}$$

3 階反対称テンソル場 C_3 : 反対称成分 ${}_DC_3$ 全てが物理的自由度ではなく、$\delta C_3 = \mathrm{d}\lambda_2$ というゲージ変換の自由度 λ_2 ($\lambda_2 \sim \lambda_2 + \mathrm{d}\lambda_1$ なので自由度 ${}_{D-1}C_2$) が余分である:

$$\#(C_3) \;=\; {}_DC_3 -{}_{D-1} C_2 \;=\; \frac{D!}{3!(D-3)!} - \frac{(D-1)!}{2!(D-1-2)!} \;=\; {}_{D-1}C_3\,. \tag{3.3}$$

p 階反対称テンソル場 D_p : 反対称成分 ${}_DC_p$ 全てが物理的自由度ではなく、$\delta D_p = \mathrm{d}\lambda_{p-1}$ というゲージ変換の自由度 λ_{p-1} ($\lambda_{p-1} \sim \lambda_{p-1} + \mathrm{d}\lambda_{p-2}$ なので自由度 ${}_{D-1}C_{p-1}$) が余分である:

$$\#(D_p) \;=\; {}_DC_p -{}_{D-1} C_{p-1} \;=\; \frac{D!}{p!(D-p)!} - \frac{(D-1)!}{(p-1)!(D-p)!} \;=\; {}_{D-1}C_p\,. \tag{3.4}$$

重力場 ${e_M}^A$: D 次元時空の多脚場には素朴には $D \times D$ 成分ある。しかしこのうち局所 Lorentz 変換 M_{AB} ($\frac{D(D-1)}{2}$)、一般座標変換 P_M (D) が担うゲージ自由度だけ非物理的である。よって

$$\#({e_M}^A) \;=\; D^2 - \frac{D(D-1)}{2} - D \;=\; \frac{1}{2}D(D-1)\,. \tag{3.5}$$

Dirac スピノール場 ψ : Dirac スピノール場の自由度は時空次元にのみ依存する:

$$\#(\psi) \;=\; 2 \times 2^{[D/2]}\,. \tag{3.6}$$

(シンプレクティック) Majorana, Weyl, (シンプレクティック) Majorana-Weyl スピノールのときは、上の自由度にそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ をかける。スピノールに添字がついている時はその性質に関係した自由度がかけられる。

Dirac グラビティーノ場 Ψ_M : Dirac グラビティーノ場は局所超対称変換のゲージ場であるとみなすことができる。そのため、この自由度は、Dirac スピノール場の自由度に局所座標の自由度を掛け合わせ、局所超対称性のゲージ自由度 (Dirac スピノールで与えられる) を取り除いたものになる:

$$\begin{aligned}\#(\Psi_M) &= 2 \times 2^{[D/2]} \times D - 2 \times 2^{[D/2]} \\ &= 2 \times 2^{[D/2]}(D-1)\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

(シンプレクティック) Majorana, Weyl, (シンプレクティック) Majorana-Weyl スピノールのときは、上の自由度にそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ をかける。スピノールに添字がついている時はその性質に関係した自由度がかけられる。

3.2.2　質量殻自由度

テンソル場の自由度勘定とスピノール場の自由度勘定は若干異なる操作があるので注意が必要である。

まずテンソル場については、質量殻外の自由度勘定の場合に比べて場の自由度が「光円錐上に制限される」ので、光円錐に垂直な $D-2$ 方向と光円錐座標での時間方向を合わせた部分空間での勘定、つまり「$(D-2)+1 = D-1$ 次元空間」と考える。つまり上記の計算で $D \to D-1$ とすればよい。

スピノール場については、質量殻上でのテンソル場の自由度の勘定方法と若干異なる。スピノール場の構造上、運動方程式下での自由度は、質量殻外での D を $D-2$ に変更したものとなる。

ベクトル場 A_1 : D 成分全てが物理的自由度ではなく、$\delta A_1 = \mathrm{d}\lambda$ というゲージ変換の自由度 λ (1) が余分である:

$$\#(A_1) \ = \ (D-1) - 1 \ = \ D-2\,. \tag{3.8}$$

2 階反対称テンソル場 B_2 : 反対称成分全てが物理的自由度ではなく、$\delta B_2 = \mathrm{d}\lambda_1$ というゲージ変換の自由度 λ_1 $(D-2)$ が余分である:

$$\#(B_2) \ = \ {}_{D-1}C_2 - (D-2) \ = \ \frac{1}{2}(D-2)(D-3) \ = \ {}_{D-2}C_2\,. \tag{3.9}$$

3 階反対称テンソル場 C_3 : 反対称成分全てが物理的自由度ではなく、$\delta C_3 = \mathrm{d}\lambda_2$ というゲージ変換の自由度 λ_2 $({}_{D-2}C_2)$ が余分である:

$$\#(C_3) \ = \ {}_{D-1}C_3 - {}_{D-2}C_2 \ = \ {}_{D-2}C_3\,. \tag{3.10}$$

p 階反対称テンソル場 D_p：反対称成分全てが物理的自由度ではなく、$\delta D_p = \mathrm{d}\lambda_{p-1}$ というゲージ変換の自由度 λ_{p-1} $({}_{D-2}C_{p-1})$ が余分である:

$$\#(D_p) \;=\; {}_{D-1}C_p - {}_{D-2}\,C_{p-1} \;=\; {}_{D-2}C_p \,. \tag{3.11}$$

重力場 $e_M{}^A$：D 次元時空の多脚場の自由度も $D \to D-1$ とする。さらに traceless 条件が余分に追加されて次の様になる:

$$\begin{aligned}\#(e_M{}^A) \;&=\; (D-1)^2 - \frac{(D-1)(D-2)}{2} - (D-1) - 1 \;=\; \frac{1}{2}(D-1)(D-2) - 1 \\ &=\; \frac{1}{2}D(D-3)\,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Dirac スピノール場 ψ：Dirac スピノール場の自由度は次で与えられる:

$$\#(\psi) \;=\; 2 \times 2^{[(D-2)/2]}\,. \tag{3.13}$$

(シンプレクティック) Majorana, Weyl, (シンプレクティック) Majorana-Weyl スピノールのときは、上の自由度にそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ をかける。スピノールに添字がついている時はその性質に関係した自由度がかけられる。

Dirac グラビティーノ場 Ψ_M：Dirac グラビティーノ場は局所超対称変換のゲージ場であるとみなすことができる。そのためこの自由度は、Dirac スピノール場の自由度に局所座標の自由度を掛け合わせ、局所超対称性のゲージ自由度 (Dirac スピノールで与えられる) を取り除いたものになる:

$$\begin{aligned}\#(\Psi_M) \;&=\; 2 \times 2^{[(D-2)/2]} \times (D-2) - 2 \times 2^{[(D-2)/2]} \\ &=\; 2 \times 2^{[(D-2)/2]}(D-3)\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

(シンプレクティック) Majorana, Weyl, (シンプレクティック) Majorana-Weyl スピノールのときは、上の自由度にそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ をかける。スピノールに添字がついている時はその性質に関係した自由度がかけられる。

3.3 11 次元超重力理論

11 次元時空で定義される超重力理論は、Majorana スピノールで与えられる超対称生成子で定義される。生成子の数は 32 個であり、これ以上でもこれ以下でもない。超対称な 11 次元の重力理論を構築するために、重力場 $e_M{}^A$ とその超対称パートナーである

グラビティーノ Ψ_M を用意する。$D=11$ の下で、それぞれの質量殻上での自由度は $\#(e_M{}^A)=44$、$\#(\Psi_M)=128$ となるが、このずれは 3 階反対称テンソル場 C_{MNP} の導入で補完される:

$$\#(C_{MNP}) \;=\; {}_{D-2}C_3 \;=\; 84\,. \tag{3.15}$$

すなわち力学的場とその質量殻自由度は表 4 にまとめられる:

3 つの力学的場による作用積分は次で与えられる ($\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}\cdots\hat{9}\hat{\natural}}=+1$ に規格化):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int \mathrm{d}^{11}x\,\mathscr{L}\,, &(3.16\text{a})\\ \mathscr{L} &= e\,R-\frac{1}{2}\,e\,\overline{\Psi}_M\Gamma^{MNP}D_N[\tfrac{1}{2}(\omega+\widehat{\omega})]\Psi_P-\frac{1}{48}\,e\,F_{MNPQ}F^{MNPQ}\\ &\quad+\frac{1}{192}\,e\,\overline{\Psi}_{[M}\Gamma^M\Gamma^{PQRS}\Gamma^N\Psi_{N]}\cdot\frac{1}{2}(F+\widehat{F})_{PQRS}\\ &\quad-\frac{1}{(144)^2}\,\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}\,F_{MNPQ}F_{RSUV}C_{WXY}\,. &(3.16\text{b}) \end{aligned}$$

ここでそれぞれの表記は次の様に定義される:

$$\begin{aligned} \omega_{MAB} &= \omega_{MAB}^{(0)}+\frac{1}{8}\Big(\overline{\Psi}_M\Gamma_A\Psi_B-\overline{\Psi}_M\Gamma_B\Psi_A+\overline{\Psi}_A\Gamma_M\Psi_B\Big)\\ &\qquad+\frac{1}{16}\overline{\Psi}_P\,\Gamma_{MAB}{}^{PQ}\,\Psi_Q\,, &(3.17\text{a})\\ \widehat{\omega}_{MAB} &= \omega_{MAB}-\frac{1}{16}\overline{\Psi}_P\,\Gamma_{MAB}{}^{PQ}\,\Psi_Q\,, &(3.17\text{b})\\ F_{MNPQ} &= 4\partial_{[M}C_{NPQ]}\,, &(3.17\text{c})\\ \widehat{F}_{MNPQ} &\equiv F_{MNPQ}-\frac{3}{2}\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_{NP}\Psi_{Q]}\,. &(3.17\text{d}) \end{aligned}$$

ここで $\omega_{MAB}^{(0)}$ はトーションを含まない Levi-Civita スピン接続である。さらに超対称変換は次で与えられる:

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}\Gamma^A\Psi_M\,, \qquad \delta C_{MNP} = \frac{3}{4}\bar{\varepsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]}\,, \tag{3.18a}$$

$$\delta\Psi_M = D_M(\widehat{\omega})\varepsilon-T_M{}^{NPQR}\widehat{F}_{NPQR}\,\varepsilon\,, \qquad T_M{}^{NPQR} \equiv \frac{1}{288}\big(\Gamma_M{}^{NPQR}-8\,\delta_M^{[N}\Gamma^{PQR]}\big)\,. \tag{3.18b}$$

ボソン	フェルミオン
G_{MN} :　計量　(44) C_{MNP} :　3-形式　(84)	Ψ_M :　グラビティーノ　(128)

表 4：11 次元超重力理論における力学的場とその質量殻自由度

ここで ε は局所超対称変換パラメータであり、11 次元 Majorana スピノールである。これらの導出方法は [1,2,9] が参考になる。

なお、11 次元理論の作用積分 (3.16) のボソン場部分を微分形式 (第 2.5 節を参照) で表示すると次の様になる:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int \mathrm{d}^{11}x\,\sqrt{-G}\,\Big\{R - \frac{1}{48}F_{MNPQ}F^{MNPQ}\Big\} \\
&\quad - \frac{1}{2\kappa_{11}^2(144)^2}\int \mathrm{d}^{11}x\,\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}\,F_{MNPQ}F_{RSUV}C_{WXY} \\
&\quad + \text{(fermionic terms)} \\
&= \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int \Big\{(\mathrm{vol.})_{11}\Big(R - \frac{1}{2}|F_4|^2\Big) - \frac{1}{6}F_4\wedge F_4\wedge C_3\Big\} \\
&\quad + \text{(fermionic terms)}\,.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

3.4　10 次元超重力理論

10 次元における既約スピノールは実数勘定で 16 自由度を持つ Majorana-Weyl スピノールである。10 次元の超重力理論は、32 個の超対称生成子で定義される超重力理論と、16 個の超対称生成子で定義される超重力理論がある。32 個の生成子を持つ超重力理論はさらに $\mathcal{N}=(1,1)$ 型と $\mathcal{N}=(2,0)$ 型に分けられる。前者は超対称生成子を与える 2 つの Majorana-Weyl スピノールのカイラリティが互いに逆、後者は同じである。

なお、ここではボソン場部分のみを議論することにする。フェルミオン場も合わせて勉強したい場合は [2] を参照すると良い。

3.4.1　$\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論

$\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論は、11 次元超重力理論から 1 次元空間 (10-方向としておこう) をコンパクト化して得られる。そのとき、11 次元の場は 10 次元の場に次の様に書き換えられる ($M,N,\ldots=0,1,\cdots 9$, $\natural=10$):

$$
\widehat{G}_{MN} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\phi}G_{MN} + \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\phi}C_M C_N\,, \tag{3.20a}
$$

$$
\widehat{G}_{M\natural} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\phi}C_M\,, \qquad \widehat{G}_{\natural\natural} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\phi}\,, \tag{3.20b}
$$

$$
\widehat{C}_{MNP} = C_{MNP}\,, \qquad \widehat{C}_{MN\natural} = \frac{2}{3}B_{MN}\,. \tag{3.20c}
$$

左辺にある場が 11 次元時空での場であり、右辺に登場する場が 10 次元時空の場である。11 次元のグラビティーノ $\widehat{\Psi}_M$ も 10 次元のグラビティーノ Ψ_M^i とディラティーノ (dilatino) λ^i に分離する (詳細は [2,9])。なお、上付き添字 i は 2 種類の Majorana-Weyl をラベルしている ($i=1,2$)。10 次元時空の場の質量殻自由度を表 5 にまとめよう:

NS-NS セクター			R-R セクター			フェルミオン		
G_{MN} :	計量	(35)	C_M :	R-R 1-形式	(8)	Ψ_M^i :	グラビティーノ	$(56)_\pm$
B_{MN} :	NS-NS B 場	(28)	C_{MNP} :	R-R 3-形式	(56)	λ^i :	ディラティーノ	$(8)_\mp$
ϕ :	ディラトン	(1)						

表 5：$\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論における力学的場とその質量殻自由度

NS-NS, R-R はそれぞれ「Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz」「Ramond–Ramond」の略である。この名前は超弦の世界面の理論における境界条件に由来する [8]。また、括弧の中の数字は質量殻自由度、フェルミオンの自由度の添字はカイラリティを表す。ボソンとフェルミオンの質量殻自由度は $35+28+1+8+56=2\times(56+8)$ のように釣り合っている。

場の書き換え (3.20) の下で、11 次元超重力理論から 10 次元 $\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論の作用積分が得られる:

$$\begin{aligned} S_{\rm str}^{\rm IIA} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\rm str}}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\Big\{R^{\rm str}+4(\partial_M\phi)^2-\frac{1}{2}|H_3|^2\Big\} \\ &\quad -\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\rm str}}\Big(|F_2|^2+|\widetilde{F}_4|^2\Big)-\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int B_2\wedge F_4\wedge F_4 \\ &\quad +(\text{fermionic terms})\,, \end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$H_3 = \mathrm{d}B_2\,, \qquad F_2 = \mathrm{d}C_1\,, \tag{3.21b}$$

$$\widetilde{F}_4 = F_4 - C_1\wedge H_3\,, \qquad F_4 = \mathrm{d}C_3\,, \tag{3.21c}$$

$$2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7\alpha'^4\,, \tag{3.21d}$$

$$|F_p|^2 \equiv \frac{1}{p!}G^{M_1N_1}\cdots G^{M_pN_p}F_{M_1\cdots M_p}F_{N_1\cdots N_p}\,. \tag{3.21e}$$

Einstein-Hilbert 項に因子 $\mathrm{e}^{-2\phi}$ が付いている。この形式は string frame と呼ばれ、弦の世界面の理論と親和性が高い。一方でこの因子がない通常の重力理論の形式を Einstein frame と呼ぶ。この二つの形式は次の様に計量のスケール変換で互いに移り合う [6]:

$$G_{MN}^{\rm string} = \exp\Big(\frac{4\phi}{D-2}\Big)\,G_{MN}^{\rm Einstein}\,. \tag{3.22}$$

この変換公式は任意の時空次元 D で実行可能である。今の場合は $D=10$ である。

3.4.2　$\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論

10 次元には $\mathcal{N}=(1,1)$ とは異なるカイラルな理論が独立に定義できる。string frame での $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論の作用積分は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
S_{\rm str}^{\rm IIB} \ &= \ \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int {\rm d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\rm str}}\,{\rm e}^{-2\phi}\Big\{R^{\rm str}+4(\partial_M\phi)^2-\frac{1}{2}|H_3|^2\Big\} \\
&\quad -\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int {\rm d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\rm str}}\,\Big(|F_1|^2+|\widetilde{F}_3|^2+\frac{1}{2}|\widetilde{F}_5|^2\Big)-\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int C_4^{(+)}\wedge H_3\wedge F_3 \\
&\quad +(\text{fermionic terms})\,, \qquad (3.23a) \\
H_3 \ &= \ {\rm d}B_2^{(1)}\,, \qquad F_1 \ = \ {\rm d}C\,, \qquad (3.23b) \\
\widetilde{F}_3 \ &= \ F_3-CH_3\,, \qquad F_3 \ = \ {\rm d}B_2^{(2)}\,, \qquad (3.23c) \\
\widetilde{F}_5 \ &= \ F_5-\frac{1}{2}B_2^{(2)}\wedge H_3+\frac{1}{2}B_2^{(1)}\wedge F_3\,, \qquad F_5 \ = \ {\rm d}C_4^{(+)}\,, \qquad \widetilde{F}_5 \ = \ *_{10}\widetilde{F}_5\,. \qquad (3.23d)
\end{aligned}$$

この理論の場の質量殻自由度を表 6 にまとめる:

NS-NS セクター			R-R セクター			フェルミオン		
G_{MN} :	計量	(35)	$C_{MNPQ}^{(+)}$:	自己双対 4-形式	(35)	Ψ_M^i :	グラビティーノ	$(56)_{+,+}$
$B_{MN}^{(1)}$:	NS-NS B 場	(28)	$B_{MN}^{(2)}$:	R-R 2-形式	(28)			
ϕ :	ディラトン	(1)	C :	アクシオン	(1)	λ^i :	ディラティーノ	$(8)_{-,-}$

表 6：$\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論における力学的場とその質量殻自由度

3.4.3　T-duality 変換

$\mathcal{N}=(1,1)$ 型超重力理論と $\mathcal{N}=(2,0)$ 型超重力理論は、9-方向をコンパクト化すれば互いに次の T-duality 変換で移り合う。場の表記が少し混乱するので次の様にしておく:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}=(1,1):&\quad g_{MN}\,,\ B_{MN}\,,\ \phi;\ C_M\,,\ C_{MNP} \\
\mathcal{N}=(2,0):&\quad \jmath_{MN}\,,\ B_{MN}^{(1)}\,,\ \varphi;\ C\,,\ B_{MN}^{(2)}\,,\ C_{MNPQ}
\end{aligned}$$

<u>$\mathcal{N}=(1,1)$ から $\mathcal{N}=(2,0)$ へ</u>:

$$\begin{aligned}
\jmath_{MN} \ &= \ g_{MN}-\frac{g_{9M}g_{9N}-B_{9M}B_{9N}}{g_{99}}\,, \qquad \jmath_{9M} \ = \ \frac{B_{9M}}{g_{99}}\,, \qquad \jmath_{99} \ = \ \frac{1}{g_{99}}\,, \qquad (3.24a) \\
B_{MN}^{(1)} \ &= \ B_{MN}+\frac{2g_{9[M}B_{N]9}}{g_{99}}\,, \qquad B_{9M}^{(1)} \ = \ \frac{g_{9M}}{g_{99}}\,, \qquad (3.24b)
\end{aligned}$$

$$B^{(2)}_{MN} \;=\; \frac{3}{2}C_{MN9} - 2C_{[M}B_{N]9} + \frac{2g_{9[M}B_{N]9}C_9}{g_{99}}\,, \qquad B^{(2)}_{9M} \;=\; -C_M + \frac{C_9 g_{9M}}{g_{99}}\,, \tag{3.24c}$$

$$\varphi \;=\; \phi - \frac{1}{2}\log(g_{99})\,, \tag{3.24d}$$

$$C \;=\; C_9\,, \tag{3.24e}$$

$$C_{9MNP} \;=\; \frac{3}{8}\Big[C_{MNP} - C_{[M}B_{NP]} + \frac{g_{9[M}B_{NP]}C_9}{g_{99}} - \frac{3}{2}\frac{g_{9[M}C_{NP]9}}{g_{99}}\Big]\,. \tag{3.24f}$$

C_{MNPQ} については自己双対性を用いて C_{9MNP} で与えられるので省略する。

<u>$\mathcal{N}=(2,0)$ から $\mathcal{N}=(1,1)$ へ</u>:

$$g_{MN} \;=\; \jmath_{MN} - \frac{\jmath_{9M}\jmath_{9N} - B^{(1)}_{9M}B^{(1)}_{9N}}{\jmath_{99}}\,, \qquad g_{9M} \;=\; \frac{B^{(1)}_{9M}}{\jmath_{99}}\,, \qquad g_{99} \;=\; \frac{1}{\jmath_{99}}\,, \tag{3.25a}$$

$$B_{MN} \;=\; B^{(1)}_{MN} + \frac{2B^{(1)}_{9[M}\jmath_{N]9}}{\jmath_{99}}\,, \qquad B_{9M} \;=\; \frac{\jmath_{9M}}{\jmath_{99}}\,, \tag{3.25b}$$

$$\phi \;=\; \varphi - \frac{1}{2}\log(\jmath_{99})\,, \tag{3.25c}$$

$$C_M \;=\; -B^{(2)}_{9M} + CB^{(1)}_{9M}\,, \qquad C_9 \;=\; C\,, \tag{3.25d}$$

$$C_{MNP} \;=\; \frac{8}{3}C_{9MNP} + \varepsilon^{ij}\,B^{(i)}_{9[M}B^{(j)}_{NP]} + \frac{\varepsilon^{ij}B^{(i)}_{9[M}B^{(j)}_{|9|N}\jmath_{P]9}}{\jmath_{99}}\,, \tag{3.25e}$$

$$C_{9MN} \;=\; \frac{2}{3}\Big[B^{(2)}_{MN} + \frac{2B^{(2)}_{9[M}\jmath_{N]9}}{\jmath_{99}}\Big]\,. \tag{3.25f}$$

この変換は T-duality 変換についての Buscher ルール [10] と呼ばれる。

3.4.4　$\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論

16 個の超対称生成子で実現される $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論は、超対称性が $\mathcal{N}=(1,1)$, $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論に比べて制限が弱い。そのためこの理論には非可換ゲージ場が導入可能となる。$\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論の作用積分を書き下す（[11] やその勉強ノート [12,13] 及びこのノートの付録 F を参照):

$$\begin{aligned} S \;=\;& \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\mathrm{str}}}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\Big\{R^{\mathrm{str}} + 4(\partial_M\phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\Big\} \\ & - \frac{\alpha'}{8\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G^{\mathrm{str}}}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\Big\{-\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_{MN}F^{MN}\big) - R_{ABMN}(\omega_+)R^{ABMN}(\omega_+)\Big\} \\ & + (\text{fermionic terms})\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

$A_M = A_M^a T^a$ は非可換ゲージ場であり、ゲージ群 G の生成子 T^a は反エルミートであるとしている [7]。$\mathrm{tr_V}$ はゲージ群 G のベクトル表現でのトレースである。また $R_{ABMN}(\omega_+)$ はスピン接続 ω_+ で与えられる曲率である。α' は Regge パラメータであり、10 次元の重力定数 κ_{10}、ゲージ場の結合定数 g_{10} と次の関係を満たす:

$$\frac{\alpha'}{4} = \frac{\kappa_{10}^2}{2\mathrm{g}_{10}^2} \,. \tag{3.27}$$

場とその質量殻自由度は表 7 にまとめられる:

ボソン			フェルミオン		
G_{MN} :	計量	(35)	Ψ_M :	グラビティーノ	$(56)_+$
B_{MN} :	NS-NS B 場	(28)			
ϕ :	ディラトン	(1)	λ :	ディラティーノ	$(8)_-$
A_M^a :	ゲージ場	$(8 \times \dim G)$	χ^a :	ゲージーノ	$(8 \times \dim G)_+$

表 7 : $\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論における力学的場とその質量殻自由度

後に使うため、α' の最低次でフェルミオンを 2 次まで含む超対称変換を与えておこう [8]:

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{4}\overline{\varepsilon}\Gamma^A\Psi_M \,, \qquad \delta\Psi_M = D_M(\omega_-)\varepsilon = \Big(\partial_M + \frac{1}{4}\omega_{-M}{}^{AB}\Gamma_{AB}\Big)\varepsilon \,, \tag{3.28a}$$

$$\delta B_{MN} = -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\Gamma_{[M}\Psi_{N]} \,, \tag{3.28b}$$

$$\delta\phi = -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\lambda \,, \qquad \delta\lambda = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\partial\!\!\!/\phi - \frac{1}{12}H_{ABC}\Gamma^{ABC}\Big)\varepsilon \,, \tag{3.28c}$$

$$\delta A_M = \frac{1}{4}\overline{\varepsilon}\Gamma_M\chi \,, \qquad \delta\chi = -\frac{1}{4\sqrt{2}}F_{AB}\Gamma^{AB}\varepsilon \,. \tag{3.28d}$$

なお、フェルミオンの 3 次以上の項は省略している。また、次の表記を用いている:

$$\omega_{\pm M}{}^{AB} \equiv \omega_M{}^{AB}(e) \pm \frac{1}{2}H_M{}^{AB} \,, \tag{3.29a}$$

$$\begin{aligned} H_{MNP} &= 3\partial_{[M}B_{NP]} + 12\alpha'\mathrm{tr_V}\Big(A_{[M}\partial_N A_{P]} + \frac{2}{3}A_{[M}A_N A_{P]}\Big) \\ &\quad - 12\alpha'\Big(\omega_{+[M}{}^{AB}\,\partial_N\omega_{+P]}{}^{BA} + \frac{2}{3}\omega_{+[M}{}^{AB}\omega_{+N}{}^{BC}\omega_{+P]}{}^{CA}\Big) \,, \end{aligned} \tag{3.29b}$$

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + [A_M, A_N] \,, \tag{3.29c}$$

$$\mathrm{d}H_3 = -\frac{\alpha'}{2}\Big[\mathrm{tr}\big\{R_2(\omega_+)\wedge R_2(\omega_+)\big\} - \mathrm{tr_V}(F_2\wedge F_2)\Big] \,, \tag{3.29d}$$

[7] 第 2.5.3 節でのゲージ群の生成子はエルミートであることに注意。

[8] ただし $(\Psi_M, \lambda, \chi, \varepsilon)_{\text{here}} = \sqrt{2}(\Psi_M, \lambda, \chi, \epsilon)_{付録\ \mathrm{F}}$, $(H_3)_{\text{here}} = (2H_3)_{付録\ \mathrm{F}}$, $(\alpha')_{\text{here}} = (4\alpha')_{付録\ \mathrm{F}}$。

$$R_{ABCD}(\omega_+) \;=\; R_{CDAB}(\omega_-) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}H_3)_{CDAB}\,. \tag{3.29e}$$

H_3 の右辺第 3 項は Green-Schwarz アノマリー相殺機構に必要な項である [14]。

ついでに、上記でコメントした S-duality 変換を与えておこう。I 型超弦理論からの場で、右辺が (3.26) で登場したヘテロティック $SO(32)$ 弦理論の場である。混乱をさけるため、それぞれに添字 “I”, “H” を付けておく:

$$G^{\mathrm{I}}_{MN} \;=\; \mathrm{e}^{-\phi^{\mathrm{H}}} G^{\mathrm{H}}_{MN}\,, \qquad \phi^{\mathrm{I}} \;=\; -\phi^{\mathrm{H}}\,, \tag{3.30a}$$

$$F^{\mathrm{I}}_{MNP} \;=\; H^{\mathrm{H}}_{MNP}\,, \qquad C^{\mathrm{I}}_{M} \;=\; A^{\mathrm{H}}_{M}\,. \tag{3.30b}$$

3.5　アノマリー相殺

超重力理論はゲージ理論であるのでアノマリーの議論は重要であるが、このノートの主目的ではないため簡単なコメントにとどめておく [9]。11 次元超重力理論は、そもそも奇数次元なのでアノマリーは存在しない。10 次元は重力アノマリーなど厄介なものがあるが、$\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論は非カイラルな理論なので、それぞれのカイラルセクターから来るアノマリーは互いに相殺する。$\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論はカイラルな理論であるのでアノマリーが存在するが、自己双対テンソル場から来るアノマリーがそれを相殺する。$\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論が最も困難であったが、端的に言えば非可換ゲージ場の Chern-Simons 項を考慮に入れた H_{MNP} の補正 (α' 項) に、さらにスピン接続による Chern-Simons 項を導入することでアノマリーが相殺される。ただし、この相殺が実現するためのゲージ群は $SO(32)$ もしくは $E_8 \times E_8$ に限られる。

3.6　超重力理論・超弦理論・M 理論

ここまでは 11 次元超重力理論と 10 次元時空上の超重力理論を、超対称性ごとに詳しく述べた。これらは、10 次元で定義される 5 つの超弦理論とそれらを内包する M 理論の低エネルギー有効理論として現在も生きている。$\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論と $\mathcal{N} = (2,0)$ 超重力理論はそれぞれ IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論の有効理論であり、$\mathcal{N} = (1,0)$ 超重力理論は I 型超弦理論やヘテロティック弦理論の有効理論である。IIA 型、IIB 型、ヘテロティック弦は全て閉弦の理論であるが [10]、I 型は閉弦と開弦の理論である。

[9] アノマリーとその相殺についてはたくさんの教科書に記載されている ([2, 8, 14–17] など)。
[10] D ブレーンの発見 [18] 以来 IIA/IIB 型超弦理論にも開弦が存在すると理解されている。

10 次元における 5 つの超弦理論と 11 次元超重力理論は双対性によって互いに関係している。IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論は互いに T-duality 変換で繋がる。ヘテロティック $E_8 \times E_8$ 弦理論とヘテロティック $SO(32)$ 弦理論も互いに T-duality 変換で関係する。IIB 型超弦理論を適切に半分だけ自由度を落とすと I 型超弦理論が登場する。I 型超弦理論とヘテロティック $SO(32)$ 弦理論は互いに S-duality 変換で繋がっている。そして、IIA 型超弦理論において弦の強結合極限が M 理論である [8]。

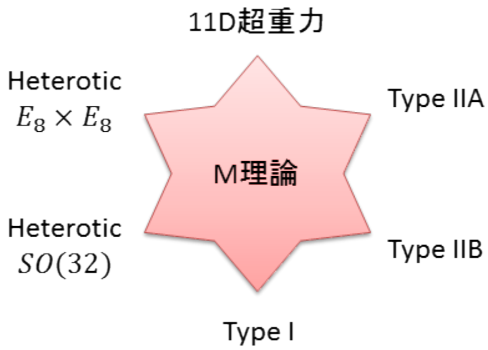

図 1：10 次元超弦理論と 11 次元理論が双対性で結び付く.

M 理論の原論文は [19] であるが、初めて「M 理論」という単語が登場した文献は [20] である。M 理論に至る関係論文を編纂した冊子が [21] である [11]。

[11] なお、個人的には講義録 [22] もお気に入りである。

4 様々なコンパクト化

超弦理論は、平坦な 10 次元時空上の摂動論的性質については理解されている。しかしながら非摂動論的性質はまだ完全には理解されていない。そして摂動論の枠内では時空がコンパクト化される満足な物理的機構がない[12]。そのため、ここでは「コンパクト化された後」の古典解がどのような性質を持っているかを紹介する。

10 次元もしくは 11 次元時空 (D 次元時空 $\mathcal{M}_D$ としてまとめておこう) が、コンパクト化される d 次元空間 $\mathcal{K}_d$ とコンパクト化されずに開いたまま残る $D-d$ 次元時空 $\mathcal{M}_{D-d}$ に分離していると仮定する[13]:

$$\mathcal{M}_D \ = \ \mathcal{M}_{D-d} \times \mathcal{K}_d \, . \tag{4.1a}$$

この分離によって、接空間の局所 Lorentz 対称性が次の様に破れる:

$$SO(D-1,1) \ \to \ SO(D-d-1,1) \times SO(d) \, . \tag{4.1b}$$

また、$\mathcal{M}_D$ 上の背景時空としての計量 G_{MN} が次の様に分解される:

$$\mathrm{d}s_D^2 \ = \ G_{MN}(x^P)\, \mathrm{d}x^M \otimes \mathrm{d}x^N \ \equiv \ g_{\mu\nu}(x^\rho)\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu + g_{mn}(y^p)\, \mathrm{d}y^m \otimes \mathrm{d}y^n \, . \tag{4.1c}$$

ここで x^M, x^μ, y^m はそれぞれ $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{M}_{D-d}$, $\mathcal{K}_d$ 上の座標である。$g_{\mu\nu}(x^\rho)$ は $\mathcal{M}_{D-d}$ 上の計量を与えるのに対して、$g_{mn}(y^p)$ は $\mathcal{K}_d$ 上の計量であり、$\mathcal{M}_{D-d}$ から見れば定数である。同様にして背景場としてのテンソル場やスピノール場、ガンマ行列も分解される。それらの分解方法は局所 Lorentz 対称性の破れ方 (4.1b) に依存する。さらに、$\mathcal{M}_{D-d}$ と $\mathcal{K}_d$ の幾何学的構造と場の力学的自由度は、コンパクト化に伴う超対称性の破れに密接に関係する。

なお、仮定 (4.1) は非常に有効だがこれを保証する物理的機構はない。しかし以後は (4.1) を仮定する。$\mathcal{K}_d$ として典型的な次の 3 例を簡単に紹介する:

1. トーラス
2. 球面
3. 特殊ホロノミー群多様体

この後に、特殊ホロノミー群多様体の一つである Calabi-Yau 空間の幾何学的構造を議論して、超弦理論のコンパクト化に応用する。

[12] そのため、ありとあらゆる方向へのコンパクト化を追究した超弦理論の論文がとても多く存在する。
[13] 往々にして $\mathcal{M}_{D-d}$ は極大対称空間 (maximally symmetric space) であると仮定する (付録 G)。

4.1　トーラスによるコンパクト化

まずは最も簡単なコンパクト化であるトーラスコンパクト化を紹介する。d 次元トーラス T^d は d 個の S^1 の直積空間である:

$$T^d \ = \ \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{d} \, . \tag{4.2}$$

S^1 は曲率を持たない。同様にして T^d も曲率を持たない。そのため T^d は平坦空間である。これは非常に強い性質である。何故なら、コンパクト化される空間の構造と超対称性は、コンパクト方向に添字を持つグラビティーノなどフェルミオンの超対称変換則 (3.18b) の真空期待値を通じて密接に関連するからである:

$$\langle \delta \Psi_m \rangle \ = \ D_m(\widehat{\omega}) \varepsilon - T_m{}^{NPQR} \langle \widehat{F}_{NPQR} \rangle \, \varepsilon \, . \tag{4.3}$$

期待値を考察しよう。右辺の $\widehat{\omega}$ に内蔵されるグラビティーノの寄与は Lorentz 対称性からゼロになる。そのため $\widehat{\omega}$ は Levi-Civita のスピン接続 ω に簡略化される。同様に、$\mathcal{M}_{D-d}$ を極大対称空間と仮定すれば、Lorentz 対称性から $\langle \widehat{F}_{NPQR} \rangle = \langle F_{NPQR} \rangle$ もゼロになる。11 次元時空は (4.1a) の様に直積に分解されているため、平坦な T^d 方向に添字を持つ共変微分は $D_m(\omega) = \partial_m$ と単純化される。さらに、超対称変換パラメータ ε も $\mathcal{M}_{D-d}$ 上の超対称変換パラメータ ξ と T^d 上のスピノール的なパラメータ η に直積分解される:

$$\varepsilon(x^M) \ = \ \xi(x^\mu) \otimes \eta(y^m) \, . \tag{4.4}$$

これらを総合すると、$\langle \delta \Psi_m \rangle = 0$ は

$$\partial_m \varepsilon \ = \ 0 \quad \to \quad \partial_m \eta \ = \ 0 \, , \tag{4.5}$$

と単純化される。これを満たす η は「定数スピノール」である。これにより 11 次元時空上の場は、$11 - d$ 次元時空上の極大超対称性を保ったままコンパクト化される。

なお、T^d のそれぞれの半径を有限に留めておくと、半径の逆数に比例した質量を持つ無限個の Kaluza-Klein モードが $\mathcal{M}_{D-d}$ 時空上に登場する。無限個のモードが登場すると扱いが非常に大変になるので、通常はこの質量より低いエネルギー領域のみを考察対象にする。その考察の一つに「次元還元 (dimensional reduction)」がある。次元還元とは、コンパクト化した後にコンパクト化の半径を無限小にすることで Kaluza-Klein 粒子の質量を無限大にして、実質上理論から追い出すことである。

Kaluza-Klein モードを追い出した後の低エネルギー有効理論は、有限個の場で記述される超重力理論である。この超重力理論は、先ほど見たように 11 次元超重力理論と同じ極大超対称性を保持している。そこに登場する場の一覧を表 8 に記す (反対称テンソル場 C_4 の添字 $(+)$ は自己双対性を意味する):

時空次元	超対称性 $\mathcal{N}$	重力場	反対称テンソル場	スカラー場	グラビティーノ	ディラティーノ
11	1	${e_M}^A$	C_3	–	Ψ_M	–
10A	$(1,1)$	${e_\mu}^a$	$C_3\,,\ B_2\,,\ C_1$	ϕ	$\Psi_\mu^+\,,\ \Psi_\mu^-$	$\lambda^+\,,\ \lambda^-$
10B	$(2,0)$	${e_\mu}^a$	$C_4^{(+)}\,,\ 2B_2$	2ϕ	$2\Psi_\mu^+$	$2\lambda^-$
9	2	${e_\mu}^a$	$C_3\,,\ 2B_2\,,\ 3C_1$	3ϕ	$2\Psi_\mu$	4λ
8	2	${e_\mu}^a$	$C_3\,,\ 3B_2\,,\ 6C_1$	7ϕ	$2\Psi_\mu$	6λ
7	4	${e_\mu}^a$	$5B_2\,,\ 10C_1$	14ϕ	$4\Psi_\mu$	16λ
6	$(4,4)$	${e_\mu}^a$	$5B_2\,,\ 16C_1$	25ϕ	$4\Psi_\mu^+\,,\ 4\Psi_\mu^-$	$20\lambda^+\,,\ 20\lambda^-$
5	8	${e_\mu}^a$	$27C_1$	42ϕ	$8\Psi_\mu$	48λ
4	8	${e_\mu}^a$	$28C_1$	70ϕ	$8\Psi_\mu$	56λ

表 8：極大超重力理論における超重力多重項 [2]

さらに非自明な事に、テンソル場同士やスカラー場同士はある種の双対変換群で互いに関連する。超対称性が極大のため、この双対変換群も表 9 の様に決まってしまう:

時空次元	超重力の U-duality 群 G_0	R-対称性 H	弦の U-duality 群 G	弦の T-duality 群
10A	$\mathbb{R}^+$	1	1	1
10B	$SL(2,\mathbb{R})$	$SO(2)$	$SL(2,\mathbb{Z})$	1
9	$GL(2,\mathbb{R})$	$SO(2)$	$GL(2,\mathbb{Z})$	$SO(1,1;\mathbb{Z})$
8	$SL(3,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$	$SO(3)\times SO(2)$	$SL(3,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$	$SO(2,2;\mathbb{Z})$
7	$SL(5,\mathbb{R})$	$Sp(2)$	$SL(5,\mathbb{Z})$	$SO(3,3;\mathbb{Z})$
6	$SO(5,5)$	$Sp(2)\times Sp(2)$	$SO(5,5;\mathbb{Z})$	$SO(4,4;\mathbb{Z})$
5	$E_{6(6)}$	$USp(8)$	$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$	$SO(5,5;\mathbb{Z})$
4	$E_{7(7)}$	$SU(8)$	$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$	$SO(6,6;\mathbb{Z})$

表 9：11 次元理論をトーラスコンパクト化して得られる極大超重力理論の双対変換群

極大超重力理論のスカラー場 ϕ は、U-duality 群 G_0 を R-対称性 H で割った商空間 (coset space) G_0/H に値を持つ。スカラー場の数はこの商空間の次元である [14]。

超弦理論でトーラスコンパクト化を実行すると、弦がトーラスに巻き付く状態が生じる。弦には張力があるため、巻き付き数が大きくなれば弦のエネルギーは増していく。

[14] 半極大超重力理論についてのまとめは [23] が近年の文献になるだろう。

$\mathcal{M}_{D-d}$ 時空上の低エネルギー有効理論の立場でこれを見ると、巻き付きに由来する質量を持ったモードが登場する。超弦理論にはこの Kaluza-Klein モードと弦の巻き付きモードの入れ替えに相当する T-duality 変換が存在する。これは有効理論でも垣間見える。10 次元 $\mathcal{N}=(1,1)$ 理論と $\mathcal{N}=(2,0)$ 理論の関係則 (3.24), (3.25) はこの典型例である。超重力理論が超弦理論に格上げされる時、双対性の変換パラメータが離散化される [24]。

4.2　球面によるコンパクト化

反対称テンソル場は不変テンソルに比例した非自明な期待値を持つ場合がある。IIB 型理論において R-R フラックス $\widetilde{F}_5$ が 5 次元の不変テンソル ϵ_{abcde} に比例する期待値を持つと、空間が自発的にコンパクト化すると考えられる (Freund-Rubin 仮定 [25])。$\mathcal{M}_{D-d}$ を極大対称空間に仮定すれば、10 次元時空での重力解は $AdS_5 \times S^5$ となる [26]。コンパクト化されずに残った空間は平坦な時空ではない。10 次元全体の運動方程式の解が曲率ゼロであるようにするため、S^5 の曲率を打ち消すように、負の曲率を持つ反 de Sitter 空間が現れる。同様の現象として、11 次元理論において反対称テンソル場 $F_4 = \mathrm{d}C_3$ が不変テンソル ϵ_{abcd} に比例する期待値 $\langle F_4 \rangle \sim \epsilon_{abcd}$ を持つ時の重力解は $AdS_7 \times S^4$ であり、$\langle *F_4 \rangle \sim \epsilon_{abcdefg}$ の時の重力解は $AdS_4 \times S^7$ となる。

これらのコンパクト化によって IIB 型理論もしくは 11 次元理論の超対称性はどうなるだろうか。超対称性と時空の幾何学の関係は、トーラスコンパクト化でも説明したのと同様のグラビティーノの超対称変換則

$$\delta\Psi_M \ \rightarrow \ \left\{ \begin{array}{ll} \delta\Psi_\mu : & AdS_{D-d} \text{ 時空上の変換則}\,, \\ \delta\Psi_m : & S^d \text{ 上の変換則}\,, \end{array} \right. \tag{4.6}$$

が本質的な役割を果たす。特に変換則の期待値 $\langle \delta\Psi_m \rangle = 0$ を満たすスピノール的パラメータ $\eta(y^m)$ の数が重要になる。このパラメータは、コンパクト空間上に定義できる Killing スピノールに相当する [15]。今考えている球面 S^4, S^5, S^7 にはそれぞれ 4 つ, 4 つ, 8 つの Killing スピノールが存在することが知られている。これは 4 次元, 5 次元, 7 次元空間の上で存在する最大の数である。これにより $AdS_4 \times S^7$, $AdS_5 \times S^5$, $AdS_7 \times S^4$ にコンパクト化された理論は超対称性が全く破れずに存在する事を意味している [16]。

これら $AdS_{D-d} \times S^d$ 解は現在の超弦理論の非摂動論的解析において中心的な役割を果たしている。IIB 型理論における $AdS_5 \times S^5$ 解は、IIB 超弦理論に含まれる D3 ブレー

[15] 正確に言えば、$D_m \eta = X_m$ を満たす η が Killing スピノールで、さら $X_m = 0$ となる斉次方程式のときの η を平行スピノールと呼ぶ。

[16] この周辺は解説 [27,28] や最近の論文 [29,30] を参照のこと。

ンの近傍における時空構造 (near horizon geometry) を与えている。他方 $AdS_4 \times S^7$ 解と $AdS_7 \times S^4$ 解は、M 理論に含まれる M2 ブレーンと M5 ブレーンそれぞれの近傍における時空構造を与えている。これらブレーン近傍の重力理論と、ブレーンの上に存在するゲージ理論とが密接に対応するというのが、Maldacena が提唱した「AdS/CFT 対応」である [31] (解説として [32] がある)。

4.3　特殊ホロノミー群多様体によるコンパクト化

低次元時空 $\mathcal{M}_{D-d}$ が平坦な Minkowski 時空になると仮定しよう。そして Lorentz 対称性を保つためにベクトル場やテンソル場の期待値はゼロであるとしよう。さらにその上に「極大ではない」超対称性が存在すると仮定する。この様な場合ではどのようなコンパクト空間 $\mathcal{K}_d$ が許されるのだろうか。

この問いを追究するにはやはりコンパクト方向の添字を持つグラビティーノの超対称変換則 (の期待値) の評価 $\langle \delta \Psi_m \rangle = 0$ が必要である。上記の仮定の下では具体的に次の様に表現できる:

$$0 \ = \ \langle \delta \Psi_m \rangle \ = \ D_m(\omega) \eta(y) \ = \ \Big(\partial_m + \frac{1}{4} \omega_m{}^{ab} \Gamma_{ab} \Big) \eta(y) \, . \tag{4.7}$$

ここで $\omega_m{}^{ab}$ は $\mathcal{K}_d$ 上の局所 Lorentz 変換による Levi-Civita スピン接続であり、$\Gamma^{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma^a \Gamma^b - \Gamma^b \Gamma^a)$ は $\mathcal{K}_d$ の接空間 ($T\mathcal{K}_d$ と表記する) 上で定義されるガンマ行列である。幾何学的な表現では (4.7) は Killing スピノール方程式であり、$\eta(y)$ は Killing (平行) スピノールである。

さて、(4.7) から即座に言えることは、次の様な可積分条件である:

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ [D_m, D_n] \eta \ = \ \frac{1}{4} R^{ab}{}_{mn}(\omega) \, \Gamma_{ab} \, \eta \, , & (4.8\text{a}) \\ \therefore \quad 0 \ &= \ \Gamma^c \Gamma^{ab} \, R_{abcd} \, \eta \ = \ \big(\Gamma^{cab} + \delta^{ca} \Gamma^b - \delta^{cb} \Gamma^a \big) R_{abcd} \, \eta \\ &= \ 2 \Gamma^b R_{bd} \, \eta \, . & (4.8\text{b}) \end{aligned}$$

ここでガンマ行列の公式 (A.7) と (トーションがゼロの時の) 恒等式 $R_{a[bcd]} = 0$ (2.10) を用いた。ゼロでない $\eta(y)$ が存在するとき、これは Ricci テンソル $R_{bd} = \delta^{ac} R_{abcd}$ がゼロであることを意味する。さらにスカラー曲率もゼロになる。これは $\mathcal{M}_{D-d}$ が平坦な Minkowski 時空であるべしとの仮定に矛盾しない。

Ricci テンソルがゼロになる空間 $\mathcal{K}_d$ はどのようなものか。それを調べるにはスピン接続 $\omega_m{}^{ab}$ が作る性質を評価すれば良い。$\mathcal{K}_d$ 上に閉じたループを描き、そこにベクトル

やスピノールを乗せて、ループにそって平行移動させよう。それらが一周して戻ってきたとき、平行移動したにも関わらず向きが最初と異なっている。例えば面積無限小の閉じたループを考えて見ると、スピノール η は

$$\eta \;\to\; \eta' \;=\; \eta + \Delta^{mn}[D_m, D_n]\eta \,, \tag{4.9a}$$

のように変化する。閉じたループの面積に比例するパラメータ Δ^{mn} が有限になるときは

$$\eta \;\to\; \eta' \;=\; \exp\big(\Delta^{mn}[D_m, D_n]\big)\eta \;\equiv\; U\eta \,, \tag{4.9b}$$

となる。そしてこの操作 U は群をなす。この群の生成元は $[D_m, D_n] \sim R_{abmn}(\omega)\Gamma^{ab}$ である。よってスピン接続による曲率がベクトルやスピノールの回転を与える。この群をホロノミー群 (holonomy group) と呼ぶ。ホロノミー群による変換でベクトルやスピノールのノルム (長さ) は変化しないため、一般の向き付け可能な空間 $\mathcal{K}_d$ のとり得る最大のホロノミー群は $SO(d)$ である。そして (4.8) は

$$\eta \;=\; U\eta \,, \tag{4.10}$$

を意味する。つまりホロノミー群の変換で不変なスピノールの存在を示している。この様な空間は既に表 10 の様に分類されている:

空間次元 d	ホロノミー群	Killing スピノールの数	$\mathcal{K}_d$ の名称
$4k+2$	$SU(2k+1)$	$(1,1)$	Calabi-Yau
$4k$	$SU(2k)$	$(2,0)$	Calabi-Yau
$4k$	$Sp(k)$	$(k+1,0)$	hyper-Kähler
7	G_2	1	exceptional
8	$Spin(7)$	$(1,0)$	exceptional
n	1	$2^{[\frac{n+1}{2}]}$	トーラス (平坦)

表 10：特殊ホロノミー群多様体の分類 [33]

表 10 の見方について例を一つ挙げて考えよう。3 段目で $k=1$ を考えると、ホロノミー群が $Sp(1)$ となる hyper-Kähler 空間が得られる。特に $\mathcal{K}_4$ がコンパクトでなめらかな場合、この空間は K3 と呼ばれる [17]。この hyper-Kähler 空間の上には Killing スピノールが $(2,0)$ 個 (カイラルスピノールが 2 個、反カイラルスピノールは 0 個) 乗っている。これを 10 次元 IIB 型理論のコンパクト化に用いると、平坦な $\mathcal{M}_{D-d} = \mathcal{M}_6$ 時空上

[17] この空間の簡潔なまとめとして、例えば [34] を参照せよ。

に既約な Weyl スピノール (自由度 8) が 2 つ、つまり $\mathcal{N}=(2,0)$ のカイラルな理論が得られることになる。なお、IIB 型理論は 32 個の超対称生成子が存在したが、このコンパクト化の後では $8\times 2=16$ 個の生成子のみが存在する。そのため超対称性が半分だけ破れずに残っていることになる。他の例については付録 I.4 を参照。

4.4 特殊ホロノミー群多様体の例

超弦理論のコンパクト化において、当初は厳密にコンパクトでなめらかな Calabi-Yau 空間が物理と数学の両面から調べられた。特に性質の良いものは、射影空間の超曲面で定義される Calabi-Yau 空間である。そのごく一部の例を表 11 に列挙しておく (Hodge 数 $h^{1,1}$, $h^{2,1}$ や Euler 数 χ については第 5 章や第 6.3 節の議論を参照):

コンパクトな Calabi-Yau 空間 Y_3	表記	$h^{1,1}$	$h^{2,1}$	χ
a quintic in $\mathbb{C}\mathbf{P}^4$	$[4\|\|5]$ or $\mathbb{C}\mathbf{P}^4[5]$	1	101	-200
a quartic and a quadratic in $\mathbb{C}\mathbf{P}^5$	$[5\|\|4,2]$	1	89	-176
two cubics in $\mathbb{C}\mathbf{P}^5$	$[5\|\|3,3]$	1	73	-144
a cubic and two quadratics in $\mathbb{C}\mathbf{P}^6$	$[6\|\|3,2,2]$	1	73	-144
four quadratics in $\mathbb{C}\mathbf{P}^7$	$[7\|\|2,2,2,2]$	1	65	-128

表 11：コンパクトな Calabi-Yau 空間の例 [35]

コンパクトでなめらかな Calabi-Yau 空間上にはアイソメトリーが存在しないため、Killing ベクトルを用いた計量の評価を解析的に与えることができない。一方で非コンパクトな Calabi-Yau 空間にはアイソメトリーが存在できるので、計量を解析的に導出できる。その典型例がコニフォールド (conifold) である。特にコンパクトな 5 次元空間 $T^{1,1}=[SU(2)\times SU(2)]/U(1)$ の錐体 $C(T^{1,1})$ が注目され [36]、超弦理論の双対性に中心的役割を果たしている ([37–41], etc.)。また、2001 年前後に、コニフォールドとは (若干) 異なる、非コンパクトな Calabi-Yau, hyper-Kähler, G_2, $Spin(7)$ 多様体それぞれにおいて新しい計量が続々と開発された。それらについての文献 (の一部) を列挙しておこう:

- Calabi-Yau 空間：Cvetič-Gibbons-Lü-Pope [42]、東島-木村-新田 [43–45], etc.
- hyper-Kähler 空間：Cvetič-Gibbons-Lü-Pope [46], etc.
- G_2, $Spin(7)$ 多様体：Cvetič-Gibbons-Lü-Pope [47]、小西-那珂 [48]、菅野-安井 [49, 50], etc.

5 Calabi-Yau 空間

この章では特殊ホロノミー群多様体の一つである複素 3 次元 Calabi-Yau 空間を議論する。これはヘテロティック弦理論から 4 次元超対称ゲージ理論を構築するために導入された [15, 35]。この空間そのものが数学の研究対象であるが [51, 52]、我々はそこまで深く立ち入らない。なお、弦の世界面の理論としての共形場理論から Calabi-Yau 空間を議論することが非常に多い (例えば [37, 53] など)。また、最近のまとめとしては文献 [54] が登場したので、興味がある人は眺めてみると良いだろう。

5.1 定義

狭義の Calabi-Yau 空間とは、次のいずれかで定義されるコンパクトで滑らかな 6 次元 (複素 3 次元) 空間のことである:

1. $SU(3)$ ホロノミー群を持つ
2. Ricci 平坦な Kähler 多様体
3. 第一 Chern 類 (Ricci 2-形式) がゼロ
4. 正則 3-形式がただひとつ存在する Kähler 多様体

これらは厳密には等価ではないが互いにある程度連動する [52]。例えば 6 次元空間上にトーションが存在するとその空間はもはや Kähler 多様体ではないが、トーションを含めたスピン接続を用いて $SU(3)$ ホロノミー群を議論することは出来る。トーションが存在すると Ricci テンソルがゼロではないながらも Ricci 2-形式がゼロになる場合がある。ただしこの章ではトーションは存在しないと仮定するため、上記の諸条件は互いに等価とみなしてよい [18]。

5.2 不変な微分形式

6 次元空間で $SU(3)$ ホロノミー群を持つとき $SU(3)$ 不変な Killing スピノールが定義できたのと同様に $SU(3)$ 不変な微分形式である 2-形式 J と 3-形式 Ω が定義できる。それぞれの存在を群の表現の分解で簡単に見てみよう。一般の 6 次元空間での $SO(6)$ 回転について、一般の 2-形式と 3-形式はそれぞれ ${}_6C_2 = \mathbf{15}$ 表現、${}_6C_3 = \mathbf{20}$ 表現である。こ

[18] トーションがある場合や通常の幾何学を一般化した議論を第 7 章で紹介する。

れを $SU(3) \subset SO(6)$ の表現に分解する:

$$
\begin{aligned}
{}_6C_2 &= \mathbf{15} = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \overline{\mathbf{3}} + \mathbf{8}\,, && \text{(5.1a)}\\
{}_6C_3 &= \mathbf{20} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{3} + \overline{\mathbf{3}} + \mathbf{6} + \overline{\mathbf{6}}\,. && \text{(5.1b)}
\end{aligned}
$$

これにより、$SU(3)$ 不変な実表現と $SU(3)$ 不変な複素表現がそれぞれ 1 つずつ存在することが分かる。それぞれが J と Ω である。特に Calabi-Yau 空間上でのそれぞれは「Kähler 2-形式 ((1,1)-form) J」「正則 3-形式 ((3,0)-form) Ω」となる。そして次の性質を持つ:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; \mathrm{d}J &= \frac{1}{2!}\partial_{[m}J_{np]}\,\mathrm{d}y^m \wedge \mathrm{d}y^n \wedge \mathrm{d}y^p \\
&= \frac{1}{2!}\nabla^0_{[m}J_{np]}\,\mathrm{d}y^m \wedge \mathrm{d}y^n \wedge \mathrm{d}y^p\,, && \text{(5.2a)}\\
0 \;=\; \mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{3!}\partial_{[m}\Omega_{npq]}\,\mathrm{d}y^m \wedge \mathrm{d}y^n \wedge \mathrm{d}y^p \wedge \mathrm{d}y^q \\
&= \frac{1}{3!}\nabla^0_{[m}\Omega_{npq]}\,\mathrm{d}y^m \wedge \mathrm{d}y^n \wedge \mathrm{d}y^p \wedge \mathrm{d}y^q\,, && \text{(5.2b)}\\
J \wedge \Omega &= 0\,, \qquad J \wedge J \wedge J \;=\; 3!(\mathrm{vol.})_6 \;=\; \frac{3\mathrm{i}}{4}\Omega \wedge \overline{\Omega}\,. && \text{(5.2c)}
\end{aligned}
$$

Calabi-Yau 空間は Kähler 多様体、すなわちトーションのない複素多様体なので明らかだが、この 6 次元空間が複素多様体であることとトーションがないことが、次の様に Nijenhuis テンソルと Bismut 接続 [55, 56] がゼロになることからも確認できる:

$$
\begin{aligned}
N_{mn}{}^p &\equiv J_m{}^q\,\partial_{[q}J_{n]}{}^p - J_n{}^q\,\partial_{[q}J_{m]}{}^p \\
&= 0\,, && \text{(5.3a)}\\
T_{mnp} &\equiv \frac{3}{2}J_m{}^q\,J_n{}^r\,J_p{}^s\,\nabla_{[s}J_{qr]} \;=\; \frac{3}{2}J_m{}^q\,J_n{}^r\,J_p{}^s\,\partial_{[s}J_{qr]} \\
&= 0\,. && \text{(5.3b)}
\end{aligned}
$$

Kähler 2-形式 J の成分は Kähler 計量で与えられる:

$$
J \;=\; \frac{1}{2}J_{mn}\,\mathrm{d}y^m \wedge \mathrm{d}y^n \;=\; \mathrm{i}g_{i\bar{\jmath}}\,\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\bar{\jmath}}\,. \qquad \text{(5.4)}
$$

ここで z^i , $\overline{z}^{\bar{\jmath}}$ は複素座標であり、実座標 y^m を組み直したものである。そしてさらに複素構造 $J^2 = -1$ を与える:

$$
J_m{}^p J_p{}^n \;=\; -\delta^n_m\,, \qquad J_i{}^j \;=\; \mathrm{i}\delta_i{}^j\,, \qquad J_m{}^p\,J_n{}^q\,g_{pq} \;=\; g_{mn}\,. \qquad \text{(5.5)}
$$

一般に Kähler 多様体であれば $\mathrm{d}J = 0,\ N_{mn}{}^p = 0,\ T_{mnp} = 0,\ J^2 = -1,\ J_m{}^pJ_n{}^qg_{pq} = g_{mn}$ は全て成立する。それに加えて正則 3-形式 Ω が至る所でゼロでない時、その Kähler 多様体は Calabi-Yau 空間になる。

5.3　コホモロジー類

コンパクトな空間上には微分形式が乗ることが多い。今扱っている Calabi-Yau 空間もその例外ではないことは、J や Ω が定義できることから容易に分かる。ここでは、どのような微分形式がいくつ存在できるかを知る指標を与えよう。

複素空間 $\mathcal{K}$ における Dolbeault コホモロジー類 [19] $H^{p,q}(\mathcal{K})$ を次で定義する:

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\mathcal{K}) \;\equiv\; \frac{\mathcal{K}\text{ 上の }\overline{\partial}\text{-閉 }(p,q)\text{-形式}}{\mathcal{K}\text{ 上の }\overline{\partial}\text{-完全 }(p,q)\text{-形式}} \;=\; \frac{\{\omega^{p,q}|\overline{\partial}\omega^{p,q}=0\}}{\{\alpha^{p,q}|\alpha^{p,q}=\overline{\partial}\beta^{p,q-1}\}}\,, \tag{5.6a}$$

$$H^{p,q}_{\partial}(\mathcal{K}) \;=\; H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\mathcal{K}) \;\equiv\; H^{p,q}(\mathcal{K})\,, \tag{5.6b}$$

$$h^{p,q} \;\equiv\; \dim H^{p,q}(\mathcal{K})\,. \tag{5.6c}$$

$h^{p,q}$ を Hodge 数と呼ぶ。複素 d 次元空間上の Hodge 数同士には次の関係がある:

$$h^{q,p} \;=\; h^{p,q} \quad : \quad \text{複素共役}\,, \tag{5.7a}$$

$$h^{d-p,d-q} \;=\; h^{p,q} \quad : \quad \text{Hodge 双対}\,. \tag{5.7b}$$

Calabi-Yau 空間 Y_3 とそれを用いて超弦理論をコンパクト化した模型を議論するときにはこの Hodge 数が重要になる。Hodge 数の一部は具体的に求められる。単連結な空間を考えると、スカラー量 $h^{0,0}=1$ が決まる。その Hodge 双対は Y_3 の体積であり、唯一なので $h^{3,3}=1$ である。最後に、$SU(3)$ ホロノミーを用いることで $h^{s,0}=0=h^{0,s}$, $h^{3-s,3}=0=h^{3,3-s}$ $(0<s<3)$、そして $h^{3,0}=1=h^{0,3}$ が示される。よって Calabi-Yau 空間で非自明に残る Hodge 数は次の様に $h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ のみである:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array} \;=\; \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \tag{5.8}$$

(5.8) の表記を Hodge diamond と呼ぶことがある。非自明に残る $h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ はそれぞれ Calabi-Yau 空間 Y_3 について「Kähler 構造を変形する自由度」と「複素構造を変形する自由度」になっている [59]。ちなみに $h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ を入れ替えた Calabi-Yau 空間が存在するだろうと議論されている。この入れ替えをミラー対称性と呼ぶ [37,53,60,61]。

[19] 実多様体上の de Rham コホモロジーなどの定義はここでは省略する。さらに複素多様体の定義も省略する。例えば [15,57,58] など一般的な教科書を参照すればどこにでも記述がある。

5.4 モジュライ空間

Calabi-Yau 空間は Ricci 平坦 $R_{mn}(g_{pq}) = 0$ な Kähler 多様体である。この空間の変形を考えよう。計量を $g_{mn} \to g_{mn} + \delta g_{mn}$ に変形してもやはり Ricci 平坦

$$R_{mn}(g_{pq} + \delta g_{pq}) \ = \ 0 \,, \qquad \nabla^m \delta g_{mn} \ = \ 0 \,, \tag{5.9}$$

である時、この δg_{mn} は変形のモジュライである。実座標 y^m から複素座標 $z^i, \overline{z}^{\overline{\imath}}$ に変換したとき、モジュライは

$$\delta g_{i\overline{\jmath}} \,, \qquad \delta g_{ij} \,, \qquad \delta g_{\overline{\imath}\overline{\jmath}} \ = \ (\delta g_{ij})^* \,, \tag{5.10}$$

の 2 種類である。それぞれは J と Ω の変形に登場する:

$$\delta g_{i\overline{\jmath}} : \qquad \delta J \ = \ \mathrm{i}(\delta g_{i\overline{\jmath}})\, \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\overline{\jmath}} \,, \tag{5.11a}$$

$$\delta g_{ij} : \qquad \delta \Omega \ = \ \Omega_{klm}\, g^{m\overline{\jmath}} (\delta g_{\overline{\imath}\overline{\jmath}})\, \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^l \wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\overline{\imath}} \,. \tag{5.11b}$$

変形 δJ は $(1,1)$-形式で与えられる一方で、$\delta\Omega$ は $(2,1)$-形式で与えられる。この 2 種類は非自明なコホモロジー類 $H^{1,1}(Y_3)$ と $H^{2,1}(Y_3)$ にそれぞれ対応する。つまり、δJ と $\delta\Omega$ という変形のそれぞれ独立な自由度が Hodge 数 $h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ である。

上記の様に変形の自由度があると、J と Ω は次の様に展開することができる:

$$J \ \equiv \ v^a\, \omega_a \qquad (\text{or } B + \mathrm{i}J = \mathfrak{t}^a \omega_a) \,, \qquad a \ = \ 1, 2, \ldots, h^{1,1} \,, \tag{5.12a}$$

$$\Omega \ \equiv \ Z^K \alpha_K - \mathcal{G}_K \beta^K \,, \qquad K \ = \ 0, 1, 2, \ldots, h^{2,1} \,. \tag{5.12b}$$

ここで ω_a は基底 $(1,1)$-形式、(α_K, β^K) は基底 3-形式である。K は $h^{2,1}+1$ 個走る。一つは正則 $(3,0)$-形式そのものであり、残りの $h^{2,1}$ 個の $(2,1)$-形式 χ_k は次で与えられる:

$$\chi_k \ \equiv \ \frac{1}{2} \chi_{k,ij\overline{l}}\, \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\overline{l}} \,, \qquad \chi_{k,ij\overline{l}} \ = \ -\frac{1}{2} \Omega_{ijm}\, g^{m\overline{\jmath}} \frac{\partial}{\partial z^k} (\delta g_{\overline{l}\overline{\jmath}}) \,. \tag{5.13}$$

そして $\mathcal{G}_K$ はある正則な関数 (prepotential) $\mathcal{G}$ を Z^K で微分した

$$\mathcal{G}_K \ = \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z^K} \,, \tag{5.14}$$

で与えられている。J と Ω の変形自由度はそれぞれ $\mathfrak{t}^a$ と Z^K が司ることになる。

Z^K が住む空間は special Kähler geometry と呼ばれる Kähler 多様体の特別な空間である。この空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{CS}}$ では Kähler ポテンシャルが先のプレポテンシャル $\mathcal{G}$ で与えられる:

$$K_{\mathrm{CS}} \ \equiv \ -\log \Big(\mathrm{i} \int_{Y_3} \Omega \wedge \overline{\Omega} \Big) \ = \ -\log \mathrm{i} \Big(\overline{Z}^K \mathcal{G}_K - Z^K \overline{\mathcal{G}}_K \Big) \,. \tag{5.15}$$

この空間は complex structure moduli space と呼ばれる。ついでにここで $Z^K, \mathcal{G}_K, \alpha_K, \beta^K$ についての関係をまとめておこう [59]:

$$Z^K \;=\; \int_{Y_3} \Omega \wedge \beta^K \;=\; \int_{A_K} \Omega \,, \qquad \mathcal{G}_K \;=\; \int_{Y_3} \Omega \wedge \alpha_K \;=\; \int_{B^K} \Omega \,, \tag{5.16a}$$

$$\int_{A_L} \alpha_K \;=\; \int_{Y_3} \alpha_K \wedge \beta^L \;=\; \delta_K^L \,, \qquad \int_{B^K} \beta^L \;=\; \int_{Y_3} \beta^L \wedge \alpha_K \;=\; -\delta_K^L \,. \tag{5.16b}$$

(A_L, B^K) は Calabi-Yau 空間 Y_3 のある適切な 3 次元部分空間である。

$\mathfrak{t}^a$ が住む空間も special Kähler geometry ($\mathcal{M}_{\mathrm{KS}}$ で表記しよう) で与えられる。この空間の Kähler ポテンシャルは

$$K_{\mathrm{KS}} \;\equiv\; -\log\Big(\frac{4}{3}\int_{Y_3} J \wedge J \wedge J\Big) \;=\; -\log \mathrm{i}\Big(\overline{X}^{\Lambda} \mathcal{F}_{\Lambda} - X^{\Lambda} \overline{\mathcal{F}}_{\Lambda}\Big) \,, \tag{5.17a}$$

$$\mathcal{F}_{\Lambda} \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^{\Lambda}} \,, \qquad \mathfrak{t}^a \;=\; \frac{X^a}{X^0} \,, \tag{5.17b}$$

の様に $\mathfrak{t}^a$ の正則な関数 (prepotential) $\mathcal{F}$ で与えられる。この空間は (complexified) Kähler moduli space と呼ばれている。

Calabi-Yau 空間 Y_3 の変形の自由度が住むモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} \;=\; \mathcal{M}_{\mathrm{CS}} \times \mathcal{M}_{\mathrm{KS}} \,, \tag{5.18}$$

の様に直積空間で与えられる。先ほど述べたミラー対称性は $\mathcal{M}_{\mathrm{CS}}$ と $\mathcal{M}_{\mathrm{KS}}$ の入れ替えに他ならない。より詳しい議論については [17, 53, 59] などを参照すると良いだろう。

最後にコホモロジー類とその基底形式についてまとめておく。

コホモロジー類	基底	添字
$H^{1,1}(Y_3)$	ω_a	$a \;=\; 1, 2, \ldots, h^{1,1}$
$H^{2,2}(Y_3)$	$\widetilde{\omega}^a$	
$H^{0,0}(Y_3) \oplus H^{1,1}(Y_3)$	$\omega_{\Lambda} = (1, \omega_a)$	$\Lambda \;=\; 0, 1, 2, \ldots, h^{1,1}$
$H^{3,3}(Y_3) \oplus H^{2,2}(Y_3)$	$\widetilde{\omega}^{\Lambda} = ((\mathrm{vol.})_6, \widetilde{\omega}^a)$	
$H^{2,1}(Y_3)$	χ_k	$k \;=\; 1, 2, \ldots, h^{2,1}$
$H^{3,0}(Y_3) \oplus H^{2,1}(Y_3) \oplus H^{1,2}(Y_3) \oplus H^{0,3}(Y_3)$	(α_K, β^K)	$K \;=\; 0, 1, 2, \ldots, h^{2,1}$

表 12：Calabi-Yau 空間上のコホモロジー類、基底形式とその次元

ここで $H^{2,2}(Y_3)$ の基底 $\widetilde{\omega}^a$ は ω_a の Hodge 双対であり、次をみたす:

$$\int_{Y_3} \omega_{\Lambda} \wedge \widetilde{\omega}^{\Sigma} \;=\; \delta_{\Lambda}^{\Sigma} \,. \tag{5.19}$$

6　4次元時空上の物理

10次元IIA型超弦理論とIIB型超弦理論をCalabi-Yau空間でコンパクト化したとき、4次元時空には$\mathcal{N}=2$超対称理論が登場する。これについてごく簡単に紹介する[20]。

10次元ヘテロティック弦理論に於いて10次元時空がコンパクト化された時、「4次元時空は平坦(もしくは極大対称空間)で、$\mathcal{N}=1$超対称性が存在する」と仮定する。この仮定を満たす、コンパクト化された6次元空間はやはりCalabi-Yau空間となる。Calabi-Yau空間の構造が4次元時空上のゲージ理論に様々な情報を提供する。このシナリオを、[35]に沿ってヘテロティック$E_8\times E_8$弦理論において考察する。

6.1　IIA型超弦理論のCalabi-Yauコンパクト化

IIA型超弦理論をCalabi-Yau空間Y_3でコンパクト化すると、4次元は平坦なMinkowski時空$\mathbb{M}_4$になり、その上で$\mathcal{N}=2$超重力理論が実現される。この超重力理論に登場する場を簡単に紹介しよう。

まずは10次元理論における超対称変換パラメータが次の様に分離する:

$$\varepsilon^1_{\mathrm{IIA}} \;=\; \xi^1_+\otimes\eta^1_+ + (\xi^1_+)^*\otimes(\eta^1_+)^*\,, \qquad \varepsilon^2_{\mathrm{IIA}} \;=\; \xi^2_+\otimes\eta^2_- + (\xi^2_+)^*\otimes(\eta^2_-)^*\,. \tag{6.1}$$

ただしここで、10次元時空$\mathbb{M}_{10}$上の超対称変換パラメータ(Majorana-Weylスピノール)$\varepsilon^i_{\mathrm{IIA}}$、4次元Minkowski時空$\mathbb{M}_4$上の超対称変換パラメータ(Weylスピノール)$\xi^i_+$、Calabi-Yau空間$Y_3$上のスピノールパラメータ(Weylスピノール)$\eta^1_+$, η^2_-のカイラリティをそれぞれ次の様に定義する:

$$\Gamma_{(10)}\,\varepsilon^1_{\mathrm{IIA}} \;=\; +\varepsilon^1_{\mathrm{IIA}}\,, \qquad \Gamma_{(10)}\,\varepsilon^2_{\mathrm{IIA}} \;=\; -\varepsilon^2_{\mathrm{IIA}}\,, \tag{6.2a}$$

$$\gamma_{(4)}\,\xi^i_\pm \;=\; \pm\xi^i_\pm\,, \quad (\xi^i_+)^* \;=\; \xi^i_-\,, \qquad \Gamma_{(6)}\,\eta^i_\pm \;=\; \pm\eta^i_\pm\,, \quad (\eta^i_+)^* \;=\; \eta^i_-\,. \tag{6.2b}$$

この分解の下でのCalabi-Yau空間Y_3上のη^1_+, η^2_-は、表10(もしくは(I.11))に従う$SU(3)$ホロノミー群不変なKillingスピノールである。そのため10次元の超対称変換パラメータが次の様になる:

$$\varepsilon^1_{\mathrm{IIA}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^1_+\cdot\alpha^1 \end{pmatrix} + (\text{c.c.})\,, \qquad \varepsilon^2_{\mathrm{IIA}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^2_+\cdot\alpha^2 \end{pmatrix} + (\text{c.c.})\,. \tag{6.3}$$

[20] レビューを含めた学位論文[62]が簡潔にまとまっている。

ここで α^i は $\eta_\pm^i$ の 4 番めの成分を示す。これにより 4 次元平坦時空 $\mathbb{M}_4$ 上で 2 種類の超対称変換パラメータ ξ_+^1, ξ_+^2 が登場するため、$\mathcal{N}=2$ (局所) 超対称性が実現する。

表 12 にある Calabi-Yau 空間 Y_3 のコホモロジー類を用いて IIA 型理論のボソン場を分解しよう。まず NS-NS セクターについて:

$$\delta g_{i\bar{j}}(x,y) = \mathrm{i} v^a(x)\,(\omega_a)_{i\bar{j}}(y)\,, \tag{6.4a}$$

$$\delta g_{ij}(x,y) = \mathrm{i}\overline{z}^{\bar{k}}(x)\Big(\frac{\overline{\chi}_{\bar{k},i\bar{\imath}\bar{\jmath}}\,\Omega^{\bar{\imath}\bar{\jmath}}{}_j}{||\Omega||^2}\Big)(y)\,, \tag{6.4b}$$

$$B_2(x,y) = B_2(x) + b^a(x)\,\omega_a(y)\,, \tag{6.4c}$$

$$\phi(x,y) = \varphi(x)\,. \tag{6.4d}$$

続いて R-R セクターについて:

$$C_1(x,y) = A_1^0(x)\,, \tag{6.5a}$$

$$C_3(x,y) = A_1^a(x)\,\omega_a(y) + \xi^K(x)\,\alpha_K(y) - \widetilde{\xi}_K(x)\,\beta^K(y)\,. \tag{6.5b}$$

この分解により、4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論に登場する超対称多重項のボソン場は表 13 にまとまる。

超多重項	場	超多重項の数
超重力多重項	$g_{\mu\nu}\,,\ A_1^0$	1
ベクトル多重項	$A_1^a\,,\ \mathfrak{t}^a = b^a + \mathrm{i}v^a\,,\ \overline{\mathfrak{t}^a} = b^a - \mathrm{i}v^a$	$a = 1,2,\dots,h^{1,1}$
ハイパー多重項	$z^k\,,\ \overline{z}^{\bar{k}}\,,\ \xi^k\,,\ \widetilde{\xi}_k$	$k = 1,2,\dots,h^{2,1}$
テンソル多重項	$B_2\,,\ \varphi\,,\ \xi^0\,,\ \widetilde{\xi}_0$	1

表 13：IIA 型超弦理論を Calabi-Yau コンパクト化した時の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超多重項

$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項の運動項は、Calabi-Yau 空間のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{KS}}$ 上で与えられる Kähler ポテンシャル K_{KS} (5.17b) で支配される。一方でハイパー多重項とテンソル多重項は、$\mathcal{M}_{\mathrm{CS}}$ からさらに拡大される quaternionic Kähler geometry の計量に支配される [63, 64]。

6.2　IIB 型超弦理論の Calabi-Yau コンパクト化

IIB 型超弦理論を Calabi-Yau 空間 Y_3 でコンパクト化すると、やはり 4 次元は平坦な Minkowski 時空 $\mathbb{M}_4$ になりその上で $\mathcal{N}=2$ 超重力理論が実現される。この超重力理論に登場する場を簡単に紹介しよう。

まずは 10 次元理論における超対称変換パラメータが次の様に分離する:

$$\varepsilon^1_{\rm IIB} \;=\; \xi^1_+ \otimes \eta^1_+ + (\xi^1_+)^* \otimes (\eta^1_+)^* \,, \qquad \varepsilon^2_{\rm IIB} \;=\; \xi^2_- \otimes \eta^2_- + (\xi^2_-)^* \otimes (\eta^2_-)^* \,. \tag{6.6}$$

ただしここで、10 次元時空 $\mathcal{M}_{10}$ 上の超対称変換パラメータ (Majorana-Weyl スピノール) $\varepsilon^i_{\rm IIB}$、4 次元 Minkowski 時空 $\mathcal{M}_4$ 上の超対称変換パラメータ (Weyl スピノール) ξ^1_+, ξ^2_-、Calabi-Yau 空間 Y_3 上のスピノールパラメータ (Weyl スピノール) η^1_+, η^2_- のカイラリティをそれぞれ次の様に定義する:

$$\Gamma_{(10)}\, \varepsilon^1_{\rm IIB} \;=\; +\varepsilon^1_{\rm IIB} \,, \qquad\qquad \Gamma_{(10)}\, \varepsilon^2_{\rm IIB} \;=\; +\varepsilon^2_{\rm IIB} \,, \tag{6.7a}$$

$$\gamma_{(4)}\, \xi^i_\pm \;=\; \pm\xi^i_\pm \,, \quad (\xi^i_+)^* \;=\; \xi^i_- \,, \qquad \Gamma_{(6)}\, \eta^i_\pm \;=\; \pm\eta^i_\pm \,, \quad (\eta^i_+)^* \;=\; \eta^i_- \,. \tag{6.7b}$$

この分解の下での Calabi-Yau 空間 Y_3 上の η^1_+, η^2_- は、表 10 (もしくは (I.11)) に従う $SU(3)$ ホロノミー群不変な Killing スピノールである。そのため 10 次元の超対称変換パラメータが次の様になる:

$$\varepsilon^1_{\rm IIB} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^1_+ \cdot \alpha^1 \end{pmatrix} + (\text{c.c.}) \,, \qquad \varepsilon^2_{\rm IIB} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^2_- \cdot \alpha^2 \end{pmatrix} + (\text{c.c.}) \,. \tag{6.8}$$

ここで α^i は $\eta^i_\pm$ の 4 番めの成分を示す。これにより、4 次元平坦時空 $\mathcal{M}_4$ 上で 2 種類の超対称変換パラメータ ξ^1_+, ξ^2_- が登場するため、4 次元時空上に $\mathcal{N}=2$ (局所) 超対称性が実現する。

表 12 にある Calabi-Yau 空間 Y_3 のコホモロジー類を用いて IIB 型理論のボソン場を分解しよう。NS-NS セクターについては IIA 型理論の分解 (6.4) と同一である。R-R セクターについては次の様になる:

$$C(x,y) \;=\; C(x) \,, \tag{6.9a}$$

$$C_2(x,y) \;=\; C_2(x) + c^a(x)\, \omega_a(y) \,, \tag{6.9b}$$

$$C_4(x,y) \;=\; V^K_1(x)\, \alpha_K(y) + \rho_a(x)\, \widetilde{\omega}^a(y) \,. \tag{6.9c}$$

この分解で 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論に登場するボソン場は表 14 にまとまる。

$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項の運動項は、Calabi-Yau 空間のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\rm CS}$ 上で与えられる Kähler ポテンシャル $K_{\rm CS}$ (5.15) で支配される。一方でハイパー多重項とテンソル多重項は、$\mathcal{M}_{\rm KS}$ からさらに拡大される quaternionic Kähler geometry の計量に支配される [63, 64]。

超多重項	場	超多重項の数
超重力多重項	$g_{\mu\nu}\,,\ V_1^0$	1
ベクトル多重項	$V_1^k\,,\ z^k\,,\ \overline{z^k}$	$k\ =\ 1,2,\ldots,h^{2,1}$
ハイパー多重項	$\mathfrak{t}^a = b^a + \mathrm{i}v^a\,,\ \overline{\mathfrak{t}^a} = b^a - \mathrm{i}v^a\,,\ c^a\,,\ \rho_a$	$a\ =\ 1,2,\ldots,h^{1,1}$
テンソル多重項	$B_2\,,\ C_2\,,\ \varphi\,,\ C$	1

表 14：IIB 型超弦理論を Calabi-Yau コンパクト化した時の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超多重項

6.3　ヘテロティック $E_8 \times E_8$ 弦理論の Calabi-Yau コンパクト化

6.3.1　超対称変換則とコンパクト空間

ヘテロティック弦理論のコンパクト化において、H_{mnp} の期待値がゼロでありディラトンが定数であると仮定する。これは非自明な結果を与える最も単純な設定である。その時のフェルミオンの超対称変換 (3.28) で不変であれという条件のうち、6 次元空間に作用する部分が次の様に簡略化される:

$$\varepsilon\ =\ \xi_+(x)\otimes\eta_+(y) + \xi_-(x)\otimes\eta_-(y)\,, \tag{6.10a}$$

$$0\ \equiv\ \delta\Psi_m\ \to\ 0\ =\ D_m(\omega)\eta_+\ =\ \Big(\partial_m + \frac{1}{4}\omega_m{}^{ab}\Gamma_{ab}\Big)\eta_+\,, \tag{6.10b}$$

$$0\ \equiv\ \delta\lambda\ \to\ 0\ =\ -\frac{1}{4\sqrt{2}}\partial\!\!\!/\phi\,\eta_-\ =\ 0\,, \tag{6.10c}$$

$$0\ \equiv\ \delta\chi\ \to\ 0\ =\ -\frac{1}{4\sqrt{2}}F_{ab}\Gamma^{ab}\,\eta_+\,. \tag{6.10d}$$

ただし $\xi_- = (\xi_+)^*$, $\eta_- = (\eta_+)^*$ である。仮定により $\delta\lambda$ は自明になるが、残りから非自明な関係が得られる。まず $\delta\Psi_m = 0$ の条件から η_+ は Killing(平行) スピノールであることが分かる。4 次元平坦時空に $\mathcal{N}=1$ の超対称性が出現すると仮定すると、この Killing スピノールは $SU(3)$ ホロノミー群不変である。よってこの 6 次元空間は Calabi-Yau 空間であると言える。

Killing スピノールを用いて Calabi-Yau 空間上の J と Ω を次の様に表記できる:

$$J_{ab}\ =\ +\mathrm{i}\,\eta_+^\dagger\,\Gamma_{ab}\,\eta_+\,,\qquad \Omega_{abc}\ =\ \eta_+^{\mathrm{T}}\,\Gamma_{abc}\,\eta_+\,. \tag{6.11}$$

規格化は [17] に合わせた。そして Fierz 恒等式を用いれば次が確認できる:

$$D_m(\omega)J_{ab}\ =\ 0\,,\qquad D_m(\omega)\Omega_{abc}\ =\ 0\,,\qquad J_a{}^cJ_c{}^b\ =\ -\delta_a^b\,. \tag{6.12}$$

これらは $\mathrm{d}J = 0 = \mathrm{d}\Omega$ 及び $J^2 = -1$ を再現している。

一方で $\delta\chi = 0$ から、ゲージ場の強さ F_{ab} に次の制限が課されることになる:

$$F_{ij} \ = \ 0 \ = \ F_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \, , \qquad g^{i\bar{\jmath}} F_{i\bar{\jmath}} \ = \ 0 \, . \tag{6.13}$$

ここで添字 $i, \bar{\jmath}$ は接空間 TY_3 の複素座標 $z^i, \bar{z}^{\bar{\jmath}}$ を意味する。この解は任意の関数 $V(z, \bar{z})$ を用いて次で与えられる:

$$A_i \ = \ V^{-1} \frac{\partial}{\partial z^i} V \, . \tag{6.14}$$

さて、これはヘテロティック弦理論である。そのため Green-Schwarz アノマリー相殺機構に伴って、スピン接続・ゲージ場・B 場は互いに関係する ((3.29d) を参照)。今、$H_3 = 0$ という期待値を持っているため $\mathrm{d}H_3 = 0$ であり、$R_2(\omega_+) = R_2(\omega)$ となる。つまり次が得られる:

$$0 \ = \ \mathrm{tr}\big\{ R_2(\omega) \wedge R_2(\omega) \big\} - \mathrm{tr}_{\mathrm{V}} (F_2 \wedge F_2) \, . \tag{6.15}$$

これを満たすために、コンパクト空間のスピン接続とゲージ場は互いに関係する。その典型例として、標準埋め込み (standard embedding) を考えよう。それは

$$\omega_i{}^{ab} \ = \ A_i^{ab} \, , \qquad A_i^{ab} \ \equiv \ A_i^c (T_c)^{ab} \, , \tag{6.16}$$

の様に同一視することである。これはゲージ場 A_i が $SU(3) \subset E_8$ を運ぶことを意味する [21]。これにより (6.15) の曲率 $R_2(\omega)$ と場の強さ F_2 が同一視され、(6.15) が満たされる。この標準埋め込みによって E_8 の随伴表現が $E_6 \times SU(3)$ の表現に分離する:

$$\mathbf{248} \ = \ (\mathbf{78}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}) \, . \tag{6.17}$$

これにより、4 次元には $(\mathbf{78}, \mathbf{1})$ 表現に従う $\mathcal{N} = 1$ ベクトル多重項が出現し、さらに $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ 表現に従うカイラル多重項と $(\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}})$ 表現に従うカイラル多重項が出現する。ただし $(\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}})$ は $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ の複素共役であり、4 次元と 6 次元それぞれのカイラリティが反転したものである。表現 $(\mathbf{1}, \mathbf{8})$ は標準埋め込みでスピン接続と同一視された自由度なので、4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 理論ではもはや登場しない。

以上により、10 次元で定義されるヘテロティック $E_8 \times E_8$ 弦理論を Calabi-Yau 空間でコンパクト化すると、4 次元には $\mathcal{N} = 1$ 超重力多重項の他に、E_6 ゲージ群の随伴表現に従う $\mathcal{N} = 1$ ベクトル多重項、E_6 の基本表現に従う $\mathcal{N} = 1$ カイラル多重項が登場したことが分かる。E_6 ゲージ群は素粒子標準模型のゲージ群 $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ を自

[21] $E_8 \times E_8$ ゲージ群について、片方の E_8 についての破れを議論するが、もう片方は hidden sector にあるとして、これ以上は議論しない [15, 35]。

然に含む大統一理論 $SU(5)$ や $SO(10)$ のさらに自然な拡張であると考えられているため、文献 [35] が登場して以来長い間、超弦理論から素粒子物理学が全て記述できるという期待が大きかった (らしい)。その後、IIA 型/IIB 型超弦理論に D ブレーンが登場することで [18]、ヘテロティック弦理論に限らず様々な次元のゲージ理論が構築できる様になった。2014 年現在でも超弦理論の双対性を用いたゲージ理論の研究が発展している。

6.3.2 世代数

Calabi-Yau 空間でコンパクト化して標準埋め込み (6.16) を課した後、ゲージ群 E_6 の基本表現 $\mathbf{27}$ に従うカイラルなフェルミオン数を N とすると、

$$N \equiv n^{\rm L}_{\mathbf{27}} - n^{\rm R}_{\mathbf{27}} \,, \tag{6.18}$$

の様に左手系のカイラルフェルミオン数 $n^{\rm L}_{\mathbf{27}}$ と右手系のカイラルフェルミオン数 $n^{\rm R}_{\mathbf{27}}$ の差として定義できる。つまりそれぞれは (6.17) の $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ に属すカイラルフェルミオンの数の差を意味している。このおかげで、N はコンパクト空間上の指数と容易に関係付けられる。Calabi-Yau 空間 Y_3 上にて、$SU(3)$ ホロノミー群を用いて分離した $\mathbf{3}$ 表現に従う左手系 Weyl スピノールの数と右手系 Weyl スピノールの数の差に読み直せるのである。そしてそれは Dirac 指数で定義できる:

$$\begin{aligned} N &= n^{\rm L}_{\mathbf{27}} - n^{\rm R}_{\mathbf{27}} = n^{\rm L}_{\mathbf{3}}(Y_3) - n^{\rm R}_{\mathbf{3}}(Y_3) \\ &= {\rm index}_{\mathbf{3}} \not{D}(Y_3) \,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

一般に $d = 4k + 2$ 次元空間において Dirac 指数と Euler 指数は結び付いている [22]:

$${\rm index}_{\mathbf{3}} \not{D}(Y_3) = \frac{1}{2} \chi(Y_3) \,. \tag{6.20}$$

これにより、世代数 $N_{\rm gen} \equiv |N|$ は純粋にコンパクト空間 Y_3 の位相不変量 (Dirac 指数や Euler 指数) で決定されてしまう。また、Euler 指数は先に登場した Hodge 数を用いて次の様にも与えられる:

$$\chi(Y_3) \equiv \sum_{p,q=0}^{3} (-1)^{p+q} h^{p,q} = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) \,. \tag{6.21}$$

例えばコンパクトな Calabi-Yau 空間 Y_3 の典型例が表 11 にまとめられている。これらの例では世代数が 3 から大きく隔たっている。これを回避するために Calabi-Yau 空間のオービフォールド化を施す [35]。なお、標準埋め込み (6.16) を課さない場合はこの限りではなく、より低いゲージ群での世代数の議論ができる (例えば [65–68] を参照)。

[22] 例えば [15] の第 14.3 節を参照せよ。

7　現在の発展

7.1　フラックスコンパクト化

ヘテロティック弦理論の Calabi-Yau コンパクト化 [35] の直後、Strominger は「定数でないディラトン $\mathrm{d}\phi$、ゼロでない H_3」の場合におけるヘテロティック弦のコンパクト化を議論した [69]。そこでは $\mathrm{d}\phi$ や H_3 はコンパクト空間のトーションとしての役割を果たす。Calabi-Yau 空間からの幾何学的なずれは $\mathrm{d}J$ と $\mathrm{d}\Omega$ に出現する:

$$\mathrm{d}J \;=\; \frac{3}{2}\mathrm{Im}(\overline{W_1}\,\Omega) + W_3 + J \wedge W_4\,, \qquad \mathrm{d}\Omega \;=\; W_1\, J \wedge J + J \wedge W_2 + \Omega \wedge W_5\,. \quad (7.1)$$

この W_i は intrinsic torsion と呼ばれ、表 15 に分類される [70]。W_i を持つ空間は一般に $SU(3)$ 構造群多様体と呼ばれ、表 16 に分類される。トーションを用いた議論はヘテロティック弦に限らず IIA 型/IIB 型超弦理論や M 理論のコンパクト化でも活用された [71–83]。

W_1 :	complex scalar
W_2 :	complex primitive two-form
W_3 :	real primitive $(2,1) \oplus (1,2)$-form
W_4 :	real one-form
W_5 :	complex $(1,0)$-form

表 15：閉形式 $\mathrm{d}J = 0 = \mathrm{d}\Omega$ からのずれを示す intrinsic torsion [70, 71]

ヘテロティック弦理論におけるフラックスコンパクト化について筆者はいくつか研究論文があるので、それについてここで簡単に解説をしたい。まず [11] では、4 次元平坦時空で $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論が実現されるための $\mathrm{d}\phi$ と H_3 の可能な配位について再検討した。結論だけ述べると、6 次元コンパクト空間が滑らかで境界がない場合、これは Calabi-Yau 空間になる。一方で境界を持つ場合、テンソル場が Calabi-Yau 空間の変形を引き起こすことが明確になった。ここで考察した系では、Levi-Civita スピン接続と H_3 の関係が、Dirac 方程式・グラビティーノの超対称変換則・アノマリー相殺項でそれぞれ微妙に異なっている (付録 F 参照):

$$\text{Dirac 方程式}: \quad {\omega_M}^{AB} - \frac{1}{3}{H_M}^{AB}\,, \tag{7.2a}$$

$$\text{超対称変換則}: \quad {\omega_M}^{AB} - {H_M}^{AB}\,, \tag{7.2b}$$

$$\text{アノマリー相殺項}: \quad {\omega_M}^{AB} + {H_M}^{AB}\,. \tag{7.2c}$$

complex	hermitian	$0 = W_1 = W_2$
	balanced	$0 = W_1 = W_2 = W_4$
	special hermitian	$0 = W_1 = W_2 = W_4 = W_5$
	Kähler	$0 = W_1 = W_2 = W_3 = W_4$
	Calabi-Yau	$0 = W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5$
	conformally Calabi-Yau	$0 = W_1 = W_2 = W_3 = 3W_4 + 2W_5$
almost complex	symplectic	$0 = W_1 = W_3 = W_4$
	nearly Kähler	$0 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5$
	almost Kähler	$0 = W_1 = W_3 = W_4 = W_5$
	quasi Kähler	$0 = W_3 = W_4 = W_5$
	semi Kähler	$0 = W_4 = W_5$
	half-flat	$0 = \mathrm{Im}W_1 = \mathrm{Im}W_2 = W_4 = W_5$

表 16：$SU(3)$ 構造群多様体の一覧

これら 3 本は一見まちまちで不思議な組み合わせであるが、互いに密接に関連している。この関係を用いて、トーションが存在する複素多様体 (より正確には strong Kähler with torsion) における新しい指数定理の定式化を [84] にて実践した。さらに (7.2) の関係が見られる「ヘテロティック 5 ブレーンの交差系」への応用を検討した [85,86]。これはこれまで超弦理論から標準模型に近いカイラルなゲージ理論を構築する方法 (第 6.3 節のシナリオ) とは異なる。ヘテロティック 5 ブレーンは IIA 型/IIB 型超弦理論にも NS5 ブレーンとして登場する、B 場に磁気的に結合する物体である。これは NS-NS セクターに起因するため、T-duality を通じて時空の計量や弦の巻き付きモードに密接に関わる。我々はこの物体を交差させ、その上でカイラルフェルミオンの個数とゲージ群の自発的破れを研究した。結果、交差点が一つあれば素粒子標準模型における世代が 1 つ実現できること、ゲージ群は大統一理論を自然に含む E_6 群が導出できる事を確かめた。

7.2　さらなる一般化： Nongeometric string background

超弦理論においてフラックスに非自明な期待値を与えてコンパクト化する手段は有益であることが見出された。それに並行して、数学者 Hitchin とその学生である Gualtieri は、通常の Calabi-Yau 多様体や Kähler 多様体の概念を大きく拡張した “generalized (complex) geometry” を提唱した [87,88]。端的に言えば、コンパクト空間 $\mathcal{K}_d$ の接空間 $T\mathcal{K}_d$ 上で定義される (概) 複素構造を、接空間 $T\mathcal{K}_d$ と余接空間 $T^*\mathcal{K}_d$ の直和空間 $T\mathcal{K}_d \oplus T^*\mathcal{K}_d$

上で定義するように拡大したのである。拡大された接空間で定義される (概) 複素構造は、通常の (余) 接空間の (概) 複素構造とシンプレクティック構造を同時に分離した形式で実現する。そして拡大された接空間が持つ対称性が $SO(d,d)$ 群になっている。この構造を即座に超弦理論のコンパクト化に応用したのが [89] である。その後 [90–106] など一連の仕事によって IIA 型/IIB 型理論のコンパクト化と、そこから得られる 4 次元 $\mathcal{N}=1,2$ 超重力理論のモジュライ空間の再現に対して深い理解を与えた。2000 年代半ばからのレビューは [107–110]、この話題に特化した研究会は [111,112] などである。非常に大雑把ながらも Calabi-Yau 空間の一般化を議論する。Calabi-Yau 空間からのずれは (7.1) で表示されている。見方を変えると、第 5 章の表 12 で与えられている基底形式 $(\omega_\Lambda, \widetilde{\omega}^\Sigma; \alpha_K, \beta^L)$ に作用する外微分 d の拡大に翻訳できる [101][23]:

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\omega_\Lambda \\ \widetilde{\omega}^\Sigma\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_\Lambda{}^K & e_{\Lambda L} \\ m^{\Sigma K} & m^\Sigma{}_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_K \\ \beta^L\end{pmatrix}, \tag{7.3a}$$

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\alpha_K \\ \beta^L\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m^\Lambda{}_K & e_{\Sigma K} \\ -m^{\Lambda L} & -e_\Sigma{}^L \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_\Lambda \\ \widetilde{\omega}^\Sigma\end{pmatrix}. \tag{7.3b}$$

Calabi-Yau 空間の場合、変形を司る (non)geometric flux charges と呼ばれるパラメータ $e_\Lambda{}^K$, $e_{\Lambda L}$, $m^{\Sigma K}$, $m^\Sigma{}_L$ は全てゼロである。表 16 で分類されるトーションを持つ空間は $m^{\Sigma K} = m^\Sigma{}_L = 0$ で象徴される。トーション $e_\Lambda{}^K$, $e_{\Lambda L}$ と「対等に」非自明なパラメータを導入することは、形式上 $m^{\Sigma K}$, $m^\Sigma{}_L$ を非自明にすることであるが、これは通常の空間ではトーションなどで表現できない拡張になる。さらに $\mathrm{d}^2 = 0$ と同様にして $\mathfrak{D}^2 = 0$ を課すことによってこれら (non)geometric flux charges に関係が付く。この拡張された空間を “nongeometric string background” と呼ぶ [91]。これを自然に内蔵するのが generalized geometry である。なお、(non)geometric flux charges の寄与を超重力理論の微分演算に (強引に) 導入すると次の様に表記される (各項の係数の詳細は無視):

$$\mathrm{d}C_p \ \to\ \mathfrak{D}C_p \ \equiv\ \mathrm{d}C_p - H\wedge C_p - f\cdot C_p - Q\cdot C_p - R\llcorner C_p\,, \tag{7.4a}$$

$$(f\cdot C_p)_{m_1\cdots m_{p+1}} \ \equiv\ f^a{}_{[m_1 m_2}\, C_{|a|m_3\cdots m_{p+1}]}\,, \tag{7.4b}$$

$$(Q\cdot C_p)_{m_1\cdots m_{p-1}} \ \equiv\ Q^{ab}{}_{[m_1}\, C_{|ab|m_2\cdots m_{p-1}]}\,, \tag{7.4c}$$

$$(R\llcorner C_p)_{m_1\cdots m_{p-3}} \ \equiv\ R^{abc}\, C_{abc\, m_1\cdots m_{p-3}}\,. \tag{7.4d}$$

上記それぞれを H-flux、f-flux、Q-flux、R-flux と呼ぶ。H-flux のみの寄与の時は、H_3 がトーションとして寄与する通常の空間である。また f-flux のみの寄与の時は twisted torus と呼ばれる。この $f^a{}_{bc}$ は、トーラス上の可換なアイソメトリーを非可換化したときの構造

[23] generalized geometry への拡大に伴い、α_K, β^L は 1-形式、3-形式、5-形式の基底になる。

定数である。これらふたつは (7.3) において $e_\Lambda{}^K$, $e_{\Lambda L}$ の寄与だけで説明できる。Q-flux, R-flux の存在は (7.3) の $m^{\Sigma K}$, $m^\Sigma{}_L$ からの寄与であり。それぞれ generalized geometry 特有の性質である。Q-flux を持つ空間は locally geometric but globally nongeometric background と呼ばれ、R-flux を持つ空間は (even) locally nongeometric background と呼ばれる。これら H-, f-, Q-, R-flux は互いに T-duality 変換で関連する。すなわち H-flux をある方向に沿って T-duality 変換すると f-flux に、また別の方向に T-duality 変換すると Q-flux に、さらに別の方向にも T-duality 変換すると R-flux になる [98, 101]:

$$H_{abc} \xleftrightarrow{T_a} f^a{}_{bc} \xleftrightarrow{T_b} Q^{ab}{}_c \xleftrightarrow{T_c} R^{abc} \,. \tag{7.5}$$

IIA 型/IIB 型超重力理論を generalized geometry でコンパクト化する具体的な議論は [102,104,106] などに見出すことができる。この研究では、(non)geometric flux charges と 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論におけるテンソル多重項の関係が明示されている。ゲージ化されていない 4 次元理論ではスカラー場と 2 階反対称テンソル場は互いに Hodge 双対の関係にあるが、理論がゲージ化されてスカラー場が帯電すると一般に Hodge 双対が出来なくなる。しかし一方で、ゲージ化された超重力理論にテンソル多重項が結合した理論も存在する。ゲージ化された超重力理論にテンソル多重項が結合する系は、(7.3) において $m^{\Sigma K}$, $m^\Sigma{}_L$ を非自明にした nongeometric string background とそれを実現する generalized geometry を用いれば 10 次元理論から導出できる (付録 H 参照)。

コンパクト空間を generalized geometry に拡張したら 4 次元時空上の全ての超重力理論が再現できる、というわけではない。T-duality 群を基礎として構築されている generalized geometry では、4 次元超重力理論に結合するゲージ理論は可換群しか再現できない。これは T-duality 変換が NS-NS セクターと R-R セクターを混合しないことに起因する。別の言い方で言えば、非可換ゲージ群は超重力理論が持つ U-duality 群 (の一部) をゲージ化することで実現されるが、generalized geometry は U-duality 群全体を把握していない。T-duality 変換を越えて NS-NS セクターと R-R セクターを混合する U-duality 変換を実現する、さらに拡張された幾何学 “exceptional generalized geometry” については、[113] を先駆けとして [114–118] などがある。これは現在も定式化のために Graña を中心に研究中である [24]。

一方で、nongeometric string background を表現する別の定式化もある。それは Hull を中心に研究されている “doubled formalism” である。文献 [91] を起点として [119, 120] が発表された。これは、トーラスコンパクト化された空間に巻き付く弦の運動量モードと巻き付きモードを対等に扱う際、Fourier 変換で登場するそれぞれの座標空間をも対等

[24] 余談ながら、“exceptional” とは、U-duality 群が例外群であることに由来する。登場当初は “extended generalized geometry” と呼ばれていたが、いつのころからか “exceptional” に統一された。

に扱う。例えば点粒子では運動量モードと座標が共役であり、量子論はこれらを基礎に構築するが、超弦理論では「運動量モードと巻き付きモード」と、それぞれに共役である「座標空間と双対座標空間」を基礎にして量子論を再構築する。この際、座標空間と双対座標空間は区別せずに一つの “doubled geometry” として扱う。generalized geometry では座標空間は拡大せずに接空間を拡大したに過ぎないが、doubled formalism では座標空間そのものが倍に拡大される。具体的に表記すると、トーラスの座標 x^m と T-duality ペアになる双対座標 $\widetilde{x}_m$ をまとめて x^M とする。この表記ではもはや x^m と $\widetilde{x}_m$ の区別はない。適切な分化 (polarization) を行って

$$x^M \ = \ \begin{pmatrix} x^m \\ \widetilde{x}_m \end{pmatrix} , \tag{7.6a}$$

の様に区別される。同様に d 次元空間上の通常の計量 g_{mn} と B 場 B_{mn} を

$$\mathcal{M}_{MN} \ \equiv \ \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp} \, g^{pq} B_{qn} & B_{mp} \, g^{pn} \\ -g^{mp} B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix} , \tag{7.6b}$$

の様に行列表記しよう。通常これは d 次元コンパクト空間の moduli matrix と呼ばれるが [121–123]、近年では generalized metric と呼ばれている。$\mathcal{M}_{MN}$ は商空間 $O(d,d)/[O(d)\times O(d)]$ に値を持つ。そして、doubled formalism ではこの $\mathcal{M}_{MN}$ が「倍化された座標 x^M」に作用する generalized metric として扱われる。座標と同じく、分化される前の $\mathcal{M}_{MN}$ の成分はもはや g_{mn} や B_{mn} で表示されるものではない事に注意。doubled geometry はこの $\mathcal{M}_{MN}$ が支配する空間である。ちなみに、generalized geometry でも x^M と $\mathcal{M}_{MN}$ は有益であることを付け加えておく。generalized geometry においては $\mathcal{M}_{MN}$ (7.6b) は分化させずにそのまま用いられるが、x^M (7.6a) は

$$x^M \ = \ \begin{pmatrix} x^m \\ \frac{\partial}{\partial x^m} \end{pmatrix} , \tag{7.7}$$

として用いられる [123]。

Generalized geometry や doubled formalism など nongeometric string background と通常のコンパクト空間を比較する際に有益なものは、generalized metric $\mathcal{M}_{MN}$ とそれが持つモノドロミー (monodromy) である。nongeometric string background のモノドロミーは超弦理論の双対性に起因する。$\mathcal{M}_{MN}$ は $O(d,d)$ をアイソメトリーとして持つ。起点となっているコンパクト空間 $\mathcal{K}_d$ に対して、一般座標変換・B 場のゲージ変換・T-duality 変換など何かしらの変換を実行する。その際 $\mathcal{M}_{MN}$ は次の様に変換される:

$$\mathcal{M}_{MN} \ \to \ \mathcal{M}'_{MN} \ = \ (\Omega^{\mathrm{T}} \mathcal{M} \, \Omega)_{MN} \ = \ \Omega_M{}^P \, \mathcal{M}_{PQ} \, \Omega^Q{}_N \, , \tag{7.8a}$$

$$\Omega^{\mathrm{T}} \eta \, \Omega \ = \ \eta \, , \qquad \eta \ = \ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_d \\ \mathbb{1}_d & 0 \end{pmatrix} , \tag{7.8b}$$

$$\Omega \ = \ \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Theta & D \end{pmatrix} , \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \Theta : & \text{B 場のゲージ変換 } B_2 \to B_2 + \Theta \, , \\ A, D : & g_{mn} \text{ に対する一般座標変換} \, , \\ \beta : & \text{T-duality 変換} \, . \end{array} \right. \tag{7.8c}$$

さて、コンパクト空間上 $\mathcal{K}_d$ のある点 P を起点として閉じたループを考えよう。それに沿って系を一周したとき、generalized metric は Ω を用いてモノドロミー変換される。もし「ループに沿って系を一周するだけ」で β 成分が非自明に登場すれば、その空間は T-duality を空間の構造に持つ nongeometric string background である [25]。この様な β 成分を持つ系は、T-duality に起因する空間という意味で “T-fold” と呼ばれる [91]。

もちろん、コンパクト空間が 2 倍に拡大されるので非物理的なモードがたくさん登場するが、それは適切な処方箋で project-out すれば良い。この方針は、極端な言い方をすればゲージ理論に似ている。Coulomb ゲージのままで物理的自由度のみに着目して散乱振幅を計算する代わりに、ゲージ自由度を活かしてゲージ共変な形式に拡大して計算を実行する、という発想である。適切な project-out は、トーラスコンパクト化されている方向の半径 R に基づく運動量モードのエネルギーと巻き付きモードのエネルギーを比較して検討すれば良い。それぞれのエネルギーは

$$E_{\text{momentum}} \ = \ \frac{1}{R} \, , \qquad E_{\text{winding}} \ = \ \frac{R}{\alpha'} \, , \qquad \frac{E_{\text{winding}}}{E_{\text{momentum}}} \ = \ \frac{R^2}{\alpha'} \, , \tag{7.9}$$

で与えられる [8]。よって $R^2 \gg \alpha'$ のときは運動量モードが軽く巻き付きモードが重くなる。そして全運動量モードに共役な座標が見えてくる。そして巻き付きモードに共役な双対座標空間が見えなくなる。この手続きで doubled geometry から通常の空間に project-out される。一方、$R^2 \ll \alpha'$ の場合は巻き付きモードが非常に軽くなるために全巻き付きモードに共役な双対座標が見えてくるため、doubled geometry から双対座標空間に project-out される。そのため弦理論は座標空間のみ、もしくは双対座標空間のみを時空とするのではなく、両方を合わせた空間を認識する [126]。

Doubled geometry は主にトーラスコンパクト化の設定において発展した [127–130]。これをさらに進化させ、全時空を倍にした “double field theory” も提案された [131]。double field theory はその後急速に発展し続けているトピックである。レビュー論文としては [126, 132, 133] がある。これによると、10 次元時空を $SO(10,10)$ 対称性を持つ空間に格上げして、IIA 型超重力理論と IIB 型超重力理論のそれぞれのボソン場を同時に

[25] この周辺は筆者が 2008 年時点で既に基研研究会などで紹介している [124, 125]

内包する模型を構成したとのことである [134]。適切な projection を課すと IIA 型もしくは IIB 型理論を再現する。ちなみに筆者達は doubled geometry の定式化において弦の世界面に非自明な境界条件を導入した [135]。境界条件は D ブレーンが doubled geometry 上で矛盾なく存在するための条件である。これまでこのトピックでは閉弦が記述する空間の倍化に特化していたが、我々はこの研究で開弦とその端点が張り付く D ブレーンの振る舞いを議論して、存在条件を分類した。

最後に、doubled formalism もやはり T-duality 群を基礎にした理論であるため、最終的には U-duality 群まで内蔵する定式化が望まれる。これについては、2013 年 12 月に Hohm と Samtleben が “exceptional field theory” として提唱している [136, 137]。

7.3　エキゾチックブレーン

ブラックホール量子力学を超弦理論によって理解しようとする試みの中で、ブラックホールエントロピーに寄与するのは D ブレーンに限らず、これからあらゆる双対変換された物体も寄与するべきであるという主張がなされている。その中で特に de Boer と重森 [138] によって再注目された “エキゾチックブレーン” という物体がある。これは 1990 年代後半に既に存在そのものは知られていた [139, 140] (レビューとして [141] など)。この物体は周囲の時空を歪めるという単純に重いだけの物体ではなく、その物体まわりの時空の計量を多価関数にしてしまう点で奇妙である。

ここでは例として 5^2_2 ブレーンと呼ばれる 10 次元時空上の $5+1$ 次元物体に着目する。この物体は NS5 ブレーンに垂直な方向について T-duality を 2 回実行することで得られる。まず 012345-方向に広がった NS5 ブレーンの系 (string frame) を次で表記しよう:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}s^2_{012345} + H\big[(\mathrm{d}x^6)^2 + (\mathrm{d}x^7)^2 + (\mathrm{d}x^8)^2 + (\mathrm{d}x^9)^2\big] \,, & \text{(7.10a)} \\ B_{i9} &= V_i \,, \qquad \mathrm{e}^{2\phi} \;=\; H \,, & \text{(7.10b)} \\ H &= 1 + \frac{\ell_0}{\sqrt{2}\,|\vec{x}|} \,, \qquad \ell_0 \;=\; \frac{\alpha'}{R_9} \,, & \text{(7.10c)} \\ \nabla_i H &= (\nabla \times \vec{V})_i \,, \qquad \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{x} \;=\; \frac{\ell_0}{\sqrt{2}} \frac{-x^6 \mathrm{d}x^8 + x^8 \mathrm{d}x^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}| + x^7)} \,. & \text{(7.10d)} \end{aligned}$$

なお、ここではあらかじめ x^9-方向についてコンパクト化して並進対称性がある系にしている。そして R_9 は x^9-方向の半径である。この様な NS5 ブレーンを特に H モノポール (H-monopole) とも呼ぶ。さて、x^9-方向に対して T-duality を実行しよう。Buscher ルー

ル (第 3.4.3 節) によって系が次の様になる:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; \mathrm{d}s^2_{012345} + H\big[(\mathrm{d}x^6)^2 + (\mathrm{d}x^7)^2 + (\mathrm{d}x^8)^2\big] + \frac{1}{H}\big[\mathrm{d}y^9 - \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{x}\big]^2\,, \tag{7.11a}$$

$$B_{IJ} \;=\; 0\,, \qquad \mathrm{e}^{2\phi} \;=\; 1\,, \tag{7.11b}$$

$$H \;=\; 1 + \frac{\ell_0}{\sqrt{2}\,|\vec{x}|}\,, \tag{7.11c}$$

$$\nabla_i H \;=\; (\nabla\times\vec{V})_i\,, \qquad \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{x} \;=\; \frac{\ell_0}{\sqrt{2}}\frac{-x^6\mathrm{d}x^8 + x^8\mathrm{d}x^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}|+x^7)}\,. \tag{7.11d}$$

これは KK5 ブレーンもしくは KK モノポール (KK-monopole) と呼ばれる。特に 6789-方向の空間は「Taub-NUT 空間」という名前の付いた非コンパクトな hyper-Kähler 空間である。これにさらに T-duality を実行する。そのために x^8-方向をコンパクト化して、さらに並進対称性を与えるために x^8-依存性をなめす (smearing)。その後 x^8-方向に沿って T-duality を実行することで、5^2_2 ブレーン系の配位が得られる:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; \mathrm{d}s^2_{012345} + H\Big\{(\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\vartheta)^2\Big\} + \frac{H}{K}\Big\{(\mathrm{d}y^8)^2 + (\mathrm{d}y^9)^2\Big\}\,, \tag{7.12a}$$

$$B_{89} \;=\; -\frac{\sigma\vartheta}{K}\,, \qquad \mathrm{e}^{2\phi} \;=\; \frac{H}{K}\,, \tag{7.12b}$$

$$H \;=\; h + \sigma\log\frac{\mu}{\rho}\,, \qquad K \;=\; H^2 + (\sigma\vartheta)^2\,. \tag{7.12c}$$

(ρ,ϑ,y^8,y^9)-方向はブレーンに垂直な方向である。ただし (y^8,y^9)-方向はトーラスにコンパクト化されているため、開いた方向は実質的に (ρ,ϑ) の 2 方向のみである。μ はある適当なパラメータであるが、調和関数 H が正に留まる ρ の範囲を指定する「赤外 cutoff」の役割を果たす。σ と h は適当な次元を持つ定数である。この配位を見れば一目瞭然だが、ϑ-方向に沿ってゼロから 2π まで一周回っても、計量は自分自身に戻ってこない。この系は非自明なモノドロミーを持つ。89-方向の計量と B 場のみが非自明であるため、その上の generalized metric (7.6b) とその変換則 (7.8) を議論しよう。ϑ での generalized metric を $\mathcal{M}_{MN}(\vartheta)$ と表記して、$\vartheta=0$ と $\vartheta=2\pi$ をつなぐ変換行列 Ω を評価する [138, 142, 143]:

$$\mathcal{M}_{MN}(\vartheta) \;=\; \frac{1}{H}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sigma\vartheta \\ 0 & 1 & +\sigma\vartheta & 0 \\ 0 & +\sigma\vartheta & K & 0 \\ -\sigma\vartheta & 0 & 0 & K \end{pmatrix}\,, \tag{7.13a}$$

$$\mathcal{M}_{MN}(2\pi) \;\equiv\; (\Omega^{\mathrm{T}}\mathcal{M}(0)\,\Omega)_{MN}\,, \tag{7.13b}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\pi\sigma \\ 0 & 1 & +2\pi\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{7.13c}$$

(7.8) と比較してすぐに分かるように、これは「5^2_2 ブレーンを中心にして ϑ-方向に沿って移動した」だけにも関わらず、β 成分が非自明になっている。つまり T-duality 変換を含む非自明なモノドロミーを持つ。このため、$\vartheta = 0$ から $\vartheta = 2\pi$ に戻ってきても一般座標変換や B 場のゲージ変換ではずれが吸収できず、g_{mn} の一価性が破綻する。ちなみに、(7.10) と (7.11) のそれぞれについて 8-方向をコンパクト化した NS5 ブレーン (KK5 ブレーン) である "defect NS5 ブレーン"("defect KK5 ブレーン") についても、それぞれ次の様にモノドロミー行列 Ω を構成できる:

$$\Omega^{\rm dNS5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi\sigma & 1 & 0 \\ +2\pi\sigma & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \Omega^{\rm dKK5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi\sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +2\pi\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{7.14}$$

(7.8) と比較すると、$\Omega^{\rm dNS5}$ は Θ 成分が、$\Omega^{\rm dKK5}$ は A, D 成分が、それぞれ非自明である。これらはそれぞれ B 場のゲージ変換や一般座標変換で吸収できるため、系の一価性が保たれる。これに基づいて、defect NS5 ブレーンや defect KK5 ブレーンはエキゾチックブレーンと見なされることはない。

(7.13) の様な 5^2_2 ブレーンの性質のため、通常の一般相対論などではこの振る舞いは病的だとされ捨てられる。しかしこの計量の多価性は超弦理論の T-duality 変換によって生み出されたものである。この性質はフラックスコンパクト化で導入された generalized geometry や doubled formalism に相通じるものがある。事実この 5^2_2 ブレーンが作り出す背景時空は T-duality に起因するため T-fold の典型例である [138]。さらにこれは (7.4) では Q-flux を持つ空間 (locally geometric but globally nongeometric background) としての具体例でもある [26]。

5^2_2 ブレーンの研究は 2010 年以後積極的に進められている。doubled geometry の視点で菊池・岡田・酒谷がエキゾチックブレーンのまわりでの弦の振る舞いを考察し [142]、超重力理論の視点での包括的な議論が de Boer と重森によってなされた [143]。また、筆者達は弦の世界面の理論の視点に立ってこの 5^2_2 ブレーンを考察した [144–147]。ここで用いている手法は gauged linear sigma model (GLSM) と呼ばれる 2 次元ゲージ理論であ

[26] (7.5) の視点に立てば、NS5 ブレーン (7.10), KK5 ブレーン (7.11) はそれぞれ H-flux、f-flux がある空間である。

る。この模型は元来が Calabi-Yau 空間上の超弦理論を CFT 的に記述して位相不変量を評価したり、ミラー双対を構築したりする際に威力を発揮する模型である [53, 148, 149]。また別の視点で、ブレーンの世界体積の理論の構築の研究は [150–152] などがある。

7.4　低次元超重力理論のゲージ化

第 4.1 節において、11 次元超重力理論をトーラスコンパクト化することで低次元極大超重力理論が登場する事を簡単に紹介した。ただしそこで登場する超重力理論には非可換ゲージ理論 (Yang-Mills 理論) は結合しておらず、可換ゲージ群が登場するのみである。非可換ゲージ理論に格上げするには U-duality 群の一部をゲージ化すると良いが、一筋縄では行かなかった。これについて系統的な構築方法が 2000 年代前半から進展している。それを “embedding tensor formalism” と呼ぶ。この定式化における重要な文献は [153, 154] である。端的に言えば、極大超重力理論が持つ U-duality 群 G_0 の生成子 t_α をゲージ群 G の生成子 T_M に格上げするために

$$T_M \;\equiv\; \Theta_M{}^\alpha\, t_\alpha\,, \tag{7.15a}$$

$$[T_M, T_N] \;=\; \mathrm{i}\, T_{MN}{}^P\, T_P\,, \qquad T_{MN}{}^P \;=\; \Theta_M{}^\alpha\, (t_\alpha)_N{}^P\,, \tag{7.15b}$$

というパラメータ (embedding tensor) $\Theta_M{}^\alpha$ を導入する。新しい生成子 T_M と超重力理論に元々存在する可換ゲージ場 W_μ^M を用いて微分を共変微分

$$\partial_\mu \;\to\; D_\mu \;=\; \partial_\mu - \mathrm{i}\, g\, W_\mu^M\, T_M\,, \tag{7.16}$$

に置き換える。ここまでは通常のゲージ化と同じである。重要な飛躍は、

$$T_{(MN)}{}^P\, T_P \;=\; 0\,, \tag{7.17}$$

ではあっても「$T_{(MN)}{}^P$ はゼロである必要はない」として理論の拡大に余地を与えたことである。この余地の導入により、物理的・非物理的なテンソル場の結合を系統的に出来るようになった [155, 156]。embedding tensor formalism によって、(半) 極大超重力理論はほぼ全ての次元でゲージ化が完成している (例えば [23, 157–162] や講義録 [163] などを参照)。8 個の超対称生成子を持つ超重力理論のゲージ化の完備が急がれている [164][27]。

[27] なお、筆者は [165, 166] にて [164] の解説を行っている。

7.5 超弦理論における時空のコンパクト化の真の理解へ

現時点では「低次元超重力理論は全てが超弦理論から導出されるとは考えにくい」という見解が一般的である。超弦理論のコンパクト化で得られる場の理論より、低次元それぞれで構成される場の理論の方がはるかに豊富だと考えられているからである。しかし一方で、先の nongeometric string background と embedding tensor とは密接な関係にあると考える研究者は多い [123]。例えば、(7.3) に登場する (non)geometric flux charges ${e_\Lambda}^K$, $e_{\Lambda L}$, $m^{\Sigma K}$, ${m^\Sigma}_L$ と embedding tensor ${\Theta_M}^\alpha$ の間には深い関係 (もしくは同一視) が見出せると考えられている。またエキゾチックブレーンが nongeometric string background の典型例であると既に述べたが、エキゾチックブレーンと embedding tensor の関係も研究されている [167–171]。エキゾチックブレーンとゲージ化された超重力理論の関係が見出せると、弦特有の性質 (の一部) が点粒子の理論である超重力理論の変形因子として見えることになる。つまり一般相対論からの自然な拡張と見做すことが出来て、エキゾチックブレーンに懐疑的な人でも心理的に抵抗がなくなるかもしれない。さらに進めて、exceptional generalized geometry や exceptional field theory といった野心的な拡張とゲージ化された超重力理論の関係が明確に見出せる可能性もある。こうなれば、ひょっとしたら低次元の全ての場の理論が高次元理論から構成できるかもしれないという期待が高まってくる [28]。これらを背景として、2014 年 3 月に京都大学基礎物理学研究所にてモレキュール型国際研究会「Exotic Structures of Spacetime」が開催された。webpage [173] を訪れると、問題点などを紹介し議論するスライドが見つかるだろう。

超弦理論のコンパクト化を推し進める過程で発見した新しい幾何学が、一般相対論という点粒子で眺める宇宙像に対して飛躍的な拡張を促している。そのため、nongeometric string backgrounds を追究するうちに、我々の思いもしない方向から自然に対する面白い知見が得られるのではないかと、大いに期待できる。最後に、筆者が 2014 年現在持っている見解を以下に掲載しておこう:

これまでは、超弦理論を扱いながらも「弦の運動量空間に共役な座標空間のみ」が時空であった。これは点粒子が感じる時空像 (つまりアインシュタインによるリーマン幾何学を用いた一般相対論) を **越えていない**。超弦理論が時空の量子論を矛盾なく記述するならば、T-duality の下で運動量モードと同等な「弦の巻き付きモード」と巻き付きモードに共役な「双対座標空間」も、時空の記述に寄与すべきである。

[28] この点について、筆者は 2013 年 2 月に理化学研究所で開催された研究会「エキゾチック時空幾何とその応用」にて講演を行った [172]。

付 録

A　表記法や定義・約束事

A.1　添字についての原則ルール

あくまでも原則だが、場の添字について次の様な記述のルールを採用する:

高次元時空の曲がった空間の添字	:	$M, N, P, \ldots,$	$0, 1, 2, 3, \ldots$
高次元時空の接空間の添字	:	$A, B, C, \ldots,$	$\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$
4 次元 (低次元) 時空の曲がった空間の添字	:	$\mu, \nu, \rho, \ldots,$	$0, 1, 2, 3, \ldots$
4 次元 (低次元) 時空の接空間の添字	:	$a, b, c, \ldots,$	$\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$
コンパクト化された曲がった空間の添字	:	$m, n, p, \ldots,$	$1, 2, 3, \ldots$

ここで「高次元」「低次元」とは相対的な表現に過ぎない。考えている理論をコンパクト化する前後での表記だと思ってもらって良い。4 次元時空の接空間の添字 $a, b, \ldots$ はしばしば他の意味の添字にも用いられるが、あまり混乱はないと思われる。

A.2　完全反対称テンソルの扱い

反対称テンソルの縮約ルールについては次の表記を用いている [6,8]:

$$\begin{aligned} |F_p|^2 \ &\equiv \ \frac{1}{p!}\, g^{M_1 N_1} \cdots g^{M_p N_p}\, F_{M_1 \cdots M_p}\, F_{N_1 \cdots N_p} \\ &= \ \frac{1}{p!}\, \eta^{A_1 B_1} \cdots \eta^{A_p B_p}\, F_{A_1 \cdots A_p}\, F_{B_1 \cdots B_p}\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

テンソル添字について完全 (反) 対称化の記号は次のとおり:

$$\text{完全対称 :} \quad T_{(A_1 A_2 \cdots A_p)} \ = \ \frac{1}{p!}\Big(T_{A_1 A_2 \cdots A_p} + T_{A_2 A_1 \cdots A_p} + \text{permutations} \Big)\,, \tag{A.2a}$$

$$\text{完全反対称 :} \quad T_{[A_1 A_2 \cdots A_p]} \ = \ \frac{1}{p!}\Big(T_{A_1 A_2 \cdots A_p} - T_{A_2 A_1 \cdots A_p} \pm \text{permutations} \Big)\,. \tag{A.2b}$$

Dirac のガンマ行列はこの表記を頻繁に行う。その具体例を挙げておこう:

$$\begin{aligned} \Gamma^{ABC} \ &\equiv \ \Gamma^{[A}\Gamma^{B}\Gamma^{C]} \\ &= \ \frac{1}{3!}\Big(\Gamma^A\Gamma^B\Gamma^C + \Gamma^B\Gamma^C\Gamma^A + \Gamma^C\Gamma^A\Gamma^B - \Gamma^B\Gamma^A\Gamma^C - \Gamma^C\Gamma^B\Gamma^A - \Gamma^A\Gamma^C\Gamma^B \Big)\,. \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.3　Dirac のガンマ行列

様々な時空次元での Dirac のガンマ行列 Γ^A をここで用意しておく (詳細は付録 B を参照)。Γ^A は次の Clifford 代数に従う:

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} \;=\; 2\eta^{AB}\,, \qquad \eta_{AB} \;=\; \mathrm{diag.}(-,+,+,\ldots,+)\,. \tag{A.4}$$

これにより、即座に次が言える:

$$(\Gamma^A)^\dagger \;=\; \Gamma_A \;=\; -\Gamma^{\hat{0}}\Gamma^A(\Gamma^{\hat{0}})^{-1}\,. \tag{A.5}$$

カイラリティ演算子は次で定義される:

$$\Gamma \;\equiv\; \mathrm{i}^{-k}\,\Gamma^{\hat{0}}\Gamma^{\hat{1}}\cdots\Gamma^{(\widehat{D-1})}\,, \qquad D \;=\; 2k+2\,. \tag{A.6}$$

大変有用な恒等式をここで紹介する [1]:

$$\Gamma^{A_1A_2\cdots A_p}\Gamma_{B_1B_2\cdots B_q} = \sum_{k=0}^{\min(p,q)} (-1)^{\frac{k}{2}(2p-k-1)}\frac{p!\,q!}{(p-k)!(q-k)!\,k!}\,\delta^{[A_1}_{[B_1}\cdots\delta^{A_k}_{B_k}\,\Gamma^{A_{k+1}\cdots A_p]}{}_{B_{k+1}\cdots B_q]}\,. \tag{A.7}$$

A.4　Lorentz 代数の表現

Lorentz 代数は生成子 M_{AB} を用いて次の様に与えられる [29]:

$$\mathrm{i}\,[\mathsf{M}_{AB}, \mathsf{M}_{CD}] \;=\; \eta_{AC}\,\mathsf{M}_{BD} + \eta_{BD}\,\mathsf{M}_{AC} - \eta_{AD}\,\mathsf{M}_{BC} - \eta_{BC}\,\mathsf{M}_{AD}\,. \tag{A.8}$$

生成子 M_{AB} がスカラー・ベクトル (テンソル)・スピノールに作用するときのそれぞれの表現を与える:

$$\mathsf{M}_{AB} \;=\; 0 \qquad \text{スカラー}\,, \tag{A.9a}$$
$$(\mathsf{M}_{CD})^A{}_B \;=\; \mathrm{i}\,(\delta^A_C\,\eta_{BD} - \delta^A_D\,\eta_{BC}) \qquad \text{ベクトル (テンソル)}\,, \tag{A.9b}$$
$$\mathsf{M}_{AB} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{AB} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{4}[\Gamma_A, \Gamma_B] \qquad \text{スピノール}\,. \tag{A.9c}$$

[29] [2, 6] の Lorentz 生成子の定義とは逆符号。

B　様々な時空次元でのスピノール

$SO(3,1)$ Lorentz 対称性を持つ 4 次元時空では Majorana スピノールか Weyl スピノールが既約であるということは、場の理論の教科書に記述されている。一般の $SO(D-1,1)$ Lorentz 対称性を持つ D 次元時空ではどのような既約スピノールが定義できるか。それをまとめておく。ここでは [2,6,8] などに従う。その他にも [174] などがある。

全ては Clifford 代数から始まる:

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} \ = \ 2\eta^{AB}\,, \qquad \eta_{AB} \ = \ \mathrm{diag.}(-,+,+,\ldots,+)\,. \tag{B.1}$$

時空計量の符号の関係で、$\Gamma^{\hat{0}}$ のみが反エルミートであり、残りは全てエルミートである。それを一言で表現すると次の様になる:

$$(\Gamma^A)^\dagger \ = \ \Gamma_A \ = \ -\Gamma^{\hat{0}}\Gamma^A(\Gamma^{\hat{0}})^{-1}\,. \tag{B.2}$$

これに従うスピノールを構築する。偶数次元と奇数次元で少し議論が異なるので、まずは偶数次元から扱う。

スピノールは本来時空の各点での接空間で定義されるのだが、ここの議論は全て平坦な時空で議論するため、区別はあまりしない。そのためこれ以後は接空間の添字を示す添字の hat 記号 ˆ を省略する。

B.1　偶数次元 $D = 2k+2$ でのスピノール

ガンマ行列を次の様に定義しなおす:

$$\Gamma^{0\pm} \ \equiv \ \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1)\,, \qquad \Gamma^{a\pm} \ \equiv \ \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm \mathrm{i}\Gamma^{2a+1})\,, \qquad a \ = \ 1,\ldots,k\,. \tag{B.3}$$

これは次を満足する:

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} \ = \ \delta^{ab}\,, \qquad \{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} \ = \ 0 \ = \ \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\}\,. \tag{B.4}$$

これから $(\Gamma^{a+})^2 = 0 = (\Gamma^{a-})^2$ であるため、フェルミオン的な生成・消滅演算子と同じ様な役割を果たす。ここで、全ての Γ^{a-}, Γ^{0-} の作用で消滅する「状態」を定義しよう:

$$\Gamma^{a-}\zeta \ = \ 0\,, \qquad \Gamma^{0-}\zeta \ = \ 0\,. \tag{B.5}$$

この状態に Γ^{a+} や Γ^{0+} を作用させると、合計で 2^{k+1} 通りの状態が構築できる。それを次で表現しよう:

$$\zeta^{(\mathbf{s})} \;\equiv\; (\Gamma^{k+})^{s_k+\frac{1}{2}}(\Gamma^{k-1,+})^{s_{k-1}+\frac{1}{2}}\cdots(\Gamma^{0+})^{s_0+\frac{1}{2}}\zeta\,, \tag{B.6a}$$

$$\mathbf{s} \;=\; (s_0, s_1, \ldots, s_k)\,, \qquad s_0, s_a \;=\; \pm\frac{1}{2}\,. \tag{B.6b}$$

これを、$D = 2k+2$ 次元のスピノール表現 (Dirac 表現) と呼ぶ。この $\zeta^{(\mathbf{s})}$ は (反) エルミート行列を用いて定義されるので、一般に複素数に値を持つ。つまり Dirac 表現は実数で $2 \cdot 2^{k+1}$ 自由度持っている。

B.1.1　行列表記

各偶数次元でガンマ行列がどのような行列で表記できるかを考察しよう。いきなり $D = 2k+2$ 次元での行列表記を求めるのではなく、$D = 2$ から順番に構築する。

$D = 2$ (つまり $k = 0$) でのスピノール表現を縦ベクトルの様に並べる:

$$\zeta_{(0)} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

これに左から $\Gamma^0 = \Gamma^{0+} - \Gamma^{0-}$ もしくは $\Gamma^1 = \Gamma^{0+} + \Gamma^{0-}$ を作用させて行列表記を得る:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0,1}\zeta_{(0)} \;&=\; (\Gamma^{0+} \mp \Gamma^{0-})\begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \Gamma^{0+}\zeta \mp \cancel{\Gamma^{0-}\zeta} \\ \cancel{(\Gamma^{0+})^2}\zeta \mp \Gamma^{0-}\Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} \Gamma^{0+}\zeta \\ \pm\cancel{\Gamma^{0+}\Gamma^{0-}\zeta} \mp \zeta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{B.8a}$$

$$\therefore \quad \Gamma^0 \;=\; \sigma^1\,, \qquad \Gamma^1 \;=\; \mathrm{i}\sigma^2\,. \tag{B.8b}$$

ここで σ^i は Pauli 行列である。次に $D = 4$ ($k = 1$) の場合を考察する。上と同様に

$$\zeta_{(1)} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \zeta_{(0)} \\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \zeta \\ \Gamma^{0+}\zeta \\ \Gamma^{1+}\zeta \\ \Gamma^{1+}\Gamma^{0+}\zeta \end{pmatrix}, \tag{B.9}$$

を用意し、これに Γ^A $(A = 0, 1, 2, 3)$ を作用させよう:

$$\Gamma^0\zeta_{(1)} \;=\; (\Gamma^{0+} - \Gamma^{0-})\begin{pmatrix} \zeta_{(0)} \\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_{(0)} \\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(\mathrm{i}\sigma^2)\otimes\sigma^3]\,\zeta_{(1)}\,, &\text{(B.10a)}\\
\Gamma^1\zeta_{(1)} &= (\Gamma^{0+}+\Gamma^{0-})\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma^1 & 0\\ 0 & -\sigma^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix}\\
&= [\sigma^1\otimes\sigma^3]\,\zeta_{(1)}\,, &\text{(B.10b)}\\
\Gamma^2\zeta_{(1)} &= (\Gamma^{1+}+\Gamma^{1-})\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix}\\
&= [\mathbb{1}\otimes\sigma^1]\,\zeta_{(1)}\,, &\text{(B.10c)}\\
\Gamma^3\zeta_{(1)} &= -\mathrm{i}(\Gamma^{1+}-\Gamma^{1-})\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\mathbb{1}\\ \mathrm{i}\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{(0)}\\ \Gamma^{1+}\zeta_{(0)}\end{pmatrix}\\
&= [\mathbb{1}\otimes\sigma^2]\,\zeta_{(1)}\,. &\text{(B.10d)}
\end{aligned}
$$

以下、これを $D = 2k+2$ まで繰り返す。これにより、次の様に行列表記が得られる:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0 &= (\mathrm{i}\sigma^2)\otimes\sigma^3\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11a)}\\
\Gamma^1 &= \sigma^1\otimes\sigma^3\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11b)}\\
\Gamma^2 &= \mathbb{1}\otimes\sigma^1\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11c)}\\
\Gamma^3 &= \mathbb{1}\otimes\sigma^2\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11d)}\\
\Gamma^4 &= \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^1\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11e)}\\
\Gamma^5 &= \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^2\otimes\sigma^3\otimes\cdots\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11f)}\\
\vdots & \qquad\qquad \vdots\\
\Gamma^{D-4} &= \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^1\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11g)}\\
\Gamma^{D-3} &= \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^2\otimes\sigma^3\,, &\text{(B.11h)}\\
\Gamma^{D-2} &= \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^1\,, &\text{(B.11i)}\\
\Gamma^{D-1} &= \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\sigma^2\,. &\text{(B.11j)}
\end{aligned}
$$

ここでテンソル積は $k+1$ 個の 2×2 行列についてである。

B.1.2　Weyl スピノール

次の演算子を定義しよう:

$$
S_a \equiv \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2}\,, \qquad a = 0, 1, \ldots, k\,. \qquad \text{(B.12)}
$$

これを $\zeta^{(\mathbf{s})}$ に作用させると固有値 s_a を与える:

$$S_a \zeta^{(\mathbf{s})} \ = \ s_a \zeta^{(\mathbf{s})} \, . \tag{B.13}$$

実はこの S_a は、Lorentz 代数の生成子 $\mathrm{i}^{\delta_{a,0}} \mathsf{M}^{2a,2a+1}$ に等しい。

またさらにカイラリティ演算子を次で定義する:

$$\Gamma \ \equiv \ \mathrm{i}^{-k} \, \Gamma^0 \Gamma^1 \cdots \Gamma^{D-1} \, . \tag{B.14}$$

そして定義により即座に次が得られる:

$$\Gamma^2 \ = \ +1 \, , \qquad \{\Gamma, \Gamma^A\} \ = \ 0 \ = \ [\Gamma, \mathsf{M}_{AB}] \, , \qquad \Gamma \ = \ 2^{k+1} S_0 S_1 \cdots S_k \, . \tag{B.15}$$

これにより、Γ が $\zeta^{(\mathbf{s})}$ に作用した時、固有値 $s_a = -\frac{1}{2}$ の数が偶数個あれば Γ は固有値 $+1$ を与え、固有値 $s_a = -\frac{1}{2}$ の数が奇数個あれば Γ は固有値 -1 を与えることが分かる。この分解で、$\zeta^{(\mathbf{s})}$ は Γ の固有値によって Dirac 表現から Weyl 表現に既約分解される。

B.1.3 Majorana スピノール

Weyl 表現とは異なる、Dirac 表現 $\zeta^{(\mathbf{s})}$ 分解する操作が存在する。端的に言えば実数表現である。つまり Dirac スピノール ζ に対してその複素共役 ζ^* があり、これらがある細工の下で Lorentz 群の変換の下で同等に振る舞う表現のことである。そのためガンマ行列の複素共役についての性質を評価する。先ほど構成した表記 (B.11) では、$\Gamma^3, \Gamma^5, \ldots, \Gamma^{D-1}$ は全て純虚数でそれ以外は実数である。この性質を用いて次を定義する:

$$B_1 \ \equiv \ \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1} \, , \qquad B_2 \ \equiv \ \Gamma B_1 \, . \tag{B.16}$$

これら B_i が作用したガンマ行列を考えよう:

$$\begin{aligned} B_1 \Gamma^0 B_1^{-1} \ &= \ \big(\Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1}\big) \Gamma^0 B_1^{-1} \ = \ (-1)^k \, \Gamma^0 B_1 B_1^{-1} \\ &= \ (-1)^k \, \Gamma^{0*} \, , \end{aligned} \tag{B.17a}$$

$$\begin{aligned} B_1 \Gamma^1 B_1^{-1} \ &= \ \big(\Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1}\big) \Gamma^1 B_1^{-1} \ = \ (-1)^k \, \Gamma^1 B_1 B_1^{-1} \\ &= \ (-1)^k \, \Gamma^{1*} \, , \end{aligned} \tag{B.17b}$$

$$\begin{aligned} B_1 \Gamma^{2a} B_1^{-1} \ &= \ \big(\Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1}\big) \Gamma^{2a} B_1^{-1} \ = \ (-1)^k \, \Gamma^{2a} B_1 B_1^{-1} \\ &= \ (-1)^k \, \Gamma^{2a*} \, , \end{aligned} \tag{B.17c}$$

$$
\begin{aligned}
B_1 \Gamma^{2a+1} B_1^{-1} &= \big(\underbrace{\Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{2a-1}}_{a-1} \Gamma^{2a+1} \underbrace{\Gamma^{2a+3} \cdots \Gamma^{D-1}}_{k-a} \big) \Gamma^{2a+1} B_1^{-1} \\
&= (-1)^{(a-1)+(k-a)} \, \Gamma^{2a+1} B_1 B_1^{-1} \;=\; (-1)^{k-1} \, \Gamma^{2a+1} \\
&= (-1)^k \, \Gamma^{2a+1*} \,, \qquad \text{(B.17d)} \\
B_2 \Gamma^0 B_2^{-1} &= \Gamma B_1 \Gamma^0 B_1^{-1} \Gamma^{-1} \;=\; (-1)^k \, \Gamma \Gamma^{0*} \Gamma^{-1} \\
&= (-1)^{k+1} \, \Gamma^{0*} \,, \qquad \text{(B.17e)} \\
B_2 \Gamma^1 B_2^{-1} &= \Gamma B_1 \Gamma^1 B_1^{-1} \Gamma^{-1} \;=\; (-1)^k \, \Gamma \Gamma^{1*} \Gamma^{-1} \\
&= (-1)^{k+1} \, \Gamma^{1*} \,, \qquad \text{(B.17f)} \\
B_2 \Gamma^{2a} B_2^{-1} &= \Gamma B_1 \Gamma^{2a} B_1^{-1} \Gamma^{-1} \;=\; (-1)^k \, \Gamma \Gamma^{2a*} \Gamma^{-1} \\
&= (-1)^{k+1} \, \Gamma^{2a*} \,, \qquad \text{(B.17g)} \\
B_2 \Gamma^{2a+1} B_2^{-1} &= \Gamma B_1 \Gamma^{2a+1} B_1^{-1} \Gamma^{-1} \;=\; (-1)^k \, \Gamma \Gamma^{2a+1*} \Gamma^{-1} \\
&= (-1)^{k+1} \, \Gamma^{2a+1*} \,. \qquad \text{(B.17h)}
\end{aligned}
$$

よって、次が得られる ($\mathsf{M}^{AB} = \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma^{AB}$):

$$
B_1 \Gamma^A B_1^{-1} \;=\; (-1)^k \, \Gamma^{A*} \,, \qquad B_1 \mathsf{M}^{AB} B_1^{-1} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{2} \Gamma^{AB*} \;=\; -\mathsf{M}^{AB*} \,, \qquad \text{(B.18a)}
$$

$$
B_2 \Gamma^A B_2^{-1} \;=\; (-1)^{k+1} \, \Gamma^{A*} \,, \qquad B_2 \mathsf{M}^{AB} B_2^{-1} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{2} \Gamma^{AB*} \;=\; -\mathsf{M}^{AB*} \,. \qquad \text{(B.18b)}
$$

スピノールの無限小 Lorentz 変換は次で与えられている:

$$
\delta \zeta \;=\; +\frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{AB} \mathsf{M}^{AB} \zeta \,. \qquad \text{(B.19)}
$$

ここで ω_{AB} はスピン接続であり、実数に値を持つ。この複素共役を評価する:

$$
(\delta \zeta)^* \;=\; -\frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{AB} \mathsf{M}^{AB*} \zeta^* \;=\; +\frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{AB} B_i \mathsf{M}^{AB} B_i^{-1} \zeta^* \,, \qquad \text{(B.20a)}
$$

$$
\therefore \quad \delta (B_i^{-1} \zeta^*) \;=\; +\frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{AB} \mathsf{M}^{AB} (B_i^{-1} \zeta^*) \,. \qquad \text{(B.20b)}
$$

これより、$B_i^{-1}\zeta^*$ は ζ と同じ Lorentz 変換則を満たすことが分かった。よって $\zeta = B_i^{-1}\zeta^*$ を満たす時、Dirac スピノールが既約分解される。この条件を Majorana 条件と呼び、これを満たすものを Majorana スピノールと呼ぶ。

では Majorana 条件はどのようなときに成立するか？それは Majorana 条件を 2 回課したときに元に戻ってくるとき、つまり

$$
\zeta^* \;=\; B_i \zeta \;=\; B_i (B_i^* \zeta^*) \quad \to \quad B_i B_i^* \;=\; 1 \,, \qquad \text{(B.21)}
$$

となる B_1 もしくは B_2 が存在する時である。それぞれについて検証しよう:

$$\begin{aligned} B_1 B_1^* &= (-1)^k (\Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1})(\Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1}) \\ &= (-1)^{k(k+1)/2}\,, \end{aligned} \tag{B.22a}$$

$$\begin{aligned} B_2 B_2^* &= \Gamma B_1 \Gamma^* B_1^* \;=\; (-1)^k \Gamma\Gamma^* B_1 B_1^* \;=\; (-1)^k B_1 B_1^* \\ &= (-1)^{k(k-1)/2}\,. \end{aligned} \tag{B.22b}$$

つまり

$$B_1 :\; k(k+1) \;=\; 4m \quad\to\quad k \;=\; 0,3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad\to\quad D \;=\; 2,8 \ (\mathrm{mod}\ 8)\,, \tag{B.23a}$$

$$B_2 :\; k(k-1) \;=\; 4m \quad\to\quad k \;=\; 0,1 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad\to\quad D \;=\; 2,4 \ (\mathrm{mod}\ 8)\,, \tag{B.23b}$$

のとき、Majorana 条件を課すことができることになる。

B.1.4　Majorana-Weyl スピノール

カイラリティ演算子 Γ が B_i による変換でどのように振る舞うだろうか？

$$\begin{aligned} B_1 \Gamma B_1^{-1} &= (\Gamma^3\Gamma^5\cdots\Gamma^{D-1})\Gamma B_1^{-1} \;=\; (-1)^k\, \Gamma B_1 B_1^{-1} \\ &= (-1)^k\, \Gamma\,, \end{aligned} \tag{B.24a}$$

$$\begin{aligned} B_1 \Gamma B_1^{-1} &= \mathrm{i}^{-k}\,(B_1 \Gamma^0 B_1^{-1})\cdots(B_1 \Gamma^{D-1} B_1^{-1}) \;=\; (-1)^{kD}\, \mathrm{i}^{-k}\, \Gamma^{0*}\cdots\Gamma^{D-1*} \\ &= (-1)^k\, \Gamma^*\,, \end{aligned} \tag{B.24b}$$

$$\begin{aligned} B_2 \Gamma B_2^{-1} &= \Gamma B_1 \Gamma B_1^{-1} \Gamma^{-1} \;=\; (-1)^k\, \Gamma^* \\ &= (-1)^k\, \Gamma\,. \end{aligned} \tag{B.24c}$$

ここで $D = 2k+2$ なので $(-1)^{kD} = 1$ である。よって、Weyl スピノール $\Gamma\zeta_\pm = \pm\zeta_\pm$ について B_i を作用させると、カイラリティの固有値が変化し得る:

$$\begin{aligned} B_i \Gamma \zeta_\pm &= \pm B_i \zeta_\pm \;=\; \pm(\zeta_\pm)^* \\ &= (B_i \Gamma B_i^{-1}) B_i \zeta_\pm \;=\; (-1)^k\, \Gamma(\zeta_\pm)^*\,, \end{aligned} \tag{B.25a}$$

$$\therefore \quad \Gamma(\zeta_\pm)^* \;=\; \pm(-1)^k\, (\zeta_\pm)^*\,. \tag{B.25b}$$

このことより、次が示される:

$$k \text{ が偶数 } (D = 0 \ \mathrm{mod}\ 4) : \quad \left\{ \begin{array}{l} B_i \text{ による複素共役によりカイラリティは不変} \\ \qquad \to \quad \text{Weyl 表現は自分自身に共役} \end{array} \right. \tag{B.26a}$$

$$k \text{ が奇数 } (D = 2 \bmod 4): \quad \begin{cases} B_i \text{ による複素共役によりカイラリティが反転} \\ \quad \rightarrow \quad \text{Weyl 表現は別の共役表現を持つ} \end{cases} \tag{B.26b}$$

この k が偶数の時、Weyl スピノールに Majorana 条件を課すことができて、Majorana-Weyl スピノールとなる。

B.2　奇数次元 $D=2k+3$ でのスピノール

奇数次元 $D=2k+3$ のとき、ガンマ行列は $D=2k+2$ の時の Γ^A にカイラリティ演算子 Γ が追加され、全部で $2k+3$ 個のガンマ行列となる。この時 Γ は Lorentz 変換の下で他の Γ^A と混合するため、もはやカイラリティ演算子としての役割を果たさない。つまりスピノールに Weyl 表現が存在しなくなる。しかし Majorana スピノールは定義できる。複素共役変換は次で与えられていたことを思い出す:

$$B_1 \Gamma^A B_1^{-1} \ = \ (-1)^k \, \Gamma^{A*} \, , \qquad B_2 \Gamma^A B_2^{-1} \ = \ (-1)^{k+1} \, \Gamma^{A*} \, , \tag{B.27a}$$

$$B_i \Gamma B_i^{-1} \ = \ (-1)^k \, \Gamma^* \, . \tag{B.27b}$$

Γ^A と Γ は Lorentz 変換の下で混合するため、複素共役変換も同等でなければならない。すなわち奇数次元では B_1 のみが用いられる。B_1 の Majorana 条件は $k=0,3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ でのみ性質していたので、奇数次元でもこれに従う。つまり、$D=2k+3$ 次元において B_1 によって Majorana スピノールが存在する次元は

$$D \ = \ 3, 9, 11 \, , \tag{B.28}$$

であることになる。

B.3　荷電共役行列

Majorana 条件を議論するときに、スピノールの複素共役を用いた。実際にはスピノールの荷電共役変換がそれを担う。荷電共役変換は行列 C を用いて次で定義される:

$$\overline{\zeta} \ \equiv \ \mathrm{i} \zeta^\dagger \Gamma^0 \, , \qquad \zeta^c \ \equiv \ C \overline{\zeta}^{\mathrm{T}} \ = \ \mathrm{i} C (\Gamma^0)^{\mathrm{T}} \zeta^* \, , \tag{B.29a}$$

$$\text{s.t.} \quad C \Gamma^A C^{-1} \ \equiv \ \eta (\Gamma^A)^{\mathrm{T}} \, , \qquad C^\dagger C \ \equiv \ 1 \, , \qquad C^\dagger \ = \ C^{-1} \, , \qquad \eta^2 \ = \ +1 \, . \tag{B.29b}$$

$\zeta^c = \zeta$ はスピノールとその複素共役の同等性を課すので、ユニタリーな荷電共役行列 C を適切に与えることで、これを Majorana 条件の B_i で記述する事が出来る:

$$B_i^{-1} \equiv \mathrm{i}C(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}, \qquad C = \mathrm{i}B_i^{-1}(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}. \tag{B.30}$$

どの B_i が選ばれるかは時空次元 (と好み) による。それを評価するため、(B.29) から演繹される C の性質を掘り下げよう。主に偶数次元について議論するが、奇数次元は B_1 を用いた議論にのみ従う。

ガンマ行列の荷電共役変換 (転置変換) から C についての 2 通りの性質が読み取れる:

$$C(\Gamma^A)^{\mathrm{T}}C^{-1} = \eta((\Gamma^A)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \eta\Gamma^A = \frac{1}{\eta}CC\Gamma^A C^{-1}C^{-1}, \tag{B.31a}$$

$$\eta\Gamma^A = C^{-T}(\Gamma^A)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\eta}(C^{-\mathrm{T}}C)\Gamma^A(C^{-1}C^{\mathrm{T}}). \tag{B.31b}$$

これより、C^{T} と C^{-1} が、適当な定数 α, β を用いて C で表現できる:

$$C^2 \equiv \alpha^{-1} \quad \to \quad C^{-1} = \alpha C, \tag{B.32a}$$

$$C^{-\mathrm{T}}C \equiv \beta^{-1} \quad \to \quad C^{\mathrm{T}} = \beta C. \tag{B.32b}$$

また、Majorana スピノールの荷電共役の定義 $\zeta = C\overline{\zeta}^{\mathrm{T}}$ の転置から

$$\overline{\zeta} = \zeta^{\mathrm{T}}C^{-\mathrm{T}} = \alpha\beta\zeta^{\mathrm{T}}C, \tag{B.33}$$

が得られるが、慣習によって $\overline{\zeta} = \zeta^{\mathrm{T}}C$ にしたいので、

$$\alpha\beta \equiv 1, \tag{B.34}$$

に固定する。荷電共役の定義をさらに評価すると次の様になっている:

$$\zeta = C\overline{\zeta}^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}C(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}\zeta^*, \tag{B.35a}$$

$$\zeta^\dagger = -\mathrm{i}\zeta^{\mathrm{T}}((\Gamma^0)^\dagger)^{\mathrm{T}}C^\dagger = \mathrm{i}\zeta^{\mathrm{T}}(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}C^{-1}, \tag{B.35b}$$

$$\therefore \quad \overline{\zeta} = \mathrm{i}\zeta^\dagger\Gamma^0 = -\zeta^{\mathrm{T}}(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}C^{-1}\Gamma^0 = -\frac{1}{\eta}\zeta^{\mathrm{T}}C\Gamma^0C^{-1}C^{-1}\Gamma^0 = \frac{\alpha}{\eta}\overline{\zeta}. \tag{B.35c}$$

途中で $(\Gamma^0)^\dagger = -\Gamma^0$ を用いた。これにより、α と η が関連する。β は α に関連していたので、次が得られる:

$$\alpha = \eta, \qquad \alpha\beta = 1 = \eta^2 \quad \to \quad \alpha = \beta = \eta = \pm 1. \tag{B.36}$$

つまり、荷電共役行列 C は次の性質を持つ:

$$C\Gamma^A C^{-1} \;=\; \eta(\Gamma^A)^{\mathrm{T}} , \qquad C^\dagger \;=\; C^{-1} \;=\; C^{\mathrm{T}} \;=\; \eta C , \qquad \eta \;=\; \pm 1 . \tag{B.37}$$

定数 η の適切な選択を吟味する。$B_i^{-1} = \mathrm{i}C(\Gamma^0)^{\mathrm{T}}$ を用いて次を準備しよう:

$$B_i^{-\mathrm{T}} \;=\; \mathrm{i}\Gamma^0 C^{\mathrm{T}} \;=\; \mathrm{i}\beta\Gamma^0 C , \tag{B.38a}$$

$$B_i^{\mathrm{T}} \;=\; \frac{1}{\mathrm{i}\beta} C^{-1}(\Gamma^0)^{-1} \;=\; \frac{\mathrm{i}\alpha}{\beta} C\Gamma^0 \;=\; \mathrm{i}C\Gamma^0 . \tag{B.38b}$$

では、B_i による Γ^A の複素共役変換 (の転置) を評価する:

$$(-1)^k\,\Gamma^{A*} \;=\; B_1\Gamma^A B_1^{-1} , \tag{B.39a}$$

$$(-1)^{k+1}\,\Gamma^{A*} \;=\; B_2\Gamma^A B_2^{-1} , \tag{B.39b}$$

$$\begin{aligned}(-1)^k\,(\Gamma^A)^\dagger \;&=\; (-1)^{k+1}\,\Gamma^0\Gamma^A(\Gamma^0)^{-1} \;=\; B_1^{-\mathrm{T}}(\Gamma^A)^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} \\ &=\; (\mathrm{i}\beta\Gamma^0 C)\Big(\frac{1}{\eta}C\Gamma^A C^{-1}\Big)(\mathrm{i}C\Gamma^0) \;=\; -\frac{\beta}{\alpha\eta}\Gamma^0\Gamma^A\Gamma^0 \\ &=\; \frac{1}{\eta}\Gamma^0\Gamma^A(\Gamma^0)^{-1} ,\end{aligned} \tag{B.39c}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}\,(\Gamma^A)^\dagger \;&=\; (-1)^{k+2}\,\Gamma^0\Gamma^A(\Gamma^0)^{-1} \;=\; B_2^{-\mathrm{T}}(\Gamma^A)^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} \\ &=\; (\mathrm{i}\beta\Gamma^0 C)\Big(\frac{1}{\eta}C\Gamma^A C^{-1}\Big)(\mathrm{i}C\Gamma^0) \;=\; -\frac{\beta}{\alpha\eta}\Gamma^0\Gamma^A\Gamma^0 \\ &=\; \frac{1}{\eta}\Gamma^0\Gamma^A(\Gamma^0)^{-1} ,\end{aligned} \tag{B.39d}$$

$$\therefore \quad 1 \;=\; \begin{cases} (-1)^{k+1}\,\eta & \text{for } B_1 , \\ (-1)^k\,\eta & \text{for } B_2 . \end{cases} \tag{B.39e}$$

これにより、時空次元と荷電共役変換の定数 η の関係が定まる:

D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_1	$\eta=-1$	$\eta=-1$	−	−	−	−	$\eta=+1$	$\eta=+1$	$\eta=-1$	$\eta=-1$
B_2	$\eta=+1$	−	$\eta=-1$	−	−	−	−	−	$\eta=+1$	−

B.4　シンプレクティック Majorana スピノール

Dirac スピノール ζ に対して複素共役 ζ^* が ζ と同じ振る舞いを示すもの、つまり $\zeta^c = \zeta$ が Majorana スピノールであった。これが成立する時空次元は $D = 2,3,4,8,9,10,11$ であった。Majorana 条件を満たさない $D = 5,6,7$ についても、実は似た条件を課すことができで

きる [2]。ただし自分自身について共役ではなく、偶数個のスピノール ζ^i $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ について

$$(\zeta^i)^c \;\equiv\; \zeta_i \;=\; \Omega_{ij}\,\zeta^j\,, \tag{B.40a}$$

$$\Omega_{ij} \;=\; -\Omega_{ji}\,, \qquad (\Omega_{ij})^* \;=\; \Omega^{ij}\,, \qquad \Omega^{ik}\,\Omega_{kj} \;=\; -\delta^i_j\,, \tag{B.40b}$$

を満たす定数行列 Ω_{ij} が存在するとき、という様に条件を緩和する。そして $D = 5, 6, 7$ のときにこれを満たす Ω_{ij} を構成することが可能である。これを満たす時の ζ^i をシンプレクティック (symplectic) Majorana スピノールと呼び、Dirac スピノールを半分に分解することで得られる。ただし定義により ζ^i は偶数個必要であり、ζ^i が奇数個存在する系は構成できない。そのためシンプレクティック Majorana スピノールにまで分解せずに Dirac スピノールのままで議論しても良い場合がある。

以上、任意の時空次元において Dirac スピノール、Weyl スピノール、(シンプレクティック) Majorana スピノール、そして (シンプレクティック) Majorana-Weyl スピノールが定義できた。それをまとめたものが第 3.1 節の表 3 である。

B.5　Euclid 計量を持つ空間でのスピノール

Lorentz 対称性の代わりに $SO(d)$ 回転対称性を持つ d 次元 Euclid 空間上のスピノールの分類を、結果だけまとめておく。導出方法は Lorentz 計量を持つ空間と同様である。Clifford 代数の定義から、$SO(d)$ 回転の Euclid 空間では全てのガンマ行列がエルミートである。

空間次元 d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Dirac	$2_{\mathbb{C}}$	$2_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$
Majorana	$2_{\mathbb{R}}$	–	–	–	$8_{\mathbb{R}}$	$8_{\mathbb{R}}$	$16_{\mathbb{R}}$	$16_{\mathbb{R}}$	$32_{\mathbb{R}}$	–
s-Majorana	–	$2_{\mathbb{R}}$	$4_{\mathbb{R}}$	$4_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–	–	$32_{\mathbb{R}}$
Weyl	$1_{\mathbb{C}}$(C)	–	$2_{\mathbb{C}}$(S)	–	$4_{\mathbb{C}}$(C)	–	$8_{\mathbb{C}}$(S)	–	$16_{\mathbb{C}}$(C)	–
Majorana-Weyl	–	–	–	–	–	–	$8_{\mathbb{R}}$	–	–	–
s-Majorana-Weyl	–	–	$2_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–	–	–	–

表 17：$SO(d)$ 回転対称性を持つ d 次元 Euclid 空間でのスピノール

表 17 のそれぞれの添字は各成分の体を示し、Weyl スピノールの欄における記号 “(S)” と “(C)” はそれぞれ、複素共役変換において「自分自身が複素共役」「複素共役である別の表現がある」ことを意味する。“s-” は「シンプレクティック」の略である。

B.6　$SO(d-2,2)$ 回転対称性を持つ空間でのスピノール

$SO(d-2,2)$ 回転対称性を持つ d 次元空間上のスピノールの分類を結果だけまとめておく。導出方法は Lorentz 計量を持つ空間と同様であるが、計量と Clifford 代数の定義

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -(\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{d-1})^2 \;=\; \eta_{MN}\, \mathrm{d}x^M\, \mathrm{d}x^N\,, \tag{B.41a}$$

$$\eta_{AB} \;=\; \mathrm{diag.}(-,-,+,+,\ldots,+)\,, \tag{B.41b}$$

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} \;=\; 2\eta^{AB}\,, \tag{B.41c}$$

から、Γ^0 と Γ^1 は反エルミートで、残りがエルミートである。

空間次元 d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dirac	$2_{\mathbb{C}}$	$2_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$4_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$8_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$16_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$	$32_{\mathbb{C}}$	$64_{\mathbb{C}}$
Majorana	$2_{\mathbb{R}}$	$2_{\mathbb{R}}$	$4_{\mathbb{R}}$	$4_{\mathbb{R}}$	$8_{\mathbb{R}}$	–	–	–	$32_{\mathbb{R}}$	$32_{\mathbb{R}}$	$64_{\mathbb{R}}$
s-Majorana	–	–	–	–	–	$8_{\mathbb{R}}$	$16_{\mathbb{R}}$	$16_{\mathbb{R}}$	–	–	–
Weyl	$1_{\mathbb{C}}$(C)	–	$2_{\mathbb{C}}$(S)	–	$4_{\mathbb{C}}$(C)	–	$8_{\mathbb{C}}$(S)	–	$16_{\mathbb{C}}$(C)	–	$32_{\mathbb{C}}$(S)
Majorana-Weyl	–	–	$2_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–	–	–	–	$32_{\mathbb{R}}$
s-Majorana-Weyl	–	–	–	–	–	–	$8_{\mathbb{R}}$	–	–	–	–

表 18：$SO(d-2,2)$ 回転対称性を持つ d 次元空間でのスピノール

表 18 のそれぞれの添字は各成分の体を示し、Weyl スピノールの欄における記号 “(S)” と “(C)” はそれぞれ、複素共役変換において「自分自身が複素共役」「複素共役である別の表現がある」ことを意味する。“s-” は「シンプレクティック」の略である。

C　Einstein-Hilbert 作用

　超重力理論では、筆者ごともしくは時代ごとに、時空の符号や曲率の定義が異なっている場合がある。ここでは Einstein-Hilbert 作用の符号・Ricci テンソル・時空の符号・曲率についての分類をまとめておいた。全ての文献を調べ尽くすのは不可能であるため、筆者がこれまでに参考にした文献 (のごく一部) についてのみ触れる:

作用	Ricci テンソル	時空の符号	曲率	文献
$\mathscr{L}_{\rm EH} = +\frac{1}{2}R$	$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$	$(-,+,+,+)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = +2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[1,2,6,8,9,58,64]
		$(+,-,-,-)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[175]
	$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\nu\rho}$	$(-,+,+,+)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	
		$(+,-,-,-)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = +2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	
$\mathscr{L}_{\rm EH} = -\frac{1}{2}R$	$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$	$(-,+,+,+)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[15,22,164,176,177]
		$(+,-,-,-)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = +2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[178]
	$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\nu\rho}$	$(-,+,+,+)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = +2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[7]
		$(+,-,-,-)$	$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -2(\partial_{[\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu{}_{[\rho\vert\lambda\vert}\Gamma^\lambda{}_{\sigma]\nu})$	[63]

　つまりは、作用やテンソルの符号における約束事が文献によって異なっているのだが、その様子を簡単に次の様にまとめることができる [64]:

$$e^{-1}\mathscr{L} = -s_1(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{s_1 s_3}{2\kappa^2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{C.1a}$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = s_2\big(\partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\big)\,, \tag{C.1b}$$

$$8\pi T_{\mu\nu} = s_3\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)\,, \qquad T_{00} \geq 0\,, \tag{C.1c}$$

$$s_2 s_3 R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\nu\rho\mu}\,, \tag{C.1d}$$

$$D_\mu\psi = \Big(\partial_\mu + \frac{s_2}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\Big)\psi\,, \qquad D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + s_2\omega_\mu{}^a{}_b V^b\,. \tag{C.1e}$$

例えば B. de Wit [164] の符号は

$$(s_1, s_2, s_3) = (+,-,-)\,,$$

であり、[64] や [1,2,6,8] などのそれは $(+,+,+)$。[63] は $(-,-,+)$ である。

D 不変テンソル・体積要素・Hodge双対

D.1 Lorentz 計量の時空における不変テンソル・体積要素・Hodge 双対

Lorentz 計量の時空における不変テンソルや体積要素を定義しておく必要がある。添字の走りを簡単にするため、4 次元で書いておこう (一般の D 次元への拡張は自明):

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} &\equiv +\alpha\,, & \epsilon_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} &= -\alpha\,, && \text{(D.1a)}\\
\epsilon^{abcd} &= e^{-1}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\,, & \epsilon_{abcd} &= e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma\,, && \text{(D.1b)}\\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &= e\,\epsilon^{abcd}\,e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma\,, & \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= e^{-1}\epsilon_{abcd}\,e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\,, && \text{(D.1c)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} &= -4!\,\alpha^2\,, & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4!\,\alpha^2\,, && \text{(D.1d)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{ebcd} &= -3!\,\alpha^2\delta^a_e\,, & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} &= -3!\,\alpha^2\delta^\mu_\lambda\,, && \text{(D.1e)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{efcd} &= -2!\cdot 2!\,\alpha^2\delta^{ab}_{ef}\,, & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} &= -2!\cdot 2!\,\alpha^2\delta^{\mu\nu}_{\lambda\tau}\,, && \text{(D.1f)}\\
\delta^{ab}_{ef} &= \frac{1}{2!}\big(\delta^a_e\delta^b_f - \delta^a_f\delta^b_e\big)\,. &&&& \text{(D.1g)}
\end{aligned}
$$

体積要素についていくつかの関係式を列挙して、スケール因子を固定しよう:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{vol.})_4 &= e^{\hat{0}}\wedge e^{\hat{1}}\wedge e^{\hat{2}}\wedge e^{\hat{3}} = -\frac{1}{4!\alpha}\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d\\
&= e_\mu{}^{\hat{0}}e_\nu{}^{\hat{1}}e_\rho{}^{\hat{2}}e_\sigma{}^{\hat{3}}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma \equiv e\,\mathrm{d}^4x\,, \qquad \text{(D.2a)}\\
e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d &\equiv \beta\,\epsilon^{abcd}\,e^{\hat{0}}\wedge e^{\hat{1}}\wedge e^{\hat{2}}\wedge e^{\hat{3}} = \beta\,\epsilon^{abcd}(\mathrm{vol.})_4\,, \qquad \text{(D.2b)}\\
\mathrm{d}^4x &= \mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 \equiv a\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\,, \qquad \text{(D.2c)}\\
\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma &\equiv b\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x\,. \qquad \text{(D.2d)}
\end{aligned}
$$

規格化因子 α とは別にスケール因子 β, a, b を導入した。それぞれは恒等式で関係付く:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d &= \beta\,\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd}(\mathrm{vol.})_4 = -4!\alpha^2\beta(\mathrm{vol.})_4 = -4!\alpha(\mathrm{vol.})_4\,, \qquad \text{(D.3a)}\\
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma &= b\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x = -4!\alpha^2 b\,\mathrm{d}^4x = \frac{1}{a}\mathrm{d}^4x\,, \qquad \text{(D.3b)}\\
e\,a\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma &= a\,\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d = -4!a\alpha(\mathrm{vol.})_4 \equiv (\mathrm{vol.})_4\,. \qquad \text{(D.3c)}
\end{aligned}
$$

これにより以下が導かれる:

$$
\begin{aligned}
\alpha^2\beta &= \alpha\,, \quad & ab &= -\frac{1}{4!\,\alpha^2}\,, \quad & 1 &= -4!\,a\,\alpha\,, \qquad \text{(D.4a)}\\
\therefore\quad \beta &= \frac{1}{\alpha}\,, & a &= -\frac{1}{4!\,\alpha}\,, & b &= \frac{1}{\alpha}\,. \qquad \text{(D.4b)}
\end{aligned}
$$

α は任意。このノートでは $\alpha \equiv +1$ とする (事が多い) が、[164] では $\alpha = +\mathrm{i}$ である。厳密に言えば、ϵ^{abcd} はテンソルであるが $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称記号でありテンソルではない。

Hodge 双対の定義を次の通りとする。全て 4 次元接空間で行う:

$$
\begin{aligned}
*1 \ &\equiv \ \frac{1}{0!\cdot 4!}\epsilon_{abcd}\, e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \ = \ -\alpha\,(\mathrm{vol.})_4\,, && \text{(D.5a)}\\
*\omega_1 \ &= \ *\big(\omega_a\, e^a\big) \ \equiv \ \frac{1}{1!\cdot 3!}\,\omega^a\,\epsilon_{abcd}\, e^b \wedge e^c \wedge e^d \ \equiv \ \frac{1}{3!}W_{bcd}\, e^b \wedge e^c \wedge e^d\,, && \text{(D.5b)}\\
*\omega_2 \ &= \ *\Big(\frac{1}{2!}\,\omega_{ab}\, e^a \wedge e^b\Big) \ \equiv \ \frac{1}{2!\cdot 2!}\,\omega^{ab}\,\epsilon_{abcd}\, e^c \wedge e^d \ \equiv \ \frac{1}{2!}W_{cd}\, e^c \wedge e^d\,, && \text{(D.5c)}\\
*(\mathrm{vol.})_4 \ &= \ *\Big(-\frac{1}{4!\alpha}\epsilon_{abcd}\, e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\Big) \ \equiv \ -\frac{1}{4!\cdot 0!\alpha}\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} \ = \ \alpha\,, && \text{(D.5d)}\\
W_{bcd} \ &= \ \omega^a\,\epsilon_{abcd}\,, \qquad W_{cd} \ = \ \frac{1}{2!}\,\omega^{ab}\,\epsilon_{abcd}\,, && \text{(D.5e)}\\
W^{bcd} \ &= \ \omega_a\,\epsilon^{abcd}\,, \qquad W^{cd} \ = \ \frac{1}{2!}\,\omega_{ab}\,\epsilon^{abcd}\,. && \text{(D.5f)}
\end{aligned}
$$

ここで Hodge 双対を 2 回作用する操作を評価する:

$$
\begin{aligned}
*(*1) \ &= \ *\Big(-\alpha(\mathrm{vol.})_4\Big) \ = \ -\alpha^2\,, && \text{(D.6a)}\\
(\omega_1) \ &= \ *\Big(\frac{1}{3!}W_{abc}\, e^a \wedge e^b \wedge e^c\Big) \ = \ \frac{1}{3!\cdot 1!}W^{abc}\,\epsilon_{abcd}\, e^d \ = \ \frac{1}{3!\cdot 1!}\omega_e\,\epsilon^{eabc}\epsilon_{abcd}\, e^d \\
&= \ \frac{1}{3!}\omega_e\,\Big(+3!\alpha^2\,\delta^e_d\Big)\, e^d \ = \ +\alpha^2\omega_c\, e^c\,, && \text{(D.6b)}\\
(\omega_2) \ &= \ *\Big(\frac{1}{2!}W_{cd}\, e^c \wedge e^d\Big) \ = \ \frac{1}{2!\cdot 2!}W^{cd}\,\epsilon_{cdab}\, e^a \wedge e^b \ = \ \frac{1}{(2!)^3}\omega_{ef}\,\epsilon^{efcd}\,\epsilon_{cdab}\, e^a \wedge e^b \\
&= \ \frac{1}{(2!)^3}\omega_{ef}\Big(-(2!)^2\alpha^2\delta^{ef}_{ab}\Big)\, e^a \wedge e^b \ = \ -\frac{\alpha^2}{2!}\omega_{ab}\, e^a \wedge e^b\,, && \text{(D.6c)}\\
((\mathrm{vol.})_4) \ &= \ *\alpha \ = \ -\alpha^2(\mathrm{vol.})_4\,. && \text{(D.6d)}
\end{aligned}
$$

これより次が確認できる:

$$
\therefore \quad **1 \ = \ -\alpha^2\,, \qquad **(\mathrm{vol.})_4 \ = \ -\alpha^2(\mathrm{vol.})_4\,. \tag{D.7}
$$

これを拡張して、D 次元 Lorentz 時空での Hodge 双対を一般に次の様に定める:

$$
\begin{aligned}
\omega_p \ &= \ \frac{1}{p!}\,\omega_{a_1\cdots a_p}\, e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p} \ = \ \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}\,, && \text{(D.8a)}\\
*\omega_p \ &= \ \frac{1}{p!(D-p)!}\,\omega^{a_1\cdots a_p}\,\epsilon_{a_1\cdots a_p b_1\cdots b_{D-p}}\, e^{b_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_{D-p}} \\
&= \ \frac{\sqrt{|g_D|}}{p!(D-p)!}\,\omega^{\mu_1\cdots\mu_p}\,\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_{D-p}}\, \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{D-p}}\,, && \text{(D.8b)}\\
**\omega_p \ &= \ (-1)^{p(D-p)+1}\,\alpha^2\,\omega_p\,. && \text{(D.8c)}
\end{aligned}
$$

D.2　Euclid 計量の空間における不変テンソル・体積要素・Hodge 双対

Euclid 計量の空間における不変テンソルや体積要素を定義しておく必要がある。添字の走りを簡単にするため、4 次元で書いておこう (一般の D 次元への拡張は自明):

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\hat1\hat2\hat3\hat4} &\equiv +\widetilde{\alpha}\,, & \epsilon_{\hat1\hat2\hat3\hat4} &= +\widetilde{\alpha}\,, && \text{(D.9a)}\\
\epsilon^{abcd} &= e^{-1}\,\varepsilon^{mnpq}\,e_m{}^a e_n{}^b e_p{}^c e_q{}^d\,, & \epsilon_{abcd} &= e\,\varepsilon_{mnpq}\,e_a{}^m e_b{}^n e_c{}^p e_d{}^q\,, && \text{(D.9b)}\\
\varepsilon^{mnpq} &= e\,\epsilon^{abcd}\,e_a{}^m e_b{}^n e_c{}^p e_d{}^q\,, & \varepsilon_{mnpq} &= e^{-1}\epsilon_{abcd}\,e_m{}^a e_n{}^b e_p{}^c e_q{}^d\,, && \text{(D.9c)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} &= +4!\,\widetilde{\alpha}^2\,, & \varepsilon^{mnpq}\varepsilon_{mnpq} &= +4!\,\widetilde{\alpha}^2\,, && \text{(D.9d)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{ebcd} &= +3!\,\alpha^2\delta^a_e\,, & \varepsilon^{mnpq}\varepsilon_{rnpq} &= +3!\,\alpha^2\delta^m_r\,, && \text{(D.9e)}\\
\epsilon^{abcd}\epsilon_{efcd} &= +2!\cdot 2!\,\alpha^2\delta^{ab}_{ef}\,, & \varepsilon^{mnpq}\varepsilon_{rspq} &= +2!\cdot 2!\,\alpha^2\delta^{mn}_{rs}\,, && \text{(D.9f)}\\
\delta^{ab}_{ef} &= \frac{1}{2!}\big(\delta^a_e\delta^b_f - \delta^a_f\delta^b_e\big)\,. &&&& \text{(D.9g)}
\end{aligned}$$

体積要素についていくつかの関係式を列挙して、スケール因子を固定しよう:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{vol.})_4 &= e^{\hat1}\wedge e^{\hat2}\wedge e^{\hat3}\wedge e^{\hat4} \;=\; \frac{1}{4!\widetilde{\alpha}}\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d \\
&= e_m{}^{\hat1}e_n{}^{\hat2}e_p{}^{\hat3}e_q{}^{\hat4}\,\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^p\wedge\mathrm{d}x^q \;\equiv\; e\,\mathrm{d}^4x\,, && \text{(D.10a)}\\
e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d &\equiv \widetilde{\beta}\,\epsilon^{abcd}\,e^{\hat1}\wedge e^{\hat2}\wedge e^{\hat3}\wedge e^{\hat4} \;=\; \widetilde{\beta}\,\epsilon^{abcd}(\mathrm{vol.})_4\,, && \text{(D.10b)}\\
\mathrm{d}^4x &= \mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^4 \;\equiv\; \widetilde{a}\,\varepsilon_{mnpq}\,\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^p\wedge\mathrm{d}x^q\,, && \text{(D.10c)}\\
\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^p\wedge\mathrm{d}x^q &\equiv \widetilde{b}\,\varepsilon^{mnpq}\mathrm{d}^4x\,. && \text{(D.10d)}
\end{aligned}$$

規格化因子 $\widetilde{\alpha}$ とは別にスケール因子 $\widetilde{\beta},\widetilde{a},\widetilde{b}$ を導入した。それぞれは恒等式で関係付く:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d &= \widetilde{\beta}\,\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd}(\mathrm{vol.})_4 \;=\; 4!\widetilde{\alpha}^2\widetilde{\beta}(\mathrm{vol.})_4 \;=\; 4!\widetilde{\alpha}(\mathrm{vol.})_4\,, && \text{(D.11a)}\\
\varepsilon_{mnpq}\,\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^p\wedge\mathrm{d}x^q &= \widetilde{b}\,\varepsilon_{mnpq}\,\varepsilon^{mnpq}\mathrm{d}^4x \;=\; +4!\widetilde{\alpha}^2\widetilde{b}\,\mathrm{d}^4x \;=\; \frac{1}{\widetilde{a}}\mathrm{d}^4x\,, && \text{(D.11b)}\\
e\,a\,\varepsilon_{mnpq}\,\mathrm{d}x^m\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^p\wedge\mathrm{d}x^q &= \widetilde{a}\,\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d \;=\; 4!\widetilde{a}\widetilde{\alpha}(\mathrm{vol.})_4 \;\equiv\; (\mathrm{vol.})_4\,. && \text{(D.11c)}
\end{aligned}$$

これにより以下が導かれる:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}^2\widetilde{\beta} &= \widetilde{\alpha}\,, \qquad \widetilde{a}\widetilde{b} \;=\; +\frac{1}{4!\,\widetilde{\alpha}^2}\,, \qquad 1 \;=\; 4!\,\widetilde{a}\,\widetilde{\alpha}\,, && \text{(D.12a)}\\
\therefore\quad \widetilde{\beta} &= \frac{1}{\widetilde{\alpha}}\,, \qquad \widetilde{a} \;=\; \frac{1}{4!\,\widetilde{\alpha}}\,, \qquad \widetilde{b} \;=\; \frac{1}{\widetilde{\alpha}}\,. && \text{(D.12b)}
\end{aligned}$$

$\widetilde{\alpha}$ は任意。このノートでは $\widetilde{\alpha}\equiv +1$ とする事がある。厳密に言えば、ϵ^{abcd} はテンソルであるが ε^{mnpq} は完全反対称記号でありテンソルではない。

Euclid 空間での Hodge 双対の定義は次の通りとする。全て 4 次元接空間で行う:

$$
\begin{aligned}
*1 &\equiv \frac{1}{0!\cdot 4!}\,\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d \;=\; \widetilde{\alpha}\,(\text{vol.})_4\,, && \text{(D.13a)}\\
*\omega_1 &= *\big(\omega_a\,e^a\big) \;\equiv\; \frac{1}{1!\cdot 3!}\omega^a\,\epsilon_{abcd}\,e^b\wedge e^c\wedge e^d \;\equiv\; \frac{1}{3!}W_{bcd}\,e^b\wedge e^c\wedge e^d\,, && \text{(D.13b)}\\
*\omega_2 &= *\Big(\frac{1}{2!}\omega_{ab}\,e^a\wedge e^b\Big) \;\equiv\; \frac{1}{2!\cdot 2!}\omega^{ab}\,\epsilon_{abcd}\,e^d \;\equiv\; \frac{1}{2!}W_{cd}\,e^c\wedge e^d\,, && \text{(D.13c)}\\
*(\text{vol.})_4 &= *\Big(\frac{1}{4!\widetilde{\alpha}}\epsilon_{abcd}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d\Big) \;\equiv\; \frac{1}{4!\cdot 0!\widetilde{\alpha}}\,\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} \;=\; \widetilde{\alpha}\,, && \text{(D.13d)}\\
W_{bcd} &= \omega^a\,\epsilon_{abcd}\,, \qquad W_{cd} \;=\; \frac{1}{2!}\,\omega^{ab}\,\epsilon_{abcd}\,, && \text{(D.13e)}\\
W^{bcd} &= \omega_a\,\epsilon^{abcd}\,, \qquad W^{cd} \;=\; \frac{1}{2!}\,\omega_{ab}\,\epsilon^{abcd}\,. && \text{(D.13f)}
\end{aligned}
$$

ここで Hodge 双対を 2 回作用する操作を評価する:

$$
\begin{aligned}
*(*1) &= *\Big(\widetilde{\alpha}(\text{vol.})_4\Big) \;=\; \widetilde{\alpha}^2\,, && \text{(D.14a)}\\
(\omega_1) &= *\Big(\frac{1}{3!}W_{abc}\,e^a\wedge e^b\wedge \mathrm{e}^c\Big) \;=\; \frac{1}{3!\cdot 1!}W^{abc}\,\epsilon_{abcd}\,e^d \;=\; \frac{1}{3!\cdot 1!}\omega_e\,\epsilon^{eabc}\epsilon_{abcd}\,e^d\\
&= \frac{1}{3!}\omega_e\Big(-3!\widetilde{\alpha}^2\,\delta^d_e\Big)\,e^d \;=\; -\widetilde{\alpha}^2\omega_c\,e^c\,, && \text{(D.14b)}\\
(\omega_2) &= *\Big(\frac{1}{2!}W_{cd}\,e^c\wedge e^d\Big) \;=\; \frac{1}{2!\cdot 2!}W^{cd}\,\epsilon_{cdab}\,e^a\wedge e^b \;=\; \frac{1}{(2!)^3}\omega_{ef}\,\epsilon^{efcd}\,\epsilon_{cdab}\,e^a\wedge e^b\\
&= \frac{1}{(2!)^3}\omega_{ef}\Big((2!)^2\widetilde{\alpha}^2\delta^{de}_{ab}\Big)\,e^a\wedge e^b \;=\; \frac{\widetilde{\alpha}^2}{2!}\omega_{ab}\,e^a\wedge e^b\,, && \text{(D.14c)}\\
((\text{vol.})_4) &= *\widetilde{\alpha} \;=\; \widetilde{\alpha}^2(\text{vol.})_4\,. && \text{(D.14d)}
\end{aligned}
$$

これより次が確認できる:

$$
**1 \;=\; +\widetilde{\alpha}^2\,, \qquad **(\text{vol.})_4 \;=\; +\widetilde{\alpha}^2(\text{vol.})_4\,. \qquad \text{(D.15)}
$$

これを拡張して、一般の D 次元 Euclid 空間での Hodge 双対を一般に次の様に定める:

$$
\begin{aligned}
\omega_p &= \frac{1}{p!}\,\omega_{a_1\cdots a_p}\,e^{a_1}\wedge\cdots\wedge e^{a_p} \;=\; \frac{1}{p!}\,\omega_{m_1\cdots m_p}\,\mathrm{d}x^{m_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m_p}\,, && \text{(D.16a)}\\
*\omega_p &= \frac{1}{p!(D-p)!}\,\omega^{a_1\cdots a_p}\,\epsilon_{a_1\cdots a_p b_1\cdots b_{D-p}}\,e^{b_1}\wedge\cdots\wedge e^{b_{D-p}}\\
&= \frac{\sqrt{|g_D|}}{p!(D-p)!}\,\omega^{m_1\cdots m_p}\,\varepsilon_{m_1\cdots m_p n_1\cdots n_{D-p}}\,\mathrm{d}x^{n_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n_{D-p}}\,, && \text{(D.16b)}\\
**\omega_p &= (-1)^{p(D-p)}\,\widetilde{\alpha}^2\,\omega_p\,. && \text{(D.16c)}
\end{aligned}
$$

E　10次元超重力理論の運動方程式

E.1　IIA 型超重力理論の場の方程式

String frame における IIA 型超重力理論 (3.21) の場の運動方程式を列挙しておく:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& R_{MN} - \frac{1}{2} R\, G_{MN} + G_{MN} \Big[- 2\nabla_0^2 \phi + 4(\partial_P \phi)^2 \Big] + 2\nabla^0_M \nabla^0_N \phi - 4\partial_M \phi \partial_N \phi \\
& - \frac{1}{2} G_{MN} \bigg[\Big(4(\partial_P \phi)^2 - \frac{1}{2} |H_3|^2 \Big) - \frac{\mathrm{e}^{2\phi}}{2} \Big(|F_2|^2 + |\widetilde{F}_4|^2 \Big) \bigg] \\
& + \Big(4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \Big) - \frac{\mathrm{e}^{2\phi}}{2} \Big(F_{MP} F_N{}^P + \frac{1}{3!} \widetilde{F}_{MPQR} \widetilde{F}_N{}^{PQR} \Big) \,, \qquad \text{(E.1a)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big[\sqrt{-G} \Big(\mathrm{e}^{-2\phi} H^{MPQ} + \widetilde{F}^{MNPQ} C_N \Big) \Big] \\
& - \frac{1}{2 \cdot (4!)^2}\, e^{-1} \varepsilon^{MNPQRSTUVW}\, F_{MNRS} F_{TUVW} \,, \qquad \text{(E.1b)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big(\sqrt{-G}\, \partial^M \phi \Big) + \frac{1}{4} R - (\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{8} |H_3|^2 \,, \qquad \text{(E.1c)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big(\sqrt{-G}\, F^{MN} \Big) + \frac{1}{3!} \widetilde{F}^{NMPQ} H_{MPQ} \,, \qquad \text{(E.1d)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big(\sqrt{-G}\, \widetilde{F}^{MNPQ} \Big) - \frac{1}{4 \cdot (3!)^2}\, e^{-1} \varepsilon^{MNPQRSTUVW}\, H_{RST} F_{MUVW} \,. \qquad \text{(E.1e)}
\end{aligned}
$$

E.2　IIB 型超重力理論の場の方程式

String frame における IIB 型超重力理論 (3.23) の運動方程式を列挙しておく:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& R_{MN} - \frac{1}{2} R\, G_{MN} + G_{MN} \Big[- 2\nabla_0^2 \phi + 4(\partial_P \phi)^2 \Big] + 2\nabla^0_M \nabla^0_N \phi - 4\partial_M \phi \partial_N \phi \\
& - \frac{1}{2} G_{MN} \bigg[\Big(4(\partial_P \phi)^2 - \frac{1}{2} |H_3|^2 \Big) - \frac{\mathrm{e}^{2\phi}}{2} \Big(|F_1|^2 + |\widetilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2} |\widetilde{F}_5|^2 \Big) \bigg] \\
& + \Big(4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \Big) \\
& - \frac{\mathrm{e}^{2\phi}}{2} \Big(\partial_M C \partial_N C + \frac{1}{2} \widetilde{F}_{MPQ} \widetilde{F}_N{}^{PQ} + \frac{1}{48} \widetilde{F}_{MPQRS} \widetilde{F}_N{}^{PQRS} \Big) \,, \qquad \text{(E.2a)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big[\sqrt{-G} \Big(\mathrm{e}^{-2\phi} H^{MNP} - \widetilde{F}^{MNP} C - \frac{1}{8} \widetilde{F}^{MNPQR} B^{(2)}_{QR} \Big) \Big] \\
& - \frac{1}{4 \cdot 3!} \widetilde{F}^{MQRNP} F_{MQR} + \frac{1}{5! \cdot 3! \cdot 2!}\, e^{-1} \varepsilon^{MNPQRSTUVW}\, F_{MQRST} F_{UVW} \,, \qquad \text{(E.2b)} \\
0 \;=\;& \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \Big(\sqrt{-G}\, \partial^M \phi \Big) + \frac{1}{4} R - (\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{8} |H_3|^2 \,, \qquad \text{(E.2c)}
\end{aligned}
$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}}\partial_M\Big(\sqrt{-G}\,F^M\Big) + \frac{1}{3!}\widetilde{F}^{MNP}H_{MNP}\,, \tag{E.2d}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-G}}\partial_M\Big[\sqrt{-G}\Big(\widetilde{F}^{MNP} + \frac{1}{8}\widetilde{F}^{MNPQR}B^{(1)}_{QR}\Big)\Big] \\ &\quad + \frac{1}{4\cdot 3!}\widetilde{F}^{MNPQR}H_{MQR} + \frac{1}{5!\cdot 3!\cdot 2!}\,e^{-1}\varepsilon^{MNPQRSTUVW}\,F_{QRSTU}H_{MVW}\,, \end{aligned} \tag{E.2e}$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}}\partial_M\Big(\sqrt{-G}\,\widetilde{F}^{MNPQR}\Big) + \frac{1}{(3!)^2}\,e^{-1}\varepsilon^{MNPQRSTUVW}\,H_{STU}F_{MVW}\,. \tag{E.2f}$$

F　ヘテロティック超重力理論

10 次元ヘテロティック超重力理論の一般的記述を列挙する。この表記は [179, 180] から次の様に場の再定義を行ったものである:

$$
\begin{aligned}
\phi^{-3}\Big|_{[179]} &= \frac{1}{\kappa_{10}^2}\exp(-2\phi)\Big|_{\text{here}}\,, \qquad \omega_M{}^{AB}\Big|_{[179]} = -\omega_M{}^{AB}\Big|_{\text{here}}\,, && \text{(F.1a)} \\
B_{MN}\Big|_{[179]} &= \sqrt{2}B_{MN}\Big|_{\text{here}}\,, \qquad H_{MNP}\Big|_{[179]} = \frac{\sqrt{2}}{3}H_{MNP}\Big|_{\text{here}}\,, && \text{(F.1b)} \\
A_M\Big|_{[179]} &= -A_M\Big|_{\text{here}}\,, \qquad \chi\Big|_{[179]} = -\chi\Big|_{\text{here}}\,, \qquad \lambda\Big|_{[179]} = \sqrt{2}\lambda\Big|_{\text{here}}\,, && \text{(F.1c)} \\
\Psi_M, \epsilon &\ \to\ \text{変更なし}\,, && \text{(F.1d)} \\
\alpha &= \beta = -\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} = -2\alpha'\,, \qquad (\kappa_{10}^2 = 2)\,. && \text{(F.1e)}
\end{aligned}
$$

文献 [11–13] は右辺の規格化に基づいて議論されている。第 3.4.4 節へは、この章の表記からさらに以下の再定義を行う:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\left\{\Psi_M, \lambda, \chi, \epsilon\right\}_{\text{here}} &= \left\{\Psi_M, \lambda, \chi, \epsilon\right\}_{3.4.4\,\text{節}}\,, \qquad (2H_3)_{\text{here}} = (H_3)_{3.4.4\,\text{節}}\,, && \text{(F.2a)} \\
(4\alpha')_{\text{here}} &= (\alpha')_{3.4.4\,\text{節}}\,. && \text{(F.2b)}
\end{aligned}
$$

F.1　Lagrangian

Green-Schwarz アノマリー相殺機構が内蔵され、フェルミオンの 4 点相互作用まで含んだ Lagrangian (string frame) を書き下す:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\text{total}} &= \mathscr{L}_0(R) + \mathscr{L}_\beta(F^2) + \mathscr{L}_\alpha(R^2)\,, && \text{(F.3a)} \\
\mathscr{L}_0(R) &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\sqrt{-G}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\bigg[R(\omega) - \frac{1}{3}H_{MNP}H^{MNP} + 4(\partial_M\phi)^2 \\
&\qquad - \overline{\Psi}_M\Gamma^{MNP}D_N(\omega)\Psi_P + 8\,\overline{\lambda}\Gamma^{MN}D_M(\omega)\Psi_N + 16\,\overline{\lambda}\not{D}(\omega)\lambda \\
&\qquad + 8\,\overline{\Psi}_M\Gamma^N\Gamma^M\lambda\,(\partial_N\phi) - 2\overline{\Psi}_M\Gamma^M\Psi_N\,(\partial^N\phi) \\
&\qquad + \frac{1}{12}H^{PQR}\Big\{\overline{\Psi}_M\Gamma^{[M}\Gamma_{PQR}\Gamma^{N]}\Psi_N + 8\,\overline{\Psi}_M\Gamma^M{}_{PQR}\lambda - 16\,\overline{\lambda}\Gamma_{PQR}\lambda\Big\} \\
&\qquad + \frac{1}{48}\,\overline{\Psi}^M\Gamma^{ABC}\Psi_M\Big\{2\overline{\lambda}\Gamma_{ABC}\lambda + \overline{\lambda}\Gamma_{ABC}\Gamma^N\Psi_N \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4}\,\overline{\Psi}^N\Gamma_{ABC}\Psi_N - \frac{1}{8}\,\overline{\Psi}^N\Gamma_N\Gamma_{ABC}\Gamma^P\Psi_P\Big\}\bigg]\,, && \text{(F.3b)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(F^2) &= \frac{\alpha'}{2\kappa_{10}^2}\sqrt{-G}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\bigg[\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_{MN}F^{MN}\big) + 2\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big\{\overline{\chi}\not{D}(\omega,A)\chi\big\} - \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma^{ABC}\chi\big)\widehat{H}_{ABC} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big\{\overline{\chi}\Gamma^M\Gamma^{AB}(F_{AB}+\widehat{F}_{AB})\big\}\Big(\Psi_M + \frac{2}{3}\Gamma_M\lambda\Big) \\
&\quad + \frac{1}{48}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma^{ABC}\chi\big)\,\overline{\Psi}_M\big(4\Gamma_{ABC}\Gamma^M + 3\Gamma^M\Gamma_{ABC}\big)\lambda \\
&\quad - \frac{1}{12}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma^{ABC}\chi\big)\big(\overline{\lambda}\Gamma_{ABC}\lambda\big) - \frac{\beta}{96}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma^{ABC}\chi\big)\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma_{ABC}\chi\big)\bigg]\,,
\end{aligned} \tag{F.3c}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(R^2) &= -\frac{\alpha'}{2\kappa_{10}^2}\sqrt{-g}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\bigg[-R_{ABMN}(\omega_+)R^{ABMN}(\omega_+) \\
&\quad - 2\overline{\Psi}^{AB}\not{D}(\omega(e,\Psi),\omega_+)\Psi_{AB} + \frac{1}{6}\overline{\Psi}^{AB}\Gamma^{MNP}\Psi_{AB}\widehat{H}_{MNP} \\
&\quad + \frac{1}{2}\overline{\Psi}_{AB}\Gamma^M\Gamma^{NP}\big\{R^{AB}{}_{NP}(\omega_+) + \widehat{R}^{AB}{}_{NP}(\omega_+)\big\}\Big(\Psi_M + \frac{2}{3}\Gamma_M\lambda\Big) \\
&\quad - \frac{1}{48}\,\big(\overline{\Psi}_{AB}\Gamma^{CDE}\Psi_{AB}\big)\overline{\Psi}_M\big(4\Gamma_{CDE}\Gamma^M + 3\Gamma^M\Gamma_{CDE}\big)\lambda \\
&\quad + \frac{1}{12}\big(\overline{\Psi}^{AB}\Gamma^{CDE}\Psi_{AB}\big)\big(\overline{\lambda}\Gamma_{CDE}\lambda\big) - \frac{\alpha}{96}\big(\overline{\Psi}^{AB}\Gamma^{FGH}\Psi_{AB}\big)\big(\overline{\Psi}^{CD}\Gamma_{FGH}\Psi_{CD}\big)\bigg]\,.
\end{aligned} \tag{F.3d}$$

ただし各種接続を含む共変微分を次で定義している:

$$D_M(\omega,A,\Gamma)\varphi^k = \partial_M\varphi^k - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_M{}^{AB}(\Sigma_{AB})^k{}_l\,\varphi^l + (A_M)^k{}_l\,\varphi^l + \Gamma^k_{lM}\,\varphi^l\,. \tag{F.4}$$

なお、ゲージ群の生成子は [11–13, 179] と同様に反エルミートである。

F.2 超対称変換

α' のゼロ次についての超対称変換則を与える:

$$\delta_0 e_M{}^A = \frac{1}{2}\overline{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M\,, \tag{F.5a}$$

$$\delta_0\Psi_M = \Big(\partial_M + \frac{1}{4}\omega_{-M}{}^{AB}\Gamma_{AB}\Big)\epsilon + \Big\{\epsilon\big(\overline{\Psi}_M\lambda\big) - \Psi_M\big(\overline{\epsilon}\lambda\big) + \Gamma^A\lambda\big(\overline{\Psi}_M\Gamma_A\epsilon\big)\Big\}\,, \tag{F.5b}$$

$$\delta_0 B_{MN} = \overline{\epsilon}\Gamma_{[M}\Psi_{N]}\,, \tag{F.5c}$$

$$\delta_0\lambda = -\frac{1}{4}\not{\mathcal{D}}\phi\,\epsilon + \frac{1}{24}\Gamma^{ABC}\epsilon\Big(\widehat{H}_{ABC} - \frac{1}{4}\overline{\lambda}\Gamma_{ABC}\lambda\Big)\,, \tag{F.5d}$$

$$\delta_0\phi \;=\; -\bar{\epsilon}\lambda\,, \tag{F.5e}$$

$$\delta_0 A_M \;=\; \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_M\chi\,, \tag{F.5f}$$

$$\delta_0\chi \;=\; -\frac{1}{4}\Gamma^{AB}\epsilon\,\widehat{F}_{AB} + \Big\{\epsilon\big(\overline{\chi}\lambda\big) - \chi\big(\bar{\epsilon}\lambda\big) + \Gamma^A\lambda\big(\overline{\chi}\Gamma_A\epsilon\big)\Big\}\,, \tag{F.5g}$$

$$\delta_0{\omega_M}^{AB}(e,\Psi) \;=\; -\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\Gamma_M\Psi^{AB} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^{[A}{\Psi_M}^{B]} - \frac{1}{2}\,\bar{\epsilon}\Gamma_C\Psi_M\,\widehat{H}^{ABC}\,. \tag{F.5h}$$

ここで、右辺に登場する表記を次で定義している:

$$\omega_{\pm M}{}^{AB} \;\equiv\; {\omega_M}^{AB}(e,\Psi) \pm {\widehat{H}_M}{}^{AB}\,, \tag{F.6a}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{MNP} \;&\equiv\; H_{MNP} - \frac{3}{4}\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_N\Psi_{P]} \\
&=\; 3\partial_{[M}B_{NP]} - \frac{3}{4}\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_N\Psi_{P]} + 6\alpha'\,\mathrm{tr_V}\Big(A_{[M}\partial_N A_{P]} + \frac{2}{3}A_{[M}A_N A_{P]}\Big) \\
&\quad - 6\alpha'\Big(\omega_{+[M}{}^{AB}\,\partial_N\omega_{+P]}{}^{BA} + \frac{2}{3}\omega_{+[M}{}^{AB}\,\omega_{+N}{}^{BC}\,\omega_{+P]}{}^{CA}\Big)\,,
\end{aligned} \tag{F.6b}$$

$$\mathrm{d}H \;=\; -\alpha'\Big[\mathrm{tr}\big\{R_2(\omega_+)\wedge R_2(\omega_+)\big\} - \mathrm{tr_V}\big(F_2\wedge F_2\big)\Big]\,, \tag{F.6c}$$

$$\widehat{F}_{MN} \;\equiv\; F_{MN} - \overline{\Psi}_{[M}\Gamma_{N]}\chi\,, \tag{F.6d}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{MN} \;&\equiv\; D_M(\omega_-)\Psi_N - D_N(\omega_-)\Psi_M \\
&\quad - \Big\{\Psi_M\big(\overline{\Psi}_N\lambda\big) - \Psi_N\big(\overline{\Psi}_M\lambda\big) - \Gamma^P\lambda\,\big(\overline{\Psi}_M\Gamma_P\Psi_N\big)\Big\} \\
&\quad - \frac{\beta}{96}\Gamma^{ABC}\Gamma_{[M}\Psi_{N]}\,\mathrm{tr_V}\{\overline{\chi}\Gamma_{ABC}\chi\}\,,
\end{aligned} \tag{F.6e}$$

$$\widehat{R}^{AB}{}_{MN}(\omega) \;\equiv\; R^{AB}{}_{MN}(\omega) + \frac{1}{2}\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_{N]}\Psi^{AB} + \overline{\Psi}_{[M}\Gamma^{[A}\Psi_{N]}{}^{B]} - \overline{\Psi}_{[M}\Gamma^C\Psi_{N]}\,\widehat{H}^{AB}{}_C\,. \tag{F.6f}$$

共変微分についての拡大版 (supercovariantization) も導入している:

$$\mathcal{D}_M\phi \;=\; \partial_M\phi + \overline{\Psi}_M\lambda\,, \tag{F.7a}$$

$$\mathcal{D}_M(\omega)\lambda \;=\; D_M(\omega)\lambda + \frac{1}{4}\,\not{\partial}\phi\,\Psi_M - \frac{1}{24}\Gamma^{ABC}\Psi_M\Big(\widehat{H}_{ABC} - \frac{1}{4}\,\overline{\lambda}\Gamma_{ABC}\lambda\Big)\,, \tag{F.7b}$$

$$\mathcal{D}_M(\omega,A)\chi \;=\; D_M(\omega,A)\chi + \frac{1}{4}\Gamma^{AB}\Psi_M\,\widehat{F}_{AB} - \Big\{\Psi_M\big(\overline{\chi}\lambda\big) - \chi\big(\overline{\Psi}_M\lambda\big) + \Gamma^A\lambda\big(\overline{\chi}\Gamma_A\Psi_M\big)\Big\}\,. \tag{F.7c}$$

超対称変換で $\beta(= -2\alpha')$ の 1 次に従う部分は次の通り:

$$\delta_\beta\Psi_M \;=\; \frac{\beta}{192}\,\Gamma^{ABC}\Gamma_M\epsilon\,\mathrm{tr_V}\big(\overline{\chi}\Gamma_{ABC}\chi\big)\,, \tag{F.8a}$$

$$\delta_\beta B_{MN} \;=\; -\beta\,\mathrm{tr_V}\big\{A_{[M}\delta_0 A_{N]}\big\}\,, \tag{F.8b}$$

$$\delta_\beta \lambda \;=\; \frac{\beta}{384}\,\Gamma^{ABC}\epsilon\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma_{ABC}\chi\big)\,, \tag{F.8c}$$

$$\delta_\beta \omega_M{}^{AB}(e,\Psi) \;=\; -\frac{\beta}{192}\,\overline{\epsilon}\Gamma^{[A}\Gamma_{CDE}\Gamma^{B]}\Psi_M\,\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(\overline{\chi}\Gamma^{CDE}\chi\big)\,. \tag{F.8d}$$

さらに、超対称変換で $\alpha(=-2\alpha')$ の 1 次に従う部分は次の通り:

$$\delta_\alpha \Psi_M \;=\; \frac{\alpha}{192}\Gamma^{CDE}\Gamma_M\epsilon\,\overline{\Psi}^{AB}\Gamma_{CDE}\Psi_{AB}\,, \tag{F.9a}$$

$$\delta_\alpha B_{MN} \;=\; -\alpha\,\omega_{+[M}{}^{AB}\,\delta_0\omega_{+N]}{}^{AB}\,, \tag{F.9b}$$

$$\delta_\alpha \lambda \;=\; \frac{\alpha}{384}\,\Gamma^{CDE}\Gamma_M\epsilon\,\overline{\Psi}^{AB}\Gamma_{CDE}\Psi_{AB}\,. \tag{F.9c}$$

F.3　場の方程式

ボソン場の運動方程式を列挙する:

$$0 \;=\; -R+\frac{1}{3}H_{MNP}H^{MNP}+4(\partial_M\phi)^2-4\nabla_0^2\phi-\mathcal{Z}\,, \tag{F.10a}$$

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& R_{MN}-H_{MPQ}H_N{}^{PQ}+2\nabla^0_M\nabla^0_N\phi \\
&-\frac{1}{2}g_{MN}\Big[R-\frac{1}{3}H_{PQR}H^{PQR}-4(\partial_P\phi)^2+4\nabla_0^2\phi+\mathcal{Z}\Big] \\
&-2\alpha'\Big[\mathrm{tr}\{R_{MP}(\omega_+)R_N{}^P(\omega_+)+\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_{MP}F_N{}^P\big)\}\Big] \\
&+2\alpha'\mathrm{e}^{2\phi}\Big[2\nabla_0^P\nabla_{(+)}^Q\big\{\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MPNQ}(\Gamma_+)\big\}-\nabla_{(+)}^Q\big\{\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MPQR}(\Gamma_+)\big\}H_N{}^{PR} \\
&\qquad -2\nabla_0^P\big\{\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MPQR}(\Gamma_+)H_N{}^{QR}\big\}-2\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MPQR}(\Gamma_+)H_N{}^{PS}H_S{}^{QR} \\
&\qquad -\nabla_0^P\nabla_{(+)}^Q\big\{\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MNPQ}(\Gamma_+)\big\}+\nabla_0^P\big\{\mathrm{e}^{-2\phi}R_{MNQR}(\Gamma_+)H_P{}^{QR}\big\}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{F.10b}$$

$$0 \;=\; \partial^M(\mathrm{e}^{-2\phi}H_{MNP}) \;=\; \nabla_0^M(\mathrm{e}^{-2\phi}H_{MNP})\,. \tag{F.10c}$$

ただしここで $\mathcal{Z}$ と Bianchi 恒等式は次で与えられている:

$$\mathcal{Z} \;\equiv\; -\alpha'\Big[\mathrm{tr}\big\{R_{MN}(\omega_+)R^{MN}(\omega_+)\big\}-\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_{MN}F^{MN}\big)\Big]\,, \tag{F.11a}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H \;&=\; -\alpha'\Big[\mathrm{tr}\big\{R_2(\omega_+)\wedge R_2(\omega_+)\big\}-\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_2\wedge F_2\big)\Big] \\
&=\; -\alpha'\Big[R_2^{AB}(\omega_+)\wedge R_{2BA}(\omega_+)-\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_2\wedge F_2\big)\Big] \\
&=\; -\frac{\alpha'}{4}\Big[R^{AB}{}_{MN}(\omega_+)R_{BAPQ}(\omega_+)-\mathrm{tr}_{\mathrm{V}}\big(F_{MN}F_{PQ}\big)\Big]\mathrm{d}x^M\wedge\mathrm{d}x^N\wedge\mathrm{d}x^P\wedge\mathrm{d}x^Q\,.
\end{aligned} \tag{F.11b}$$

ここで $R_{MNPQ}(\Gamma_+)=e_M{}^Ae_N{}^B\,R_{ABPQ}(\omega_+)$ (2.28) である。つまりアフィン接続 Γ_+ は (2.26) を通じてスピン接続 $\omega_+=\omega+\widehat{H}$ に関係する量である。

G　極大対称空間

D 次元極大対称空間 (maximally symmetric space) とは、平坦な Euclid 空間もしくは Minkowski 時空と同様にアイソメトリー群の次元 (独立な Killing ベクトルの数) が $\frac{1}{2}D(D+1)$ である空間のことである。また次の条件を満たす Euclid 計量もしくは Lorentz 計量を持つ Riemann 空間である:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \ = \ \frac{a}{D(D-1)}\big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\big) \, . \tag{G.1}$$

ここで a は定数である。これは曲率テンソルの添字を縮約することでスカラー曲率に一致する:

$$\begin{aligned} R \ &= \ g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \ = \ \frac{a}{D(D-1)} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\big) \ = \ \frac{a}{D(D-1)}\big(D^2 - D\big) \\ &= \ a \, . \end{aligned} \tag{G.2}$$

極大対称空間になる Lorentz 計量を持つ空間は Minkowski 時空・de Sitter 空間・反 de Sitter 空間の 3 つしかない。それぞれスカラー曲率 $R = a$ がゼロ・正・負である。(反)de Sitter 空間についてもう少し触れておこう [30]。

G.1　de Sitter 空間

D 次元 de Sitter 空間は、それより 1 次元高い $D+1$ 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{D,1}$ のある双曲面として定義される:

$$\mathrm{d}s^2 \ = \ -(\mathrm{d}x^{-1})^2 + (\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{D-1})^2 \, , \tag{G.3a}$$

$$+\alpha^2 \ = \ -(x^{-1})^2 + (x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^{D-1})^2 \, . \tag{G.3b}$$

ここで α は定数。この双曲面のアイソメトリー群は $SO(D,1)$ であり、独立な Killing ベクトルは $\frac{1}{2}D(D+1)$ 個ある。de Sitter 空間の曲率などは次の様に与えられる:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \ = \ +\frac{1}{\alpha^2}\big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\big) \, , \tag{G.4a}$$

$$R_{\mu\nu} \ = \ g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma} \ = \ +\frac{D-1}{\alpha^2} \, g_{\mu\nu} \, , \tag{G.4b}$$

$$R \ = \ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ = \ +\frac{D(D-1)}{\alpha^2} \ = \ a \, . \tag{G.4c}$$

[30] 日本語の最近の文献 [2, 9] に詳細にまとめられている。

G.2 反 de Sitter 空間

D 次元反 de Sitter 空間は、それより 1 次元高い $D+1$ 次元平坦空間 $\mathbb{R}^{D-1,2}$ のある双曲面として定義される:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -(\mathrm{d}x^{-1})^2 - (\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{D-1})^2\,, \qquad \text{(G.5a)} \\ -\alpha^2 &= -(x^{-1})^2 - (x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^{D-1})^2\,. \qquad \text{(G.5b)} \end{aligned}$$

ここで α は定数。この双曲面のアイソメトリー群は $SO(D-1,2)$ であり、独立な Killing ベクトルは $\frac{1}{2}D(D+1)$ 個ある。反 de Sitter 空間の曲率などは次の様に与えられる:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\frac{1}{\alpha^2}\big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\big)\,, \qquad \text{(G.6a)} \\ R_{\mu\nu} &= g^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} = -\frac{D-1}{\alpha^2}\,g_{\mu\nu}\,, \qquad \text{(G.6b)} \\ R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\frac{D(D-1)}{\alpha^2} = a\,. \qquad \text{(G.6c)} \end{aligned}$$

H　4次元$\mathcal{N}=2$超重力理論

第6.1節及び第7章で紹介したフラックスコンパクト化をIIA型理論に適用して、4次元$\mathcal{N}=2$超重力理論の具体形を掲載する [104, 106]。ここでは導出を全て [104, 106] に譲り、結果だけを列挙するにとどめておく [31]。出発点として用いられる10次元理論の作用は (3.21) よりも democratic type と呼ばれる次の表示が用いられる [181]:

$$
\begin{aligned}
S &= S_{\mathrm{NS}} + S_{\mathrm{R}}\,, && \text{(H.1a)}\\
S_{\mathrm{NS}} &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2\phi}\Big\{R(*1) + 4\mathrm{d}\phi\wedge *\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}H_3\wedge *H_3\Big\}\,, && \text{(H.1b)}\\
S_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{8}\int [\mathbf{F}\wedge *\mathbf{F}]_{10}\,, && \text{(H.1c)}\\
\mathbf{F} &= \lambda(*\mathbf{F}) \;=\; F_0 + F_2 + \ldots + F_{10} \;=\; (\mathrm{d} - H_3\wedge)\mathbf{C} + \mathrm{e}^{B}F_0\,, && \text{(H.1d)}\\
\lambda(F_k) &= (-1)^{[\frac{k+1}{2}]}F_k\,, && \text{(H.1e)}\\
0 &= (\mathrm{d} + H_3\wedge)*\mathbf{F}\,, \qquad 0 \;=\; (\mathrm{d} - H_3\wedge)\mathbf{F}\,. && \text{(H.1f)}
\end{aligned}
$$

NS-NSセクター S_{NS} は (3.21) と同じだが、R-RセクターとChern-Simons項が、0-formから10-formまでの形式的な和である poly-form $\mathbf{F}$ とその自己双対条件を用いて表記されている。$\mathbf{F}$ は、言ってみればゲージ場の電気的自由度と磁気的自由度をそれぞれ独立だとしている。自己双対条件を課すことで、どちらか一方だけが力学的自由度として選ばれる。なお、F_0 は Romans mass [182] と呼ばれる。

H.1　準備

H.1.1　Special Kähler geometries

4次元$\mathcal{N}=2$超重力理論において、ベクトル多重項のモジュライ空間は special Kähler geometry of local type $\mathrm{SKG_V}$ (つまり Hodge-Kähler geometry) であり、ハイパー多重項のそれは quaternionic (Kähler) geometry である。quaternionic geometry の部分空間には、ベクトル多重項とは別の Hodge-Kähler geometry $\mathrm{SKG_H}$ が埋め込まれている。それぞれを記述する道具をここでまとめておく。

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{V}} &\equiv \mathrm{e}^{K_{\mathrm{V}}/2}\begin{pmatrix} X^{\Lambda} \\ \mathcal{F}_{\Lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{\Lambda} \\ M_{\Lambda}\end{pmatrix}\,, \qquad & \Pi_{\mathrm{H}} &\equiv \mathrm{e}^{K_{\mathrm{H}}/2}\begin{pmatrix} Z^{I} \\ \mathcal{G}_{I}\end{pmatrix}\,, && \text{(H.2a)}\\
K_{\mathrm{V}} &= -\log \mathrm{i}\big(\overline{X}^{\Lambda}\mathcal{F}_{\Lambda} - X^{\Lambda}\overline{\mathcal{F}}_{\Lambda}\big)\,, & K_{\mathrm{H}} &= -\log \mathrm{i}\big(\overline{Z}^{I}\mathcal{G}_{I} - Z^{I}\overline{\mathcal{G}}_{I}\big)\,, && \text{(H.2b)}
\end{aligned}
$$

[31] 注意として、ここでの不変テンソルの規格化は [104, 106] に倣って $\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = +\alpha = -1$ である。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} &= \overline{\mathcal{F}}_{\Lambda\Sigma} + 2\mathrm{i}\frac{(\mathrm{Im}\mathcal{F})_{\Lambda\Gamma}X^{\Gamma}(\mathrm{Im}\mathcal{F})_{\Sigma\Delta}X^{\Delta}}{X^{\Pi}(\mathrm{Im}\mathcal{F})_{\Pi\Xi}X^{\Xi}} = \mathcal{N}_{\Sigma\Lambda}\,, && \text{(H.2c)} \\
\mathcal{M}_{IJ} &= \overline{\mathcal{G}}_{IJ} + 2\mathrm{i}\frac{(\mathrm{Im}\mathcal{G})_{IK}Z^{K}(\mathrm{Im}\mathcal{G})_{JL}Z^{L}}{Z^{M}(\mathrm{Im}\mathcal{G})_{MN}Z^{N}} = \mathcal{M}_{JI}\,, && \text{(H.2d)} \\
(\mathbb{M}_{\mathrm{V}})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathrm{Re}\mathcal{N} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\mathcal{N} & 0 \\ 0 & (\mathrm{Im}\mathcal{N})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mathrm{Re}\mathcal{N} & \mathbb{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}}\,, && \text{(H.2e)} \\
(\mathbb{M}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathrm{Re}\mathcal{M} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\mathcal{M} & 0 \\ 0 & (\mathrm{Im}\mathcal{M})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mathrm{Re}\mathcal{M} & \mathbb{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{IJ}}\,. && \text{(H.2f)}
\end{aligned}$$

K_{V}, K_{H} はそれぞれベクトル多重項・ハイパー多重項の special Kähler geometry の Kähler ポテンシャルである。これらの Kähler 共変微分を与える ($Z^I = (1, z^i)$, $X^{\Lambda} = (1, \mathfrak{t}^a)$):

$$\begin{aligned}
D_a\Pi_{\mathrm{V}} &= \Big(\partial_a + \frac{1}{2}\partial_a K_{\mathrm{V}}\Big)\Pi_{\mathrm{V}} \equiv \begin{pmatrix} f_a^{\Lambda} \\ h_{\Lambda a} \end{pmatrix}, & D_i\Pi_{\mathrm{H}} &= \Big(\partial_i + \frac{1}{2}\partial_i K_{\mathrm{H}}\Big)\Pi_{\mathrm{H}}\,, && \text{(H.3a)} \\
D_{\bar{a}}\Pi_{\mathrm{V}} &= \Big(\partial_{\bar{a}} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{a}} K_{\mathrm{V}}\Big)\Pi_{\mathrm{V}} \equiv 0\,, & D_{\bar{\imath}}\Pi_{\mathrm{H}} &= \Big(\partial_{\bar{\imath}} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{\imath}} K_{\mathrm{H}}\Big)\Pi_{\mathrm{H}} \equiv 0\,, && \text{(H.3b)} \\
D_{\bar{a}}\overline{\Pi}_{\mathrm{V}} &= \Big(\partial_{\bar{a}} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{a}} K_{\mathrm{V}}\Big)\overline{\Pi}_{\mathrm{V}} \equiv \begin{pmatrix} \overline{f}_{\bar{a}}^{\Lambda} \\ \overline{h}_{\Lambda\bar{a}} \end{pmatrix}, & D_{\bar{\imath}}\overline{\Pi}_{\mathrm{H}} &= \Big(\partial_{\bar{\imath}} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{\imath}} K_{\mathrm{H}}\Big)\overline{\Pi}_{\mathrm{H}}\,, && \text{(H.3c)} \\
D_a\overline{\Pi}_{\mathrm{V}} &= \Big(\partial_a - \frac{1}{2}\partial_a K_{\mathrm{V}}\Big)\overline{\Pi}_{\mathrm{V}} \equiv 0\,, & D_i\overline{\Pi}_{\mathrm{H}} &= \Big(\partial_i - \frac{1}{2}\partial_i K_{\mathrm{H}}\Big)\overline{\Pi}_{\mathrm{H}} \equiv 0\,, && \text{(H.3d)} \\
D_a D_b\Pi_{\mathrm{V}} &= \mathrm{i}C_{abc}\, g^{c\bar{c}}\, D_{\bar{c}}\overline{\Pi}_{\mathrm{V}}\,, & D_i D_j\Pi_{\mathrm{H}} &= \mathrm{i}C_{ijk}\, g^{k\bar{k}}\, D_{\bar{k}}\overline{\Pi}_{\mathrm{H}}\,, && \text{(H.3e)} \\
D_a D_{\bar{b}}\overline{\Pi}_{\mathrm{V}} &= g_{a\bar{b}}\,\overline{\Pi}_{\mathrm{V}}\,, & D_i D_{\bar{\jmath}}\overline{\Pi}_{\mathrm{H}} &= g_{i\bar{\jmath}}\,\overline{\Pi}_{\mathrm{H}}\,. && \text{(H.3f)}
\end{aligned}$$

なお、special Kähler geometry の性質により次の恒等式を満たす:

$$\begin{aligned}
M_{\Lambda} = \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}L^{\Sigma}\,, \qquad h_{\Lambda a} = \overline{\mathcal{N}}_{\Lambda\Sigma}f_a^{\Sigma}\,, \qquad \mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}L^{\Lambda}\overline{L}^{\Sigma} &= -\frac{1}{2}\,, && \text{(H.4a)} \\
g^{a\bar{b}}\, f_a^{\Lambda}\overline{f}_{\bar{b}}^{\Sigma} &= -\frac{1}{2}((\mathrm{Im}\mathcal{N})^{-1})^{\Lambda\Sigma} - \overline{L}^{\Lambda}L^{\Sigma}\,, && \text{(H.4b)} \\
C_{abc} &= \mathrm{e}^{K_{\mathrm{V}}}\,(\partial_a X^{\Lambda})(\partial_b X^{\Sigma})(\partial_c X^{\Gamma})\mathcal{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}(X)\,, && \text{(H.4c)} \\
C_{ijk} &= \mathrm{e}^{K_{\mathrm{H}}}\,(\partial_i Z^{I})(\partial_j Z^{J})(\partial_k Z^{K})\mathcal{G}_{IJK}(Z)\,. && \text{(H.4d)}
\end{aligned}$$

H.1.2 (Non)geometric flux charges

フラックスコンパクト化において、(7.3) の様に (non)geometric flux charges を導入する。それぞれの関係は次の通り:

$$(\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \qquad (\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}}(\mathbb{C}_{\rm H})^{\boldsymbol{JK}} \;=\; -\delta_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{K}} , \tag{H.5a}$$

$$(\mathbb{C}_{\rm V})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \qquad (\mathbb{C}_{\rm V})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}}(\mathbb{C}_{\rm V})^{\boldsymbol{\Sigma\Gamma}} \;=\; -\delta_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\boldsymbol{\Gamma}} , \tag{H.5b}$$

$$Q_{\boldsymbol{\Lambda}}{}^{\boldsymbol{I}} \;\equiv\; \begin{pmatrix} e_{\Lambda}{}^{I} & e_{\Lambda I} \\ m^{\Lambda I} & m^{\Lambda}{}_{I} \end{pmatrix} , \quad \widetilde{Q}^{\boldsymbol{\Lambda}}{}_{\boldsymbol{I}} \;=\; (\mathbb{C}_{\rm H}^{\rm T} Q \mathbb{C}_{\rm V})^{\boldsymbol{\Lambda}}{}_{\boldsymbol{I}} \;=\; \begin{pmatrix} m^{\Lambda}{}_{I} & -m^{\Lambda I} \\ -e_{\Lambda I} & e_{\Lambda}{}^{I} \end{pmatrix} , \tag{H.5c}$$

$$c^{\boldsymbol{\Lambda}} \;\equiv\; \begin{pmatrix} m_{\rm R}^{\Lambda} \\ e_{{\rm R}\Lambda} \end{pmatrix} . \tag{H.5d}$$

(7.3) にて $\mathfrak{D}^2 = 0$ であること、また T-duality 変換で NS-NS セクターと R-R セクターが混合しないことから、(non)geometric flux charges $Q_{\boldsymbol{\Lambda}}{}^{\boldsymbol{I}}$ と R-R flux charges $c^{\boldsymbol{\Lambda}}$ の間に次の関係が見出せる:

$$0 \;=\; Q^T \mathbb{C}_{\rm V} Q \;=\; \begin{pmatrix} e_{\Lambda}{}^{I} m^{\Lambda J} - e_{\Lambda}{}^{J} m^{\Lambda I} & e_{\Lambda}{}^{I} m^{\Lambda}{}_{J} - e_{\Lambda J} m^{\Lambda}{}_{I} \\ e_{\Lambda I} m^{\Lambda J} - e_{\Lambda}{}^{J} m^{\Lambda}{}_{I} & e_{\Lambda I} m^{\Lambda}{}_{J} - e_{\Lambda J} m^{\Lambda}{}_{I} \end{pmatrix} , \tag{H.6a}$$

$$0 \;=\; Q \mathbb{C}_{\rm H} Q^{\rm T} \;=\; \begin{pmatrix} e_{\Lambda}{}^{I} e_{\Sigma I} - e_{\Lambda I} e_{\Sigma}{}^{I} & e_{\Lambda}{}^{I} m^{\Sigma}{}_{I} - e_{\Lambda I} m^{\Sigma I} \\ m^{\Lambda I} e_{\Sigma I} - m^{\Lambda}{}_{I} e_{\Sigma}{}^{I} & m^{\Lambda I} m^{\Sigma}{}_{I} - m^{\Lambda}{}_{I} m^{\Sigma I} \end{pmatrix} , \tag{H.6b}$$

$$0 \;=\; Q^{\rm T} c \;=\; \begin{pmatrix} m_{\rm R}^{\Lambda} e_{\Lambda}{}^{I} + e_{{\rm R}\Lambda} m^{\Lambda I} \\ m_{\rm R}^{\Lambda} e_{\Lambda I} + e_{{\rm R}\Lambda} m^{\Lambda}{}_{I} \end{pmatrix} . \tag{H.6c}$$

ここで [104] と [106] (とこのノート) の表記の違いを列挙しておこう:

here	`arXiv:0804.0595` [104]	`arXiv:0911.2708` [106]
$\Pi_{\rm H}$, $\Pi_{\rm V}$	—	Π_1, Π_2
$K_{\rm H}$, $K_{\rm V}$	K_-, K_+	K_1, K_2
$(m_{\rm R}^{\Lambda}, e_{{\rm R}\Lambda})$	$(m_{\rm R}^{A}, e_{{\rm R}A})$	(p^A, q_A)
$(e_{\Lambda}{}^{I}, e_{\Lambda I})$	$(m_A{}^{I}, e_{AI})$	$(e_A{}^{I}, e_{AI})$
$(m^{\Lambda I}, m^{\Lambda}{}_{I})$	$(p^{AI}, q^{A}{}_{I})$	$(m^{AI}, m^{A}{}_{I})$
Q	$\mathbb{Q}^{\rm T}$	Q
$\mathbb{C}_{\rm H}$, $\mathbb{C}_{\rm V}$	$\mathbb{S}_-$, $\mathbb{S}_+$	$\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$
$\mathbb{M}_{\rm H}$, $\mathbb{M}_{\rm V}$	$\widetilde{\mathbb{M}}$, $\widetilde{\mathbb{N}}$	$\mathbb{M}_1$, $\mathbb{M}_2$
$(p^{\Lambda}, q_{\Lambda})$	—	—

H.1.3　Scalar potential

[106] で与えられる 4 次元時空上のゲージ対称性は $U(1)$ 群であることをまず認識しておく。その下で、[106] appendix A の計算に従って quaternionic geometry の情報を運ぶ $4h_{uv}k^u\overline{k}^v$ を書き換えることで、スカラーポテンシャル V が次の様に記述される:

$$V \;=\; 4h_{uv}\,k^u\overline{k}^v + \sum_{x=1}^{3}\Big(g^{a\bar{b}}\,D_a\mathcal{P}_xD_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_x - 3|\mathcal{P}_x|^2\Big) \;=\; V_{\rm NS}+V_{\rm R}\,, \tag{H.7a}$$

$$\begin{aligned} V_{\rm NS} \;&=\; -2e^{2\varphi}\Big[\overline{\Pi}{}_{\rm H}^{\rm T}\widetilde{Q}^{\rm T}\mathbb{M}_{\rm V}\widetilde{Q}\Pi_{\rm H} + \overline{\Pi}{}_{\rm V}^{\rm T}Q^{\rm T}\mathbb{M}_{\rm H}Q\Pi_{\rm V} + 4\overline{\Pi}{}_{\rm H}^{\rm T}\mathbb{C}_{\rm H}^{\rm T}Q^{\rm T}\big(\Pi_{\rm V}\overline{\Pi}{}_{\rm V}^{\rm T}+\overline{\Pi}_{\rm V}\Pi_{\rm V}^{\rm T}\big)Q\mathbb{C}_{\rm H}\Pi_{\rm H}\Big] \\ &=\; g^{a\bar{b}}D_a\mathcal{P}_+D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_+ + g^{i\bar{\jmath}}D_i\mathcal{P}_+D_{\bar{\jmath}}\overline{\mathcal{P}}_+ - 2|\mathcal{P}_+|^2\,, \end{aligned} \tag{H.7b}$$

$$\begin{aligned} V_{\rm R} \;&=\; -\frac{1}{2}e^{4\varphi}\big(c+\widetilde{Q}\xi\big)^{\rm T}\mathbb{M}_{\rm V}\big(c+\widetilde{Q}\xi\big) \\ &=\; g^{a\bar{b}}D_a\mathcal{P}_3D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_3 + |\mathcal{P}_3|^2\,. \end{aligned} \tag{H.7c}$$

ここで quaternionic geometry が持つ $SU(2)$ Killing プレポテンシャルは次である:

$$\mathcal{P}_+ \;\equiv\; \mathcal{P}_1+i\mathcal{P}_2 \;=\; 2e^{\varphi}\,\Pi_{\rm V}^{\rm T}\,Q\,\mathbb{C}_{\rm H}\,\Pi_{\rm H}\,, \tag{H.8a}$$

$$\mathcal{P}_- \;\equiv\; \mathcal{P}_1-i\mathcal{P}_2 \;=\; 2e^{\varphi}\,\Pi_{\rm V}^{\rm T}\,Q\,\mathbb{C}_{\rm H}\,\overline{\Pi}_{\rm H}\,, \tag{H.8b}$$

$$\mathcal{P}_3 \;=\; e^{2\varphi}\,\Pi_{\rm V}^{\rm T}\,\mathbb{C}_{\rm V}(c+\widetilde{Q}\xi)\,. \tag{H.8c}$$

注意すべきは、ハイパー多重項をゼロに設定しても、それは $4h_{uv}k^u\overline{k}^v=0=\mathcal{P}_\pm=D_a\mathcal{P}_\pm$ を意味しない。$4h_{uv}k^u\overline{k}^v$ も $\mathcal{P}_3$ を運ぶ上、ハイパー多重項をゼロにしても $\mathcal{P}_\pm\neq 0\neq D_a\mathcal{P}_\pm$ である。Kähler 共変微分を与えておく:

$$D_a\mathcal{P}_x \;=\; \Big(\partial_a+\frac{1}{2}\partial_aK_{\rm V}\Big)\mathcal{P}_x\,, \qquad D_i\mathcal{P}_x \;=\; \Big(\partial_i+\frac{1}{2}\partial_iK_{\rm H}\Big)\mathcal{P}_x\,, \tag{H.9a}$$

$$D_a\overline{\mathcal{P}}_x \;=\; \Big(\partial_a-\frac{1}{2}\partial_aK_{\rm V}\Big)\overline{\mathcal{P}}_x \;=\; 0\,, \qquad D_i\overline{\mathcal{P}}_x \;=\; \Big(\partial_i-\frac{1}{2}\partial_iK_{\rm H}\Big)\overline{\mathcal{P}}_x \;=\; 0\,, \tag{H.9b}$$

$$D_aD_b\mathcal{P}_+ \;=\; iC_{abc}\,g^{c\bar{c}}D_{\bar{c}}\overline{\mathcal{P}}_-\,, \qquad D_iD_j\mathcal{P}_+ \;=\; iC_{ijk}\,g^{k\bar{k}}D_{\bar{k}}\overline{\mathcal{P}}_-\,, \tag{H.9c}$$

$$D_aD_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_x \;=\; g_{a\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_x\,, \qquad D_iD_{\bar{\jmath}}\mathcal{P}_+ \;=\; g_{i\bar{\jmath}}\mathcal{P}_+\,, \tag{H.9d}$$

$$D_aD_b\mathcal{P}_3 \;=\; iC_{abc}\,g^{c\bar{c}}D_{\bar{c}}\overline{\mathcal{P}}_3\,. \tag{H.9e}$$

上記 V の微分計算をまとめる:

$$\partial_\varphi V \;=\; 2V_{\rm NS}+4V_{\rm R}\,, \tag{H.10a}$$

$$\partial V/\partial\xi^{\boldsymbol{I}} \;=\; \partial V_{\rm R}/\partial\xi^{\boldsymbol{I}} \;=\; -e^{4\varphi}(c+\widetilde{Q}\xi)^{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbb{M}_{\rm V})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}}\widetilde{Q}^{\boldsymbol{\Sigma}}{}_{\boldsymbol{I}}\,, \tag{H.10b}$$

$$\partial_iV \;=\; g^{a\bar{b}}(D_aD_i\mathcal{P}_+)(D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_+) + iC_{ijk}\,g^{j\bar{\jmath}}g^{k\bar{k}}(D_{\bar{\jmath}}\mathcal{P}_-)(D_{\bar{k}}\overline{\mathcal{P}}_+) - 2(D_i\mathcal{P}_+)\overline{\mathcal{P}}_+\,, \tag{H.10c}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_a V \;=\;& \mathrm{i} C_{abc}\, g^{b\bar{b}} g^{c\bar{c}} \Big[(D_{\bar{b}} \overline{\mathcal{P}}_-)(D_{\bar{c}} \overline{\mathcal{P}}_+) + (D_{\bar{b}} \overline{\mathcal{P}}_3)(D_{\bar{c}} \overline{\mathcal{P}}_3) \Big] \\
& - (D_a \mathcal{P}_+) \overline{\mathcal{P}}_+ + 2 (D_a \mathcal{P}_3) \overline{\mathcal{P}}_3 + g^{i\bar{j}} (D_i D_a \mathcal{P}_+)(D_{\bar{j}} \overline{\mathcal{P}}_+) \,.
\end{aligned} \tag{H.10d}
$$

H.2 Various Lagrangians

一般の generalized geometry は “magnetic” flux charges (つまり nongeometric flux charges) $m^{\Lambda I}, m^{\Lambda}{}_I$ を含む幾何学であるが、$m^{\Lambda I} = 0 = m^{\Lambda}{}_I$ の下では $SU(3)$ 構造群多様体になる。

R-R magnetic charges m_{R}^{Λ} がゼロでないとき、universal hypermultiplet の中の axion field a は massive two-form field $B_{\mu\nu}$ になる。また NS-NS magnetic charges $m^{\Lambda I}, m^{\Lambda}{}_I$ がゼロではないとき、R-R axions $\xi^I, \widetilde{\xi}_I$ のいくつかが massive two-form fields $\check{C}_{2\Lambda}$ になり、残りが axions $\widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}}$ として登場する [104]。以下に場合分けをしておこう:

NS-NS fluxes	R-R fluxes	R-R Lagrangian in [104]	here
$Q_{\boldsymbol{\Lambda}}{}^{\boldsymbol{I}} = 0$	$c^{\boldsymbol{\Lambda}} = 0$	(Calabi-Yau コンパクト化)	(H.12)
$m^{\Lambda I} = 0 = m^{\Lambda}{}_I$	$m_{\mathrm{R}}^{\Lambda} = 0$	B-part in (5.22) replaced to (5.25) with (5.26)	(H.13)
	$m_{\mathrm{R}}^{\Lambda} \neq 0$	(5.22) with (5.24)	(H.15)
general $Q_{\boldsymbol{\Lambda}}{}^{\boldsymbol{I}}$	$m_{\mathrm{R}}^{\Lambda} \neq 0$	(5.50) with (5.34), (5.51)	(H.18)

注意すべきは、magnetic charges m_{R}^{Λ}, $m^{\Lambda I}$, $m^{\Lambda}{}_I$ が理論に介入すると、NS-NS axion a と R-R axions $\xi^{\boldsymbol{I}}$ がテンソル場に双対変換されてしまうことである。しかし一方では Kähler ポテンシャルは変更を受けない。つまり、NS-NS セクターのスカラーポテンシャル V_{NS} を構成する $\mathcal{P}_{\pm}$ は、nongeometric flux charges の有無とは関係なしに同じ形をする。一方、R-R セクターのスカラーポテンシャル V_{R} はどうだろうか？ $\mathcal{P}_3$ (H.8c) は、実は一般の $m^{\Lambda I}$, $m^{\Lambda}{}_I$ の時の Killing プレポテンシャルであり、$SU(3)$ 構造群多様体のときは $\widetilde{Q}$ から $m^{\Lambda I}$, $m^{\Lambda}{}_I$ を除いた (かつ two-form fields $\check{C}_{2\Lambda}$ に双対変換された自由度が削げ落ちている) 形式になっている [104]。よって、多少の変更はあろうとも、基本的にはスカラーポテンシャルの形式は、$\check{C}_{2\Lambda}$ となって削げ落ちた自由度以外の寄与が (H.8c) の形式として残っている。表記を簡単にするため、さらに次を導入しておこう:

$$
U^{\boldsymbol{I}}{}_{\Lambda} \;\equiv\; \begin{pmatrix} e_{\Lambda}{}^{I} \\ e_{\Lambda I} \end{pmatrix} , \qquad V^{\boldsymbol{I}\Lambda} \;\equiv\; \begin{pmatrix} m^{\Lambda I} \\ m^{\Lambda}{}_{I} \end{pmatrix} , \tag{H.11a}
$$

$$
\widetilde{U}^{\Lambda}{}_{\boldsymbol{I}} U^{\boldsymbol{I}}{}_{\Sigma} \;\equiv\; \delta^{\Lambda}_{\Sigma} \,, \qquad U^{\boldsymbol{I}}{}_{\Lambda} \widetilde{U}^{\Lambda}{}_{\boldsymbol{J}} \;\equiv\; (\mathbb{P}_{\neq 0})^{\boldsymbol{I}}{}_{\boldsymbol{J}} \,, \qquad (\mathbb{P}_0)^{\boldsymbol{I}}{}_{\boldsymbol{J}} \;\equiv\; \delta^{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{J}} - (\mathbb{P}_{\neq 0})^{\boldsymbol{I}}{}_{\boldsymbol{J}} \,. \tag{H.11b}
$$

H.3　Ungauged supergravity

NS-NS flux charges $Q_{\boldsymbol{\Lambda}}{}^{\boldsymbol{I}}$ がゼロ (そして R-R flux charges $c^{\boldsymbol{\Lambda}}$ も自明) の時、つまり Calabi-Yau コンパクト化の時は、4 次元 $\mathcal{N}=2$ ungauged supergravity が登場する:

$$\begin{aligned}
S \;&=\; \frac{1}{2}\int (\mathrm{vol.})_{\mathit{4}}\Big(R - 2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\Big) - \int (\mathrm{vol.})_{\mathit{4}}\Big(g_{a\bar{b}}\,\partial_\mu \mathfrak{t}^a\partial^\mu\bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} + g_{i\bar{\jmath}}\,\partial_\mu z^i\partial^\mu\bar{z}^{\bar{\jmath}}\Big) \\
&\quad + \int\bigg[\frac{1}{2}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge * F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{\mathrm{e}^{2\varphi}}{2}(\mathbb{M}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}}\,\mathrm{d}\xi^{\boldsymbol{I}}\wedge *\mathrm{d}\xi^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\qquad - \frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{4}\Big(\mathrm{d}a - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}}\mathrm{d}\xi^{\boldsymbol{J}}\Big)\wedge *\Big(\mathrm{d}a - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}}\mathrm{d}\xi^{\boldsymbol{J}}\Big)\bigg] \\
&= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bigg[\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mu\nu}^{\Lambda}F^{\Sigma\mu\nu} - \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8\sqrt{-g}}\,\mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mu\nu}^{\Lambda}F_{\rho\sigma}^{\Sigma} \\
&\qquad\qquad - g_{a\bar{b}}\,\partial_\mu\mathfrak{t}^a\partial^\mu\bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} - h_{uv}\,\partial_\mu q^u\partial^\mu q^v\bigg]\,.
\end{aligned}\tag{H.12}$$

不変テンソルの規格化は $\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = +\alpha = -1$ であることに注意。登場する超対称多重項とそのボソン場は次の通り:

超重力多重項	$g_{\mu\nu}$, A_{1}^0		
ベクトル多重項	A_{1}^a, $\mathfrak{t}^a$, $\overline{\mathfrak{t}^a}$	$\mathfrak{t}^a \in \mathrm{SKG_V}$	ミラー双対: $\mathrm{SKG_V} \leftrightarrow \mathrm{SKG_H}$
ハイパー多重項	z^i, $\bar{z}^{\bar{\jmath}}$, ξ^i, $\widetilde{\xi}_j$	$z^i \in \mathrm{SKG_H}$	
universal hypermultiplet	φ, a, ξ^0, $\widetilde{\xi}_0$	$a \leftrightarrow B_{\mathit{2}}$	

なお、$\{q^u\} = \{z^i, \bar{z}^{\bar{\jmath}}, \xi^i, \widetilde{\xi}_j; \varphi, a, \xi^0, \widetilde{\xi}_0\}$ である。この系ではベクトル多重項と (universal) ハイパー多重項は結合していない。そのため、B 場は容易に Hodge 双対ができて axion a になることができる。

H.4　Standard gauged supergravity

$SU(3)$ 構造群多様体 ($V^{\boldsymbol{I}\Lambda} = 0$) で、かつ $m_{\mathrm{R}}^{\Lambda} = 0$ のときの 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
S \;&=\; \int (\mathrm{vol.})_{\mathit{4}}\Big\{\frac{1}{2}R - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - g_{a\bar{b}}\,\partial_\mu\mathfrak{t}^a\partial^\mu\bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} - g_{i\bar{\jmath}}\,\partial_\mu z^i\partial^\mu\bar{z}^{\bar{\jmath}} - (V_{\mathrm{NS2}} + V_{\mathrm{R2}})\Big\} \\
&\quad + \int\bigg[\frac{1}{2}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge * F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{\mathrm{e}^{2\varphi}}{2}(\mathbb{M}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}}\,D\xi^{\boldsymbol{I}}\wedge * D\xi^{\boldsymbol{J}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad - \frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{4}\Big(Da - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D\xi^{\boldsymbol{J}}\Big) \wedge * \Big(Da - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D\xi^{\boldsymbol{J}}\Big)\Bigg] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\Bigg[\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}F^{\Lambda}_{\mu\nu}F^{\Sigma\mu\nu} - \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8\sqrt{-g}}\mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}F^{\Lambda}_{\mu\nu}F^{\Sigma}_{\rho\sigma} \\
&\qquad - g_{a\bar{b}}\,\partial_\mu \mathfrak{t}^a \partial^\mu \bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} - g_{i\bar{\jmath}}\,\partial_\mu z^i \partial^\mu \bar{z}^{\bar{\jmath}} - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{\mathrm{e}^{2\varphi}}{2} D_\mu \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{M}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D^\mu \xi^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad - \frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{4}\Big(D_\mu a - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D_\mu\xi^{\boldsymbol{J}}\Big)\Big(D^\mu a - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D^\mu\xi^{\boldsymbol{J}}\Big) - V_{\mathrm{NSR2}}\Bigg] \,.
\end{aligned}
\tag{H.13}
$$

個々の細かな記述は次に従う:

$$
\xi^{\boldsymbol{I}} \equiv \begin{pmatrix} \xi^I \\ \widetilde{\xi}_I \end{pmatrix} , \qquad D\xi^{\boldsymbol{I}} \equiv \begin{pmatrix} G^I_{\mathit{1}} \\ \widetilde{G}_{\mathit{1}I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\xi^I - e_\Lambda{}^I A^\Lambda_{\mathit{1}} \\ \mathrm{d}\widetilde{\xi}_I - e_{\Lambda I} A^\Lambda_{\mathit{1}} \end{pmatrix} , \tag{H.14a}
$$

$$
Da \equiv \mathrm{d}a - \big[2e_{\mathrm{R}\Lambda} - \xi^I e_{\Lambda I} + \widetilde{\xi}_I e_\Lambda{}^I\big] A^\Lambda_{\mathit{1}} = \mathrm{d}a - \big[2e_{\mathrm{R}\Lambda} + (U^{\mathrm{T}}\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\Lambda\boldsymbol{I}}\xi^{\boldsymbol{I}}\big] A^\Lambda_{\mathit{1}} \,, \tag{H.14b}
$$

$$
Da - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} D\xi^{\boldsymbol{J}} = \big(\mathrm{d}a - \xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}}\mathrm{d}\xi^{\boldsymbol{J}}\big) - 2\big[e_{\mathrm{R}\Lambda} + (U^{\mathrm{T}}\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\Lambda\boldsymbol{I}}\xi^{\boldsymbol{I}}\big] A^\Lambda_{\mathit{1}} \,, \tag{H.14c}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{NSR2}} &\equiv V_{\mathrm{NS2}} + V_{\mathrm{R2}} = \Big[V_{\mathrm{NS}} + V_{\mathrm{R}}\Big]\Big|^{m^\Lambda_{\mathrm{R}}=0}_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0} \,, && \text{(H.14d)} \\
V_{\mathrm{NS2}} &= -2\mathrm{e}^{2\varphi}\Big[\overline{\Pi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{H}}\widetilde{Q}^{\mathrm{T}}\mathbb{M}_{\mathrm{V}}\widetilde{Q}\Pi_{\mathrm{H}} + \overline{\Pi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{V}}Q^{\mathrm{T}}\mathbb{M}_{\mathrm{H}}Q\Pi_{\mathrm{V}} + 4\overline{\Pi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{H}}\mathbb{C}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{H}}Q^{\mathrm{T}}\big(\Pi_{\mathrm{V}}\overline{\Pi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{V}} + \overline{\Pi}_{\mathrm{V}}\Pi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{V}}\big)Q\mathbb{C}_{\mathrm{H}}\Pi_{\mathrm{H}}\Big]\Big|^{m^\Lambda_{\mathrm{R}}=0}_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0} \\
&= \Big[g^{a\bar{b}}D_a\mathcal{P}_+ D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_+ + g^{i\bar{\jmath}}D_i\mathcal{P}_+ D_{\bar{\jmath}}\overline{\mathcal{P}}_+ - 2|\mathcal{P}_+|^2\Big]\Big|^{m^\Lambda_{\mathrm{R}}=0}_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0} \,, && \text{(H.14e)} \\
V_{\mathrm{R2}} &= -\frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{2}G^{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathit{0}}(\mathbb{M}_{\mathrm{V}})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}}G^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathit{0}} = \Big[g^{a\bar{b}}D_a\mathcal{P}_3 D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_3 + |\mathcal{P}_3|^2\Big]\Big|^{m^\Lambda_{\mathrm{R}}=0}_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0} \,, && \text{(H.14f)}
\end{aligned}
$$

$$
G^{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathit{0}} \equiv \begin{pmatrix} G^\Lambda_{\mathit{0}} \\ \widetilde{G}_{\mathit{0}\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathrm{R}\Lambda} - \xi^I e_{\Lambda I} + \widetilde{\xi}_I e_\Lambda{}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathrm{R}\Lambda} + (U^{\mathrm{T}}\mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\Lambda\boldsymbol{I}}\xi^{\boldsymbol{I}} \end{pmatrix} , \tag{H.14g}
$$

$$
0 = Q\mathbb{C}_{\mathrm{H}}Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} e_\Lambda{}^I e_{\Sigma I} - e_{\Lambda I}e_\Sigma{}^I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{H.14h}
$$

$$
0 = Q^T\mathbb{C}_{\mathrm{V}}Q = c^{\mathrm{T}}Q \ : \quad \text{trivial} \,. \tag{H.14i}
$$

H.5　Gauged supergravity with B-field

$SU(3)$ 構造群多様体 $(V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0)$ で、かつ $m_{\rm R}^{\Lambda}\neq 0$ のときの 4 次元 $\mathcal{N}=2$ gauged supergravity は、B 場を含む次の形式になる:

$$\begin{aligned}
S \ &= \ \frac{1}{2}\int (\text{vol.})_{\mathit{4}} \Big\{ R - 2\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-4\varphi}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\Big\} \\
&\quad - \int (\text{vol.})_{\mathit{4}} \Big\{ g_{a\bar{b}}\,\partial_{\mu}\mathfrak{t}^{a}\partial^{\mu}\bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} + g_{i\bar{\jmath}}\,\partial_{\mu}z^{i}\partial^{\mu}\bar{z}^{\bar{\jmath}} - (V_{\rm NS1}+V_{\rm R1})\Big\} \\
&\quad + \int \bigg[\frac{1}{2}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge *F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mathit{2}}^{\Lambda}\wedge F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{\mathrm{e}^{2\varphi}}{2}(\mathbb{M}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}}\,D\xi^{\boldsymbol{I}}\wedge *D\xi^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\mathrm{d}B_{\mathit{2}}\wedge\Big\{\xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}}D\xi^{\boldsymbol{J}} + \big(2e_{{\rm R}\Lambda} - \xi^{I}e_{\Lambda I} + \widetilde{\xi}_{I}e_{\Lambda}{}^{I}\big)A_{\mathit{1}}^{\Lambda}\Big\} - \frac{1}{2}m_{\rm R}^{\Lambda}e_{{\rm R}\Lambda}\,B_{\mathit{2}}\wedge B_{\mathit{2}}\bigg] \\
&= \int \mathrm{d}^{4}x\sqrt{-g}\bigg[\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mu\nu}^{\Lambda}F^{\Sigma\mu\nu} - g_{a\bar{b}}\,\partial_{\mu}\mathfrak{t}^{a}\partial^{\mu}\bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} - g_{i\bar{\jmath}}\,\partial_{\mu}z^{i}\partial^{\mu}\bar{z}^{\bar{\jmath}} \\
&\qquad\qquad - \partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{\mathrm{e}^{-4\varphi}}{24}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{\mathrm{e}^{2\varphi}}{2}D_{\mu}\xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{M}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}}D^{\mu}\xi^{\boldsymbol{J}} - V_{\rm NSR1}\bigg] \\
&\quad - \int \mathrm{d}^{4}x\,\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8}\bigg[2\partial_{\mu}B_{\nu\rho}\Big\{\xi^{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}}\,D_{\sigma}\xi^{\boldsymbol{J}} + \big(2e_{{\rm R}\Lambda} + (U^{\rm T}\mathbb{C}_{\rm H})_{\Lambda\boldsymbol{I}}\xi^{\boldsymbol{I}}\big)A_{\sigma}^{\Lambda}\Big\} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\,F_{\mu\nu}^{\Lambda}F_{\rho\sigma}^{\Sigma} - m_{\rm R}^{\Lambda}e_{{\rm R}\Lambda}\,B_{\mu\nu}B_{\rho\sigma}\bigg] \,.
\end{aligned} \tag{H.15}$$

個々の細かな記述は次に従う:

$$F_{\mathit{2}}^{\Lambda} \ \equiv \ G_{\mathit{2}}^{\Lambda} + G_{\mathit{0}}^{\Lambda}B_{\mathit{2}} \ = \ \mathrm{d}A_{\mathit{1}}^{\Lambda} + m_{\rm R}^{\Lambda}B_{\mathit{2}}\,, \tag{H.16a}$$

$$G_{\mathit{2}}^{\Lambda} \ \equiv \ \mathrm{d}A_{\mathit{1}}^{\Lambda}\,, \quad \widetilde{G}_{\Lambda\mathit{2}} \ \equiv \ \mathrm{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}G_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}(*G_{\mathit{2}}^{\Lambda})\,, \tag{H.16b}$$

$$\xi^{\boldsymbol{I}} \ \equiv \ \begin{pmatrix} \xi^{I} \\ \widetilde{\xi}_{I} \end{pmatrix}, \qquad D\xi^{\boldsymbol{I}} \ \equiv \ G_{\mathit{1}}^{\boldsymbol{I}} \ = \ \begin{pmatrix} G_{\mathit{1}}^{I} \\ \widetilde{G}_{\mathit{1}I} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{d}\xi^{I} - e_{\Lambda}{}^{I}A_{\mathit{1}}^{\Lambda} \\ \mathrm{d}\widetilde{\xi}_{I} - e_{\Lambda I}A_{\mathit{1}}^{\Lambda} \end{pmatrix}, \tag{H.16c}$$

$$V_{\rm NSR1} \ \equiv \ V_{\rm NS1} + V_{\rm R1} \ = \ \Big[V_{\rm NS} + V_{\rm R}\Big]\Big|_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0}\,, \tag{H.16d}$$

$$\begin{aligned}
V_{\rm NS1} \ &= \ -2\mathrm{e}^{2\varphi}\Big[\overline{\Pi}{}_{\rm H}^{\rm T}\widetilde{Q}^{\rm T}\mathbb{M}_{\rm V}\widetilde{Q}\Pi_{\rm H} + \overline{\Pi}{}_{\rm V}^{\rm T}Q^{\rm T}\mathbb{M}_{\rm H}Q\Pi_{\rm V} + 4\overline{\Pi}{}_{\rm H}^{\rm T}\mathbb{C}_{\rm H}^{\rm T}Q^{\rm T}\big(\Pi_{\rm V}\overline{\Pi}{}_{\rm V}^{\rm T} + \overline{\Pi}_{\rm V}\Pi_{\rm V}^{\rm T}\big)Q\mathbb{C}_{\rm H}\Pi_{\rm H}\Big]\Big|_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0} \\
&= \ \Big[g^{a\bar{b}}D_{a}\mathcal{P}_{+}D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_{+} + g^{i\bar{\jmath}}D_{i}\mathcal{P}_{+}D_{\bar{\jmath}}\overline{\mathcal{P}}_{+} - 2|\mathcal{P}_{+}|^{2}\Big]\Big|_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0}\,,
\end{aligned} \tag{H.16e}$$

$$V_{\rm R1} \ = \ -\frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{2}G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbb{M}_{\rm V})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}}G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Sigma}} \ = \ \Big[g^{a\bar{b}}D_{a}\mathcal{P}_{3}D_{\bar{b}}\overline{\mathcal{P}}_{3} + |\mathcal{P}_{3}|^{2}\Big]\Big|_{V^{\boldsymbol{I}\Lambda}=0}\,, \tag{H.16f}$$

$$G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Lambda}} \ \equiv \ \begin{pmatrix} G_{\mathit{0}}^{\Lambda} \\ \widetilde{G}_{\mathit{0}\Lambda} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{\rm R}^{\Lambda} \\ e_{{\rm R}\Lambda} - \xi^{I}e_{\Lambda I} + \widetilde{\xi}_{I}e_{\Lambda}{}^{I} \end{pmatrix}. \tag{H.16g}$$

flux charges の拘束条件 (H.6) は次の通りに簡略化される ($Q^T \mathbb{C}_{\rm V} Q$ は自明になる):

$$0 \ = \ Q \mathbb{C}_{\rm H} Q^{\rm T} \ = \ \begin{pmatrix} e_{\Lambda}{}^I e_{\Sigma I} - e_{\Lambda I} e_{\Sigma}{}^I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{H.17a}$$

$$0 \ = \ c^{\rm T} Q \ = \ \begin{pmatrix} m_{\rm R}^{\Lambda} e_{\Lambda}{}^I & m_{\rm R}^{\Lambda} e_{\Lambda I} \end{pmatrix} \,. \tag{H.17b}$$

H.6 Gauged supergravity with massive tensor fields

一般の generalized geometry (non-trivial $V^{\boldsymbol{I}\Lambda}$) で、かつ $m_{\rm R}^{\Lambda} \neq 0$ のとき、4次元 $\mathcal{N} = 2$ gauged supergravity の作用積分は次の様になる:

$$\begin{aligned}
S \ &= \ \frac{1}{2} \int (\text{vol.})_{\mathit{4}} \Big\{ R - 2 \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{12} \mathrm{e}^{-4\varphi} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \Big\} \\
&\quad - \int (\text{vol.})_{\mathit{4}} \Big\{ g_{a \bar{b}} \, \partial_{\mu} \mathfrak{t}^a \partial^{\mu} \bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} + g_{i \bar{\jmath}} \, \partial_{\mu} z^i \partial^{\mu} \bar{z}^{\bar{\jmath}} - (V_{\rm NS3} + V_{\rm R3}) \Big\} \\
&\quad + \int \bigg[\frac{1}{2} \mathrm{Im} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \, F_{\mathit{2}}^{\Lambda} \wedge * F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{1}{2} \mathrm{Re} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \, F_{\mathit{2}}^{\Lambda} \wedge F_{\mathit{2}}^{\Sigma} + \frac{1}{2} \widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{IJ}} \, \mathrm{d} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \wedge * \mathrm{d} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2} (\Delta^{-1})^{\Lambda\Sigma} \big(\mathrm{d} \check{C}_{\mathit{2}\Lambda} + \zeta_{\Lambda} \, \mathrm{d} B_{\mathit{2}} \big) \wedge * \big(\mathrm{d} \check{C}_{\mathit{2}\Sigma} + \zeta_{\Sigma} \, \mathrm{d} B_{\mathit{2}} \big) \\
&\qquad\quad + \big(\mathrm{d} \check{C}_{\mathit{2}\Lambda} + \zeta_{\Lambda} \mathrm{d} B_{\mathit{2}} \big) \wedge \big(\mathrm{e}^{2\varphi} \Delta^{-1} U^{\rm T} \mathbb{M}_{\rm H} \big)^{\Lambda}{}_{\boldsymbol{I}} \, \mathrm{d} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} + \frac{1}{2} \mathrm{d} B_{\mathit{2}} \wedge \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} (\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}} \, \mathrm{d} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\quad + \big(\check{C}_{\mathit{2}\Lambda} - e_{{\rm R}\Lambda} B_{\mathit{2}} \big) \wedge \Big\{ \mathrm{d} A_{\mathit{1}}^{\Lambda} + \frac{1}{2} (\widetilde{U} V)^{\Lambda\Sigma} \check{C}_{\mathit{2}\Sigma} + \frac{1}{2} m_{\rm R}^{\Lambda} B_{\mathit{2}} \Big\} \bigg] \\
&= \ \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \bigg[\frac{1}{2} R + \frac{1}{4} \mathrm{Im} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \, F_{\mu\nu}^{\Lambda} F^{\Sigma \mu\nu} - g_{a \bar{b}} \, \partial_{\mu} \mathfrak{t}^a \partial^{\mu} \bar{\mathfrak{t}}^{\bar{b}} - g_{i \bar{\jmath}} \, \partial_{\mu} z^i \partial^{\mu} \bar{z}^{\bar{\jmath}} \\
&\qquad\quad - \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{\mathrm{e}^{-4\varphi}}{24} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{IJ}} \, \partial_{\mu} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \partial^{\mu} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\quad + \frac{3}{4} (\Delta^{-1})^{\Lambda\Sigma} \big(\partial_{[\mu} \check{C}_{\nu\rho]\Lambda} + \zeta_{\Lambda} \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} \big) \big(\partial^{\mu} \check{C}^{\nu\rho\Lambda} + \zeta_{\Lambda} \partial^{\mu} B^{\nu\rho} \big) - V_{\rm NSR3} \bigg] \\
&\quad - \int \mathrm{d}^4 x \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8} \bigg[\mathrm{Re} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \, F_{\mu\nu}^{\Lambda} F_{\rho\sigma}^{\Sigma} + 4 \mathrm{e}^{2\varphi} \big(\partial_{\mu} \check{C}_{\nu\rho\Lambda} \big) \big(\Delta^{-1} U^{\rm T} \mathbb{M}_{\rm H} \big)^{\Lambda}{}_{\boldsymbol{I}} \, \partial_{\sigma} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \\
&\qquad\quad + 2 \partial_{\mu} B_{\nu\rho} \, \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} (\mathbb{C}_{\rm H})_{\boldsymbol{IJ}} \, \partial_{\sigma} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{J}} \\
&\qquad\quad + \big(\check{C}_{\mu\nu\Lambda} - e_{{\rm R}\Lambda} B_{\mu\nu} \big) \big(4 \partial_{\rho} A_{\sigma}^{\Lambda} + (\widetilde{U} V)^{\Lambda\Sigma} \check{C}_{\rho\sigma} + m_{\rm R}^{\Lambda} B_{\rho\sigma} \big) \bigg] \,.
\end{aligned} \tag{H.18}$$

ここの詳細は次の通り:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathit{2}}^{\Lambda} &\equiv G_{\mathit{2}}^{\Lambda} + G_{\mathit{0}}^{\Lambda} B_{\mathit{2}} \ = \ \mathrm{d}A_{\mathit{1}}^{\Lambda} + (\widetilde{U} V)^{\Lambda\Sigma} \check{C}_{\mathit{2}\Sigma} + m_{\mathrm{R}}^{\Lambda} B_{\mathit{2}} \,, && \text{(H.19a)} \\
\widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} &\equiv (\mathbb{P}_0)^{\boldsymbol{I}}{}_{\boldsymbol{J}} \xi^{\boldsymbol{J}} \,, \qquad 0 \ = \ (\mathbb{P}_{\neq 0})^{\boldsymbol{I}}{}_{\boldsymbol{J}} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{J}} \,, && \text{(H.19b)} \\
\zeta_{\Lambda} &\equiv (U^{\mathrm{T}} \mathbb{C}_{\mathrm{H}})_{\Lambda \boldsymbol{I}} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \,, && \text{(H.19c)} \\
\Delta_{\Lambda\Sigma} &\equiv \mathrm{e}^{2\varphi} (U^{\mathrm{T}})_{\Lambda}{}^{\boldsymbol{I}} (\mathbb{M}_{\mathrm{H}})_{\boldsymbol{IJ}} U^{\boldsymbol{J}}{}_{\Sigma} \,, && \text{(H.19d)} \\
\widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{IJ}} &\equiv \mathrm{e}^{2\varphi} \big(\mathbb{M}_{\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{2\varphi} \mathbb{M}_{\mathrm{H}} U \Delta^{-1} U^{\mathrm{T}} \mathbb{M}_{\mathrm{H}} \big)_{\boldsymbol{IJ}} \,, && \text{(H.19e)} \\
\check{G}_{\mathit{1}}^{\Lambda} &\equiv -(\Delta^{-1})^{\Lambda\Sigma} \Big[* \mathrm{d}\check{C}_{\mathit{2}\Sigma} + \zeta_{\Sigma} * \mathrm{d}B_{\mathit{2}} + \mathrm{e}^{2\varphi} \big(U^{\mathrm{T}} \mathbb{M}_{\mathrm{H}} \big)_{\Sigma \boldsymbol{I}} \mathrm{d}\widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \Big] \,, && \text{(H.19f)} \\
V_{\mathrm{NSR3}} &= V_{\mathrm{NS3}} + V_{\mathrm{R3}} \,, && \text{(H.19g)} \\
V_{\mathrm{NS3}} &= -2\mathrm{e}^{2\varphi} \Big[\overline{\Pi}{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} \mathbb{M}_{\mathrm{V}} \widetilde{Q} \Pi_{\mathrm{H}} + \overline{\Pi}{}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \mathbb{M}_{\mathrm{H}} Q \Pi_{\mathrm{V}} + 4 \overline{\Pi}{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \mathbb{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \big(\Pi_{\mathrm{V}} \overline{\Pi}{}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} + \overline{\Pi}_{\mathrm{V}} \Pi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \big) Q \mathbb{C}_{\mathrm{H}} \Pi_{\mathrm{H}} \Big] \\
&= g^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}_+ D_{\bar{b}} \overline{\mathcal{P}}_+ + g^{i\bar{\jmath}} D_i \mathcal{P}_+ D_{\bar{\jmath}} \overline{\mathcal{P}}_+ - 2|\mathcal{P}_+|^2 \,, && \text{(H.19h)} \\
V_{\mathrm{R3}} &= -\frac{\mathrm{e}^{4\varphi}}{2} G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Lambda}} (\mathbb{M}_{\mathrm{V}})_{\boldsymbol{\Lambda\Sigma}} G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Sigma}} \ = \ \Big[g^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}_3 D_{\bar{b}} \overline{\mathcal{P}}_3 + |\mathcal{P}_3|^2 \Big] \Big|_{\xi \to \widehat{\xi}} \,, && \text{(H.19i)} \\
G_{\mathit{0}}^{\boldsymbol{\Lambda}} &= c^{\boldsymbol{\Lambda}} + \widetilde{Q}^{\boldsymbol{\Lambda}}{}_{\boldsymbol{I}} \widehat{\xi}^{\boldsymbol{I}} \,. && \text{(H.19j)}
\end{aligned}
$$

I　基礎的な計算の詳細

I.1　Wess-Zumino 模型の超対称変換

Wess-Zumino 模型 (1.10) の各項の超対称変換を評価する:

$$\delta\Big(\frac{1}{2}(\partial_a A)^2\Big) = (\partial^a A)\partial_a(\delta A) = (\partial^a A)\,\overline{\varepsilon}\partial_a\psi\,, \tag{I.1a}$$

$$\delta\Big(\frac{1}{2}(\partial_a B)^2\Big) = (\partial^a B)\partial_a(\delta B) = -\mathrm{i}(\partial^a B)\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial_a\psi\,, \tag{I.1b}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\frac{1}{2}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi\Big) &= \frac{1}{2}(\delta\overline{\psi})\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}\overline{\psi}\partial\!\!\!/\delta\psi \;=\; (\delta\overline{\psi})\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\psi}\gamma^a\psi) \\
&= \Big(-\overline{\varepsilon}\gamma^a\,\partial_a A + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\partial_a B + \overline{\varepsilon}F + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5 G\Big)\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\psi}\gamma^a\psi) \\
&= -(\partial_a A)\overline{\varepsilon}\gamma^a\gamma^b\partial_b\psi + \mathrm{i}(\partial_a B)\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\gamma^b\partial_b\psi + F\,\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi + \mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\psi}\gamma^a\psi) \\
&= -(\partial^a A)\overline{\varepsilon}\partial_a\psi + \mathrm{i}(\partial^a B)\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial_a\psi + F\,\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi + \mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi \\
&\quad - \partial_a(A\,\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi) + \mathrm{i}\partial_a(B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^{ab}\partial_b\psi) - \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\psi}\gamma^a\psi)\,,
\end{aligned} \tag{I.1c}$$

$$\delta\Big(\frac{1}{2}F^2\Big) = F\delta F = F\,\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1d}$$

$$\delta\Big(\frac{1}{2}G^2\Big) = G\delta G = \mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1e}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\frac{1}{2}\overline{\psi}\psi\Big) &= \frac{1}{2}(\delta\overline{\psi})\psi + \frac{1}{2}\overline{\psi}\delta\psi \;=\; (\delta\overline{\psi})\psi \\
&= \Big(-\overline{\varepsilon}\gamma^a\,\partial_a A + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\partial_a B + \overline{\varepsilon}F + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5 G\Big)\psi \\
&= -(\partial_a A)\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi + \mathrm{i}(\partial_a B)\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi + F\overline{\varepsilon}\psi + \mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi \\
&= A\,\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi - \mathrm{i}B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi + F\overline{\varepsilon}\psi + \mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi - \partial_a\Big\{A\,\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi - \mathrm{i}B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi\Big\}\,,
\end{aligned} \tag{I.1f}$$

$$\delta\Big(AF\Big) = F\delta A + A\delta F = F\,\overline{\varepsilon}\psi + A\,\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1g}$$

$$\delta\Big(BG\Big) = G\delta B + B\delta G = -\mathrm{i}G\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi + \mathrm{i}B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1h}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\frac{1}{2}A\overline{\psi}\psi\Big) &= \frac{1}{2}\overline{\psi}\psi\delta A + A(\delta\overline{\psi})\psi \\
&= \frac{1}{2}\overline{\psi}\psi(\overline{\varepsilon}\psi) + A\Big(-\overline{\varepsilon}\gamma^a\,\partial_a A + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\partial_a B + \overline{\varepsilon}F + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5 G\Big)\psi \\
&= \frac{1}{2}\overline{\psi}\psi(\overline{\varepsilon}\psi) - \frac{1}{2}(\partial_a A^2)\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi + \mathrm{i}(A\partial_a B)\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi + (AF)\overline{\varepsilon}\psi + \mathrm{i}(AG)\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi\,,
\end{aligned} \tag{I.1i}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}B\overline{\psi}\gamma_5\psi\Big) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}\gamma_5\psi\delta B + \mathrm{i}B(\delta\overline{\psi})\gamma_5\psi \\
&= \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_5\psi(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) + \mathrm{i}B\Big(- \overline{\varepsilon}\gamma^a\,\partial_a A + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\partial_a B + \overline{\varepsilon}F + \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5 G\Big)\gamma_5\psi \\
&= \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_5\psi(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) + \mathrm{i}(B\partial_a A)\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi + \frac{1}{2}(\partial_a B^2)\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi + \mathrm{i}(BF)\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi - (BG)\,\overline{\varepsilon}\psi\,,
\end{aligned} \tag{I.1j}$$

$$\delta\Big(\frac{1}{2}A^2F\Big) = FA\delta A + \frac{1}{2}A^2\delta F = FA\,\overline{\varepsilon}\psi + \frac{1}{2}A^2\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1k}$$

$$\delta\Big(\frac{1}{2}B^2F\Big) = FB\delta B + \frac{1}{2}B^2\delta F = -\mathrm{i}FB\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi + \frac{1}{2}B^2\overline{\varepsilon}\partial\!\!\!/\psi\,, \tag{I.1l}$$

$$\delta\Big(ABG\Big) = BG\delta A + AG\delta B + AB\delta G = BG\,\overline{\varepsilon}\psi - \mathrm{i}AG\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi + \mathrm{i}AB\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi\,. \tag{I.1m}$$

ここで Clifford 代数 (もしくは (A.3)) などを用いている:

$$\gamma^a\gamma^b = \gamma^{ab} + \eta^{ab}\,, \tag{I.2a}$$

$$(\partial_a A)\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi = \partial_a(A\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi) - A\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_a\partial_b\psi = \partial_a(A\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi)\,. \tag{I.2b}$$

よって Lagrangian (1.10) の変換が評価できる:

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_0 &= -\partial_a\Big\{ - A\,\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi + \mathrm{i}B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^{ab}\partial_b\psi - \frac{1}{2}\delta\overline{\psi}\gamma^a\psi\Big\} \\
&= -\partial_a\Big\{ - A\,\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\partial_b\psi + \mathrm{i}B\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^{ab}\partial_b\psi + \frac{1}{2}\Big(\overline{\varepsilon}\gamma^b\,\partial_b A - \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^b\partial_b B - \overline{\varepsilon}F - \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5 G\Big)\gamma^a\psi\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\gamma^a\gamma^b\partial_b\psi + \overline{\varepsilon}(F + \mathrm{i}\gamma_5 G)\gamma^a\psi\Big\}\,,
\end{aligned} \tag{I.3a}$$

$$\delta\mathscr{L}_m = m\,\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)\gamma^a\psi\Big\}\,, \tag{I.3b}$$

$$\delta\mathscr{L}_g = -\frac{g}{2}\partial_a\Big\{\overline{\varepsilon}(A - \mathrm{i}\gamma_5 B)^2\gamma^a\psi\Big\} + \frac{g}{2}\Big\{(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) + (\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi)\Big\}\,. \tag{I.3c}$$

ここで $\delta\mathscr{L}_g$ の右辺第 2 項が消えずに残っているように見えるが、これは Fierz 恒等式 (1.8) を用いて相殺できる:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^a\psi &= \psi^{\mathrm{T}}C\gamma^a\psi = -\psi^{\mathrm{T}}(\gamma^a)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\psi \\
&= -\overline{\psi}C^{-1}(-C\gamma^a C^{-1})(-C)\psi = -\overline{\psi}\gamma^a\psi \\
&= 0\,,
\end{aligned} \tag{I.4a}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^{ab}\psi &= \psi^{\mathrm{T}}C\gamma^{ab}\psi = -\psi^{\mathrm{T}}(\gamma^{ab})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\psi \\
&= -\overline{\psi}C^{-1}(-C\gamma^{ab}C^{-1})(-C)\psi = -\overline{\psi}\gamma^{ab}\psi \\
&= 0\,,
\end{aligned} \tag{I.4b}$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) &= -\frac{1}{4}\sum_{A}(\overline{\psi}\mathcal{O}_A\psi)(\overline{\varepsilon}\mathcal{O}^A\psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) - \frac{1}{4}\cancel{(\overline{\psi}\gamma_a\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi)} - \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma_5\gamma_a\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi) + \frac{1}{8}\cancel{(\overline{\psi}\gamma_{ab}\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\psi)}, \qquad \text{(I.4c)} \\
(\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) &= -\frac{1}{4}\sum_{A}(\overline{\psi}\gamma_5\mathcal{O}_A\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\mathcal{O}^A\psi) \\
&= -\frac{1}{4}(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) + \frac{1}{4}\cancel{(\overline{\psi}\gamma_a\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma^a\psi)} - \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma_5\gamma_a\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\psi) + \frac{1}{8}\cancel{(\overline{\psi}\gamma_{ab}\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\psi)}. \qquad \text{(I.4d)}
\end{aligned}
$$

これを用いると次が示される:

$$
(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) + (\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) \;=\; -\frac{1}{2}(\overline{\psi}\psi)(\overline{\varepsilon}\psi) - \frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma_5\psi)(\overline{\varepsilon}\gamma_5\psi) \;=\; 0\,. \qquad \text{(I.5)}
$$

I.2　超対称 Maxwell 理論の超対称変換

超対称 $U(1)$ ゲージ理論の Lagrangian (1.15) の各項に超対称変換 (1.16) を施して、Lagrangian の変化分を評価する:

$$
\begin{aligned}
\delta\Big(-\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}\Big) &= -\frac{1}{2}F^{ab}\big(\partial_a\delta A_b - \partial_b\delta A_a\big) \;=\; +F^{ab}\partial_b\delta A_a \\
&= F^{ab}\,\overline{\varepsilon}\gamma_a\partial_b\lambda\,, \qquad \text{(I.6a)} \\
\delta\Big(-\frac{1}{2}\overline{\lambda}\partial\!\!\!/\lambda\Big) &= -\frac{1}{2}(\delta\overline{\lambda})\gamma^a\partial_a\lambda - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}C\gamma^a(\partial_a\delta\lambda) \\
&= -\frac{1}{2}(\delta\overline{\lambda})\gamma^a\partial_a\lambda + \frac{1}{2}(\partial_a\delta\lambda)^{\mathrm{T}}(\gamma^a)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\lambda \\
&= -\frac{1}{2}(\delta\overline{\lambda})\gamma^a\partial_a\lambda + \frac{1}{2}(\partial_a\delta\lambda)^{\mathrm{T}}(-C\gamma^aC^{-1})(-C)\lambda \\
&= -\frac{1}{2}(\delta\overline{\lambda})\gamma^a\partial_a\lambda + \frac{1}{2}(\partial_a\delta\overline{\lambda})\gamma^a\lambda \;=\; -(\delta\overline{\lambda})\partial\!\!\!/\lambda + \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda) \\
&= -\Big(\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}F_{ab} + \mathrm{i}D\overline{\varepsilon}\gamma_5\Big)\partial\!\!\!/\lambda + \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda) \\
&= -\frac{1}{2}F_{ab}\,\overline{\varepsilon}\gamma^{ab}\gamma^c\partial_c\lambda - \mathrm{i}D\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda + \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda) \\
&= -\frac{1}{2}F_{ab}\,\overline{\varepsilon}(\gamma^{abc} - \eta^{ac}\gamma^b + \eta^{bc}\gamma^a)\partial_c\lambda - \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda\,D + \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda) \\
&= -F^{ab}\overline{\varepsilon}\gamma_a\partial_b\lambda - \mathrm{i}\,\overline{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda\,D - \frac{1}{2}\partial_c(F_{ab}\,\overline{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda) + \frac{1}{2}\partial_a(\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda)\,, \qquad \text{(I.6b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Big(\frac{1}{2}D^2\Big) &= \mathrm{i}\,\bar{\varepsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda\, D\,, && \text{(I.6c)}\\
\therefore\quad \delta\mathscr{L} &= \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\partial_a\Big\{-F_{bc}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda+\delta\overline{\lambda}\gamma^a\lambda\Big\}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\partial_a\Big\{-F_{bc}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda+\frac{1}{2}F_{bc}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{bc}\gamma^a\lambda+\mathrm{i}D\,\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\lambda\Big\}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{g}^2}\partial_a\Big\{-\frac{1}{2}F_{bc}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda-F^{ab}\,\bar{\varepsilon}\gamma_b\lambda+\mathrm{i}D\,\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a\lambda\Big\}\,. && \text{(I.6d)}
\end{aligned}
$$

ここで恒等式 (A.3) などを用いている:

$$
\begin{aligned}
\gamma^{ab}\gamma^c &= \gamma^{abc}-(\eta^{ac}\gamma^b-\eta^{bc}\gamma^a)\,, && \text{(I.7a)}\\
F_{ab}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\partial_c\lambda &= \partial_c(F_{ab}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda)-\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda(\partial_cF_{ab})\\
&= \partial_c(F_{ab}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda)-\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda\big(\partial_c\partial_aA_b-\partial_c\partial_bA_a\big)\\
&= \partial_c(F_{ab}\,\bar{\varepsilon}\gamma^{abc}\lambda)\,. && \text{(I.7b)}
\end{aligned}
$$

I.3　Lie 微分の具体的計算

一般座標変換 $x\to x'=x+\xi(x)$ の下での Lie 微分を具体的に評価する。一般の時空次元について成立するので、時空の添字などはそれに従う:

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\ \to\ \phi'(x') &= \phi(x)\\
&= \phi'(x)+\xi^P\partial_P\phi(x)+\mathcal{O}(\xi^2)\,,\\
\therefore\quad \delta_{\mathrm{L}}\phi(x) &= \phi'(x)-\phi(x)\ =\ (\phi'(x)-\xi^P\partial_P\phi(x))-\phi(x)\\
&= -\xi^P\partial_P\phi(x)\,, && \text{(I.8a)}\\
A_M(x)\ \to\ A'_M(x') &= \frac{\partial x^P}{\partial x'^M}A_P(x)\ =\ A_M(x)-\partial_M\xi^PA_P(x)+\mathcal{O}(\xi^2)\\
&= A'_M(x)+\xi^P\partial_PA_M(x)+\mathcal{O}(\xi^2)\,,\\
\therefore\quad \delta_{\mathrm{L}}A_M(x) &= A'_M(x)-A_M(x)\ =\ -\partial_M\xi^PA_P(x)-\xi^P\partial_PA_M(x)\\
&= -\nabla^0_M\xi^PA_P(x)-\xi^P\nabla^0_PA_M(x)\,, && \text{(I.8b)}\\
A^M(x)\ \to\ A'^M(x') &= \frac{\partial x'^M}{\partial x^P}A^P(x)\ =\ A^M(x)+\partial_P\xi^MA^P(x)+\mathcal{O}(\xi^2)\\
&= A'^M(x)+\xi^P\partial_PA^M(x)+\mathcal{O}(\xi^2)\,,\\
\therefore\quad \delta_{\mathrm{L}}A^M(x) &= A'^M(x)-A^M(x)\ =\ -\partial_P\xi^MA^P(x)-\xi^P\partial_PA^M(x)\\
&= -\nabla^0_P\xi^MA^P(x)-\xi^P\nabla^0_PA^M(x)\,, && \text{(I.8c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{MN}(x) \ \to \ g'_{MN}(x') \ &= \ \frac{\partial x^P}{\partial x^M}\frac{\partial x^Q}{\partial x^N} g_{PQ}(x) \ = \ g_{MN}(x) - \partial_M \xi^P g_{PN} - \partial_N \xi^P g_{MP} + \mathcal{O}(\xi^2) \\
&= \ g'_{MN}(x) + \xi^P \partial_P g_{MN}(x) + \mathcal{O}(\xi^2) \,, \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} g_{MN}(x) \ &= \ g'_{MN}(x) - g_{MN}(x) \ = \ -\xi^P \partial_P g_{MN} - \partial_M \xi^P g_{PN} - \partial_N \xi^P g_{MP} \\
&= \ -\nabla^0_M \xi_N - \nabla^0_N \xi_M \,.
\end{aligned} \tag{I.8d}
$$

スカラー場 $\phi(x)$ とベクトル場 $A_M(x)$ の Lie 微分を微分形式で表現しておこう:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi \phi \ &= \ \cancel{\mathrm{d} i_\xi \phi} + i_\xi \mathrm{d}\phi \ = \ i_\xi (\partial_M \phi \, \mathrm{d}x^M) \\
&= \ \xi^M \partial_M \phi \ = \ -\delta_{\mathrm{L}} \phi \,,
\end{aligned} \tag{I.9a}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi A_1 \ &= \ \partial_N (\xi^M A_M) \, \mathrm{d}x^N + \xi^M \partial_M A_N \, \mathrm{d}x^N - \xi^N \partial_M A_N \, \mathrm{d}x^M \\
&= \ (\partial_N \xi^M) A_M \, \mathrm{d}x^N + \xi^M \partial_M A_N \, \mathrm{d}x^N \ = \ -\partial_{\mathrm{L}} A_M \, \mathrm{d}x^M \,.
\end{aligned} \tag{I.9b}
$$

I.4　特殊ホロノミー群多様体上の Killing スピノールの見方

表 10 の見方の例をいくつか挙げておこう。

- $4k = 4$ 次元 hyper-Kähler 空間もしくは Calabi-Yau 空間

  表 17 に従うと、Euclid 計量を持つ 4 次元空間上の既約スピノールは Weyl スピノール $\eta_\pm$ $((\eta_\pm)^* \sim \eta_\pm)$ である。hyper-Kähler 空間上の Killing スピノールは 2 種類の Weyl スピノールを用いて次の様になる:

$$
\eta^1_+ \ = \ \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} , \qquad \eta^2_- \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{I.10}
$$

  一般の 4 次元空間でのホロノミー群は $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ であるが、Killing スピノール (I.10) はそのうち $1 \times SU(2) \simeq Sp(1)$ 回転で不変である。そのため、この空間上では「$Sp(1)$ ホロノミー群」まで落ちている。

- $4k + 2 = 6$ 次元 Calabi-Yau 空間

  表 17 に従うと、Euclid 計量を持つ 6 次元空間上の既約スピノールは Weyl スピノール $\eta_\pm$ $((\eta_\pm)^* \sim \eta_\mp)$ である。Calabi-Yau 空間上の Killing スピノールは 2 種類の Weyl スピノールを用いて次の様になる:

$$
\eta^1_+ \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} , \qquad \eta^2_- \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} . \tag{I.11}
$$

一般の 6 次元空間でのホロノミー群は $SO(6) \simeq SU(4)$ であるが、Killing スピノール (I.11) はそのうち $SU(3) \subset SU(4)$ 回転で不変である。そのため、この空間上では「$SU(3)$ ホロノミー群」まで落ちている。

- $4k = 8$ 次元 Calabi-Yau 空間

表 17 に従うと、Euclid 計量を持つ 8 次元空間上の既約スピノールは Majorana-Weyl スピノール $\eta_\pm$ ($(\eta_\pm)^* \sim \eta_\pm$) である。Calabi-Yau 空間上の Killing スピノールは 2 種類の Majorana-Weyl スピノールを用いて次の様になる:

$$\eta_+^1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} , \qquad \eta_-^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{I.12}$$

一般の 8 次元空間でのホロノミー群は $SO(8)$ であるが、Killing スピノール (I.12) はそのうち $SO(6) \simeq SU(4) \subset SO(8)$ 回転で不変である。そのため、この空間上では「$SU(4)$ ホロノミー群」まで落ちている。

- $4k = 8$ 次元 hyper-Kähler 空間

表 17 に従うと、Euclid 計量を持つ 8 次元空間上の既約スピノールは Majorana-Weyl スピノール $\eta_\pm$ ($(\eta_\pm)^* \sim \eta_\pm$) である。hyper-Kähler 空間上の Killing スピノールは 2 種類の Majorana-Weyl スピノールを用いて次の様になる:

$$\eta_+^1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} , \qquad \eta_-^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{I.13}$$

一般の 8 次元空間でのホロノミー群は $SO(8)$ であるが、Killing スピノール (I.13) はそのうち $SO(5) \simeq Sp(2) \subset SO(8)$ 回転で不変である。そのため、この空間上では「$Sp(2)$ ホロノミー群」まで落ちている。

参考文献

[1] 藤井 保憲, "超重力理論入門," 産業図書.

[2] 谷井 義彰, "超重力理論 – 超弦理論における役割 –," SGC ライブラリ 82, 臨時別冊・数理科学, サイエンス社.

[3] J. Wess and J. Bagger, "*Supersymmetry and Supergravity*," Second Edition, Princeton University Press.

[4] S. P. Martin, "*A Supersymmetry Primer*," Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **21** (2010) 1 [hep-ph/9709356].

[5] 九後 汰一郎, "ゲージ場の量子論," 第 1 巻, 第 2 巻, 培風館.

[6] 太田 信義, "超弦理論・ブレイン・M 理論," シュプリンガー現代理論物理学シリーズ 1, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[7] 内山 龍雄, "一般相対性理論," 物理学選書 15, 裳華房.

[8] J. Polchinski, "*String Theory*," Volume 1 & 2, Cambridge University Press.

J. Polchinski (伊藤 克司, 小竹 悟, 松尾 泰 訳), "ストリング理論," 第 1 巻, 第 2 巻, 丸善出版.

[9] 今村 洋介, "超重力理論についてのノート."
http://www.th.phys.titech.ac.jp/~imamura/note/sugra.pdf
http://www.th.phys.titech.ac.jp/~imamura/note/sugra-part1-0911.pdf.

[10] T. H. Buscher, "*A Symmetry of the String Background Field Equations*," Phys. Lett. B **194** (1987) 59.

[11] T. Kimura and P. Yi, "*Comments on Heterotic Flux Compactifications*," JHEP **0607** (2006) 030 [hep-th/0605247].

[12] 木村 哲士, "*Note on the Quartic Effective Action of Heterotic String*."
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tetsuji.kimura/NOTEs/hetero-sugra060119.pdf

[13] 木村 哲士, "*Heterotic String with Neveu-Schwarz Fluxes*."
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tetsuji.kimura/NOTEs/heteroticflux.pdf

[14] M. B. Green and J. H. Schwarz, "*Anomaly Cancellation in Supersymmetric $D = 10$ Gauge Theory and Superstring Theory*," Phys. Lett. B **149** (1984) 117.

[15] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "*Superstring Theory*," Volume 1 & 2, Cambridge University Press.

[16] M. Kaku (太田信義 訳), "超弦理論とM理論," シュプリンガー・フェアラーク東京.

[17] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, "*String Theory and M-theory: A Modern Introduction*," Cambridge University Press.

[18] J. Polchinski, "*Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [hep-th/9510017].

[19] E. Witten, "*String Theory Dynamics in Various Dimensions*," Nucl. Phys. B **443** (1995) 85 [hep-th/9503124].

[20] J. H. Schwarz, "*The Power of M-theory*," Phys. Lett. B **367** (1996) 97 [hep-th/9510086].

[21] M. J. Duff (ed.), "*The World in Eleven-dimensions: Supergravity, Supermembranes and M-theory*," Studies in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, Institute of Physics.

[22] B. de Wit and J. Louis, "*Duality and Supersymmetry*," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **67** (1998) 117 [hep-th/9801132].

[23] M. Weidner, "*Gauged Supergravities in Various Spacetime Dimensions*," Fortsch. Phys. **55** (2007) 843 [hep-th/0702084].

[24] C. M. Hull and P. K. Townsend, "*Unity of Superstring Dualities*," Nucl. Phys. B **438** (1995) 109 [hep-th/9410167].

[25] P. G. O. Freund and M. A. Rubin, "*Dynamics of Dimensional Reduction*," Phys. Lett. B **97** (1980) 233.

[26] H. J. Kim, L. J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, "*The Mass Spectrum of Chiral $\mathcal{N} = 2$ $D = 10$ Supergravity on S^5*," Phys. Rev. D **32** (1985) 389.

[27] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, "*Kaluza-Klein Supergravity*," Phys. Rept. **130** (1986) 1.

[28] B. de Wit, "*Supergravity*," Lecture Notes Les Houches Summer School: Session 76: Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics: Gravity, Gauge Theory and Strings (2001), [hep-th/0212245].

[29] J. P. Gauntlett and O. Varela, "*Consistent Kaluza-Klein Reductions for General Supersymmetric AdS Solutions*," Phys. Rev. D **76** (2007) 126007 [arXiv:0707.2315].

[30] J. P. Gauntlett, S. Kim, O. Varela and D. Waldram, "*Consistent Supersymmetric Kaluza-Klein Truncations with Massive Modes*," JHEP **0904** (2009) 102 [arXiv:0901.0676].

[31] J. M. Maldacena, "*The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*," Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231] [hep-th/9711200].

[32] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "*Large N Field Theories, String Theory and Gravity*," Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

[33] M. Berger, "*Sur les Groupes d'Holonomie Homogènes de Variétés à Connexion Affine et des Variétés Riemanniennes*," Bulletin de la Société Mathématique de France, **83** (1955) 279–330.

[34] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, "*Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*," Phys. Rept. **66** (1980) 213.

[35] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, "*Vacuum Configurations for Superstrings*," Nucl. Phys. B **258** (1985) 46.

[36] P. Candelas and X. C. de la Ossa, "*Comments on Conifolds*," Nucl. Phys. B **342** (1990) 246.

[37] B. R. Greene, "*String Theory on Calabi-Yau Manifolds*," Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96): Fields, Strings, and Duality, [hep-th/9702155].

[38] B. R. Greene, D. R. Morrison and A. Strominger, "*Black Hole Condensation and the Unification of String Vacua*," Nucl. Phys. B **451** (1995) 109 [hep-th/9504145].

[39] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, "*Supergravity and A Confining Gauge Theory: Duality Cascades and χSB Resolution of Naked Singularities*," JHEP **0008** (2000) 052 [hep-th/0007191].

[40] S. B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, "*Hierarchies from Fluxes in String Compactifications*," Phys. Rev. D **66** (2002) 106006 [hep-th/0105097].

[41] H. Ooguri and C. Vafa, "*Worldsheet Derivation of A Large N Duality*," Nucl. Phys. B **641** (2002) 3 [hep-th/0205297].

[42] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü and C. N. Pope, "*Ricci-flat Metrics, Harmonic Forms and Brane Resolutions*," Commun. Math. Phys. **232** (2003) 457 [hep-th/0012011].

[43] K. Higashijima, T. Kimura and M. Nitta, "*Supersymmetric Nonlinear Sigma Models on Ricci-flat Kähler Manifolds with $O(N)$ Symmetry*," Phys. Lett. B **515** (2001) 421 [hep-th/0104184].

[44] K. Higashijima, T. Kimura and M. Nitta, "*Gauge Theoretical Construction of Non-compact Calabi-Yau Manifolds*," Annals Phys. **296** (2002) 347 [hep-th/0110216].

[45] K. Higashijima, T. Kimura and M. Nitta, "*Calabi-Yau Manifolds of Cohomogeneity One as Complex Line Bundles*," Nucl. Phys. B **645** (2002) 438 [hep-th/0202064].

[46] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü and C. N. Pope, "*Hyper-Kähler Calabi Metrics, L^2 Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and AdS_4/CFT_3 Correspondence*," Nucl. Phys. B **617** (2001) 151 [hep-th/0102185].

[47] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü and C. N. Pope, "*Cohomogeneity One Manifolds of $Spin(7)$ and G_2 Holonomy*," Phys. Rev. D **65** (2002) 106004 [hep-th/0108245].

[48] Y. Konishi and M. Naka, "*Coset Construction of $Spin(7)$, G_2 Gravitational Instantons*," Class. Quant. Grav. **18** (2001) 5521 [hep-th/0104208].

[49] H. Kanno and Y. Yasui, "*On $Spin(7)$ Holonomy Metric Based on $SU(3)/U(1)$*," J. Geom. Phys. **43** (2002) 293 [hep-th/0108226].

[50] H. Kanno and Y. Yasui, "*On $Spin(7)$ Holonomy Metric Based on $SU(3)/U(1)$. 2*," J. Geom. Phys. **43** (2002) 310 [hep-th/0111198].

[51] T. Hübsch, "*Calabi-Yau Manifolds: A Bestiary for Physicists*," World Scientific.

[52] D. D. Joyce, "*Compact Manifolds with Special Holonomy*," Oxford University Press.

[53] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, "*Mirror Symmetry*," Clay Mathematics Monographs vol. 1 (2003), American Mathematical Society.

[54] Y. H. He, "*Calabi-Yau Geometries: Algorithms, Databases, and Physics*," Int. J. Mod. Phys. A **28** (2013) 1330032 [arXiv:1308.0186].

[55] N. E. Mavromatos, "*A Note on the Atiyah-singer Index Theorem for Manifolds With Totally Antisymmetric H Torsion*," J. Phys. A **21** (1988) 2279.

[56] J. -M. Bismut, "*A Local Index Theorem for Non-Kähler Manifolds*," Math. Ann. **284** (1989) 681.

[57] P. Candelas, "*Lectures on Complex Manifolds*," Superstrings '87, Trieste (1987).

[58] 中原 幹夫, "理論物理学のための幾何学とトポロジー," 第 1 巻, 第 2 巻, ピアソン・エデュケーション.

M. Nakahara, "*Geometry, Topology and Physics*," Second Edition, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics.

[59] P. Candelas and X. de la Ossa, "*Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds*," Nucl. Phys. B **355** (1991) 455.

[60] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green and L. Parkes, "*A Pair of Calabi-Yau Manifolds as An Exactly Soluble Superconformal Theory*," Nucl. Phys. B **359** (1991) 21.

[61] 秦泉寺 雅夫, "数物系のためのミラー対称性入門," SGC ライブラリ 109, 臨時別冊・数理科学, サイエンス社.

[62] T. W. Grimm, "*The Effective Action of Type II Calabi-Yau Orientifolds*," Fortsch. Phys. **53** (2005) 1179 [hep-th/0507153].

[63] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fré and T. Magri, "*$\mathcal{N}=2$ Supergravity and $\mathcal{N}=2$ Super Yang-Mills Theory on General Scalar Manifolds: Symplectic Covariance, Gaugings and the Momentum Map*," J. Geom. Phys. **23** (1997) 111 [hep-th/9605032].

[64] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, "*Supergravity*," Cambridge University Press.

A. Van Proeyen, "*$\mathcal{N}=2$ Supergravity in $d=4,5,6$ and Its Matter Couplings*," the extended version of Lectures given during the semester "Supergravity, Superstrings and M-theory" at Institut Henri Poincaré, Paris, November 2000.
http://itf.fys.kuleuven.be/~toine/LectParis.pdf

[65] L. B. Anderson, J. Gray, D. Grayson, Y. H. He and A. Lukas, "*Yukawa Couplings in Heterotic Compactification*," Commun. Math. Phys. **297** (2010) 95 [arXiv:0904.2186].

[66] L. B. Anderson, J. Gray, Y. H. He and A. Lukas, "*Exploring Positive Monad Bundles and A New Heterotic Standard Model*," JHEP **1002** (2010) 054 [arXiv:0911.1569].

[67] Y. H. He, S. J. Lee, A. Lukas and C. Sun, "*Heterotic Model Building: 16 Special Manifolds*," JHEP **1406** (2014) 077 [arXiv:1309.0223].

[68] A. Constantin, "*Heterotic Line Bundle Models on Smooth Calabi-Yau Manifolds*," String Phenomenology 2014, July 7-11, Trieste.
http://stringpheno2014.ictp.it/parallels/monday/Heterotic(D)/Constantin.pdf

[69] A. Strominger, "*Superstrings with Torsion*," Nucl. Phys. B **274** (1986) 253.

[70] S. Chiossi and S. Salamon, "*The Intrinsic Torsion of $SU(3)$ and G_2 Structures*," Differential Geometry, Valencia 2001, World Sci. Publishing (2002) 115 [math/0202282].

[71] J. P. Gauntlett, D. Martelli and D. Waldram, "*Superstrings with Intrinsic Torsion*," Phys. Rev. D **69** (2004) 086002 [hep-th/0302158].

[72] K. Dasgupta, G. Rajesh and S. Sethi, "*M-theory, Orientifolds and G-flux*," JHEP **9908** (1999) 023 [hep-th/9908088].

[73] J. P. Gauntlett, D. Martelli, S. Pakis and D. Waldram, "*G-structures and Wrapped NS5-branes*," Commun. Math. Phys. **247** (2004) 421 [hep-th/0205050].

[74] K. Becker and K. Dasgupta, "*Heterotic Strings with Torsion*," JHEP **0211** (2002) 006 [hep-th/0209077].

[75] G. Lopes Cardoso, G. Curio, G. Dall'Agata, D. Lüst, P. Manousselis and G. Zoupanos, "*NonKähler String Backgrounds and Their Five Torsion Classes*," Nucl. Phys. B **652** (2003) 5 [hep-th/0211118].

[76] S. Kachru, M. B. Schulz, P. K. Tripathy and S. P. Trivedi, "*New Supersymmetric String Compactifications*," JHEP **0303** (2003) 061 [hep-th/0211182].

[77] K. Becker, M. Becker, K. Dasgupta and P. S. Green, "*Compactifications of Heterotic Theory on NonKähler Complex Manifolds. 1*," JHEP **0304** (2003) 007 [hep-th/0301161].

[78] G. Lopes Cardoso, G. Curio, G. Dall'Agata and D. Lüst, "*BPS Action and Superpotential for Heterotic String Compactifications with Fluxes*," JHEP **0310** (2003) 004 [hep-th/0306088].

[79] D. Martelli and J. Sparks, "*G-structures, Fluxes and Calibrations in M-theory*," Phys. Rev. D **68** (2003) 085014 [hep-th/0306225].

[80] S. Fidanza, R. Minasian and A. Tomasiello, "*Mirror Symmetric $SU(3)$ Structure Manifolds with NS-fluxes*," Commun. Math. Phys. **254** (2005) 401 [hep-th/0311122].

[81] S. Gurrieri, A. Lukas and A. Micu, "*Heterotic on Half-flat*," Phys. Rev. D **70** (2004) 126009 [hep-th/0408121].

[82] D. Lüst and D. Tsimpis, "*Supersymmetric AdS_4 Compactifications of IIA Supergravity*," JHEP **0502** (2005) 027 [hep-th/0412250].

[83] K. Becker, M. Becker, J. X. Fu, L. S. Tseng and S. T. Yau, "*Anomaly Cancellation and Smooth Non-Kähler Solutions in Heterotic String Theory*," Nucl. Phys. B **751** (2006) 108 [hep-th/0604137].

[84] T. Kimura, "*Index Theorems on Torsional Geometries*," JHEP **0708** (2007) 048 [arXiv:0704.2111].

[85] T. Kimura and S. Mizoguchi, "*Chiral Zero Modes on Intersecting Heterotic 5-branes*," Class. Quant. Grav. **27** (2010) 185023 [arXiv:0905.2185].

[86] T. Kimura and S. Mizoguchi, "*Chiral Generations on Intersecting 5-branes in Heterotic String Theory*," JHEP **1004** (2010) 028 [arXiv:0912.1334].

[87] N. J. Hitchin, "*Generalized Calabi-Yau Manifolds*," Quart.J.Math.Oxford Ser.54 (2003) 281 [math/0209099].

[88] M. Gualtieri, "*Generalized Complex Geometry*," Commun. Math. Phys. **331** (2014) 297 [math/0401221].

[89] S. Gurrieri, J. Louis, A. Micu and D. Waldram, "*Mirror Symmetry in Generalized Calabi-Yau Compactifications*," Nucl. Phys. B **654** (2003) 61 [hep-th/0211102].

[90] U. Lindström, R. Minasian, A. Tomasiello and M. Zabzine, "*Generalized Complex Manifolds and Supersymmetry*," Commun. Math. Phys. **257** (2005) 235 [hep-th/0405085].

[91] C. M. Hull, "*A Geometry for Non-geometric String Backgrounds*," JHEP **0510** (2005) 065 [hep-th/0406102].

[92] M. Graña, R. Minasian, M. Petrini and A. Tomasiello, "*Supersymmetric Backgrounds from Generalized Calabi-Yau Manifolds*," JHEP **0408** (2004) 046 [hep-th/0406137].

[93] U. Lindström, M. Roček, R. von Unge and M. Zabzine, "*Generalized Kähler Geometry and Manifest $\mathcal{N}=(2,2)$ Supersymmetric Nonlinear Sigma-models*," JHEP **0507** (2005) 067 [hep-th/0411186].

[94] T. W. Grimm and J. Louis, "*The Effective Action of Type IIA Calabi-Yau Orientifolds*," Nucl. Phys. B **718** (2005) 153 [hep-th/0412277].

[95] M. Graña, R. Minasian, M. Petrini and A. Tomasiello, "*Generalized Structures of $\mathcal{N}=1$ Vacua*," JHEP **0511** (2005) 020 [hep-th/0505212].

[96] M. Graña, J. Louis and D. Waldram, "*Hitchin Functionals in $N=2$ supergravity*," JHEP **0601** (2006) 008 [hep-th/0505264].

[97] P. Koerber, "*Stable D-branes, Calibrations and Generalized Calabi-Yau Geometry*," JHEP **0508** (2005) 099 [hep-th/0506154].

[98] J. Shelton, W. Taylor and B. Wecht, "*Nongeometric Flux Compactifications*," JHEP **0510** (2005) 085 [hep-th/0508133].

[99] L. Martucci, "*D-branes on General $\mathcal{N} = 1$ Backgrounds: Superpotentials and D-terms*," JHEP **0606** (2006) 033 [hep-th/0602129].

[100] M. Graña, R. Minasian, M. Petrini and A. Tomasiello, "*A Scan for New $N = 1$ Vacua on Twisted Tori*," JHEP **0705** (2007) 031 [hep-th/0609124].

[101] M. Graña, J. Louis and D. Waldram, "*$SU(3) \times SU(3)$ Compactification and Mirror Duals of Magnetic Fluxes*," JHEP **0704** (2007) 101 [hep-th/0612237].

[102] R. D'Auria, S. Ferrara and M. Trigiante, "*On the Supergravity Formulation of Mirror Symmetry in Generalized Calabi-Yau Manifolds*," Nucl. Phys. B **780** (2007) 28 [hep-th/0701247].

[103] P. Koerber and L. Martucci, "*From Ten to Four and Back Again: How to Generalize the Geometry*," JHEP **0708** (2007) 059 [arXiv:0707.1038].

[104] D. Cassani, "*Reducing Democratic Type II Supergravity on $SU(3) \times SU(3)$ Structures*," JHEP **0806** (2008) 027 [arXiv:0804.0595].

[105] M. Graña, R. Minasian, M. Petrini and D. Waldram, "*T-duality, Generalized Geometry and Non-geometric Backgrounds*," JHEP **0904** (2009) 075 [arXiv:0807.4527].

[106] D. Cassani, S. Ferrara, A. Marrani, J. F. Morales and H. Samtleben, "*A Special Road to AdS Vacua*," JHEP **1002** (2010) 027 [arXiv:0911.2708].

[107] M. Graña, "*Flux Compactifications in String Theory: A Comprehensive Review*," Phys. Rept. **423** (2006) 91 [hep-th/0509003].

[108] M. R. Douglas and S. Kachru, "*Flux Compactification*," Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 733 [hep-th/0610102].

[109] B. Wecht, "*Lectures on Nongeometric Flux Compactifications*," Class. Quant. Grav. **24** (2007) S773 [arXiv:0708.3984].

[110] P. Koerber, "*Lectures on Generalized Complex Geometry for Physicists*," Fortsch. Phys. **59** (2011) 169 [arXiv:1006.1536].

[111] J. Louis (org.), "*Workshop on Generalized Geometry and Flux Compactifications*," Workshop at DESY, Hamburg, February 19 – March 1, 2007. http://www.desy.de/uni-th/stringth/ggfl/ggflhome.html

[112] T. Kohno, A. Tomasiello and M. Verbitsky (org.), "*Supersymmetry in Complex Geometry*," Workshop at IPMU, January 4–9, 2009. http://member.ipmu.jp/misha.verbitsky/GK/index.html

[113] C. M. Hull, "*Generalised Geometry for M-theory*," JHEP **0707** (2007) 079 [hep-th/0701203].

[114] P. P. Pacheco and D. Waldram, "*M-theory, Exceptional Generalised Geometry and Superpotentials*," JHEP **0809** (2008) 123 [arXiv:0804.1362].

[115] M. Graña, J. Louis, A. Sim and D. Waldram, "*$E_{7(7)}$ Formulation of $N = 2$ Backgrounds*," JHEP **0907** (2009) 104 [arXiv:0904.2333].

[116] H. Triendl and J. Louis, "*Type II Compactifications on Manifolds with $SU(2) \times SU(2)$ Structure*," JHEP **0907** (2009) 080 [arXiv:0904.2993].

[117] D. S. Berman and M. J. Perry, "*Generalized Geometry and M-theory*," JHEP **1106** (2011) 074 [arXiv:1008.1763].

[118] A. Coimbra, C. Strickland-Constable and D. Waldram, "*$E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$ Generalised Geometry, Connections and M-theory*," JHEP **1402** (2014) 054 [arXiv:1112.3989].

[119] A. Dabholkar and C. M. Hull, "*Generalised T-duality and Non-geometric Backgrounds*," JHEP **0605** (2006) 009 [hep-th/0512005].

[120] C. M. Hull, "*Doubled Geometry and T-folds*," JHEP **0707** (2007) 080 [hep-th/0605149].

[121] J. Maharana and J. H. Schwarz, "*Noncompact Symmetries in String Theory*," Nucl. Phys. B **390** (1993) 3 [hep-th/9207016].

[122] N. Kaloper and R. C. Myers, "*The $O(dd)$ Story of Massive Supergravity*," JHEP **9905** (1999) 010 [hep-th/9901045].

[123] G. Dall'Agata, N. Prezas, H. Samtleben and M. Trigiante, "*Gauged Supergravities from Twisted Doubled Tori and Non-Geometric String Backgrounds*," Nucl. Phys. B **799** (2008) 80 [arXiv:0712.1026].

[124] 木村 哲士, "*Supergravity and Doubled Geometry,*" 基研研究会「量子場理論と弦理論の発展」, 京都大学基礎物理学研究所, 2008 年 7 月 28 日–8 月 1 日.
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~qft.web/2008/index.html

[125] 木村 哲士, "*Generalized/doubled/nongeometric String Backgrounds,*" 大阪大学インフォーマル勉強会, 2008 年 8 月 5 日.
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tetsuji.kimura/NOTEs/2008/Osaka080805.pdf

[126] D. S. Berman and D. C. Thompson, "*Duality Symmetric String and M-theory,*" [arXiv:1306.2643].

[127] C. M. Hull and R. A. Reid-Edwards, "*Flux Compactifications of String Theory on Twisted Tori,*" Fortsch. Phys. **57** (2009) 862 [hep-th/0503114].

[128] C. M. Hull and R. A. Reid-Edwards, "*Flux Compactifications of M-theory on Twisted Tori,*" JHEP **0610** (2006) 086 [hep-th/0603094].

[129] C. M. Hull and R. A. Reid-Edwards, "*Gauge Symmetry, T-duality and Doubled Geometry,*" JHEP **0808** (2008) 043 [arXiv:0711.4818].

[130] C. M. Hull and R. A. Reid-Edwards, "*Non-geometric Backgrounds, Doubled Geometry and Generalised T-duality,*" JHEP **0909** (2009) 014 [arXiv:0902.4032].

[131] C. M. Hull and B. Zwiebach, "*Double Field Theory,*" JHEP **0909** (2009) 099 [arXiv:0904.4664].

[132] B. Zwiebach, "*Double Field Theory, T-duality, and Courant Brackets,*" Lect. Notes Phys. **851** (2012) 265 [arXiv:1109.1782].

[133] G. Aldazabal, D. Marqués and C. Núñez, "*Double Field Theory: A Pedagogical Review,*" Class. Quant. Grav. **30** (2013) 163001 [arXiv:1305.1907].

[134] O. Hohm, S. K. Kwak and B. Zwiebach, "*Double Field Theory of Type II Strings,*" JHEP **1109** (2011) 013 [arXiv:1107.0008].

[135] C. Albertsson, T. Kimura and R. A. Reid-Edwards, "*D-branes and Doubled Geometry,*" JHEP **0904** (2009) 113 [arXiv:0806.1783].

[136] O. Hohm and H. Samtleben, "*Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ Covariant Form of M-theory and Type IIB,*" Phys. Rev. D **89** (2014) 066016 [arXiv:1312.0614].

[137] O. Hohm and H. Samtleben, "*Exceptional Field Theory II: $E_{7(7)}$*," Phys. Rev. D **89** (2014) 066017 [arXiv:1312.4542].

[138] J. de Boer and M. Shigemori, "*Exotic Branes and Non-geometric Backgrounds*," Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 251603 [arXiv:1004.2521].

[139] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov and E. Rabinovici, "*Algebraic Aspects of Matrix Theory on T^d*," Nucl. Phys. B **509** (1998) 122 [hep-th/9707217].

[140] M. Blau and M. O'Loughlin, "*Aspects of U-duality in Matrix Theory*," Nucl. Phys. B **525** (1998) 182 [hep-th/9712047].

[141] N. A. Obers and B. Pioline, "*U-duality and M-theory*," Phys. Rept. **318** (1999) 113 [hep-th/9809039].

[142] T. Kikuchi, T. Okada and Y. Sakatani, "*Rotating String in Doubled Geometry with Generalized Isometries*," Phys. Rev. D **86** (2012) 046001 [arXiv:1205.5549].

[143] J. de Boer and M. Shigemori, "*Exotic Branes in String Theory*," Phys. Rept. **532** (2013) 65 [arXiv:1209.6056].

[144] T. Kimura and S. Sasaki, "*Gauged Linear Sigma Model for Exotic Five-brane*," Nucl. Phys. B **876** (2013) 493 [arXiv:1304.4061].

[145] T. Kimura and S. Sasaki, "*Worldsheet Instanton Corrections to 5^2_2-brane Geometry*," JHEP **1308** (2013) 126 [arXiv:1305.4439].

[146] T. Kimura and S. Sasaki, "*Worldsheet Description of Exotic Five-brane with Two Gauged Isometries*," JHEP **1403** (2014) 128 [arXiv:1310.6163].

[147] T. Kimura and M. Yata, "*T-duality Transformation of Gauged Linear Sigma Model with F-term*," Nucl. Phys. B **887** (2014) 136 [arXiv:1406.0087].

[148] E. Witten, "*Phases of $\mathcal{N} = 2$ Theories in Two-dimensions*," Nucl. Phys. B **403** (1993) 159 [hep-th/9301042].

[149] K. Hori and C. Vafa, "*Mirror Symmetry*," [hep-th/0002222].

[150] A. Chatzistavrakidis, F. F. Gautason, G. Moutsopoulos and M. Zagermann, "*Effective Actions of Non-geometric Fivebranes*," Phys. Rev. D **89** (2014) 066004 [arXiv:1309.2653].

[151] D. Andriot and A. Betz, "*NS-branes, Source Corrected Bianchi Identities, and More on Backgrounds with Non-geometric Fluxes*," JHEP **1407** (2014) 059 [arXiv:1402.5972].

[152] T. Kimura, S. Sasaki and M. Yata, "*World-volume Effective Actions of Exotic Five-branes*," JHEP **1407** (2014) 127 [arXiv:1404.5442].

[153] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, "*On Lagrangians and Gaugings of Maximal Supergravities*," Nucl. Phys. B **655** (2003) 93 [hep-th/0212239].

[154] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, "*Magnetic Charges in Local Field Theory*," JHEP **0509** (2005) 016 [hep-th/0507289].

[155] B. de Wit, H. Nicolai and H. Samtleben, "*Gauged Supergravities, Tensor Hierarchies, and M-theory*," JHEP **0802** (2008) 044 [arXiv:0801.1294].

[156] B. de Wit and H. Samtleben, "*The End of the p-form Hierarchy*," JHEP **0808** (2008) 015 [arXiv:0805.4767].

[157] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, "*The Maximal $D = 5$ Supergravities*," Nucl. Phys. B **716** (2005) 215 [hep-th/0412173].

[158] H. Samtleben and M. Weidner, "*The Maximal $D = 7$ Supergravities*," Nucl. Phys. B **725** (2005) 383 [hep-th/0506237].

[159] J. Schön and M. Weidner, "*Gauged $\mathcal{N} = 4$ Supergravities*," JHEP **0605** (2006) 034 [hep-th/0602024].

[160] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, "*The Maximal $D = 4$ Supergravities*," JHEP **0706** (2007) 049 [arXiv:0705.2101].

[161] E. Bergshoeff, H. Samtleben and E. Sezgin, "*The Gaugings of Maximal $D = 6$ Supergravity*," JHEP **0803** (2008) 068 [arXiv:0712.4277].

[162] E. A. Bergshoeff, M. de Roo, O. Hohm and D. Roest, "*Multiple Membranes from Gauged Supergravity*," JHEP **0808** (2008) 091 [arXiv:0806.2584].

[163] H. Samtleben, "*Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications*," Class. Quant. Grav. **25** (2008) 214002 [arXiv:0808.4076].

[164] B. de Wit and M. van Zalk, "*Electric and Magnetic Charges in* $\mathcal{N} = 2$ *Conformal Supergravity Theories*," JHEP **1110** (2011) 050 [arXiv:1107.3305].

[165] 木村 哲士, "*4D* $\mathcal{N} = 2$ *Conformal Supergravity*."
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tetsuji.kimura/NOTEs/SCA_UU2.pdf

[166] 木村 哲士, "*Embedding Tensors, Dualities, and Auxiliary Fields in 4D* $\mathcal{N} = 2$ *Supergravity*," 基研研究会「場の理論と弦理論」, 京都大学基礎物理学研究所, 2012 年 7 月 23 日–7 月 27 日.
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~qft.web/2012/index.html

[167] E. A. Bergshoeff and F. Riccioni, "*String Solitons and T-duality*," JHEP **1105** (2011) 131 [arXiv:1102.0934].

[168] E. A. Bergshoeff and F. Riccioni, "*Branes and Wrapping Rules*," Phys. Lett. B **704** (2011) 367 [arXiv:1108.5067].

[169] E. A. Bergshoeff, T. Ortín and F. Riccioni, "*Defect Branes*," Nucl. Phys. B **856** (2012) 210 [arXiv:1109.4484].

[170] E. A. Bergshoeff, A. Kleinschmidt and F. Riccioni, "*Supersymmetric Domain Walls*," Phys. Rev. D **86** (2012) 085043 [arXiv:1206.5697].

[171] E. A. Bergshoeff and F. Riccioni, "*Heterotic Wrapping Rules*," JHEP **1301** (2013) 005 [arXiv:1210.1422].

[172] 木村 哲士, "*Three Exotica*," 研究会「エキゾチック時空幾何とその応用」理化学研究所仁科センター, 2013 年 2 月 23 日.
http://ribf.riken.jp/~tkimura/files/EG/TetsujiKimura.pdf

[173] 木村 哲士, 重森 正樹, 高柳 匡 (org.), "*Exotic Structures of Spacetime*," モレキュール型国際研究会, 京都大学基礎物理学研究所, 2014 年 3 月 10 日–21 日.
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ws/2013/exoticstr.ws/

[174] 九後 汰一郎, "*Note on the* $O(s,t)$ γ*-matrix*."
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~taichiro.kugo/mytxt/gamma.pdf

[175] K. Hristov, H. Looyestijn and S. Vandoren, "*Maximally Supersymmetric Solutions of* $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ *Gauged Supergravity*," JHEP **0911** (2009) 115 [arXiv:0909.1743].

[176] B. de Wit and H. Nicolai, "$\mathcal{N} = 8$ *Supergravity*," Nucl. Phys. B **208** (1982) 323.

[177] B. de Wit, "*Introduction to Supergravity*," Lectures given at 1984 Spring School on Supersymmetry and Supergravity, Trieste, Italy, April 4-14, 1984.

[178] L. D. ランダウ, E. M. リフシッツ, "場の古典論," 理論物理学教程, 東京図書.
L. D. Landau and E. M. Lifschitz, "*The Classical Theory of Fields*," Elsevier Science.
https://archive.org/details/TheClassicalTheoryOfFields

[179] E. A. Bergshoeff and M. de Roo, "*The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry*," Nucl. Phys. B **328** (1989) 439.

[180] M. de Roo, H. Suelmann and A. Wiedemann, "*The Supersymmetric Effective Action of the Heterotic String in Ten-dimensions*," Nucl. Phys. B **405** (1993) 326 [hep-th/9210099].

[181] E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortín, D. Roest and A. Van Proeyen, "*New Formulations of* $D = 10$ *Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls*," Class. Quant. Grav. **18** (2001) 3359 [hep-th/0103233].

[182] L. J. Romans, "*Massive* $N = 2a$ *Supergravity in Ten-dimensions*," Phys. Lett. B **169** (1986) 374.