

# 卒業研究：初期宇宙の観測量について

Hiromasa Nakatsuka

June 1, 2017

## Abstract

本卒論では、インフレーションによるゆらぎが現在の物理量に及ぼす影響を解析した。初期宇宙の物理現象を理解するためには、初期宇宙で作られたゆらぎを知るだけでなく、そのゆらぎがどのように時間発展して観測されるかを調べる必要がある。まずインフレーションで作られた量子ゆらぎがどのように宇宙背景放射 (CMB) のスペクトル構造に効くかを半解析的に計算した。更に CMB では見ることができない宇宙の晴れ上がり以前の宇宙を直接観測することが可能な背景重力波 (Stochastic gravitational wave background: SGWB) について、現状での制限を調べた。またインフレーションの詳細について更なる情報を得ることができるゆらぎの non-gaussianity を計算した。

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	定義	8
<b>I</b>	<b>初期宇宙論の基礎</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>一様等方宇宙</b>	<b>8</b>
2.1	FLRW メトリック	8
2.2	フリードマン方程式	9
2.3	連続方程式	9
2.4	加速膨張と状態方程式	10
2.5	密度パラメータ	10
2.6	各優勢期におけるスケールの時間依存性	10
2.7	$\Lambda$ CDM 模型とは	11
<b>3</b>	<b>宇宙論的摂動論</b>	<b>11</b>
3.1	テンソル摂動の分解	11
3.2	metric の摂動	12
3.3	metric のゲージ変換	13
3.4	Einstein Tensor の摂動	14
3.5	完全流体の摂動	14
3.6	完全流体のゲージ変換	15
3.7	スカラー場の摂動	16
3.8	スカラー場のゲージ変換	17
3.9	ゲージ不変量	17

3.10	ゲージ固定	18
3.11	完全流体の摂動方程式	19
3.12	スカラー場の摂動方程式	20
3.13	共動曲率ゆらぎとメトリックの等式	21
3.14	エントロピー摂動と音速	21
<b>4</b>	<b>インフレーション理論</b>	<b>22</b>
4.1	インフレーションの必要性と e-foldings	22
4.2	インフレーションモデルの一般論	23
4.3	カオティックインフレーション	24
4.4	ナチュラルインフレーション	25
4.5	ハイブリッドインフレーション	26
4.6	Kinetic Inflation	26
4.7	インフレーション中のスカラー摂動方程式	27
4.8	スカラー摂動の量子化	28
4.9	作用の高次項	30
4.10	スカラー摂動のパワースペクトル	31
4.11	テンソル摂動の場合	32
4.12	Tensor-Scalar ratio	33
4.13	観測値との比較	33
4.14	field value による分類	34
<b>5</b>	<b>インフレーション終了後の物理</b>	<b>35</b>
5.1	再加熱の計算	35
5.2	preheating の存在	37
<b>6</b>	<b>ビッグバン元素合成</b>	<b>37</b>
6.1	脱結合	38
6.2	BBN 解析からの制限	38
6.3	Sakharov condition	38
6.4	スファレロン効果	39
<b>II</b>	<b>スカラー揺らぎの計算</b>	<b>39</b>
<b>7</b>	<b>CMB 揺らぎの支配方程式</b>	<b>39</b>
7.1	再結合の評価	39
7.2	晴れ上がりの評価	40
7.3	局所熱平衡での諸量	40
7.4	相対論的摂動ボルツマン方程式	41
7.5	電子雲中の光子の温度ゆらぎの方程式	42
7.6	光の温度分布の多重極展開	46
7.7	CMB と光の揺らぎの関係	47
7.8	視線方向積分を用いた現在の温度揺らぎ	48
7.9	温度揺らぎの角度パワースペクトル	50
7.10	物質場摂動の時間発展方程式	52
7.11	重力摂動の時間発展方程式	53

<b>8</b>	<b>CMB ゆらぎの解析的な特徴</b>	<b>53</b>
8.1	輻射優勢期での長波長密度揺らぎの凍結	54
8.2	密度揺らぎの初期条件の決定	54
8.3	速度揺らぎの初期条件の決定	54
8.4	非等方ストレスの評価	55
8.5	輻射優勢期での重力ポテンシャル $\Phi$ の短波長ゆらぎの減衰	56
8.6	輻射優勢期から物質優勢期への移行	56
8.7	物質優勢期のゆらぎの凍結	56
8.8	物質優勢期での短波長ゆらぎの増大	57
8.9	重力ポテンシャル $\Phi$ の時間発展	58
8.10	曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ の凍結	59
8.11	曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ と重力ポテンシャル $\Phi$ の関係	59
8.12	バリオン音響ゆらぎ	59
8.13	シルク減衰	61
8.14	大スケールの $C_l (l \leq 20)$	62
8.15	小スケールの $C_l (l \gg 1)$	63
8.16	宇宙パラメータへの制限	63
<b>9</b>	<b>長波長モードの凍結について</b>	<b>63</b>
9.1	メトリックのゲージ変換の読み替え	64
9.2	スカラー量のゲージ変換	65
9.3	ゲージ固定の不定性	66
9.4	解の構成方法の方針	67
9.5	変換の構成	67
9.6	一様解の拡張	69
9.7	一様解の別導出	70
9.8	波数依存性のユニバーサリティー	71
<b>III</b>	<b>B-mode 偏光</b>	<b>71</b>
<b>10</b>	<b>偏光付きボルツマン方程式の構成</b>	<b>71</b>
10.1	1次での表示	72
10.2	偏光付きボルツマン方程式運動項	73
10.3	偏光付きボルツマン方程式衝突項	74
10.4	熱平衡での衝突項	76
10.5	ボルツマン方程式の表式の確認	76
10.6	光の微小摂動	77
10.7	プラズマ流速の取扱	79
<b>11</b>	<b>テンソルゆらぎの支配方程式</b>	<b>80</b>
11.1	揺らぎの確率変数 $\beta_q$	80
11.2	テンソルモードの偏光	81
11.3	メトリックの支配方程式	81
11.4	光の支配方程式	82
11.5	光の部分波展開	86
11.6	光の非等方ストレステンソル	86

11.7	光の視線方向積分 . . . . .	87
11.8	ニュートリノの支配方程式 . . . . .	87
11.9	ニュートリノの部分波展開 . . . . .	88
11.10	ニュートリノの非等方ストレステンソル . . . . .	89
11.11	ニュートリノの視線方向積分 . . . . .	89
11.12	支配方程式のまとめ . . . . .	89
<b>12</b>	<b>テンソルモードの解析解</b>	<b>90</b>
12.1	メトリックの後期時間発展 . . . . .	90
12.2	非等方ストレステンソルの効果 . . . . .	92
<b>13</b>	<b>B-mode の観測量</b>	<b>92</b>
13.1	温度揺らぎとエネルギー揺らぎ . . . . .	92
13.2	ストークス・パラメーター . . . . .	92
13.3	ストークスパラメータの展開 . . . . .	93
13.4	ストークスパラメータの相関関数 . . . . .	95
<b>14</b>	<b><math>C_{BBl}</math> のスペクトル</b>	<b>96</b>
14.1	$a_{P,lm}$ の計算 . . . . .	96
14.2	$a_{E/B,lm}$ の計算 . . . . .	97
14.3	$C_{BB,l}$ の計算 . . . . .	97
14.4	$C_{BB,l}$ の近似表式 . . . . .	98
14.5	B-mode から見える重力波 . . . . .	98
<b>15</b>	<b>インフレーションと観測との比較</b>	<b>98</b>
15.1	宇宙論パラメータへの制限 . . . . .	98
15.2	B-mode の観測 . . . . .	100
<b>IV</b>	<b>non-Gaussianity</b>	<b>100</b>
<b>16</b>	<b>ADM 分解</b>	<b>101</b>
16.1	メトリックの基本的計算 . . . . .	101
16.2	作用の計算 . . . . .	104
<b>17</b>	<b>single canonical scalar inflation の作用の高次展開</b>	<b>104</b>
17.1	0 次の解 . . . . .	105
17.2	ADM 分解での高次展開 . . . . .	105
17.3	微小量の運動項 . . . . .	111
17.4	3 次相互作用項の簡単化の手順 . . . . .	112
<b>18</b>	<b>in-in formalism の定式化</b>	<b>113</b>
18.1	明示的に時間に依存するハミルトニアン量子化 . . . . .	113
18.2	期待値の計算 . . . . .	114
18.3	ファインマンダイアグラムの定義 . . . . .	115

<b>19</b>	$\zeta^3 - bispectrum$ の計算	<b>116</b>
19.1	$\zeta^3$ 型相互作用の簡単化	116
19.2	$\zeta^3$ 型 3 点関数の計算	116
19.3	non-gaussianity の指標 $f_{NL}$	120
19.4	局所型 $\zeta^3 - bispectrum$ の物理的意味	120
19.5	$\zeta^3 - bispectrum$ の観測量との比較	121
<b>V</b>	<b>初期重力波測定の現状</b>	<b>122</b>
<b>20</b>	<b>背景重力波の定義</b>	<b>122</b>
20.1	stochastic gravitational wave background とは	122
20.2	$\Omega_{GW}(f)$ の定義	123
20.3	$S_h(f), h_c(f)$ の定義	123
20.4	振幅・強度の便利な表記	124
20.5	重力波の転送関数	125
20.6	インフレーション期の重力波との関係	125
<b>21</b>	<b>SGWB の観測方法</b>	<b>126</b>
21.1	複数検出器の相関による感度の向上	126
<b>22</b>	$h_0^2 \Omega_{GW}(f)$ への間接的な制限	<b>126</b>
22.1	元素合成での $N_{eff}$ を通した制限	126
22.1.1	N-effective への重力場の寄与	127
22.2	COBE-bound	128
22.3	B-mode での制限	129
<b>23</b>	$h_0^2 \Omega_{GW}(f)$ への直接的な制限	<b>129</b>
23.1	LIGO による制限	129
23.2	Advanced LIGO による制限	130
23.3	Advanced LIGO による非等方重力波への制限	131
23.4	将来的な eLISA の感度	133
<b>24</b>	<b>背景重力波の評価</b>	<b>134</b>
24.1	The characteristic frequency	134
24.2	インフレーション由来の背景重力波	136
24.3	Gravitational wave black body background	138
24.4	再加熱前後での重力波について	139
24.5	Cosmic String Network の重力波生成	139
<b>25</b>	<b>結論</b>	<b>141</b>
<b>VI</b>	<b>Appendix</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>初期宇宙論の基礎</b>	<b>142</b>
A.1	再加熱での崩壊率	142

<b>B</b>	<b>B-mode 偏光</b>	<b>142</b>
B.1	テンソルモードの spin sum	142
B.2	角度積分	143
B.2.1	拘束なし	143
B.2.2	拘束あり	144
B.3	$g_{lm'}(\rho, e_z, \lambda)$ の表式	146
<b>C</b>	<b>non-Gaussianity</b>	<b>147</b>
C.1	計算集	147
C.1.1	$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ の計算	147
C.1.2	$R_{\mu\nu\tau\rho}$ の計算	150
C.1.3	$R^{(3)}$ の高次展開	152
C.2	アインシュタイン作用の安定性	152
C.3	in-in formalism のプロパゲーターについて	153
C.4	スローロールパラメーターの関係式	154
C.5	3 次の相互作用項	155
C.5.1	作用の $\zeta^3$ 項	155
C.5.2	作用の $\gamma\zeta^2$ 項	164
C.5.3	作用の $\gamma^2\zeta$ 項	165
C.5.4	作用の $\gamma^3$ 項	165

## 1 Introduction

現在、Beyond Standard model の探索が積極的に行われている。理論的・実験的に Beyond Standard model のエネルギースケールがどの程度にあるか確実な証拠は知られていない。仮に Beyond Standard model のエネルギースケールが分かれば、加速器で新粒子を探索する指針となる。プランクスケールまでの広いエネルギー領域の物理現象の探索を行うために、初期宇宙は強力な道具となりえる。

宇宙の温度が下がると、光が他の物質に遮られずに進むようになる（宇宙の晴れ上がり）。晴れ上がり時点での光の揺らぎはインフレーション期の量子揺らぎやバリオン音響揺らぎなど様々な要因から影響を受けている。CMB スペクトルを理論的に求めるためには光、非相対論的物質、ニュートリノ、重力の揺らぎそれぞれが共に成長する過程を調べる必要がある。また CMB 揺らぎがスカラー的か、テンソル的かに応じて解析の複雑さが変わってくる。Planck 衛星などで CMB は検出されており、宇宙論の多くのパラメーターに強力な制限を与えている。[9]

背景重力波は重力相互作用の弱さから未だに直接検出されていないが、原理的に CMB より過去の宇宙の情報を得ることができる。パルス状の重力波は Advanced LIGO で検出されたが、それよりもずっと弱い背景重力波の検出には更なる感度の向上が必要である。[20]

インフレーション中のゆらぎは作用の二次までの展開の範囲では gaussian な性質を持つ。しかし作用をより高次まで計算することで non-gaussianity を持つことが知られている。インフレーションモデルに応じて non-gaussianity は変化するためモデルの選別の強力な道具となる。

初期宇宙の現象を解析する必要性を踏まえ、本論文では初期宇宙の現象を観測量に反映させるための計算を中心に行った。第一部では基礎的な宇宙論を概説した。第二部では CMB スカラーゆらぎの導出を行った。第三部では CMB テンソルゆらぎの導出を行った。第四部では重力ゆらぎの non-Gaussianity の基本的な計算をした。第五部では背景重力波測定の詳細を review した。

第一部から第三部までは現代宇宙論入門 [1] と weinberg の cosmology [2] を参考にした。まず標準的な single scalar inflation におけるスカラーゆらぎ、テンソル揺らぎのスペクトルの支配方程式を導出した。また支配方程式から適当な近似で解析的に得られる結果について物理的意味を調べた。宇宙論的揺らぎを取り扱うために、アインシュタイン方程式の FLRW 解周りでの微小展開を行った。インフレーション中において曲率揺らぎ、テンソル揺らぎの運動方程式を導き、BD 真空を取ることで量子的な揺らぎのスペクトルを求めた。Horizon を超える波長の揺らぎが凍結するという定理と重力揺らぎの時間発展を調べることで宇宙の晴れ上がり時点での重力揺らぎのスペクトルを導くことができる。重力の揺らぎを CMB に反映させるため、光の時間発展についてはボルツマン方程式を解くことで現在見える CMB 揺らぎを決定する方程式を導く。これらを今回は解析的に扱える範囲で調べた。晴れ上がり付近での揺らぎの解析からバリオン音響振動、シルク減衰がわかる。また光の揺らぎと重力との相互作用を調べることで SW 効果、積分 SW 効果が効くことがわかる。また B-mode 偏光測定の詳細と今後期待される測定精度を調べた。

第四部ではゆらぎの non-gaussianity を計算するために必要なフレームワークを整備した。ゆらぎの高次相互作用を場の理論のテクニックで計算する手法を weinberg の論文 [3] を参考に要約した。次に具体的な non-gaussianity の計算を Maldacena の論文 [4] を参考に行った。更に non-gaussianity の指標  $f_{NL}$  を用いて現状の観測的な制限と比較した。

第五部では宇宙背景重力波の現状の観測を調べた。Maggiore の review [5] を参考に背景重力波の取扱と単純なモデルでの重力波強度の計算を行った。次に現在の背景重力波観測の現状を調べた。近年観測された連星合体のシグナルが大きなノイズとなり、背景重力波観測の障害になる可能性について議論した。

## 1.1 定義

以降の文字の使い方を簡単にまとめる。

共変微分を  $A_{;\mu} := D_{\mu}A$  で表現する。

共形時間に対する微分を  $\frac{d}{dn}f := f'$  で書く。

宇宙の各時期を区別する添字について、0 添字は現在の量。\*添字は最終散乱面を指す場合が多い。eq 添字は輻射-物質優勢移行期。ref 添字は reheating 期。

CMB の計算において位相空間は  $(\mathbf{x}, \mathbf{P})$  で座標を張る。 $\mathbf{P}$  を局所座標系で評価して  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  に書き直す。 $\mathbf{x}$  をフーリエ変換して  $(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  を考える。 $\mu := \frac{n \cdot \mathbf{k}}{k} := \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{pk}$  を角度の代わりに用いる。

自然単位系 ( $G = 1, c = 1, \hbar = 1$ ) を用いる。単位を考えたいときには適宜復活させる。

## Part I

# 初期宇宙論の基礎

## 2 一様等方宇宙

### 2.1 FLRW メトリック

weinberg[6] の議論を参考に一様等方空間を簡単にまとめる。

時空に因果律と大域的雙曲性<sup>1</sup>を仮定すると、4次元時空多様体に対して時間方向  $t$  と 3次元空間  $N$  に関するトポロジー的な意味での分解  $M = \mathbb{R} \times N$  ができている [7]。一様等方宇宙  $M$  の定義として、任意の時間  $t$  で  $N$  が一様等方であることを課す。一様等方性から空間部分  $N$  に対しては、並進操作 (3 自由度) および回転操作 (オイラー角 3 自由度) により 6 つの自由度がある。これらは 6 つの独立な killing vector を張る。 $n$  次元空間が  $\frac{n(n+1)}{2}$  個の独立な killing vector を持つ場合、最大対称空間と呼ばれる。最大対称部分空間を持つ時空のメトリックは形が制限され、特に今回の場合は次のように書くことができる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2, \quad (1)$$

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

このメトリックを *FLRW* メトリックと呼ぶ。

ハッブルパラメータ  $H := \frac{\dot{a}}{a}$  とする。

赤色偏移パラメータ  $z := \frac{a_0}{a(t)} - 1$  と定義する。また  $dz = -\frac{a_0}{a^2} da = -H(1+z) dt$  と書ける。

変数変換  $r = r_c \sinh\left(\frac{\xi}{r_c}\right)$ ,  $r_c := \sqrt{-1/K}$  を行うと、共動距離  $\xi$  でのメトリック

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [d\xi^2 + f_{K(\xi)}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$f_{K(\xi)} := \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\xi) \quad (2)$$

が取れる。(K は距離の逆二乗の次元であることに注意)

<sup>1</sup>物理的には時間一定面で多様体を二つに分けてその曲面上で物理量を決めたらその後の時間発展が一意的に決まることを意味する。



時間  $t(z)$  に放射された光が現在  $t_0, (z = 0)$  観測される場合、光の進んだ共動距離は動径方向への積分で書けて、

$$\xi = - \int_{t_0}^t \frac{c}{a(\tilde{t})} d\tilde{t} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \quad (3)$$

となる。

共形時間  $\eta := \int \frac{dt}{a}$  を用いて時間変数を書き換えると、

$$ds^2 = a^2 (-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j) \quad (4)$$

となる。共形時間に対する微分を  $\frac{d}{d\eta} f := f'$  で書く。

この共形時間の積分の範囲は

$$\eta = \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (5)$$

で定める。

また  $\frac{a'}{a} = aH$  に注意。

## 2.2 フリードマン方程式

アインシュタイン方程式  $G^\mu_\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\nu$  に完全流体の Energy Momentum テンソル  $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P)$  と FLRW メトリックを代入すると、フリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{K}{a^2}, \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi P - \frac{K}{a^2} \quad (6)$$

が得られる。

## 2.3 連続方程式

Eq(6) を微分して、 $\dot{H}$  と  $K$  を消去すると<sup>2</sup>

$$\dot{\rho} + 3H \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0 \quad (7)$$

として連続方程式が得られる。

物質の状態方程式を  $w := \frac{P}{c^2 \rho}$  で定義すると、 $\rho$  の積分形が得られる。

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(3 \int_{t_0}^t H(1+w) dt\right) = \rho_0 \exp\left(3 \int_0^z \frac{1+w(\tilde{z})}{1+\tilde{z}} d\tilde{z}\right) \quad (8)$$

例えば、非相対論的物質  $\rho_m(t)$  ( $w = 0$ ) や相対論的物質  $\rho_r(t)$  ( $w = 1/3$ )、暗黒エネルギー  $\rho_{DE}(t)$ <sup>3</sup> それぞれで成分の時間発展を見ると、

$$\begin{aligned} \rho_r(t) &= \rho_r (1+z)^4 \\ \rho_m(t) &= \rho_m (1+z)^3 \\ \rho_{DE}(t) &= \rho_{DE} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。特に暗黒エネルギーは定数である。

<sup>2</sup>K を消すときは上の式をもう一度代入する。

<sup>3</sup>宇宙定数  $\Lambda \delta^\mu_\nu$  と解釈すると対角成分だけを持ち、 $\rho = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ ,  $P = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$  と書けるので  $w = -1$

## 2.4 加速膨張と状態方程式

Eq(6) から  $H^2$  を消去して、

$$\dot{H} = -4\pi(1+w)\rho + \frac{K}{a^2} \quad (10)$$

となる。また  $K/a^2$  を消去して、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\rho(1+3w) \quad (11)$$

となる。よって、 $w$  の大小により宇宙膨張の加速度が決まる。

特に  $w$  を定数と見なし、 $K = 0$  とすると

$$\begin{aligned} \rho &\propto a^{-3(1+w)} \\ a &\propto t^{\frac{2}{3(1+w)}} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。宇宙膨張の傾向を見るためには物質の状態方程式を調べると良い。

## 2.5 密度パラメータ

Eq(6) の一つ目を  $H^2$  で割ると

$$1 = \Omega_M + \Omega_K \quad , \quad \Omega_M := \frac{\rho}{\rho_0} := \frac{8\pi\rho}{3H^2} \quad , \quad \Omega_K := -\frac{K}{a^2H^2} \quad (13)$$

として宇宙全体のエネルギー密度の関係式が得られる。

ある時期の宇宙のエネルギー構成においてどの成分が支配的な寄与を及ぼすかを考えたい。質量を細分化して

$$\begin{aligned} \Omega_M &:= \Omega_r + \Omega_m + \Omega_{DE} \quad , \\ \Omega_r &: \text{相対論的物質} \quad , \quad \Omega_m : \text{非相対論的物質} \quad , \quad \Omega_{DE} : \text{ダークエネルギー} \end{aligned} \quad (14)$$

と定義する。それぞれの物質のエネルギー密度の時間依存性に注意して、現在の量で書くと、

$$\frac{H(z)^2}{H_0^2} = \Omega_{0r}(1+z)^4 + \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0DE} \exp\left[3 \int_0^z \frac{1+w_{DE}(\tilde{z})}{1+\tilde{z}} d\tilde{z}\right] + \Omega_{0K}(1+z)^2 \quad (15)$$

となる。ただしダークエネルギーの状態方程式は一般的な形のまま書いている。

実際の宇宙では複数の成分が混ざっているが、それぞれの物質が優越している時代には、単一の物質の状態方程式を考慮すれば良い。DE は膨張に効くこと  $w < -\frac{1}{3}$  に考慮すると、宇宙は輻射優勢、物質優勢、(曲率優勢)、DE 優勢で時間発展していたとわかる。<sup>4</sup>

## 2.6 各優勢期におけるスケールの時間依存性

輻射優勢期 ( $w = \frac{1}{3}$ ) において

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad H(t) = \frac{1}{2t} \quad , \quad \eta(t) = \frac{2t}{a(t)} = \frac{1}{2a(t)H(t)} \quad (16)$$

<sup>4</sup>曲率優勢は、観測的な値の小ささから起こらないことが知られている。

となる。物質優勢期 ( $w = 0$ ) において

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad H(t) = \frac{2}{3t}, \quad \eta(t) = \frac{3t}{a(t)} = \frac{2}{a(t)H(t)} \quad (17)$$

となる。インフレーション期 (スローロール極限) において

$$a(t) = e^{H_{ds}t}, \quad H(t) = H_{ds}, \quad \eta(t) = -\frac{1}{H_{ds}a(t)} \quad (18)$$

となる。

## 2.7 $\Lambda$ CDM 模型とは

Cold Dark Matter と Hot Dark Matter とでは、後者は拡散効果により宇宙の構造を作れない問題がある。前者では、晴れ上がり以前からダークマターハローを形成し質量凝縮が出来るため、宇宙の大規模構造の形成を説明できると考えられている。また観測的に宇宙膨張がわかっているが、その効果は宇宙定数  $\Lambda$  で書ける。これらを合わせたモデルを  $\Lambda$ CDM 模型という。

## 3 宇宙論的摂動論

先の FLRW モデルは宇宙全体で一様な時間発展を考えていた。実際の宇宙はそこから揺らいでおり、揺らぎが現在の宇宙の様々な構造の元になったと考えられる。以降では一様解からの揺らぎを計算する。

### 3.1 テンソル摂動の分解

3次元ベクトル  $v_i$  は次のように分解できる。<sup>5</sup>

$$v_i = B_{,i} + S_i, \quad (S^i_{,i} = 0) \quad (19)$$

prf:ベクトルの分解

まず  $v_i$  をフーリエ展開する。

$$v_i(x) = \int d^3k \tilde{v}_i(k) e^{-ik \cdot x} \quad (20)$$

積分変数  $k$  について次の分解を行う。

$$\tilde{v}_i(k) := k_i \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{k^2} \right) + \left( \tilde{v}_i - k_i \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{k^2} \right) \right) \quad (21)$$

このとき

$$v_i = B_{,i} + S_i := \partial_i \int d^3k e^{-ik \cdot x} \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{k^2} \right) + \int d^3k e^{-ik \cdot x} \left( \tilde{v}_i - k_i \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{k^2} \right) \right) \quad (22)$$

<sup>5</sup>電磁気のゲージ変換のような自由度が残るので一意ではない。つまり調和関数  $\nabla^2 \chi(x) = 0$  を入れるだけの自由度が残っている。この残った自由度もゲージ自由度というが、「ニュートンゲージはゲージ自由度を残さない」というときの意味では無視される自由度である。

同様にテンソルについて、 $n_i := k_i/\sqrt{\mathbf{k}^2}$  を用いて、

$$\begin{aligned}
T_{ij(x)} &= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ n_i n^k T_{kj} + \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) T_{kj} \right] \\
&= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ n_i n_j \left( n^k n^l T_{kl} \right) + n_i \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( n^k T_{kl} \right) + n_j \left( \delta_i^l - n_i n^l \right) \left( n^k T_{lk} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) T_{kl} \right] \\
&= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \right) \left( n^k n^l T_{kl} \right) + \frac{1}{3} \gamma_{ij} \left( n^k n^l T_{kl} \right) \right. \\
&\quad \left. + n_i \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( n^k T_{kl} \right) + n_j \left( \delta_i^l - n_i n^l \right) \left( n^k T_{lk} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) - \frac{\gamma_{ij}}{3} \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) \right\} T_{kl} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{ij}}{3} \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) T_{kl} \right] \\
&= \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \right) \left( n^k n^l T_{kl} \right) + \frac{1}{3} \gamma_{ij} \left( n^k n^l + \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) \right) T_{kl} \right. \\
&\quad \left. + n_i \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( n^k T_{kl} \right) + n_j \left( \delta_i^l - n_i n^l \right) \left( n^k T_{lk} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) - \frac{\gamma_{ij}}{3} \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \left( \delta_i^k - n_i n^k \right) \right\} T_{kl} \right] \\
&= \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \partial^2 \right) S + \frac{1}{3} \gamma_{ij} Y + \frac{1}{2} \left( \partial_i Y_j^{(L)} + \partial_j Y_i^{(R)} \right) + Y_{ij}, \\
&\quad \left( \partial^i Y_{ij} = \partial^j Y_{ij} = 0 \quad , \quad Y_i^i = 0 \quad , \quad \partial^i Y_i^{(R/L)} = 0 \right) \tag{23}
\end{aligned}$$

という展開が可能である。対称テンソルに対しては  $Y_i^{(R)} = Y_i^{(L)}$ ,  $Y_{ij} = Y_{ji}$  である。

以上の結果は共変微分  $\partial_i \rightarrow D_i$  においても同様に成り立つ。その場合、局所ローレンツ系で証明する。

### 3.2 metric の摂動

FLRW 宇宙に対して、その揺らぎを考える。以下、時間変数は  $x^0 = \eta$  を用いる。メトリックを摂動部分  $\delta g_{\mu\nu}$  と非摂動部分  ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$  に分解する。非摂動部分はメトリック Eq(4) を用いる。

ここで時間成分は特別扱いして、三次元回転に対するスカラー  $\delta g_{00}$ 、ベクトル  $\delta g_{0i}$ 、テンソル  $\delta g_{ij}$  それぞれに対して先の分解公式を用いる。

摂動の一次までで FLRW メトリックは

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \alpha(\eta)^2 \left\{ -(1 + 2A) d\eta^2 + 2(B_{;i} - S_i) d\eta dx^i + [(1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij}] dx^i dx^j \right\} \quad , \\
S_{i;i} &= 0 \quad , \quad F_{i;i} = 0 \quad , \quad h_{ij;i} = 0 \quad , \quad h_{ij} = h_{ji} \quad , \quad h_{ii} = 0 \tag{24}
\end{aligned}$$

と書ける。

スカラー、ベクトル、テンソル摂動はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta g_{00} &= -2a^2 A \quad , \quad \delta g_{0i}^{(s)} = a^2 D_i B \quad , \quad \delta g_{ij}^{(s)} = 2a^2 (\psi \gamma_{ij} + D_i D_j E) \quad , \\
\delta g_{0i}^{(v)} &= -a^2 S_i \quad , \quad \delta g_{ij}^{(v)} = a^2 (D_i F_j + D_j F_i) \quad , \quad (D^i S_i = 0 \quad , \quad D^i F_i = 0) \quad , \\
\delta g_{ij}^{(T)} &= a^2 h_{ij} \quad , \quad (D^i h_{ij} = D^j h_{ij} = 0 \quad , \quad h_i^i = 0 \quad , \quad h_{ij} = h_{ji}) \tag{25}
\end{aligned}$$

### 3.3 metric のゲージ変換

メトリックの摂動成分のうち、多くはゲージ変換で消せる。ゲージ変換の一次の効果でメトリック摂動を消すことを考えるので、ゲージ変換自体もメトリックの一次摂動と同程度に微小だと仮定する。ゲージ変換で metric Eq(24) はスケール因子と  $d\eta$ ,  $dx$  の変換を受ける。これらの変化を  $\delta g_{\mu\nu}$  に取り込むことでゲージ変換の表式が得られる。

ゲージ変換を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \eta + \xi^0, \\ \tilde{x}^i &= x^i + \xi^{;i} + \zeta^i, \quad (\zeta^i_{;i} = 0)\end{aligned}\quad (26)$$

スケール因子のゲージ変換は次のようになる。

$$a(\eta) = a(\tilde{\eta} - \xi^0) = a(\tilde{\eta}) - \xi^0 a'(\tilde{\eta}) \quad (27)$$

$d\eta$ ,  $dx$  はゲージ変換の表式の微小変位を取って、 $\xi^0$ ,  $\xi$ ,  $\zeta^i$  にライプニッツルールを適用して、

$$\begin{aligned}d\tilde{\eta} &= d\eta + d\xi^0 = (1 + \xi^{0'}) d\eta + \xi^0_{;j} dx^j, \\ d\tilde{x}^i &= dx^i + d\xi^{;i} + d\zeta^i = (\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\eta + \left( \delta_j^i + \xi_{;j}^{;i} + \zeta_{;j}^i \right) dx^j\end{aligned}\quad (28)$$

となる。最低次で  $d\eta$ ,  $dx^i$  について解いて

$$\begin{aligned}d\eta &= (1 - \xi^{0'}) d\tilde{\eta} - \xi^0_{;j} d\tilde{x}^j, \\ dx^i &= -(\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\tilde{\eta} + \left( \delta_j^i - \xi_{;j}^{;i} - \zeta_{;j}^i \right) d\tilde{x}^j\end{aligned}\quad (29)$$

と書き直す。

Eq(27) と Eq(29) をメトリックに代入することで

$$\begin{aligned}ds^2 &= \alpha(\eta)^2 \left[ -(1 + 2A) d\eta^2 + 2(B_{;i} - S_i) d\eta dx^i + [(1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij}] dx^i dx^j \right] \\ &= (\alpha(\tilde{\eta}) - \xi^0 a'(\tilde{\eta}))^2 \left[ -(1 + 2A) \left( (1 - \xi^{0'}) d\tilde{\eta} - \xi^0_{;j} d\tilde{x}^j \right)^2 \right. \\ &\quad + 2(B_{;i} - S_i) \left( (1 - \xi^{0'}) d\tilde{\eta} - \xi^0_{;j} d\tilde{x}^j \right) \left( -(\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\tilde{\eta} + \left( \delta_j^i - \xi_{;j}^{;i} - \zeta_{;j}^i \right) d\tilde{x}^j \right) \\ &\quad \left. + [(1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij}] \left( -(\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\tilde{\eta} + \left( \delta_k^i - \xi_{;k}^{;i} - \zeta_{;k}^i \right) d\tilde{x}^k \right) (i \rightarrow j) \right] \\ &= \alpha(\tilde{\eta})^2 \left( 1 - 2\xi^0 \frac{a'}{a} \right) \left[ -(1 + 2A) \left( (1 - 2\xi^{0'}) d\tilde{\eta}^2 - 2\xi^0_{;j} d\tilde{\eta} d\tilde{x}^j \right) \right. \\ &\quad + 2(B_{;i} - S_i) \left( d\tilde{\eta} d\tilde{x}^i - (\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\tilde{\eta}^2 - \xi^0_{;j} d\tilde{x}^j d\tilde{x}^i \right) \\ &\quad \left. + [(1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij}] \left( d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j - 2 \left( \xi_{;k}^{;i} + \zeta_{;k}^i \right) d\tilde{x}^j d\tilde{x}^k - 2(\xi^{;i'} + \zeta^{i'}) d\tilde{\eta} d\tilde{x}^j \right) \right] \\ &= \alpha(\tilde{\eta})^2 \left[ - \left( 1 + 2A - 2\xi^0 \frac{a'}{a} - 2\xi^{0'} \right) d\tilde{\eta}^2 \right. \\ &\quad + 2 \left( B_{;i} - S_i + \xi^0_{;i} - \gamma_{ki} \left( \xi^{;k'} + \zeta^{k'} \right) \right) d\tilde{\eta} d\tilde{x}^i \\ &\quad \left. + \left[ \left( 1 + 2\psi - 2\xi^0 \frac{a'}{a} \right) \gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij} - 2\gamma_{kj} \left( \xi_{;i}^{;k} + \zeta_{;i}^k \right) \right] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right] \quad (30)\end{aligned}$$

としてゲージ変換の効果が最低次で

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A - \xi^0 \frac{a'}{a} - \xi^{0'} \quad , \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi' \quad , \quad \tilde{\psi} = \psi - \xi^0 \frac{a'}{a} \quad , \quad \tilde{E} = E - \xi, \\ \tilde{F}_i &= F_i - \zeta_i \quad , \quad \tilde{S}_i = S_i + \zeta'_i \quad , \\ \tilde{h}_{ij} &= h_{ij}\end{aligned}\tag{31}$$

と書ける。このようにテンソル成分以外はゲージ変換で変化する。

### 3.4 Einstein Tensor の摂動

先のメトリックを用いてアインシュタインテンソルの摂動は次のように書ける。

- スカラー部分

$$\begin{aligned}\delta G_0^{(s)0} &= 2a^{-2} [2aH (aHA - \psi') + \nabla^2 \{ \psi - aH (E' - B) \} + 3K\psi] \quad , \\ \delta G_i^{(s)0} &= -2a^{-2} [aHA - \psi' + K (E' - B)]_{;i} \quad , \\ \delta G_j^{(s)i} &= 2a^{-2} [(a^2 H^2 + 2aH') A + aHA' - \psi'' - 2aH\psi' + K\psi] \delta_j^i + a^{-2} (\nabla^2 D \delta_j^i - D_{;j}^i) \quad , \\ D &:= A + \psi - 2aH (E' - B) - (E' - B)'\end{aligned}\tag{32}$$

- ベクトル部分

$$\begin{aligned}\delta G_0^{(v)0} &= 0 \quad , \\ \delta G_i^{(v)0} &= -\frac{2K + \nabla^2}{2a^2} (S_i + F'_i) \quad , \\ \delta G_j^{(v)i} &= \frac{1}{2} a^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + 2aH \right) \left[ S_{;j}^i + S_j^{;i} + (F_{;j}^i + F_j^{;i})' \right]\end{aligned}\tag{33}$$

- テンソル部分

$$\begin{aligned}\delta G_0^{(r)0} &= 0 \quad , \\ \delta G_i^{(r)0} &= 0 \quad , \\ \delta G_j^{(r)i} &= \frac{1}{2} a^{-2} [h_j^{i''} + 2aHh_j^{i'} + (2K - \nabla^2) h_j^i]\end{aligned}\tag{34}$$

### 3.5 完全流体の摂動

完全流体の EnergyMomentumTensor からの揺らぎを考える。

まず一般の完全流体の EnergyMomentumTensor は次のように書ける。

$$T_\nu^\mu = (\rho + P) u^\mu u_\nu + P \delta_\nu^\mu + \pi_\nu^\mu\tag{35}$$

$\pi_\nu^\mu$  は非等方ストレスと呼ばれ、流体の非等方性を表す。 $u_\nu$  は流体の速度ベクトルである。このテンソルを摂動的に書くと、

$$T_\nu^\mu = (\rho + \delta\rho + P + \delta P) u^\mu u_\nu + (P + \delta P) \delta_\nu^\mu + \pi_\nu^\mu\tag{36}$$

となる。ただし<sup>(b)</sup> $\rho, P$ を改めて $\rho, P$ と書いた。 $\rho, P$ は微小ではない空間的に一様な量で連続方程式 Eq(2.3) を満たす。微小量は $\delta\rho, \delta P, u^i, \pi_j^\mu$ である。

流体の速度ベクトル $u_\nu$ については一様な量とゆらぎを次で定義する。速度ベクトルは固有時 $\tau$ を用いて定義する。

$$\begin{aligned} -d\tau^2 &:= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \\ u^\mu &:= \frac{dx^\mu}{d\tau} = a^{-1} \left( 1 - A, \frac{dx_i}{d\eta} \right) =: a^{-1} (1 - A, v^{;i} + v^i) \quad , \quad (v^{;i}_{;i} = 0) \quad , \\ u_\mu &:= u^\nu g_{\mu\nu} = a (-1 - A, v_{;i} + v_i + B_{;i} - S_i) \end{aligned} \quad (37)$$

ここではベクトル $\frac{dx_i}{d\eta}$ を分解した。(流体がほぼ静止した座標系にいるとして、 $\frac{dx_i}{d\eta}$ は微小量とみなす。) また共変ベクトルを摂動メトリックから作った。

prf: $u^\mu$  の表示

$$u^\mu = \frac{d\eta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\eta} = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}^{-1} \left( 1, \frac{dx_i}{d\eta} \right) \quad (38)$$

ここで $\frac{dx_i}{d\eta}, \frac{dx_i}{d\tau} \ll 1$ を考慮して

$$-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -(1 + 2A) \quad (39)$$

により Eq(37) が示せる。

次に非等方ストレスも分解する。

$$\pi^i_j = \left( \Pi_{;j}^i - \frac{1}{3} \nabla^2 \Pi \delta_j^i \right) + \frac{1}{2} \left( \pi_{;j}^i + \pi_j^{;i} \right) + \pi_j^{(T)i} \quad (40)$$

以上を踏まえて、それぞれの変換性を持つ摂動は

$$\begin{aligned} \delta T_0^{(S)0} &= -\delta\rho \quad , \quad \delta T_i^{(S)0} = (\rho + P) (v_{;i} + B_{;i}) \quad , \quad \delta T_0^{(S)i} = -(\rho + P) v^{;i} \quad , \quad \delta T_j^{(S)i} = \delta P \delta_j^i + \Pi_{;j}^i - \frac{1}{3} \nabla^2 \Pi \delta_j^i \quad , \\ \delta T_0^{(V)0} &= 0 \quad , \quad \delta T_i^{(V)0} = (\rho + P) (v_i - S_i) \quad , \quad \delta T_0^{(V)i} = -(\rho + P) v^i \quad , \quad \delta T_j^{(V)i} = \frac{1}{2} \left( \pi_{;j}^i + \pi_{;i}^j \right) \quad , \\ \delta T_0^{(T)0} &= 0 \quad , \quad \delta T_i^{(T)0} = 0 \quad , \quad \delta T_0^{(T)i} = 0 \quad , \quad \delta T_j^{(T)i} = \pi_j^{(T)i} \quad , \end{aligned} \quad (41)$$

となる。

### 3.6 完全流体のゲージ変換

完全流体のテンソルにおいて、微小でない量は $\rho, P, u^0$ であり、微小なゲージ変換をした場合、 $\delta\rho, \delta P, \delta u^0$ は微小量の一次の変化を受ける。基底量がゲージ不変になるように、微小量の方にゲージ変換の効果を押し付ける。<sup>6</sup>

$\rho, P$ はそれぞれスカラー量で時間のみ依存する。摂動と基底での量を合わせたものに関してはスカラーの性質 $\tilde{f}^{(b)}(\tilde{x}^\mu) + \delta f(\tilde{x}^\mu) = f^{(b)}(x^\mu) + \delta f(x^\mu)$ が成立する。よって無限小ゲージ変換

<sup>6</sup>基底量が存在しない $v^i$ などはゲージ変換での変化が微小量の二次になるために考えなくてよい。

Eq(26) の下で

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) + \tilde{\delta}\rho(\tilde{x}^\mu) &= \rho(x^\mu) + \delta\rho(x^\mu) \quad , \\ \Rightarrow \tilde{\delta}\rho &= \delta\rho(x^\mu) + \rho(x^\mu) - \tilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) = \delta\rho(x^\mu) + \rho(x^\mu) - \xi^\mu \frac{\partial\rho}{\partial\tilde{x}^\mu} - \tilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) = \delta\rho(\tilde{x}^\mu) - \xi^\mu \frac{\partial\rho}{\partial\tilde{x}^\mu} = \delta\rho(\tilde{x}^\mu) - \xi^0 \frac{\partial\rho}{\partial\tilde{x}^0} \end{aligned} \quad (42)$$

という変換を行う。最後の変形では、基底量がゲージ不変であるという仮定  $\tilde{f}^{(b)}(x^\mu) = f^{(b)}(x^\mu)$  を用いた。同様に、圧力も

$$\tilde{\delta P} = \delta P - P' \xi^0 \quad (43)$$

という変換を行う。

次に速度ベクトルのゲージ変換は、本来は時間成分の変換と合わせて考えるべきだが、定義に戻って簡単に導く方法がある。ゲージ変換の定義を  $\eta$  で微分した式

$$\tilde{x}^{i'} = x^{i'} + \xi^{i'} + \zeta^{i'} \quad (44)$$

を定義 Eq(37) と比較することで

$$\tilde{v} = v + \xi' \quad , \quad \tilde{v}^i = v^i + (\zeta^i)' \quad (45)$$

という関係がわかる。

ここで後の便利のために次を定義する。

$$\delta q_{;i} := a\delta T_i^{(S)0} \quad , \quad \delta q = a(\rho + P)(v + B) \quad , \quad \tilde{\delta}q = \delta q + a(\rho + P)\xi^0 \quad (46)$$

及び、

$$\delta q_i^{(V)} := a\delta T_i^{(V)0} \quad , \quad \delta q_i^{(V)} = a(\rho + P)(v_i + S_i) \quad , \quad \tilde{\delta}q_i^{(V)} = \delta q_i^{(V)} \quad (47)$$

後者はゲージ不変である。

### 3.7 スカラー場の摂動

流体ではなくスカラー場についても同じ計算をしておく。一般的なスカラー場に対応するため、 $X := -g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$  を用いて

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} := P(\phi, X) \quad (48)$$

と書く。この時、メトリックのネーターカレントに対応する EnergyMometumTensor は次である。

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} = P_{,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}P \quad (49)$$

場を背景場と摂動場に分けて  $\phi(x^\mu) = \phi^{(b)}(\eta) + \delta\phi(x)$  を代入すると、EnergyMometumTensor は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \rho + \delta\rho &:= -T_0^{(b)0} - \delta T_0^0 &= a^{-2}P_{,X}\phi'^2 - P + (P_{,X} + 2XP_{,XX})\delta X - (P_{,\phi} - 2XP_{,X\phi})\delta\phi \quad , \\ \delta q_{;i} &:= a\delta T_i^0 &= -a^{-1}P_{,X}\phi'\delta\phi_{;i} \quad , \\ \delta P\delta_j^i &:= \delta T_j^i &= (P_{,X}\delta X + P_{,\phi}\delta\phi)\delta_j^i \end{aligned} \quad (50)$$



なお

$$\delta X := a^{-2} (\phi' \delta \phi' - A \phi'^2) \quad (51)$$

であり、摂動項の式変形では  $X$  が 0 次近似で

$$X := -g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} = \frac{1}{2} a^{-2} \phi'^2 \quad (52)$$

と書けることを用いた。流体の時と同様に、

$$\delta q = -a (\rho + P) \phi'^{-1} \delta \phi \quad (53)$$

と書き直すことができる。

本質的には、今回の摂動はすべてスカラー摂動  $\delta \phi$  に由来するため、得られる EMTensor の摂動もすべてスカラー的である。

完全流体の摂動との違いは、圧力項が基底で 0 であること、摂動において非等方圧力がないということ、すべての揺らぎが  $\delta \phi$  のみに依存するため完全流体より制限は強いことである。<sup>7</sup>

### 3.8 スカラー場のゲージ変換

次にゲージ変換を議論する。今回の微小ではない基底量は、 $\rho$ ,  $P$ ,  $\phi$  である。すべてスカラーなので変換は

$$\begin{aligned} \tilde{\delta \rho} &= \delta \rho - \rho' \xi^0, \\ \tilde{\delta P} &= \delta P - P' \xi^0, \\ \tilde{\delta \phi} &= \delta \phi - \phi' \xi^0, \end{aligned} \quad (54)$$

最後に  $\delta q$  は微小量の一次だが、 $\delta \phi$  を通じて変換を受ける。

$$\tilde{\delta q} = \delta q + a (\rho + P) \xi^0 \quad (55)$$

$\delta \rho$ ,  $\delta P$ ,  $\delta q$  はすべて流体の場合と変換則が同一である。この事実は、後に構成するゲージ不変量が、流体とスカラー場の共存系でも同様に定義できる理由となる。

### 3.9 ゲージ不変量

メトリック、EnergyMomentumTensor ではスカラー、ベクトル成分がゲージ不変でなかった。このままだとゲージの違いで結果が変わって見えるので、ゲージ不変な量を組みたい。

まずスカラー量について、メトリック  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $\psi$  から組めるゲージ不変量は、

$$\Psi := A - \frac{1}{a} [a (E' - B)]', \quad \Phi := \psi - aH (E' - B) \quad (56)$$

である。EnergyMomentumTensor のみでは

$$\delta \rho_m := \delta \rho - 3H \delta q \quad (57)$$

<sup>7</sup> Photon は完全流体的に扱うがインフラトン はスカラー粒子として扱う。この違いはインフラトンが不安定粒子で熱平衡になる時期がないためである。完全流体の各物理量は局所熱平衡状態の粒子の平均化により構成された平均量である。一方でインフラトンの物理量は場の値から直接定義されている。非等方テンソルのような流体に特有な構造を持つためには、0 でない粒子密度を持つことが必要である。インフラトン は不安定粒子であるため、再加熱時以外に有効な粒子数を持つことが出来ない。

が組める。メトリックと EMT を組み合わせると、

$$\mathcal{R} := \psi + \frac{H}{\rho + P} \delta q \quad , \quad \zeta = \psi - \frac{aH}{\rho'} \delta \rho \quad , \quad \delta \phi_\psi := \delta \phi - \frac{\phi'}{aH} \psi \quad (58)$$

がある。Eq(3.10) で示されるように  $\zeta$  は一定密度超曲面上の曲率ゆらぎ、 $\mathcal{R}$  は共動曲率ゆらぎと言われる。 $\zeta$  は以前の  $\zeta_i$  と紛らわしいので注意。

次にベクトル摂動に関しては

$$U_i := S_i + F'_i \quad (59)$$

がゲージ不変量である。

ただし上の変数には次の等式

$$\mathcal{R} = \zeta + \frac{aH}{\rho'} \delta \rho_m \quad , \quad \delta \phi_\psi = -\frac{\psi'}{aH} \mathcal{H} \quad (60)$$

が成立する。

以下ではゲージ不変量に基づいた議論を行うため、これらの変数は覚えておくべき。

### 3.10 ゲージ固定

ゲージ変換は  $\xi^0$ ,  $\xi$ ,  $\zeta^i$  で 4 つの自由度を持つ。Eq(31) を参考にベクトル摂動  $\tilde{F}_i$  を消去するゲージを取る。この時残った 2 自由度の潰し方に種類がある。

- Newtonian Gauge ;  $\tilde{B} = 0$ ,  $\tilde{E} = 0$  ( $\xi^0 = E' - B$ ,  $\xi = E$ )

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Psi) d\eta^2 - 2U_i d\eta dx^i + [(1 + 2\Phi) \gamma_{ij} + h_{ij}] dx_i dx_j \right] \quad (61)$$

この場合、ニュートン力学での重力ポテンシャルは  $\Phi$  である。

- Spatially flat gauge ;  $\tilde{\psi} = 0$ ,  $\tilde{E} = 0$  ( $\xi^0 = \frac{\psi}{aH}$ ,  $\xi = E$ )

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\tilde{A}) d\eta^2 + 2(\tilde{B}_{;i} - U_i) d\eta dx^i + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx_i dx_j \right] \quad (62)$$

スカラー揺らぎに関して言えば空間メトリックが一様である。

このゲージでは次が成立する。

$$\delta \phi_\psi = \delta \phi \quad , \quad \mathcal{R} = -\frac{aH}{\phi'} \delta \phi_\psi \quad , \quad \zeta = -\frac{aH}{\rho'} \delta \rho \quad (63)$$

- Uniform-density gauge ;  $\tilde{\delta}\rho = 0$  ( $\xi^0 = \frac{\delta\rho}{\rho'}$ ) に加えて  $\tilde{B} = 0$  or  $\tilde{E} = 0$

この時、 $\zeta = \psi$  となる。時間一定の超曲面上での三次元空間曲率  $\mathcal{R}$  は  $\delta g_{ij}$  のみで書けるが、一様密度ゲージでは  $\zeta$  のみになる。そこから  $\zeta$  が曲率ゆらぎと呼ばれる。(具体的な  $\mathcal{R}$  の展開形は Chapter.(C.1.3) を参照。)

- Comoving gauge

流体とスカラー場の場合において定義が異なる。

流体の EMT のスカラー摂動においては、速度成分を 0 にできるように設定され、 $\tilde{v} = 0$ ,  $\tilde{B} = 0$  ( $\xi^0 = -v - B$ ,  $\xi = -\int v d\eta + Y(x^i)$ ) である。この  $Y(x^i)$  は空間成分のみに依存

する任意関数であるがゲージ不変量には寄与しないため、選び方は本質的に問題ではない。ここで

$$\delta q = 0 \quad , \quad \mathcal{R} = \psi \quad (64)$$

が成立する。この時 Uniform-density gauge の場合と同様に、 $\mathcal{R}^{(3)}$  は  $\mathcal{R}$  のみで書ける。ここから  $\mathcal{R}$  が共動曲率ゆらぎと呼ばれる。

スカラー場の場合は共動ゲージは  $\tilde{\delta}\phi = 0$ ,  $\tilde{E} = 0$  ( $\xi^0 = \frac{\delta\phi}{\phi}$ ,  $\xi = E$ ) である。つまりスカラー場の場合は完全に物質場の揺らぎはメトリックの揺らぎに取り込まれる。(後々では  $\mathcal{R}$  などで取り込む。)

- Synchronous gauge

$\tilde{A} = 0$ ,  $\tilde{B} = 0$  に対応するが、ゲージの取り方の不定性により摂動量の扱いに手間が生じる。そのためこのゲージでの計算結果には、ゲージ不変量を調べるか、[2] の 5 章に書いてあるように CDM などの参照系を用いて固定する必要がある。

### 3.11 完全流体の摂動方程式

完全流体の EMT とアインシュタインテンソルを組み合わせ、摂動の時間発展方程式を考える。

- 最低次

Chapter.(2) にまとめられている。

- スカラー摂動

(0,0), (0,i) 成分から

$$\begin{aligned} 3aH(\psi' - aHA) - (\nabla^2 + 3K)\psi + aH\nabla^2\sigma &= 4\pi Ga^2\delta\rho \quad , \\ \psi' - aHA - K\sigma &= 4\pi Ga\delta q \quad , \\ \sigma &:= E' - B \end{aligned} \quad (65)$$

(i,j) 成分 ( $i \neq j$ ) から

$$\Psi + \Phi = -8\pi Ga^2\Pi \quad (66)$$

(i,i) 成分の trace を取って

$$\psi'' + 2aH\psi' - K\psi - aHA' - (a^2H^2 + 2(aH)')A = -4\pi Ga^2\left(\delta P + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi\right) \quad (67)$$

また連続方程式  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$  を用いると、流体の摂動  $\delta\rho$ ,  $\delta q$  に拘束条件が付き次が成立する。(アインシュタイン方程式から原理的に導出できるはずだが一応記載する。)

$$\begin{aligned} \delta\rho' + 3aH(\delta\rho + \delta P) &= -(\rho + P)[3\psi' + \nabla^2(E' + v)] \quad , \\ \delta q' + 3aH\delta q &= -a\delta P - \frac{2}{3}a(\nabla^2 + 3H)\Pi - (\rho + P)aA \end{aligned} \quad (68)$$

- ベクトル摂動

(0,0) 成分からの寄与はない。(0,i)(i,j) 成分から次が成立する。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 2K) (F'_i + S_i) &= -16\pi G a \delta q_i^{(V)} \quad , \\ \tau_j^{i'} + 3aH\tau_j^i &= 4\pi G a \left( \pi_{:j}^i + \pi_j^{:i} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

ただし

$$\begin{aligned} \delta q_i^{(V)} &:= a (\rho + P) (v_i - S_i) \quad , \\ \tau_j^i &:= \frac{1}{2a} \left[ S_{:j}^i + S_j^{:i} + \left( F_{:j}^i + F_j^{:i} \right)' \right] \end{aligned} \quad (70)$$

を定義した。連続方程式から次が成立する。

$$\delta q_i^{(V)'} + 3aH\delta q_i^{(V)} = -a (\nabla^2 + 2K) \pi_i \quad (71)$$

- テンソル摂動

$$(h_j^i)'' + 2aH (h_j^i)' + (2K - \nabla^2) h_j^i = 16\pi G \pi_j^{(T)i} a^2 \quad (72)$$

### 3.12 スカラー場の摂動方程式

- 最低次

スカラー場を背景場とした場合の最低次の方程式は Chapter.(2) において状態方程式が  $\rho = 2XP_{,X} - P$  であることと、連続方程式が

$$(P_{,X} + 2XP_{,XX}) \psi'' + 2(P_{,X} - XP_{,XX}) aH\psi' + a^2 (2XP_{,X\phi} - P_{,\phi}) = 0 \quad (73)$$

となる点が変更点である。

- スカラー摂動

摂動は (0,0), (0,i), (i,j)| $_{i \neq j}$ , (i,i)| $_{trace}$  の4つの成分がある。

$$\begin{aligned} 3aH\psi' - [3a^2H^2 - 4\pi G\phi'^2 (P_{,X} + 2XP_{,XX})] A - (\nabla^2 + 3K) \psi + aH\nabla^2\sigma \\ = -4\pi G [a^2 (P_{,\phi} - 2XP_{,X\phi}) \delta\phi - (P_{,X} + 2XP_{,XX}) \phi' \delta\phi] \quad , \\ \psi' - aHA - K\sigma = -4\pi GP_{,X}\psi' \delta\phi \quad , \\ \sigma' + 2aH\sigma - A - \psi = 0 \quad , \\ \psi'' + 2aH\psi' - K\psi - aHA' - (2a^2H^2 + (aH)' + K) A \\ = -4\pi G (P_{,X}\phi' \delta\phi + a^2 P_{,\phi} \delta\phi) \end{aligned} \quad (74)$$

- ベクトル摂動

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 2K) (F'_i + S_i) &= 0 \quad , \\ \tau_j^{i'} + 3aH\tau_j^i &= 0 \quad , \\ \delta q_i^{(V)'} + 3aH\delta q_i^{(V)} &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

この式からわかることとしては、 $(F'_i + S_i)$  は成長せず、 $\tau_j^i$ ,  $\delta q_i^{(V)}$  は  $a^{-3}$  に比例して減少する。流体と違い非等方ストレスがないスカラー場では、ベクトル型摂動は成長しない。

- テンソル摂動

$$(h_j^i)'' + 2aH (h_j^i)' + (2K - \nabla^2) h_j^i = 0 \quad (76)$$

は閉じているので簡単な解析ができる。

$K \sim 0$ ,  $\dot{a} = \text{const}$  として時空間でフーリエ展開すると、

$$-\omega^2 + 2i\omega aH + k^2 = 0 \quad , \quad h_j^i \propto \exp \left[ -\eta \dot{a} \pm i\eta \sqrt{k^2 - \dot{a}^2} \right] \quad (77)$$

となる。 $k \ll \dot{a}$  では凍結解が存在することに注意。 $k^2 h_j^i = -\nabla^2 h_j^i$  が減衰項  $2aH (h_j^i)'$  に対して大きい場合と小さい場合で解が異なる。

### 3.13 共動曲率ゆらぎとメトリックの等式

流体でもスカラー粒子でも、アインシュタイン方程式のスカラー摂動の2, 3番目の表式は似たような形をしている。二番目を用いると、どちらの場合でも次が成立する。

$$\mathcal{R} = \Phi - \frac{2}{3(1+w)} \left( \Psi - \frac{\Phi'}{aH} \right) \quad (78)$$

ここで三番目の式と、仮定  $\Phi' = 0$ ,  $\Pi_j^i = 0$  を課すと

$$\mathcal{R} = \frac{5+3w}{3(1+w)} \Phi \quad (79)$$

が成立する。

### 3.14 エントロピー摂動と音速

音速として、次の二つの定義が考えられる。

$$c_a^2 := \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \quad , \quad c_s^2 := \frac{\delta P}{\delta \rho} \quad (80)$$

前者は、連続方程式を用いて、

$$c_a^2 = \frac{\frac{d}{dt} w \rho}{\dot{\rho}} = \dot{w} \frac{\rho}{\dot{\rho}} + w = \frac{d\eta}{dt} w' \frac{-1}{3H(1+w)} + w = -\frac{w'}{3aH(1+w)} + w \quad (81)$$

と求まる。

後者をエントロピー摂動という量を通して、ゲージ不変に定式化したい。エントロピー摂動  $\delta_s$  の定義は

$$\delta_s := (c_s^2 - c_a^2) \delta = \frac{\dot{P}}{\rho} \left( \frac{\delta P}{\dot{P}} - \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} \right) \quad , \quad \delta := \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (82)$$

である。エントロピー摂動自体はゲージ不変量である。(Chapter.(3.6) より明らか) エントロピー摂動の因子のうち、 $c_a$  はゲージ不変な背景場の量のみを使っているので明示的にゲージ不変。そのためゲージ不変な  $c_s$  を組み立てるためには、 $\delta$  に対してもっともらしいゲージ不変な表式を立てると良い。

$\delta = \delta\rho/\rho$  は表式的に

$$\hat{\delta} := \frac{\delta\rho_m}{\rho} = \delta - 3H\frac{\delta q}{\rho} \quad (83)$$

にするとうまくいきそうに見える。実際、 $\delta = \hat{\delta}$  となる座標系は流体の静止系である。このことから、ゲージ不変な  $c_s$  を

$$\delta s = (\hat{c}_s^2 - c_a^2) \hat{\delta} \quad (84)$$

で定義する。ここに Eq(82) と Eq(83) を代入してまとめると、ゲージ不変なスカラー音速

$$\hat{c}_s^2 = \frac{\delta P - 3Hc_a^2\delta q}{\delta\rho - 3H\delta q} \quad (85)$$

が得られる。

ゲージ不変な表式が得られたので安心して特定のゲージで  $c_s$  を求めることができる。Co-moving gauge で先に求めたスカラー場の摂動 Eq(50) の 1, 3 式において  $\delta\phi = 0$  を課して  $\delta X$  を消去することで、

$$\hat{c}_s^2 = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \quad (86)$$

が得られる。これは明らかにゲージ不変である。スカラー場が運動項  $X$  について特別な依存性を持っていたら音速は光速から変わる。

ちなみに先に定義した  $\hat{\delta}$  は次のような意味でゲージ不変な密度摂動といえる。Eq(65) から  $\psi' - aHA$  を消去すると次が得られる。

$$\nabla^2\Phi + 3K\Phi = -4\pi Ga^2\rho\hat{\delta} \quad (87)$$

これは摂動の一次でゲージ不変なポアソン方程式といえる。

## 4 インフレーション理論

インフレーションの必要性を簡単に説明し e-foldings を導入する。次に代表的なモデルを紹介する。共動曲率ゆらぎ  $\mathcal{R}$  の零点振動が真空の取り替えで増幅されて作られるパワースペクトル  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}(k)}$  を計算し、モデルごとの違いを見る。

### 4.1 インフレーションの必要性和 e-foldings

宇宙進化について平坦性問題、地平線問題、モノポール問題がある。平坦性問題は現在の曲率項が  $|\Omega_K| < 0.01$  であり、過去にさかのぼるほどその割合は減って、宇宙初期には不自然なほど平坦  $|\Omega_K| \ll 10^{-66}$  であったという問題である。地平線問題は、現在見えている背景輻射がなぜここまで一様なのかという問題である。輻射が一様になるためには粒子のやり取りを行い熱平衡になる必要がある。因果律の及ぶ範囲である粒子的地平線

$$d_H(t) := a(t)d_\alpha(t) := a(t) \int_{t_*}^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \quad (88)$$

が晴れ上がり以降の宇宙膨張  $a \propto t^p$  ( $0 < p < 1$ ) では

$$d_H(t) = \frac{ct}{1-p} = \frac{p}{1-p} cH^{-1} \quad (89)$$

とハッブル半径  $cH^{-1}$  程度になる。晴れ上がりの時の地平線は現在の地平線よりも狭く、因果的に熱平衡になっている領域も現在より小さいはずであるが、現在の CMB 観測で見える背景放射は等方性が高く、晴れ上がり時に因果的でなかった領域の温度がほぼ一樣になっている。ここから、宇宙初期には現在のハッブル半径以上の領域まで熱平衡が行き渡る機構が必要になる。

以上の問題の解決策として宇宙初期での急激なスケール  $a(t)$  の膨張が提案された。(インフレーション理論)

インフレーションの程度を定量的に考えるため e-foldings を導入する。

$$N(k) := \ln \frac{a(t_{end})}{a_k} \quad (90)$$

ただし  $a_k$  は波長  $k$  のモードがインフレーション中にハッブル半径を超えた時 (Horizon-crossing) の宇宙半径である。 $t_{end}$  はインフレーションが終わった時刻である。波長が大きいほど早くハッブル半径を超え、e-foldings は大きくなる。

波長  $k$  のゆらぎがインフレーション前にハッブル半径より小さかった場合、ハッブル半径を横切るときに  $k = a_k H_k$  という等式を満たす。逆にこの等式を満たすような妥当な  $H_k$  を取ることができる場合、波長  $k$  のゆらぎはもともとハッブル半径内に存在していたといえる。その条件をみたすために必要な e-foldings を計算する。

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = e^{-N(k)} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{H_k}{H_{eq}} \frac{a_{eq} H_{eq}}{a_0 H_0} \quad (91)$$

ここで  $a_{eq}$  は相対論的物質と非相対論的物質のエネルギー密度が等しい時間を表し、物質優勢への変り目となる。各項を評価していく。 $H_{eq}$  は現在の値から物質優勢での膨張を考えると  $H_{eq} = H_0 \sqrt{2\Omega_m^{(0)}} (1+z_{eq})^{3/2}$  であり観測から  $z_{eq} = 3400$  程度。 $\frac{a_{end}}{a_{reh}}$ ,  $\frac{a_{reh}}{a_{eq}}$  は物質優勢、輻射優勢期の膨張を仮定する。以上を踏まえて  $N$  について解くと、

$$\begin{aligned} N(k) &= -\ln \left( \frac{k}{a_0 H_0} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{\rho_{reh}}{\rho_{end}} \right) + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\rho_{eq}}{\rho_{reh}} \right) + \ln \left( \frac{H_k}{H_{eq}} \right) + \ln \left( 219 \Omega_m^{(0)} h \right) \\ &= 68 - \ln \left( \frac{k}{a_0 H_0} \right) + \ln \left( \frac{H_k}{H_{reh}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{H_{reh}}{m_{pl}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{\rho_{reh}}{\rho_{end}} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

ここで観測値  $\Omega_m^{(0)} = 0.31$ ,  $h = 0.68$  を用いた。更に再加熱が瞬時に起こり、かつ  $H$  はほとんど動かなかった  $H_k \sim H_{reh}$  という仮定と CMB から得られるインフレーションエネルギースケール  $H_k = 10^{14} \text{ GeV}$  を代入すると、現在 CMB で見える最大スケールのゆらぎ  $k \sim a_0 H_0$  に対して  $N(k) \sim 63$  程度となる。

## 4.2 インフレーションモデルの一般論

インフレーションのモデルとして、single scalar inflation model を考える。インフラトン場 (スカラー) と重力のみを考える。作用は

$$S := \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{pl}^2}{2} R + P(\phi, X) \right] \quad (93)$$

である。P はインフラトン場のラグランジアン密度。インフレーション中は曲率 K を無視するとして、

$$\begin{aligned} 3M_{pl}^2 H^2 &= 2XP_{,X} - P \quad , \\ M_{pl}^2 \dot{H} &= -XP_{,X} \quad , \\ (P_{,X} + 2XP_{,XX}) \ddot{\phi} + 3HP_{,X} \dot{\phi} + 2XP_{,X\phi} - P_{,\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

がインフレーションの基本方程式となる。この3本は独立ではなく1本はビアンキ恒等式から得られる。Kinetic インフレーションのようなモデル以外では  $P = X - V(\phi)$  を仮定することが多く、以下でもその設定で計算を行う。

この時、先の式は次のように単純化される。

$$\begin{aligned} 3M_{pl}^2 H^2 &= X + V(\phi) \quad , \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi}(\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

十分なインフレーションが起こるためには、 $\dot{a} = aH$  において H が定数の時の解  $a(t) = a_0 e^{Ht}$  が成立すれば良い。これが十分大きな膨張率を持つためには時間スケール  $\Delta t \sim H^{-1}$  でこの形の解が成立する、つまり  $\frac{\dot{H}}{H} \Delta t \sim \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1$  が要請される。この条件を書くためにスローロールパラメータ

$$\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3XP_{,X}}{\rho} = \frac{3XP_{,X}}{2XP_{,X} - P} \quad (96)$$

を定義する。更に  $\epsilon, \dot{\epsilon}/H, \ddot{\epsilon}/H^2 \ll 1$  なども課し、Eq(95) により

$$\epsilon_V := \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad , \quad \eta_V := \frac{M_{pl}^2 V_{,\phi\phi}}{V} \quad , \quad \xi_V := \frac{M_{pl}^4 V_{,\phi} V_{,\phi\phi\phi}}{V^2} \quad (97)$$

を用いると便利。これらすべてが1より十分小さいという条件(スローロール条件)が満たされている場合には、

$$\epsilon_V \simeq \epsilon \quad , \quad \eta_V \simeq 2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} \quad , \quad \xi_V^2 \simeq \left( 2\epsilon_V - \frac{\dot{\eta}_V}{H\eta_V} \right) \eta_V \quad , \quad H \simeq -\frac{V}{V_{,\phi}} \frac{\dot{\phi}}{M_{pl}^2} \quad (98)$$

という関係を得る。インフレーションの終了条件は  $\epsilon_V \sim 1$  かその変化率  $|\eta_V| \sim 1$  である。

インフレーションの時刻 t(場の値  $\phi$ ) からインフレーション終了までの e-foldings は

$$N = - \int_{t_{end}}^t H(\tilde{t}) d\tilde{t} \simeq \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\tilde{\phi}}} d\tilde{\phi} \quad (99)$$

で計算される。

### 4.3 カオティックインフレーション

初期のインフレーション理論(一次相転移を伴うものなど)は一次相転移に伴い、ポテンシャルは二重底を持つが、トンネル効果で安定な真空に落ちるよりも膨張で広がる効果が強く、インフレーションが終わらなくなるという問題を持つ。Linde などによる New Inflation はポテンシャルの形を滑らかにすることで2次相転移としてこの問題点を解決したが、なだらかなポテンシャルに十分長い間場がとどまるという微調整の問題があった。カオティックインフレーション



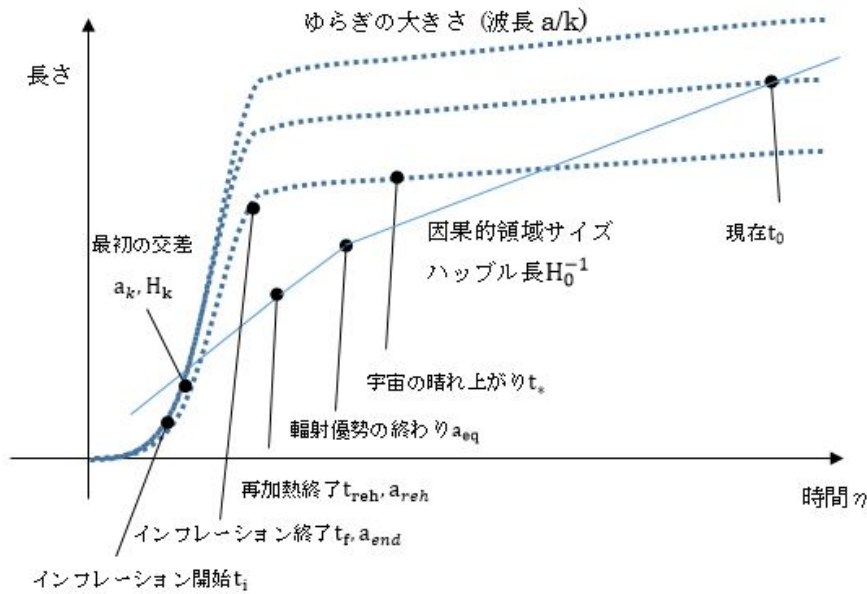


Figure 1: インフレーションの模式図と変数  
 実線が宇宙の地平線サイズ。輻射優勢から物質優勢に移ると増加傾向が変わる。点線が波長ごとの変化の様子。宇宙半径  $a$  に依存して動く。

ンでは初期条件にあまり依存しないでインフレーションを起こせる。カオティックインフレーションでは、初期状態では場のゆらぎを考え、そのゆらぎがある臨界点を超えるとインフレーションを起こすという考えに基づく。

次のポテンシャル

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n} \phi^n, \quad (n > 0) \quad (100)$$

において、インフレーションが始まる条件は

$$\epsilon_V = \frac{M_{pl}^2 n^2}{2 \phi^2} \ll 1 \quad (101)$$

であり場の大きさはプランク質量程度の大きさになる必要がある。カオティックインフレーションは large field inflation に分類される。インフレーションが終わる条件はこれが 1 程度になる時なので、Eq(99) から e-foldings を  $N$  とすると

$$\phi(N) \simeq \sqrt{2n \left( N + \frac{n}{4} \right)} M_{pl} \quad (102)$$

となる。

#### 4.4 ナチュラルインフレーション

ポテンシャル

$$V(\phi) = V_0 [1 + \cos(\phi/f)] \quad (103)$$

で  $f$  はプランク質量程度のスケール与えられる。e-foldings を計算すると

$$N = \frac{2f^2}{M_{pl}} \ln \left( \frac{\sin\left(\frac{\phi_{end}}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{\phi(N)}{2f}\right)} \right) \quad (104)$$

このモデルはインフレーションの初期に  $V_{,\phi\phi} < 0$  を取りうるという特徴を持つ。

#### 4.5 ハイブリッドインフレーション

2つのスカラー場  $\phi, \chi$  を用いて

$$V(\phi, \chi) := \frac{\lambda}{4} \left( \chi^2 - \frac{M^2}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (105)$$

と定義する。特に  $\phi > \phi_c := M/g$  の下では  $\chi$  の有効質量

$$m_\chi^2 := V_{,\chi\chi} = 3\lambda\chi^2 - M^2 + g^2\phi^2 > 0 \quad (106)$$

となり、 $V$  は  $\chi = 0$  で極小値を持ち、 $\chi$  は  $\chi = 0$  周りを運動しながら  $\phi$  が減少する方向に動いていく。 $\chi$  の振動が十分速い時、 $\phi$  についてポテンシャルは実質的に

$$V \simeq \frac{M^4}{4\lambda} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (107)$$

と書け、カオティックインフレーションの  $n=2$  に対応したインフレーションが起こる。 $\phi < \phi_c$  では  $\chi$  が不安定化するため、このポテンシャルは極小値  $(\phi, \chi) = (0, \pm M/\sqrt{\lambda})$  に向かって落ちる。

このモデルの e-foldings は

$$N \simeq \frac{M^4}{4\lambda m^2 M_{pl}^2} \ln \frac{\phi(N)}{\phi_c} \quad (108)$$

である。

#### 4.6 Kinetic Inflation

このモデルは超弦理論の低エネルギー有効作用から得られる次のラグランジアン

$$P := K(\varphi)X + \frac{L(\varphi)}{M^4} X^2, \quad (K < 0, L > 0) \quad (109)$$

に基づく。解析をしやすいするため、 $\phi := \int \sqrt{\frac{L}{-K}} d\varphi$  を導入し変数変換すると(運動項  $X$  も新しい変数に対応するものを使う)

$$P := f(\phi) \left( -X + \frac{X^2}{M^4} \right), \quad f(\phi) := \frac{K^2}{L} \quad (110)$$

となる。このモデルでは  $X = M^4/2$  が  $\epsilon = 0$  に対応する。ただしこのモデルは膨張期の終わり方を持たない。

先の改善として Dirac-Born-Infeld(DBI) 模型

$$P := -f(\phi)^{-1} \sqrt{1 - 2f(\phi)X} + f(\phi)^{-1} - V(\phi) \quad (111)$$

が知られている。

#### 4.7 インフレーション中のスカラー摂動方程式

インフレーションによって生じるゆらぎのスペクトルを解析する。特にスカラー場のみ取り込む。K=0 かつ共動ゲージで解析する。このとき  $\mathcal{R} = \psi$  であり、主な解析は  $\mathcal{R}$  のみを見れば良いとわかる。Eq(74) から

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \frac{1}{aH} \nabla^2 \mathcal{R} \quad , \quad (1 \text{ 式目から})$$

$$A = \frac{\mathcal{R}'}{aH} \quad , \quad (2 \text{ 式目から})$$

$$\sigma' + 2aH\sigma - A - \psi = 0 \quad , \quad (3 \text{ 式目から})$$

$$Q_s := \frac{\phi'^2}{2a^2 H^2} (P_{,X} + 2XP_{,XX}) \quad (112)$$

がわかる。以上から  $\mathcal{R}$  について閉じた方程式 ( $Q_s$  は非摂動的な量で書かれていることに注意)

$$(a^2 Q_s \mathcal{R}')' - a^2 Q_s c_s^2 \nabla^2 \mathcal{R} = 0 \quad ,$$

$$c_s^2 := \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \quad (113)$$

が得られる。式変形で音速  $c_s$  を出すときには次の恒等式

$$\frac{Q_s c_s^2}{M_{pl}^2} = \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 1 - \frac{(aH)'}{a^2 H^2} \quad (114)$$

を用いた。

prf:共動曲率揺らぎの方程式 Eq(113)

まず

$$\begin{aligned} \frac{Q_s c_s^2}{M_{pl}^2} &= \frac{\phi'^2}{2a^2 H^2} (P_{,X} + 2XP_{,XX}) \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \frac{1}{M_{pl}^2} \\ &= \frac{\phi'^2}{2a^2} \frac{3P_{,X}}{2XP_{,X} - P} = \frac{3XP_{,X}}{2XP_{,X} - P} = \epsilon \end{aligned} \quad (115)$$

ただし計算で Eq(94) より  $3M_{pl}^2 H^2 = 2XP_{,X} - P$  を用いた。

次に  $\sigma' + 2aH\sigma - A - \psi = 0$  に  $\nabla^2$  を掛けて  $\sigma, A$  を消去すると

$$\begin{aligned} 0 &= \left( -\frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \frac{1}{aH} \nabla^2 \mathcal{R} \right)' + 2aH \left( -\frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \frac{1}{aH} \nabla^2 \mathcal{R} \right) - \nabla^2 \left( \frac{\mathcal{R}'}{aH} \right) - \nabla^2 \mathcal{R} \\ &= -\frac{Q_s'}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \left( \frac{1}{aH} \right)' \nabla^2 \mathcal{R} - \frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}'' - 2aH \frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \nabla^2 \mathcal{R} \\ &= -\frac{Q_s'}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' + \epsilon \nabla^2 \mathcal{R} - \frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}'' - 2aH \frac{Q_s}{M_{pl}^2} \mathcal{R}' \end{aligned} \quad (116)$$

ここで  $\epsilon = -\frac{\ddot{a}}{a^2} + 1$  を用いた。これを

$$(a^2 Q_s \mathcal{R}')' - a^2 Q_s c_s^2 \nabla^2 \mathcal{R} = 0 \quad (117)$$

と比較すると一致がわかる。

#### 4.8 スカラー摂動の量子化

Eq(113) が出たので、この式を解くことで古典的な意味での  $\mathcal{R}$  の解は得られた。ただし古典的なままだと始状態がわからない上に、いわゆる空間の膨張に伴う量子的なゆらぎを取り入れることができない。そこで  $\mathcal{R}$  を量子場として扱い適当な境界条件 (Bunch-Davies vacuum) を課すことでゆらぎの形を決定したい。この操作が妥当である正当性は Eq(93) を 2 次までで近似した形式

$$S_2 = \int d\eta d^3x a^2 Q_s \left[ \mathcal{R}'^2 - c_s^2 (\nabla \mathcal{R})^2 \right] \quad (118)$$

が  $\mathcal{R}$  についての変分で Eq(113) を再現するからである。<sup>8</sup>つまり実際に  $\mathcal{R}$  が量子的な意味での自由度になっているのでこのような解析に意味がある。

量子力学的に取り扱うためにはまずは系を正準量子化したい。場をフーリエ変換

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\eta, \mathbf{x}) &:= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{R}(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathcal{R}(\eta, \mathbf{k}) &:= u(\eta, \mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + u^*(\eta, -\mathbf{k}) a^\dagger(-\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (119)$$

して生成消滅演算子を定義し、そこにいつもどおり交換関係

$$\left[ a(\mathbf{k}_1), a^\dagger(\mathbf{k}_2) \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (120)$$

<sup>8</sup>これは先の運動方程式を再現するために必要な作用としても解釈できる。 $c_s = 1$  での導出は Eq(498) を参照

を導入する。次にモード関数  $u$  の満たす運動方程式を Eq(113) に代入して求めると、

$$u'' + \frac{(a^2 Q_s)'}{a^2 Q_s} u' + c_s^2 k^2 u = 0 \quad (121)$$

となる。良く見る量子化の議論で使う作用と今回の作用 Eq(118) では、係数に  $\frac{1}{2}$  や余計な因子が付いている。このような余計な因子を場の再定義で取り除きたい。<sup>9</sup>そこで境界条件を課すモード関数として  $v$  を次で導入して

$$\begin{aligned} v &:= zu \quad , \quad z = a\sqrt{2Q_s} \quad , \\ v'' + \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) v &= 0 \end{aligned} \quad (122)$$

この  $v$  について無限の過去で粒子数 0 の真空であるという境界条件 (Bunch-Davles vacuum) を取る。

まず方程式を簡単にするため因子  $\frac{z''}{z}$  を調べる。Eq(114) を用いて  $Q_s = \epsilon M_{pl}^2 / c_s^2$  と書くことができるが、背景場がド・ジッター宇宙 ( $H = \text{const}$ ) に近くかつ  $c_s$  の変化がゆっくりな場合、 $Q_s$  の時間変化もゆっくりである。<sup>10</sup>つまり微小量として  $\delta_{Q_s} := \frac{\dot{Q}_s}{HQ_s}$  が取れる。この微小量を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{z''}{z} &= \frac{a''}{a} + \frac{\sqrt{Q_s}''}{\sqrt{Q_s}} + 2 \frac{a' \sqrt{Q_s}'}{a \sqrt{Q_s}} \\ &= \frac{a \partial_t (a \dot{a})}{a} + \frac{a \partial_t \left( a \frac{\dot{Q}_s}{2\sqrt{Q_s}} \right)}{\sqrt{Q_s}} + 2 \frac{a \dot{a} a \frac{\dot{Q}_s}{2\sqrt{Q_s}}}{a \sqrt{Q_s}} \\ &= \dot{a}^2 + a \ddot{a} + a \dot{a} \frac{\dot{Q}_s}{2Q_s} + a^2 \frac{\ddot{Q}_s}{Q_s} - a^2 \left( \frac{\dot{Q}_s}{Q_s} \right)^2 + a \dot{a} \frac{\dot{Q}_s}{Q_s} \\ &= a^2 H^2 + a^2 H^2 (1 - \epsilon) + a^2 H \frac{3}{2} \delta_{Q_s} + a^2 \frac{\ddot{Q}_s}{Q_s} - a^2 \delta_{Q_s}^2 \\ &= 2(aH)^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{4} \delta_{Q_s} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (123)$$

と展開できる。ここで  $\epsilon = 1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$  を使い、また  $\frac{\ddot{Q}_s}{Q_s} \propto \ddot{\epsilon}$  は二次の微小量として落とした。

$\eta \rightarrow -\infty$  での境界条件を考える。漸近的な過去  $k\eta \rightarrow -\infty$  では  $a$  は小さく、 $c_s k \gg aH$  が期待される。この時、Eq(122) は  $v'' + \omega_k^2 v \simeq 0$  ( $\omega_k := c_s k$ ) となる。この時の方程式に基づいて真空を定義すると、モード関数は次のような解を持つ。

$$v = \frac{e^{-i\omega_k \eta}}{\sqrt{2\omega_k}} = \frac{e^{-ic_s k \eta}}{\sqrt{2c_s k}} \quad , \quad (k\eta \rightarrow -\infty) \quad (124)$$

このモード関数に一致するように Eq(122) の一般解を、スローロールの 0 次で近似的に解く。この時  $\frac{z''}{z} = \frac{2}{\eta^2}$  に注意するとモード関数はハンケル関数を用いて

$$v = -\frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} \left( c_1 H_{3/2}^{(1)}(-c_s k \eta) + c_2 H_{3/2}^{(2)}(-c_s k \eta) \right) \quad (125)$$

<sup>9</sup>ここまでは  $\mathcal{R}$  のゆらぎが見たいので敢えて再定義は行わなかった

<sup>10</sup>運動項  $X$  が一次で入るような普通のモデルでは Eq(113) より  $c_s = 1$  である。

となる。ここで  $H_{3/2}^{(1)}(x) = \left(H_{3/2}^{(2)}(x)\right)^* = -\sqrt{2} \left(1 + \frac{i}{x}\right) \frac{e^{ix}}{\sqrt{\pi x}}$  がモード関数の定義に一致するためには  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  とすれば良い。よって  $u$  としては

$$u_{\eta, k} = \frac{iH e^{-i c_s k \eta}}{2(c_s k)^{3/2} \sqrt{Q_s}} (1 + i c_s k \eta) \quad (126)$$

となる。

以上の導出はド・ジッター時空からのズレにより変更を受ける。一つには原点付近のモード関数の改善がある。だが、その寄与は  $\mathcal{O}(\epsilon)$  程度であり問題にならない。

このモード関数の特徴としては、 $c_s k = aH$  を境に解の特性が変わることである。この条件は KineticInflation 以外の模型  $c_s = 1$  ではハッブルホライズンから一度目にゆらぎが出て行く条件と一致する。つまりハッブルホライズン内にあるときは振動関数であり、ホライズンを越えたあたりから、振動が遅くなる傾向にある。この問題は次のように考えると良い。共動時間と通常の時間の関係性は  $d\eta = \frac{dt}{a}$  であり、いわゆるハッブル半径と対応付けられる時間は  $\Delta t = \frac{1}{H}$  である。よってハッブル半径  $H$  の時の典型的な振動のスケールは  $c_s k \Delta \eta = c_s k \frac{1}{aH}$  となる。

よって、インフレーション終了時の十分大きな  $a$  においては振動の値は  $\eta \rightarrow 0$  の値に凍結していると考えるが良い。

#### 4.9 作用の高次項

Eq(118) の導出のためには微小量の二次までで展開した表式が必要になる。詳しい結果は Eq(481) 付近に記載している。まず ADM 計量

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j) \quad (127)$$

で一次の展開で共動ゲージのスカラー振動を再現するようなメトリックの形

$$ds^2 = - \left[ (1 + A)^2 - a^{-2} e^{-2\mathcal{R}} (\nabla\varphi)^2 \right] dt^2 + 2\partial_i \varphi dt dx^i + a^2 e^{2\mathcal{R}} dx^i dx_i \quad (128)$$

を仮定して作用 Eq(93) を計算する。ただし、そのときに  $N, N^i$  を拘束条件として除去する必要がある。最終的に作用の二次の成分が

$$S_2 = \int dt d^3x M_{pl}^2 \left[ -3a^3 \dot{\mathcal{R}}^2 - 2aA \nabla^2 \mathcal{R} + 6a^3 H A \dot{\mathcal{R}} + a (\nabla \mathcal{R})^2 + \mu a^3 A^2 + 2a \dot{\mathcal{R}} \nabla^2 \varphi - 2a H A \nabla^2 \varphi \right],$$

$$\mu := -3H^2 + X \frac{P_{,X} + 2XP_{,XX}}{M_{pl}^2} \quad (129)$$

となる。作用について  $A, \varphi$  で変分を取って

$$\nabla^2 \varphi = a^2 \left( \frac{\mu}{H} A + 3\dot{\mathcal{R}} \right) - \frac{1}{H} \nabla^2 \mathcal{R}, \quad A = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H} \quad (130)$$

という運動方程式が得られる。それらを作用に再代入して自由度を取り除くと  $Q_s = M_{pl}^2 \left( 3 + \frac{\mu}{H^2} \right)$ ,  $Q_s c_s^2 = -M_{pl}^2 \frac{\dot{H}}{H^2}$  を考慮して Eq(118) に一致する。

#### 4.10 スカラー摂動のパワースペクトル

重力揺らぎのパワースペクトル自体は直接の観測量ではない。しかし実験的に再構成することが出来、かつモデルによって異なるスペクトルを生むため、インフレーションモデルを比較する際に用いられる。先に見たようにハッブル半径から一度飛び出した曲率揺らぎは凍結したと考えて  $\eta \rightarrow 0$  での二点関数は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{R}(0, \mathbf{k}_1) \mathcal{R}(0, \mathbf{k}_2) | 0 \rangle &= P_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad , \\ P_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) &= |u(0, \mathbf{k})|^2 = \frac{H^2}{4Q_s c_s^3 k^3} \end{aligned} \quad (131)$$

となる。もう一つ次のような定義

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) = \frac{H^2}{8\pi^2 Q_s c_s^3} = \frac{H^2}{8\pi^2 M_{pl}^2 \epsilon c_s} \quad (132)$$

もありこちらの方が一般的である。

インフレーション後に残る揺らぎのスペクトルは、 $c_s k < aH$  ですぐに凍結することから、インフレーション中に一回目にハッブル半径を超えると  $c_s k =: a_k H_k$  のスペクトルを計算できれば十分。より正しく言うなら、一般的な議論から Horizon-crossing 以降はスローロールパラメーターに関わらず厳密に揺らぎは凍結する。今回は近似的な計算であるため、 $u(\eta, k)$  は  $H$  を通して時間に依存しているが、厳密には凍り付いているべきである。そのため、今回の近似計算はホライズンを超えるときまでしか使えない。当然、ホライズンを超える時点の解も  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  だけズレているが、後にスペクトルインデックスを計算する際は、微分が一度付くので  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  になり無視できる。

スペクトル  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$  の  $k$  依存性を取り扱うために、スペクトル指数

$$n_s - 1 := \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})}{d \ln k} \right|_{c_s k = aH} = -2\epsilon - \eta_s - s \quad (133)$$

を定義する。ただし最後の変形はインフレーション中の  $c_s$  の変化が緩やかであるという条件の下で  $d \ln k = d \ln a = H dt$  と近似して

$$\eta_s := \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \quad , \quad s := \frac{\dot{c}_s}{Hc_s} \quad (134)$$

を用いた。

インフレーション中は Eq(98) が成立するため、 $\{\epsilon, |\eta_s|, |s|\} \ll 1$  となり、 $n_s$  は 1 に近い。 $n_s = 1$  の時はスケール不変と呼ばれ、スペクトルが  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) \propto k^{n_s-1} = k^0$  となる。観測されている  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$  はスケール不変に近いから、宇宙の揺らぎの種はインフレーションにより作られた量子揺らぎが原因だとわかる。スケール不変からのわずかなズレ  $\epsilon, \eta_s, s$  の効果を測定することで、インフレーションモデルを選別できる。

$n_s$  は  $k$  に依存するため、スローロールパラメーターの高次の効果として、ランニング

$$\alpha_s := \left. \frac{dn_s}{d \ln k} \right|_{c_s k = aH} \quad (135)$$

も計算できる。

ここまでに得た量を  $P = X - V(\phi)$  型のモデルで計算すると、

$$\begin{aligned} c_s = 1 \quad , \quad s = 0 \quad , \quad \epsilon = \epsilon_V \quad , \quad \eta_s = 4\epsilon_V - 2\eta_V \quad , \\ \frac{\dot{\epsilon}_V}{H} = -2\epsilon_V\eta_V + 4\epsilon_V^2 \quad , \quad \frac{\dot{\eta}_V}{H} = 2\epsilon_V\eta_V - \xi_V^2 \end{aligned} \quad (136)$$

を用いることでパワースペクトルの形状が

$$\begin{aligned} n_s - 1 = -6\epsilon_V + 2\eta_V \quad , \\ \alpha_s = 16\epsilon_V\eta_V - 24\epsilon_V^2 - 2\xi_V^2 \end{aligned} \quad (137)$$

とわかる。

#### 4.11 テンソル摂動の場合

インフレーションで量子揺らぎから生成されるテンソル摂動を計算する。やることはスカラー揺らぎとほぼ同じである。

まずテンソルモードの摂動ラグランジアンを計算する。テンソルモードは二つの自由度

$$\begin{aligned} h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times \quad , \\ \text{規格化条件: } e_{ij}^\lambda(k) e_{ij}^{\lambda(-k)*} = 2 \quad , \quad (\lambda = +, \times) \quad , \\ \text{直交条件: } e_{ij}^+(k) e_{ij}^\times(-k)* = 0 \quad , \end{aligned} \quad (138)$$

を持っておりそれぞれが Eq(76) を満たし

$$h_\lambda'' + 2aHh_\lambda' + k^2 h_\lambda = 0 \quad (139)$$

の解となっている。

ところでテンソルモードもゲージ不変量かつ Eq(93) を 2 次までで近似した形式

$$\begin{aligned} S_t = \sum_{\lambda=+, \times} \int d\eta d^3x a^2 Q_t \left[ h_\lambda'^2 - (\nabla h_\lambda)^2 \right] \quad , \\ Q_t = \frac{M_{pl}^2}{4} \end{aligned} \quad (140)$$

で書けるため、量子的な自由度と見なせる。このときテンソルモードの伝播速度は  $c_t = 1$  である。

次に  $h_\lambda$  を正準量子化するために  $v$  に変数変換してから運動方程式

$$\begin{aligned} v_\lambda := z_t h_\lambda \quad , \quad z_t = a\sqrt{2Q_t} \quad , \\ v_\lambda'' + \left( k^2 - \frac{z_t''}{z_t} \right) v_\lambda = 0 \end{aligned} \quad (141)$$

を導く。共動曲率揺らぎの場合と同様に  $\eta \rightarrow -\infty$  で Banch-Davles vacuum を取ることでインフレーション中の揺らぎのスペクトル

$$h_{\lambda(\eta, k)} = \frac{iH e^{-ik\eta}}{2k^{3/2} \sqrt{Q_t}} (1 + ik\eta) \quad (142)$$



が得られる。

これの作るパワースペクトルは

$$\mathcal{P}_h(\mathbf{k}) = \frac{4k^3}{2\pi^2} |h_{\lambda(0,k)}|^2 = \frac{H^2}{2\pi^2 Q_t} = \frac{2H^2}{\pi^2 M_{pl}^2} \quad (143)$$

となるが、ここで前の因子に4が入っている理由はテンソル分解  $e_{ij}^\lambda(k)$  のノルムが2であり、それが2成分あるということである。k 依存性はどの時刻での H を取るかに依存する。

この揺らぎが  $k = aH$  で凍結したとしてスペクトルの形は

$$\begin{aligned} n_t &:= \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_h(\mathbf{k})}{d \ln k} \right|_{k=aH} = -2\epsilon \quad , \\ \alpha &:= \left. \frac{dn_t}{d \ln k} \right|_{k=aH} = -2\epsilon\eta_s = -8\epsilon_V^2 + 4\epsilon_V\eta_r \end{aligned} \quad (144)$$

となる。ただし最後の変形は  $P = X - V(\phi)$  の場合の  $\eta_s = 4\epsilon_V - 2\eta_r$  を導入している。

#### 4.12 Tensor-Scalar ratio

スカラーゆらぎとテンソルゆらぎの比は、インフレーションモデルを選別する重要な物理量である。テンソル・スカラー比

$$r := \frac{\mathcal{P}_h}{\mathcal{P}_R} = 16c_s\epsilon = -8c_s n_t \quad (145)$$

が観測により精力的に探索されている。観測的な現状は Chapter.(15.2) で議論する。

テンソルゆらぎが見えたら、そのテンソル・スカラー比とスペクトル指数が関係付く。上の関係式をゆらぎの整合性関係という。運動項 X が一次で入る (正準場) single scalar inflation ならば  $r = 16\epsilon$  が成り立つが、仮に観測から違った値が出た場合は、別のモデルが必要とされる。

#### 4.13 観測値との比較

観測値に対してインフレーションモデルが整合するかどうか調べる。

Planck, WMAP, ACT, SPT のデータ解析から ( $k_0 = 0.002 Mpc^{-1}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_R(k_0) &= 2.198_{-0.054}^{+0.056} \times 10^{-9} \quad , & (68\%CL) \quad , \\ n_s(k_0) &= 0.9585 \pm 0.0070 \quad , & (68\%CL) \quad , \\ r(k_0) &< 0.11 \quad , & (95\%CL) \end{aligned} \quad (146)$$

がわかっている。

これを踏まえて各種モデルを解析していく。

- カオティックインフレーション

$V(\phi) = \lambda \frac{\phi^n}{n}$  に基づいて ( $\phi$  の大きさは Chapter.(4.3) から e-foldings N に結びつける。)

$$n_s = 1 - 2 \frac{n+2}{4N+n} \quad , \quad r = 16 \frac{n}{4N+n} \quad (147)$$

となる。これについて N=60 で、n=2 は制限の  $2\sigma$  に近く、n=4 は棄却に近い。

ところで  $n=4$  の時、このスカラーがヒッグスだとすると、スローロール近似を Eq(94) に用いて変形することで

$$\mathcal{P} = \frac{V^3}{12\pi^2 M_{pl}^6 V_{,\phi}^2} \propto \lambda \quad (148)$$

として結合定数と関係付き、ここからヒッグスポテンシャルの結合定数は  $\lambda \simeq 1.4 \times 10^{-13}$  となり、EW での実際の値  $\lambda \sim 0.1$  と比べるととても小さい。

- natural inflation

$f \geq 5M_{pl}$  程度ならば整合する。

- hybrid inflation

$\chi = 0$  付近に場の値があるときの近似的なポテンシャルに対して、定数項が小さい場合  $V_0 := \frac{M^4}{4\lambda} \leq \frac{m^2}{2}\phi^2$  にはカオティックインフレーションとほとんど変わらない。

条件  $V_0 \gg \frac{m^2}{2}\phi^2$  が満たされているならば、状況は変わり

$$n_s \simeq 1 + \frac{2M_{pl}^2 m^2}{V_0}, \quad r \simeq \frac{M_{pl}^2 m^4 \phi^2}{2V_0^2} \ll \frac{M_{pl}^2 m^2}{V_0^2} \quad (149)$$

となり  $n_s > 1$  という点で先のモデルとは異なる。95%で棄却されている。

- k-inflation

Eq(110) に基づくと、

$$c_s^2 = \frac{\epsilon}{3(4-\epsilon)}, \quad n_s = 1 - 2\epsilon, \quad r = 16\epsilon \sqrt{\frac{\epsilon}{3(4-\epsilon)}} \quad (150)$$

となる。r が正準場 single scalar inflation モデルに比べて  $\epsilon^{1/2}$  だけ小さくなるという点で、r の制限で除去されにくい。

#### 4.14 field value による分類

インフレーション間の場の値の変化  $\Delta\phi := |\phi_{CMB} - \phi_{end}|$  ( $\phi_{CMB}$  はインフレーション中にゆらぎがハッブル半径を超える時の場の値、 $\phi_{end}$  はインフレーション終了時の場の値) がプランクスケールより大きい小さいかで大きく分けてインフレーション理論を分類でき、将来的な観測により r が 0.01 を超えるかどうかで検証できる。 $\Delta\phi > M_{pl}$  を large-field model、そうでないものを small-field model という。

場の差を r と結びつけるために次のような簡単な近似を考える。Eq(145) は  $c_s = 1$  の仮定のもとで、 $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 = \frac{M_{pl}^2}{8}r$  と変形できる。ここからインフレーション前後で積分して  $\Delta\phi = M_{pl} \int_{N_{end}}^{N_{CMB}} dN \sqrt{\frac{r}{8}}$  となる。インフレーション中に r がほとんど変化しないと仮定すると、

$$\Delta\phi \simeq M_{pl} \times \mathcal{O}(1) \times \left(\frac{r}{0.01}\right)^{1/2} \quad (151)$$

となる。つまり、large-field model なら近い将来の CMB の B-mode などで検証ができる。

## 5 インフレーション終了後の物理

インフレーションの終了はインフラトン場の崩壊と再加熱を意味する。再加熱の前には非線形に preheating が生じる可能性が指摘されている。その後、再加熱された物質が宇宙のエネルギーの大半を占める輻射優勢期が始まる。再加熱から晴れ上がりまでの時期は直接光学的な観測が不可能な領域であるが素粒子論的に興味深いイベントが集中している。宇宙の温度が下がる中で、電弱相転移に代表される真空の相転移がたびたび起こる。位相欠陥の生成やバリオンジェネシス、レプトジェネシスもこの時期に引き起こされたと考えられる。

### 5.1 再加熱の計算

インフレーションの終わりは、場  $\phi$  がポテンシャルの底で振動しながら別の粒子に崩壊していくことで起こる。

まず振動するインフラトン場が支配的な宇宙は、非相対論的物質が支配する宇宙と同じ時間発展をすることをみる。最初はインフラトン場  $\phi$  の崩壊は考えない。ポテンシャルの底は二次関数  $V(\phi) \sim \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$  で近似できる。ここでは  $m_\phi \sim 10^{13}\text{GeV}$  程度を仮定する。<sup>11</sup>平坦な FLRW 計量での基底の方程式 Eq(94) に代入すると

$$\begin{aligned} 3M_{pl}^2 H^2 &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{m_\phi^2}{2}\phi^2, \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2\phi &= 0 \end{aligned} \quad (152)$$

が基本方程式となる。

インフレーション中はスローロールパラメーターが小さいため  $m_\phi \ll H$  が成立しているが、インフレーションが終わり再加熱期に入ると  $m_\phi \geq H$  となる。Eq(152) で仮定  $m_\phi^2 \gg H^2$ ,  $|\dot{H}|$  の下に  $\tilde{\phi} := a^{3/2}\phi$  を代入すると、再加熱期の運動方程式  $\ddot{\tilde{\phi}} + m_\phi^2\tilde{\phi} \simeq 0$  とその解  $\tilde{\phi}(t) = a^{3/2}\phi(t) = \tilde{\phi}_0 \sim (m_\phi t)$  が得られる。これは単純な調和振動子とみなせるので、ビリアル定理  $\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} \rangle = \langle \frac{m_\phi^2\phi^2}{2} \rangle = \frac{m_\phi^2}{4a^3}\tilde{\phi}_0^2$  が成立する。これらを Eq(152) に代入して

$$\alpha(t) = a_i \left( \frac{t}{t_i} \right)^{3/2}, \quad \phi(t) = \phi_0 \sin(m_\phi t), \quad \phi_0(t) := \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{M_{pl}}{m_\phi t} \quad (153)$$

が得られる。 $a_i$  は再加熱期の始まりの  $a$  の値。よって再加熱期のスカラー場は質量  $m_\phi$  の非相対論的物質と同じ宇宙膨張の効果と及ぼす。

それを踏まえて、インフラトン場  $\phi$  の崩壊を取り扱う。フェルミオン  $\varphi$  とボソン  $\chi$  に崩壊すると仮定して、

$$\mathcal{L}_{int} := -f\phi\bar{\varphi}\varphi - \sigma\phi\chi^2 \quad (154)$$

を導入する。単位時間単位体積の粒子の崩壊数は近似  $m_\phi \gg m_\chi, m_\varphi$  の下で計算できる。Chapter.(A.1) から結果を引用すると

$$n_{\bar{\varphi}\varphi} = \frac{f^2}{16\pi} (\phi_0 m_\phi), \quad n_{\chi\chi} = \frac{1}{16\pi} (\sigma\phi_0)^2 \quad (155)$$

<sup>11</sup>ポテンシャルが近似的にではなく、厳密に  $V(\phi) \sim \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$  型だと、e-foldings とハッブルパラメータの観測から、 $m_\phi \sim 10^{13}\text{GeV}$  程度になることが言える。

である。ここで崩壊率に直すため、単位体積あたりに存在する  $\phi$  の個数  $N_\phi$  を求めたいが、 $\phi$  は粒子描像が一般に使えない。そこで場のポテンシャルエネルギー  $\langle \rho_\phi \rangle = \frac{m_\phi^2 \phi_0^2}{2}$  をインフラトン場の質量  $m_\phi$  で割ったもの  $N_\phi = \langle \rho_\phi \rangle / m_\phi$  を粒子数と解釈する。崩壊率は

$$\Gamma_\varphi = \frac{n_{\bar{\varphi}\varphi}}{N_\phi} = \frac{f^2 m_\phi}{8\pi}, \quad \Gamma_\chi = \frac{n_{\chi\chi}}{N_\phi} = \frac{\sigma^2}{8\pi m_\phi} \quad (156)$$

となる。

以上を踏まえて振動するインフラトン場から輻射 ( $m_\phi \gg m_\varphi, m_\chi$  なら実質的に輻射への転換と見なして良い) へのエネルギー転換を計算する。輻射  $\rho_r$  とインフラトン場  $\langle \rho_\phi \rangle$  の連続方程式に対して転換の効果を入れて

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_r + 4H\rho_r &= \Gamma \langle \rho_\phi \rangle, \\ \langle \dot{\rho}_\phi \rangle + 3H \langle \rho_\phi \rangle &= -\Gamma \langle \rho_\phi \rangle \end{aligned} \quad (157)$$

となり、 $\Gamma$  を定数と見なして積分すると

$$\langle \rho_\phi \rangle = \rho_\phi^{(i)} \left( \frac{a}{a_i} \right)^{-3} e^{-\Gamma(t-t_i)} \quad (158)$$

となる。 $\rho_\phi^{(i)}$  は  $t = t_i$  での  $\langle \rho_\phi \rangle$  の初期値。再加熱の初期では空間膨張の効果が効き、後期では再加熱の効果から  $\exp$  で落ちていく。

再加熱後の宇宙の残存物を考える上で、最大の輻射の温度とまた輻射優勢に移る時間での温度に興味がある。輻射は再加熱と空間膨張の効果が釣り合う点で最大の温度となる。最も再加熱が激しく起こる時間は場の値が大きな初期のことであり、Eq(158) の  $\exp$  項を無視して Eq(157) に代入して  $\rho_r$  について解くと

$$\rho_r(t) = \frac{3\Gamma \rho_\phi^{(i)} t_i^2}{5t} \left( 1 - \left( \frac{t}{t_i} \right)^{\frac{5}{3}} \right) \quad (159)$$

よって  $t \simeq 1.8t_i$  で最大値となりこの時に最高温度

$$\rho_r(1.8t_i) =: \frac{\pi^2}{30} g_* T_{max}^4 \quad (160)$$

となる。ここで  $g_*$  は相対論的な自由度である。インフラトンのエネルギーが複数の粒子に分配されるとその分だけ粒子ごとの温度は下がっていく。

また輻射優勢に移る時期として、大まかにはインフラトン場が急激に減少する時  $t_{reh} := 1/\Gamma$  を取ることにすると、先の近似式を使って<sup>12</sup>

$$\rho_r(t_{reh}) \simeq \frac{3}{5} \Gamma^2 \rho_\phi^{(i)} t_i^2 = \frac{3}{5H_i^2} \Gamma^2 \rho_\phi^{(i)} = \frac{9}{5} \Gamma^2 M_{pl}^2 \quad (161)$$

となる。ここで  $t_i \simeq 1/H_i$  と  $\rho_\phi^{(i)} = 3M_{pl}^2 H_i^2$  を用いた。この時の温度は、 $g_* \sim 100$  程度とすると  $T_{reh} = 0.5 \sqrt{\Gamma M_{pl}}$  程度になる。

このように定めた  $T_{reh}$  が大きすぎると、SUSY 粒子などが過剰生成されてモノポールと同様の問題を引き起こすため、上限がモデルごとに付く。

<sup>12</sup> 荒い近似だが instantaneous reheating なら大した違いにならない。

## 5.2 preheating の存在

ラグランジアンに次のような高次相互作用

$$\mathcal{L}_{int} := -\frac{g^2}{2}\phi^2\chi^2 \quad (162)$$

が含まれると非摂動的な粒子生成が再加熱と同時に生じることが知られている。先の再加熱よりも早い時間に生じることから preheating と呼ばれる。

次の様に解析する。スカラー場  $\phi, \chi$  に上記の相互作用が存在する時、FLRW メトリックを背景場として  $\chi$  についての運動方程式は運動量表示で

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2\right)\chi_k = 0 \quad (163)$$

となる。ただしこの時インフラトン場は Eq(153) での振動をする背景場と仮定する。この方程式を変数  $X := a^{3/2}\chi_k$  で書くことで次の形に変形できる。

$$\ddot{X}_k + \left[\frac{k^2}{a^2} + g^2\phi_0^2(t)\sin^2(m_\phi t) + m_\chi^2 - \frac{9}{4}H^2 - \frac{3}{2}\dot{H}\right]X_k = 0 \quad (164)$$

ただし  $\phi_0(t)$  は Eq(153) で導入したものである。さらに時間変数を  $z := m_\phi t$  と書くことで

$$\frac{d^2}{dz^2}X_k + [A_k - 2q \cos(2z)]X_k = 0 \quad , \quad (165)$$

$$A_k := 2q + \frac{k^2}{a^2 m_\phi^2} + \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \quad , \quad q := \frac{g^2\phi_0^2(t)}{4m_\phi^2}$$

にまとまる。ただし近似  $m_\phi^2 \gg H^2, |\dot{H}|$  で幾つかの項は落としている。これを Mathieu 方程式という。

この方程式は成長解を持ちうる。静的宇宙では  $q \ll 1$  と  $A_k = l^2$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) において narrow resonance という共鳴的成長を生じる。膨張宇宙では broad resonance が知られており、場  $\phi$  が  $\phi = 0$  を通過するたびに断熱条件  $|\dot{\omega}| \ll \omega_k^2$  ( $\omega_k^2 := \frac{k^2}{a^2} + g^2\phi_0^2(t)\sin^2(m_\phi t) + m_\chi^2$ ) が破れ、粒子生成が起こる。この共鳴で典型的に  $\frac{k}{a} < m_\phi$  のモードが成長する。

$\chi$  場の成長に伴う  $\phi$  への反作用は平均場近似で次のように扱える。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + (m_\phi^2 + g^2\langle\chi^2\rangle)\phi = 0 \quad (166)$$

$\langle\chi^2\rangle$  が成長すると、有効的な  $\phi$  の質量が変わり、振動が一様でなくなるため共鳴的な粒子生成が起こらなくなる。

## 6 ビッグバン元素合成

ビッグバン元素合成 (Bigbang Nucleo synsesys ; BBN) はもっとも成功した精密宇宙論の一つである。実験室で確かめられた原子核の性質から、この宇宙に存在する物質の分布を説明することが出来ている。その精密さから宇宙論パラメータに関して重要な制限の一つとなっている。

## 6.1 脱結合

一つの粒子 A が単位時間あたりに粒子 B と散乱する回数を反応率  $\Gamma_A := n \langle \sigma v \rangle$  ( $n$ :B の数密度、 $\langle \sigma v \rangle$ :反応断面積と速度の積を熱平均) という。

2 体反応  $AB \rightarrow \{F\}$  において、A 粒子に対して宇宙膨張下で粒子 B との反応が有効的に起こるためには反応が起こる向きにおいて  $\Gamma_A > H$  が成立する必要がある。ポイントは、この関係は 2 体反応に対して定義されるということ、および A がこの反応で平衡にあっても B が A より圧倒的に多い場合は必ずしも B も平衡にあるとは限らないということ。(大抵は A,B の粒子数のスケールが同程度なので相互に平衡が成立する。)

例えばこの評価から、ニュートリノ脱結合は  $T \sim 1.5 \text{ MeV}$  で起こる。また中性子と陽子の入れ替え  $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$  は  $T_d := 0.8 \text{ MeV}$  程度で脱結合する。

## 6.2 BBN 解析からの制限

BBN の詳しい解析はシミュレーションによるが、バリオン数密度比  $\eta_b := \frac{n_b}{n_\gamma}$  は元素合成における温度に対して敏感である。観測される元素量との制限から

$$4.7 \times 10^{-10} < \eta_b < 6.5 \times 10^{-10} \quad , \quad (95\%CL) \quad , \\ 0.017 < \Omega_b^0 h^2 < 0.024 \quad (167)$$

がわかる。

## 6.3 Sakharov condition

宇宙の粒子反粒子非対称性を説明するために次の 3 条件が必要である。

- C、CP 変換についての対称性の破れ
- バリオン数非保存
- 熱的非平衡

この条件を正確に言うなら「熱平衡のときには逆反応や他のバリオン数非保存反応と合わさって平均的にバリオン数は保存されているが、非平衡になってある反応（主に崩壊）のみが行われるようになるとその反応の C、CP 対称性の破れからバリオン数生成が起こる」ことで粒子反粒子非対称性が生成される。

粒子崩壊を通じてバリオン数が生成されるシナリオを考える。1 組の  $X, \bar{X}$  の崩壊で生成される有効バリオン数  $\Delta B$  が、現在の粒子反粒子非対称性を説明するためにはどれくらいの大きさが必要かを見積もる。X が相対論的な温度で decouple した後、decay していくと仮定する。 $n_X$  は熱平衡より  $n_X \sim n_{\bar{X}} \sim n_\gamma$  となるので生成バリオン数は  $n_b \sim \Delta B n_\gamma$  となる。そこでエントロピー  $s \sim g_* n_\gamma$  と合わせて  $g_* \sim 10^2$  程度として

$$\Delta B \sim g_* \frac{n_b}{s} \sim 10^{-8} \quad (168)$$

と見積もれる。X の崩壊のバリオン数非対称過程への分岐比はこの程度必要になる。

## 6.4 スファレロン効果

電弱の Higgs が破れるよりも上のスケールでは弱い相互作用のアノマリーが非摂動的に真空中に chern-simons 電荷を生み出してバリオン数レプトン数が生成されるが、それは  $B - L$  に比例した量になる。よって宇宙初期には  $B - L$  を非保存にする過程があれば良い。

## Part II

# スカラー揺らぎの計算

## 7 CMB 揺らぎの支配方程式

CMB で放出された光は宇宙全体の初期温度を反映した揺らぎを持っている。しかし、実際に観測される光は再結合前後の薄れつつある電子プラズマ散乱やザックスヴォルヘ効果などの重力的な揺らぎを経験して初めて現在の測定に入ってくる。つまりは CMB スペクトルの解析には宇宙のあらゆる時間における光の揺らぎと、それに影響する電子密度揺らぎ、質量揺らぎ、重力揺らぎを取り込む必要がある。以下ではボルツマン方程式により宇宙全体の光の時間発展を追う。特に CMB と直接結びつく量が、後で定義する光子の局所的な温度揺らぎ  $\Theta(\eta, x^i, n^i)$  ( $n^i$  は光の運動量ベクトルの向きで  $p^i =: pn^i$ ) であり、これの時間発展を追っていく。

### 7.1 再結合の評価

最初に晴れ上がり前の状況を調べるため、電子が陽子に束縛される反応  $p + e^- \leftrightarrow H + \gamma$  を考慮したときの、温度  $T$  に対するイオン化率  $X_p := \frac{n_p}{n_p + n_H}$  を計算したい。

温度  $T$  での非相対論的粒子の数密度は

$$n_X = g_X \left( \frac{m_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m_X - \mu_X)/T} \quad (169)$$

である。化学ポテンシャルの関係  $\mu_p + \mu_e = \mu_H$  を用いて比を計算するとサハロフの関係式が出る。

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{Q/T} \quad (170)$$

ここで  $Q = m_p + m_e - m_H \sim 13.6\text{eV}$  は水素のイオン化エネルギー。

粒子数について、電荷保存とバリオン数保存を用いて (ヘリウム合成など水素の他は無視して) 任意の時間で  $n_e = n_p$ 、 $n_b = n_p + n_H$  が成立する。よって  $n_e = n_p = n_b X_p = n_\gamma \eta_b X_p$  と書ける。 $\eta_b := \frac{n_b}{n_\gamma}$  はバリオン密度比。再結合付近で  $g_* = 2$  での光子の数密度と温度の関係

$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$  も用いて、

$$n_e = n_p = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \eta_b X_p \quad (171)$$

となる。以上の計算をまとめて、 $X_p$  の決定式として

$$\frac{1 - X_p}{X_p^2} = 4\zeta(3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \eta_b \left( \frac{T}{m_e} \right) e^{Q/T} \quad (172)$$

がわかる。 $X_p = \frac{1}{2}$  を再結合期と定義すると、このときの温度は  $T_{rec} = 0.324\text{eV}$  であり  $z_{rec} = 1380$  となる。(ただし  $\eta$  を通じて  $\Omega_b^{(0)}$  に依存しているため観測値を入れて計算した。)

## 7.2 晴れ上がりの評価

再結合の後に光が直進して CMB が生まれる瞬間を考えるため、光のトムソン散乱  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  が宇宙膨張から decouple する時期  $\Gamma_T = H$  を求める。単純には電子個数が Eq(172) で決まるためそれが減少する時間と一致するが、精密に計算すると多少変わる。

ズレを見積もるためにトムソン散乱における光の反応率を計算すると

$$\Gamma_T := n_e \sigma_{TC} = n_\gamma^{(0)} \eta_b \sigma_{TC} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 X_p(T) \quad (173)$$

ただし電子密度を Eq(171) で光子密度に変形して、 $n_\gamma \propto T^3$  を利用して現在の光子密度  $n_\gamma^{(0)}$  に結びつけた。

晴れ上がりの頃の宇宙は物質優勢期に相当するので  $H \sim H_0 \sqrt{\Omega_m^{(0)}} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2}$  となる。

以上から晴れ上がりの温度  $T_*$  を次で定義する。

$$1 = \frac{\Gamma}{H} = \frac{n_\gamma^{(0)} \eta_b \sigma_{TC}}{H_0 \sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \left( \frac{T_*}{T_0} \right)^{3/2} X_p(T_*) \quad (174)$$

これを  $\Omega_m^{(0)} = 0.31$ ,  $T_0 = 2.348 \times 10^{-4} eV$  などを代入すると  $T_* = 0.263 eV$ ,  $z_* = 1120$  となる。より詳細な計算により  $z_* = 1090$  という値が知られている。

## 7.3 局所熱平衡での諸量

局所熱平衡が成立する状態では、物理量は密度関数  $f(x^\mu, P^\mu)$  で表せる。特にスカラー揺らぎがどのように  $\Theta(\eta, x^i, n^i)$  (後で定義する光の温度摂動) に効くかを考える上では、メトリックのベクトル、テンソル成分は無視して取り扱う。メトリックはこの場合、ニュートンゲージで

$$d^2s = a^2(\eta) \left[ - (1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right] \quad (175)$$

を使う。物質のスカラー揺らぎは  $\delta\rho$ ,  $v$  を使う。(ニュートンゲージ以外では次のゲージ不変量  $\delta\rho^{(GI)} = \delta\rho + \rho' (B - E')$ ,  $v^{(GI)} = v + E'$  を用いる。)

ボルツマン方程式の基本は密度関数  $f(x^\mu, P^\mu)$  である。重力場中でのローレンツ不変位相空間体積 (LIPS) を考える。

$$d\Pi := \frac{\sqrt{-g} d^4P}{(2\pi)^3} \theta(P^0) \delta(g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu + m^2) = \frac{\sqrt{-g} d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{E \sqrt{|g_{00}}}}, \quad (176)$$

$$E := \sqrt{p^2 + m^2}, \quad p^2 := g_{ij} P^i P^j$$

で定義する。またエネルギー積分を処理した結果も書いてある。<sup>13</sup>

ここで物理的に望ましい運動量の定義を考える。 $P^\mu$  はゲージに依存するため通常の意味の運動量とはみなすことができない。ただし  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  という関係式は、時間と空間成分が分離できるようなメトリックにおいて常に書くことができる。<sup>14</sup>そして局所的にはメトリックをゲージ変換して局所ローレンツ座標系にすることでエネルギーと時間を定義している。そこ

<sup>13</sup>テンソルゆらぎではこの変形は上手く行かない。というのも、このように簡単な形で変形できるのは、スカラーゆらぎで上の条件をみたすような  $\mathbf{p}$  が  $\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}$  として構成できて、かつこの比例係数が  $\mathbf{P}$  に依存しないように作れるからである。テンソルゆらぎだと比例係数が  $\mathbf{P}$  に依存するため、ヤコビアンが上のように上手く打ち消さない。

<sup>14</sup>ニュートンゲージのように  $\delta g_{0i}$  成分のスカラー揺らぎ  $B$  を 0 にするゲージではこの条件が満たされる。ベクトル揺らぎは減衰するので無視してよい。



でFLRW時空での物理的なエネルギー、運動量の定義として先の  $E, p$  を用いることは合理的である。そして物理的な  $p$  の積分で書くことで位相空間体積が簡単になる。Eq(176) を  $P^\mu$  について解くと

$$P^0 := \frac{E}{a} (1 - \Psi) \quad , \quad P^i := \frac{p}{a} (1 - \Phi) n^i \quad (177)$$

が得られる。ここで  $n^i$  は  $P^i$  方向の単位ベクトル。これで変形すると上の LIPS は

$$d\Pi = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \quad (178)$$

となる。

次に局所熱平衡を仮定して熱力学量を定義する。粒子の分布関数を摂動部分と背景部分に分けて

$$f(\eta, x^i, p, n^i) = f^{(0)}(p, \eta) + \delta f(\eta, x^i, p, n^i) \quad (179)$$

と書く。ここから奇関数の積分は無視して EnergyMomentumTensor を構成する。粒子の内部自由度を  $g_*$  として

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &:= 2g_* \int d\Pi P^\mu P_\nu f = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{P^\mu P_\nu}{E} f \\ &= \begin{cases} -\frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p E (f^{(0)} + \delta f) & , \quad (= T_0^0) \quad , \\ \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p p n_i \delta f & , \quad (= T_i^0) \quad , \\ \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2}{E} \left( \frac{1}{3} \delta_j^i f^{(0)} + n^i n_j \delta f \right) & , \quad (= T_j^i) \quad , \end{cases} \end{aligned}$$

と書ける。ただし摂動の一次で

$$P_0 = -aE (1 + \Psi) \quad , \quad P_i = ap (q + \Phi) n_i \quad (180)$$

である。これを用いてニュートンゲージでの EMF と密度、圧力の関係

$$T_0^0 = -(\rho + \delta\rho) \quad , \quad T_i^0 := (\rho + P) v_{;i} \quad , \quad T_j^i = (P + \delta P) \delta_j^i + \pi_j^i \quad (181)$$

を逆に解くことで摂動量が分配関数で書ける。

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p E f^{(0)} \quad , \quad P = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2}{3E} f^{(0)} \quad , \\ \delta\rho &= \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p E \delta f \quad , \quad v_{;i} = \frac{1}{\rho + P} \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p p n_i \delta f \quad , \\ \delta P &= \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2}{3E} \delta f \quad , \quad \pi_j^i = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2}{E} \left( n^i n_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \right) \delta f \quad (182) \end{aligned}$$

#### 7.4 相対論的摂動ボルツマン方程式

ボルツマン方程式を用いて摂動の時間発展を計算する。フェルミ統計、ボース統計を加味したボルツマン方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= P^0 \frac{\partial f}{\partial x^0} + P^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{dn^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial n^i} \\ &= \frac{1}{2} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4 (P + P_2 - P_3 - P_4) |\mathcal{M}|^2 [f_3 f_4 (1 \pm f) (1 \pm f_2) - f f_2 (1 \pm f_3) (1 \pm f_4)] \end{aligned} \quad (183)$$

ただし  $\lambda$  は粒子の世界線を表し、運動量との関係は  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = P^\mu$  で定義する。

B-mode を見る時は光の偏光ごとにボルツマン方程式を考えるべきだが、ひとまずここでは無視して spin sum を取ったものを考える。

この表式は次の様に導かれる。ボルツマン方程式は  $\frac{df}{dt} = (\text{単位時間での増減})$  で書かれる。Eq(183) の左辺は

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{df}{dt} = P^0 \frac{df}{dt} \quad (184)$$

としてエネルギー因子が密度関数の時間変化に掛かっている。

右辺の衝突項について、まず 1 粒子状態での表式を考え、次に統計の効果を加える。単位時間での増減は、散乱  $f_3 f_4 \rightarrow f f_2$  での散乱確率

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &:= d\Pi \prod_{f=2,3,4} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\langle PP_2 | P_3 P_4 \rangle|^2 \\ &= (VT) d\Pi \prod_{f=2,3,4} \int \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4(P+P_2-P_3-P_4) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (185)$$

から導く。ここで  $d\Pi$  は  $f$  に対応する粒子の LIPS である。なぜ状態の足し合わせが  $d^3 P$  ではなく  $\frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 2E_f}$  になるかという点、運動量固有状態の定義が  $|p\rangle := \sqrt{2E} a_p^\dagger |0\rangle$  であり、ノルム  $\langle p | p \rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p}=0)$  を持つからである。そこで散乱確率  $\mathcal{P}$  を  $f = 2, 3, 4$  について足し合わせ、更に  $f$  についての積分を 1 粒子についての規格化に取り替える  $d\Pi \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3 2P^0 \delta^3(\mathbf{p}=0)} = \frac{1}{2P^0 V}$  ことで

$$(\text{時間 } T \text{ での増減}) = \frac{T}{2P^0} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P+P_2-P_3-P_4) |\mathcal{M}|^2 \quad (186)$$

よって単位時間に直すと

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2P^0} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P+P_2-P_3-P_4) |\mathcal{M}|^2 \quad (187)$$

でありこの両辺に  $P^0$  を掛けて Eq(183) となる。

統計性効果は次の様に理解できる。通常の場合の理論では真空にしか生成消滅演算子は掛けないが、占有された状態に対してボソンでは  $a^n |n\rangle = \sqrt{(n+1)!} |0\rangle$  のように因子が掛かる。フェルミオンだと 0 になる。これを取り込むと上の表式になる。

## 7.5 電子雲中の光子の温度ゆらぎの方程式

まず光子の温度揺らぎ  $\Theta(\eta, x^i, n^i)$  を次のように定義する。

$$\Theta(\eta, x^i, n^i) := \frac{1}{4} \frac{\int dp p^3 \delta f(\eta, x^i, p, n^i)}{\int dp p^3 f^0(p)} \quad (188)$$

なぜここで  $p^3$  が入るかという点、 $d^3 p p$  が原因となっている。実際、 $\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} [e^{p/T} - 1]^{-1} = -\frac{p}{T} \frac{\partial f}{\partial p}$  を考慮すると  $\Theta = \frac{\delta T}{T}$  がわかる。今、 $p$  は位相空間での座標であり摂動は考えないことに注意。

Eq(183) に  $m=0$  を代入して左辺、右辺を  $\Theta(\eta, x^i, n^i)$  でまとまるように計算していく。

まず左辺の運動項について、摂動の0次で0になる量として  $\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial n^i}, (f \text{ に依存性がない}), \frac{dn^i}{d\lambda}$  (空間の等方性に反する) がある。これを踏まえて摂動の1次までの式を書くと

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{p}{a} (1 - \Psi) \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{p}{a} n^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (189)$$

となる。この式を変形して

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{p}{a} (1 - \Psi) \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} - p \left( aH + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial p} \right] + \frac{p}{a} n^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (190)$$

となる。

prf:ボルツマン方程式運動項の変形

$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\lambda}$  を次のように変形していく。まず  $\frac{d\eta}{d\lambda} = P^0 = \frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{p}{a} (1 - \Psi)$  及び  $\frac{dx^i}{d\eta} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\eta} = \frac{P^i}{P^0} = (1 + \Psi - \Phi) n^i$  に留意。次に、 $\frac{dp}{d\eta}$  は測地線方程式から

$$\begin{aligned} -\Gamma_{\nu\lambda}^0 P^\nu P^\lambda &= \frac{dP^0}{d\lambda} \\ &= \left( \frac{d\eta}{d\lambda} \right) \frac{d \frac{p(1-\Psi)}{a}}{d\eta} \\ &= \frac{p}{a} (1 - \Psi) \left( p' \frac{1}{a} (1 - \Psi) - \frac{a'}{a} \frac{p}{a} (1 - \Psi) - \Psi' \frac{p}{a} \right) \\ &= \frac{pp'}{a^2} (1 - 2\Psi) - H \frac{p^2}{a^2} (1 - 2\Psi) - \Psi' \frac{p^2}{a^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{d\eta} &= aH + \frac{d\Psi}{d\eta} - a^2 \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{P^\nu P^\lambda}{p^2} (1 + 2\Psi) \\ &= aH + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - a^2 \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{P^\nu P^\lambda}{p^2} (1 + 2\Psi) \\ &= aH + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - a^2 \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{P^\nu P^\lambda}{p^2} (1 + 2\Psi) \\ &= -aH - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (191)$$

ただし最後の変形では

$$\Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{P^\nu P^\lambda}{p^2} = \frac{g^{00}}{2} \left( 2 \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial \eta} \right) \frac{P^\nu P^\lambda}{p^2} = \frac{1 - 2\Psi}{a^2} \left( 2aH + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + 2n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \quad (192)$$

を用いた。

次にこの式に  $f = f^{(0)} + \delta f$  を代入して摂動の 0,1 次項に分けて

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \frac{p}{a} \left( \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \eta} - paH \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right) \\ &+ \frac{p}{a} \left[ \frac{\partial \delta f}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \delta f}{\partial x^i} - paH \frac{\partial \delta f}{\partial p} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \right] - \frac{p}{a} \Psi \left( \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \eta} - paH \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (193)$$

となる。この 0 次項は  $T \propto a^{-1}$  を用いて 0 になる。衝突項側も後で見ると最低次は 0 である。微小量の 1 次項に対しては  $\delta f = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta$  を用いると、

$$\frac{d\delta f}{d\lambda} = -\frac{p^2}{a} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \quad (194)$$

となる。

次に衝突項を考える。主要な効果としてトムソン散乱  $\gamma(\mathbf{p}) + e^-(\mathbf{q}) \leftrightarrow \gamma(\mathbf{p}') + e^-(\mathbf{q}')$  を取り扱う。CMB について電子との散乱が意味を持つようになる時間は晴れ上がり付近からその後である。晴れ上がり付近以降では、宇宙の温度は電子質量より十分小さく、 $f_e \ll 1$  である。よって衝突項は

$$C_\gamma[f(\mathbf{p})] = \frac{1}{2} \int d\Pi_q d\Pi_{p'} d\Pi_{q'} (2\pi)^4 \delta^4(P+Q-P'-Q') |\mathcal{M}|^2 [f(p')f_{\Delta}(q')(1 \pm f(p)) - f(p)f_{\Delta}(q)(1 \pm f(p'))] \quad (195)$$

となる。電子の非相対論的近似を用いることで、 $d\Pi_q \sim \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2m_e}$ 、 $d\Pi_{q'} \sim \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2m_e}$  である。またトムソン散乱の散乱振幅は

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 24\pi m_e^2 \sigma_T (1 + \cos^2 \theta) \quad , \\ \sigma_T &:= \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} \quad , \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = pp' \cos \theta \end{aligned} \quad (196)$$

であり

$$\begin{aligned} C_\gamma[f(\mathbf{p})] &= \frac{3\sigma_T}{64\pi^4} \int d^3q d^3p' d^3q' \frac{1 + \cos^2 \theta}{p'} \delta \left( p - p' + \frac{q^2 - q'^2}{2m_e} \right) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}') \\ &\times [f(p')f_{\Delta}(q')(1 \pm f(p)) - f(p)f_{\Delta}(q)(1 \pm f(p'))] \end{aligned} \quad (197)$$

と書ける。まず積分  $\int d^3q'$  をデルタ関数で処理する。トムソン散乱では電子の運動量  $m_e \ll |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|, q$  を取り扱っているため、

$$\begin{aligned} \delta \left( p - p' + \frac{q^2 - q'^2}{2m_e} \right) &\simeq \delta \left( (p - p') \left( 1 - \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e (p - p')} \right) \right) \\ &\simeq \left( 1 + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e (p - p')} \right) \delta(p - p') \\ &= \left( 1 + \frac{\partial}{\partial (p - p')} \left( \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e} \right) \right) \delta(p - p') \\ &= \left( 1 - \left( \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial (p - p')} \right) \delta(p - p') \\ &= \delta(p - p') + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e} \frac{\partial}{\partial p'} \delta(p - p') \end{aligned} \quad (198)$$

となる。ただし  $m_e \ll q$  から  $\left(1 - \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{m_e(p - p')}\right) \neq 0$  であることを用いて、途中で部分積分を用いてデルタ関数への微分を動かした。また電子の運動量移行が小さい部分が低エネルギー散乱では効くことを考慮すると  $f_{\ell}(q') \sim f_{\ell}(q) + \frac{\partial f_{\ell}}{\partial q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  により密度関数をまとめることができる。(ただし計算すると  $\frac{\partial f_{\ell}}{\partial q}$  項が  $q$  積分の表面項となるため消える。) さらに電子の数密度  $n_e$  と速度ベクトル  $\mathbf{v}_b$  が

$$n_e = 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_{\ell}(q) \quad , \quad \mathbf{v}_b = \frac{2}{n_e} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}}{m_e} f_{\ell}(q) \quad (199)$$

で与えられることを考慮して式変形に用いる。電子の分布関数は最低次では一様等方なので速度は1次の微小量である。<sup>15</sup> まとめて衝突項は次のように書ける。

$$C_{\gamma}[f(\mathbf{p})] = \frac{3\sigma_T n_e}{16\pi} \int d^3p' \frac{1}{p'} \left[1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] [f(p') - f(p)] \\ \times \left[\delta_{p-p'} + \mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial p'} \delta_{p-p'}\right] \quad (200)$$

最後に  $f(\mathbf{p}) = f^{(0)}(p) + \delta f(p, \mathbf{n})$  を代入してデルタ関数を  $d^3p = dp d\Omega$  で処理して

$$C_{\gamma}[f(\mathbf{p})] = \frac{3\sigma_T n_e}{16\pi} p \int d\Omega' \left[1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] \left[\delta f(p, \mathbf{n}') - \delta f(p, \mathbf{n}) - \frac{\partial f^{(0)}(p)}{\partial p} \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{p}\right] \quad (201)$$

よって [] の中身は一次の微小量しかない。先と同じように光の温度分布で書き直すと

$$C_{\gamma}[f(\mathbf{p})] = -\frac{3\sigma_T n_e}{16\pi} p^2 \frac{\partial f^{(0)}(p)}{\partial p} \int d\Omega' \left[1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] [\Theta(\mathbf{n}') - \Theta(\mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}] \quad (202)$$

以上より光のボルツマン方程式を温度分布に対して書き直したものとして

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right) = \frac{3\sigma_T n_e a}{16\pi} \int d\Omega' \left[1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] [\Theta(\mathbf{n}') - \Theta(\mathbf{n}) + \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}] \quad (203)$$

がわかる。

光の温度ゆらぎ  $\Theta(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n})$  の方程式を解くために摂動量  $\Theta, \Phi, \Psi, \mathbf{v}_b$  を次のようにフーリエ展開

$$\Theta =: \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad , \quad \Psi =: \dots \quad , \quad \Phi =: \dots \quad , \\ \mathbf{v}_b =: \frac{\partial v_b}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k v_{bk} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (204)$$

して書くと (ただし電子速度  $\mathbf{v}_b$  はスカラー揺らぎに起因すると考えてスカラー速度ポテンシャル  $v_b$  で書いた。)

$$\Theta'_k + i\mu k \Theta_k + \Phi'_k + i\mu k \Psi_k = \frac{3\sigma_T n_e a}{16\pi} \int d\Omega' \left[1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] [\Theta_k(\mathbf{n}') - \Theta_k(\mathbf{n}) + i\mu k v_{bk}] \quad (205)$$

となる。ただし  $\mu := \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{k}$  を用い、' は  $\eta$  微分を表している。

<sup>15</sup>ここで、注意すべきこととして、以降の解析で  $v_b$  をバリオンの速度摂動と同一視するという点である。これが許される理由として自由電子数が多い状況 (宇宙の晴れ上がりまで) では電子とバリオンは電磁的に結合しており、陽子電子プラズマとして同じ速度を持つと考えてよいから。そのため今回の解析では、光のボルツマン方程式における電子の効果は晴れ上がりより十分後のバリオン揺らぎと電子の揺らぎが decouple する温度 (つまりは星間電子の再電離など) では正確ではない。だが晴れ上がり以降では重力揺らぎや宇宙膨張の効果なども効いてくるため電子の効果は主要でなくなるため、気にせず現在までの計算に使ってよい。再電離などは手を入れる必要がある。

## 7.6 光の温度分布の多重極展開

先に考えた Eq(205) の角度積分を処理するために  $\Theta_k$  の角度  $n^i$  依存性を球面調和関数で処理する。

球面調和関数  $Y_l^m(\mathbf{n})$  やルジャンドル関数  $\mathcal{P}_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$  は次の関係式を持つ。

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_l^{m*}(\mathbf{n}) Y_{l'}^{m'}(\mathbf{n}) &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} && \text{直交関係} \quad , \\ \mathcal{P}_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_l^m(\mathbf{n}) Y_l^{m*}(\mathbf{n}') && , \\ \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \mathcal{P}_{l'}(\mu) &= \frac{1}{2l+1} \delta_{ll'} && \text{直交関係} \quad , \\ (l+1) \mathcal{P}_{l+1}(\mu) &= (2l+1) \mu \mathcal{P}_l(\mu) - l \mathcal{P}_{l-1}(\mu) && \text{漸化式} \quad (206) \end{aligned}$$

温度揺らぎ  $\Theta_k(\mathbf{n})$  を分解していく。一般的には球面調和展開により

$$\Theta_k(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{k(lm)} Y_l^m(\mathbf{n}) \quad (207)$$

と展開する。ただし今は光について偏光成分を平均化する近似を行っており、 $\Theta_k(\mathbf{n})$  は  $\mathbf{n}$  に対して  $\mu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} / k$  でしか依存しない。そのため  $m$  に関する情報を落とすことが出来て、ルジャンドル展開を用いることができて

$$\begin{aligned} \Theta_k(\mathbf{n}) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Theta_{(l)(k, \eta)} \mathcal{P}_l(\mu) \quad , \\ \Theta_{(l)(k, \eta)} &= i^l \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \Theta_k(\mathbf{n}) \mathcal{P}_l(\mu) \quad (208) \end{aligned}$$

という展開が可能である。

以上の二つの展開の係数を比較すると

$$\begin{aligned} \sum_m a_{k(lm)} Y_l^m(\mathbf{n}) &= (-i)^l (2l+1) \Theta_{(l)} \mathcal{P}_l(\mu) \quad , \\ a_{k(lm)} &= 4\pi (-i)^l \Theta_{(l)(k, \eta)} Y_l^{m*}(\mathbf{k}/k) \quad (209) \end{aligned}$$

となる。

まず Eq(205) の角度因子  $1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 = \frac{4}{3} \mathcal{P}_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') + \frac{2}{3} \mathcal{P}_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$  であることを利用して

$$\begin{aligned} &\int d\Omega' \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 \right] \Theta_k(\mathbf{n}') \\ &= \int d\Omega' \left[ \frac{4}{3} \mathcal{P}_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') + \frac{2}{3} \mathcal{P}_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \right] \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{k(lm)} Y_l^m(\mathbf{n}') \\ &= 4\pi \int d\Omega' \sum_{m'} \left[ \frac{4}{3} Y_0^{m'}(\mathbf{n}) Y_0^{m'*}(\mathbf{n}') + \frac{2}{3} \frac{1}{5} Y_2^{m'}(\mathbf{n}) Y_2^{m'*}(\mathbf{n}') \right] \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{k(lm)} Y_l^m(\mathbf{n}') \\ &= 4\pi \sum_m \left[ \frac{4}{3} Y_0^m(\mathbf{n}) a_{k(0m)} + \frac{2}{15} Y_2^m(\mathbf{n}) a_{k(2m)} \right] \quad (210) \end{aligned}$$

となる。更に  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \theta$ ,  $d\Omega' = 2\pi \sin \theta d\theta$  と書いて

$$\int d\Omega' \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 \right] [-\Theta_k(\mathbf{n}) + i\mu k v_{bk}] = \frac{16\pi}{3} [-\Theta_k(\mathbf{n}) + i\mu k v_{bk}] \quad (211)$$

となる。これらを合わせて、Eq(209) より  $a_{k(00)} Y_0^0(\mathbf{n}) = \Theta_{(0)(k, \eta)}$ ,  $\sum_m a_{k(2m)} Y_2^m(\mathbf{n}) = -5\Theta_{(2)(k, \eta)} \mathcal{P}_2(\eta)$  を使うと Eq(205) は次の形になる。

$$\Theta'_k + i\mu k \Theta_k + \Phi'_k + i\mu k \Psi_k = \sigma_T n_e a \left[ \Theta_{(0)(k, \eta)} - \Theta_k(\mathbf{n}) + i\mu k v_{bk} - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\eta) \Theta_{(2)(k, \eta)} \right] \quad (212)$$

この式の  $\Theta_k(\mathbf{n})$  をルジャンドル関数で展開すると  $\mathbf{n}$  依存性は  $\mu$  依存性に移る。そしてルジャンドル多項式の漸化式を用いて、ルジャンドル多項式の各次数ごとに書くと次のような式が得られる。

$$\begin{aligned} \Theta'_{(0)(k, \eta)} + k\Theta_{(1)(k, \eta)} + \Phi'_k(\eta) &= 0 \quad , \\ \Theta'_{(1)(k, \eta)} - \frac{k}{3} (\Theta_{(0)(k, \eta)} + \Psi_k(\eta) - 2\Theta_{(2)(k, \eta)}) &= -\sigma_T n_e a \left( \Theta_{(1)(k, \eta)} + \frac{1}{3} k v_{bk}(\eta) \right) \quad , \\ \Theta'_{(2)(k, \eta)} + \frac{k}{5} (3\Theta_{(3)(k, \eta)} - 2\Theta_{(1)(k, \eta)}) &= -\frac{9}{10} \sigma_T n_e a \Theta_{(2)(k, \eta)} \quad , \\ \Theta'_{(l)(k, \eta)} + \frac{k}{2l+1} ((l+1)\Theta_{(l+1)(k, \eta)} - l\Theta_{(l-1)(k, \eta)}) &= -\sigma_T n_e a \Theta_{(l)(k, \eta)} \quad , \quad (l \geq 3) \end{aligned} \quad (213)$$

## 7.7 CMB と光の揺らぎの関係

ようやく求めた Eq(213) を解くことで CMB 観測量が与えられることを示す。

まず  $\Theta_{(l)(k, \eta)}$  を観測量と結びつける。光の温度揺らぎの定義 Eq(188) を Eq(208) に代入して、分母は光の背景部分のエネルギー密度  $\rho_\gamma = \frac{g_*}{2\pi^2} \int dp p^3 f^0(p)$  で処理すると

$$\Theta_{(l)(k, \eta)} = \frac{i^l g_*}{16\pi^2 \rho_\gamma} \int_{-1}^1 d\mu \int dp p^3 \mathcal{P}_{l(\mu)} \delta f = \frac{i^l g_*}{4\rho_\gamma} \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} p \mathcal{P}_{l(\mu)} \delta f \quad (214)$$

となる。

Eq(182) を参考に熱力学量と結びつける。光のエネルギー摂動  $\delta\rho_\gamma = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int dp^3 p \delta f(x, p)$  を  $\mathbf{x}$  に関してフーリエ変換  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}$  した上で

$$\Theta_{(0)(k, \eta)} = \frac{1}{4} \delta_\gamma \quad , \quad \delta_\gamma := \frac{\delta\rho_\gamma k}{\rho_\gamma} \quad (215)$$

となる。

次に光の速度ポテンシャル  $v_\gamma$  について Eq(182) の表式で  $v_\gamma(x)$  と  $\delta f(p, x)$  の  $\mathbf{x}$  依存性についてフーリエ展開して  $(v_{,i})$  の微分は  $k^i$  成分となり  $n^i = p^i/p$  と縮約する、つまり  $\mu$  になる)

$$v_{\gamma k} = -\frac{i}{k} \frac{3}{4\rho_\gamma} g_* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \mu \delta f \quad (216)$$

となる。ここから  $\Theta_{(1)(k, \eta)} = -\frac{1}{3} k v_\gamma$  となる。

次に非等方テンソル  $\pi_{\gamma j}^i$  はテンソルの分解公式によりスカラーモードの寄与が  $\pi_{\gamma j}^i = \Pi_{\gamma; j}^i - \frac{1}{3} \nabla^2 \Pi_\gamma \delta_j^i$  としてスカラー成分  $\Pi_\gamma$  で代表させることができる。(ベクトル、テンソルモードは今

回取り込んでいないので自動的に0になっている。) よって速度ポテンシャルと同様に  $x$  依存性をフーリエ展開して落とすと

$$\Pi_{\gamma k} = -\frac{3}{2k^4} g_* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p k^2 \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (217)$$

と書いて  $\Theta_{(2)(k, \eta)} = \frac{k^2 \Pi_{\gamma}}{4\rho_{\gamma}}$  となる。

観測量との比較には  $\Theta_{(0)(k, \eta)}$ ,  $\Theta_{(1)(k, \eta)}$ ,  $\Theta_{(2)(k, \eta)}$  を Eq(213) から計算すればよいが、この方程式系はより高次の  $\Theta_{(i)(k, \eta)}$  ( $i \geq 3$ ) の効果を受けうる。ただし高次の項の寄与は無視できる。それを示すために光の光学的厚み

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\tilde{\eta} n_e(\tilde{\eta}) \alpha(\tilde{\eta}) \sigma_T(\eta) \quad (218)$$

を定義する。これは時間  $\eta$  に放射された光が現在  $\eta_0$  に届くまでに電子の散乱で減衰された程度の  $\log$  を表している。<sup>16</sup> 晴れ上がり前は  $\tau \gg 1$  であり、晴れ上がり後は小さくなっていく。そのため Eq(213) の最後の式

$$\Theta'_{(l)(k, \eta)} + \frac{k}{2l+1} \left( (l+1) \Theta_{(l+1)(k, \eta)} - l \Theta_{(l-1)(k, \eta)} \right) = -\sigma_T n_e a \Theta_{(l)(k, \eta)} \quad , \quad (l \geq 3) \quad (219)$$

の右辺を評価すると  $\tau' \Theta_{(l)(k, \eta)} \sim \frac{\tau}{\eta} \Theta_{(l)(k, \eta)} \sim \tau a H \Theta_{(l)(k, \eta)}$  となる。  $\Theta_{(l)(k, \eta)'} \sim \Theta_{(l)(k, \eta)}/\eta$  は右辺に比べて無視できるので両辺の評価から  $\Theta_{(l)(k, \eta)} \sim \frac{1}{\tau} \frac{k}{aH} \Theta_{(l-1)(k, \eta)}$  となる。つまり晴れ上がり以前  $\tau \gg 1$  ではハッブル半径程度のゆらぎ  $\frac{k}{aH} \sim 1$  では  $l$  について低次の  $\Theta_{(l)(k, \eta)}$  が主要な寄与を及ぼす。

よって光のゆらぎの時間発展を考える上で、 $l = 0, 1, 2$  のみだけの方程式系

$$\begin{aligned} \delta'_{\gamma k} - \frac{4}{3} k^2 v_{\gamma k} + 4\Phi'_k &= 0 \quad , \\ v'_{\gamma k} + \frac{1}{4} \delta_{\gamma} + \Phi_k - \frac{k^2 \Pi_{\gamma k}}{2\rho_{\gamma}} &= \sigma_T n_e a (v_{bk} - v_{\gamma k}) \quad , \\ \Pi'_{\gamma k} &= \dots \end{aligned} \quad (220)$$

を考えることに意味がある。

精密なスペクトルを得るためには高次  $l$  の寄与も取り入れる必要がある。この方程式はしかし、解析的に特徴を見る分には十分有用である。

まとめとして

$$\Theta_{(0)(k, \eta)} = \frac{1}{4} \delta_{\gamma} \quad , \quad \Theta_{(1)(k, \eta)} = -\frac{1}{3} k v_{\gamma} \quad , \quad \Theta_{(2)(k, \eta)} = \frac{k^2 \Pi_{\gamma}}{4\rho_{\gamma}} \quad (221)$$

である。

## 7.8 視線方向積分を用いた現在の温度揺らぎ

現在での温度揺らぎのスペクトルを計算する。

<sup>16</sup> この量自体は無次元である。光の強度に  $I(\eta) = I_0 e^{-\tau}$  で掛かって減衰を表す。



Eq(212) を次の様に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \exp(-i\mu k\eta + \tau) \frac{d}{d\eta} (\Theta_{k(\eta, \mathbf{n})} \exp(i\mu k\eta - \tau)) &= F_{k(\eta, \mu)} \quad , \\ F_{k(\eta, \mu)} &= -\Phi'_k - i\mu k \Psi_k - \tau' \left[ \Theta_{(0)k} + i\mu k u_{(b)k} - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Theta_{(2)k} \right] \end{aligned} \quad (222)$$

そしてこれを宇宙初期の適当な時刻  $\eta_i$  から現在  $\eta_0$  まで積分することで次の形にまとめる。

$$\Theta_{k(\eta_0)} = e^{-i\mu k\eta_0 + \tau(\eta_0)} \int_{\eta_i}^{\eta_0} F_{k(\eta, \mu)} e^{i\mu k\eta - \tau} d\eta + \Theta_{k(\eta_i)} e^{i\mu k(\eta_i - \eta_0) - \tau(\eta_i) + \tau(\eta_0)} \quad (223)$$

この表式で  $\tau(\eta_i) \sim 0$  として、一方で過去では十分大きかったことから  $\exp(-\tau(\eta_i) + \tau(\eta_0))$  は十分小さく、第二項は無視する。つまり初期ゆらぎは減衰し、他の場のゆらぎから作られた光の温度ゆらぎが現在見えているということ。  $\eta_i$  は十分初期  $\eta_i \sim 0$  として、この量をルジャンドル関数で展開すると

$$\Theta_{(l)k(\eta_0)} = i^l \int_{\eta_i}^{\eta_0} d\eta e^{-\tau(\eta)} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} e^{i\mu k(\eta - \eta_0)} F_{k(\eta, \mu)} \mathcal{P}_l(\mu) \quad (224)$$

となる。この積分を視線方向積分という。利点としては低次の  $\Theta_{(l)k}$  のみから現在の  $\Theta_{k(\eta_0)}$  を計算できる点である。

ここでシルク減衰に関わる  $\Theta_{(2)k}$  を無視する近似を行い、

$$F_{k(\eta, \mu)} = F(\eta) + \mu G(\eta) = -\Phi'_k \tau' \Theta_{(0)k} + \mu [-ik\Psi_k + ik u_{(b)k}] \quad (225)$$

と書き直す。<sup>17</sup>これにより  $\mu$  積分が実行できて (部分積分で処理する表面項は  $\mathcal{P}_l(1) = \mathcal{P}_l(0) = 1$  より 1 に依らない等方成分なので無視する。)

$$\begin{aligned} \Theta_{(l)k(\eta_0)} &= \Theta_{(l)Fk}(\eta_0) + \Theta_{(l)Gk}(\eta_0) \\ &= \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau(\eta)} F(\eta) j_l^k(k(\eta_0 - \eta)) - \frac{1}{ik} \int_0^{\eta_0} d\eta \left( e^{-\tau(\eta)} G(\eta) \right)' j_l^k(k(\eta_0 - \eta)) \\ &= \int_0^{\eta_0} d\eta \mathcal{F}(\eta) j_l^k(k(\eta_0 - \eta)) \\ j_l(x) &:= (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} = i^l \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) e^{-i\mu x} \\ \mathcal{F}(\eta) &:= (\Theta_{(0)k} + \Psi_k) g(\eta) - (u_{(b)k} g(\eta))' + e^{-\tau} (\Psi' - \Phi') \\ g(\eta) &:= -\tau' e^{-\tau} \end{aligned} \quad (226)$$

となる。  $g(\eta)$  の性質として  $z \gg z_*$  (\*は晴れ上がり期) では  $e^{-\tau}$  が小さいため 0 に近く、一方で  $z \ll z_*$  では  $\tau'$  のために 0 に近い。その為この関数は  $z \sim z_*$  でのみ値を持ち、  $\int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) = 1$  の規格化から  $g(\eta) \sim \delta(\eta - \eta_*)$  と近似できる。  $\mathcal{F}(\eta)$  の第 1 項はデルタ関数を処理して積分する。第二項は部分積分して  $(2l+1) \frac{dj_l(x)}{dx} = lj_{l-1}(x) - (l+1) j_{l+1}(x)$  を用いて、晴れ上がり時にバリオン光子流体が結合していること  $u_{(b)} = u_{(\gamma)}$  を使う。以上から

$$\begin{aligned} \Theta_{(l)k(\eta_0)} &= [\Theta_{(0)k}(\eta_*) + \Psi_k(\eta_*)] j_l^k(k(\eta_0 - \eta_*)) \\ &\quad + 3\Theta_{(1)k}(\eta_*) \frac{l j_{l-1}(k(\eta_0 - \eta_*)) - (l+1) j_{l+1}(k(\eta_0 - \eta_*))}{2l+1} \\ &\quad + \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} (\Psi' - \Phi') j_l^k(k(\eta_0 - \eta)) \end{aligned} \quad (227)$$

<sup>17</sup>シルク減衰の効果は後で評価する。

とにかく以上で光のゆらぎの時間発展が得られた。この方程式系には未知の関数  $\Phi, \Psi, v_{bk}$  が含まれているのでこれは重力場、物質のゆらぎから求めておく必要がある。

$\Theta_{(0)k}(\eta_*) + \Psi_{k(\eta_*)}$  がセットで入る意味は、観測される光の波長は当時の光の波長だけでなく、その光がいた重力ポテンシャル井戸の深さに依るということであり、ザックス・ヴォルフ効果 ( $SW$ ) という。また3項目の重力ポテンシャルの変化で引き起こされる効果は、積分ザックス・ヴォルフ効果 ( $ISW$ ) といい、輻射・物質優勢移行期からの寄与を早期、物質・DE 優勢移行期からを後期  $ISW$  効果という。

## 7.9 温度揺らぎの角度パワースペクトル

以上で揺らぎの発展方程式が数値的には解ける準備が整ったので CMB で得られる観測量と先に求めた温度揺らぎ  $\Theta_{(l)k}$  を関係づける [2]。

CMB の観測量は角度ごとの黒体輻射の温度ゆらぎ  $\Theta(\mathbf{n})$  である。通常観測量として取り扱うときには、これを

$$C_l^{obs} := \frac{1}{2l+1} \sum_m b_{lm} b_{l-m} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \Omega' \mathcal{P}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \Theta(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}') \quad (228)$$

という風に展開する。

ただしこの量は観測者の空間的な位置に依存する。観測者の位置平均  $\langle \rangle_{ave} = \frac{1}{V} \int d^3x$  をかけると  $\langle \Theta(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}') \rangle_{ave}$  は宇宙の等方性の仮定から  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$  のみに依存する。相関関数を  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$  に関するルジャンドル関数で展開して

$$\langle \Theta(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}') \rangle_{ave} = \sum_l \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) C_l^{ave} \mathcal{P}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') = \sum_{l,m} C_l^{ave} Y_l^m(\mathbf{n}) Y_l^{m*}(\mathbf{n}') \quad (229)$$

を書ける。この量は先に定義した  $C_l^{obs}$  を平均化したものになっていることに注意。

$$C_l^{ave} = \langle C_l^{obs} \rangle_{ave} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega d\Omega' \mathcal{P}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \langle \Theta(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}') \rangle_{ave} \quad (230)$$

次に  $l, m$  が異なる振幅モードは独立であることを示したい。 $\langle \Theta(\mathbf{n}) \Theta(\mathbf{n}') \rangle_{ave}$  に  $\int d\Omega Y_l^{m*}(\mathbf{n})$  を掛けて球面調和関数の直交関係を用いることで

$$\langle b_{lm} b_{l'm'}^* \rangle_{ave} = C_l^{ave} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad , \quad b_{lm} := \int d\Omega \Theta(\mathbf{n}) Y_l^m(\mathbf{n}) \quad (231)$$

が示せる。これにより  $l, m$  が異なる振動は独立であることが言える。

$C_l^{obs}$  と  $C_l^{ave}$  には空間的な平均化の分だけズレが有る。これをコズミックバリエーションという。ただし  $l$  に対して振動が独立なのである幅  $\Delta l$  の間の  $C_l^{obs}$  を平均化すると実質的に  $C_l^{ave}$  が再現できる。

さて次に  $C_l^{ave}$  を Chapter.(7.6) に従ってこれまで計算してきた量で書くと

$$\begin{aligned}
C_l^{ave} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x d\Omega d\Omega' P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \Theta(\eta, x, \mathbf{n}) \Theta(\eta, x, \mathbf{n}') \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3x d\Omega d\Omega' P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) e^{ik \cdot x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \Theta_{\mathbf{k}'}(\mathbf{n}') e^{-ik' \cdot x} \\
&= \frac{1}{4\pi (2\pi)^3} \int d\Omega d\Omega' P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \int d^3k \Theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \Theta_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{n}') \\
&= \frac{1}{4\pi (2\pi)^3} \int d\Omega d\Omega' P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \int d^3k \\
&\quad \times \sum_{l'=0}^{\infty} (-i)^{l'} (2l' + 1) \Theta_{(l')(k, \eta)} \mathcal{P}_{l'(\mu)} \sum_{l''=0}^{\infty} (i)^{l''} (2l'' + 1) \Theta_{(l'')(k, \eta)}^* \mathcal{P}_{l''(\mu')}^* \quad (232)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
&\int d\Omega d\Omega' \mathcal{P}_{l'}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \mathcal{P}_{l''}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{P}_{l''}^*(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}') \\
&= \sum_{m, m', m''} \frac{4\pi}{2l + 1} \frac{4\pi}{2l' + 1} \frac{4\pi}{2l'' + 1} \int d\Omega d\Omega' Y_l^m(\mathbf{n}) Y_l^{m*}(\mathbf{n}') Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'}^{m''*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l''}^{m''}(\mathbf{n}') \\
&= \sum_m \left( \frac{4\pi}{2l + 1} \right)^3 Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \delta_{ll'} \delta_{ll''} \quad (233)
\end{aligned}$$

を踏まえて

$$\begin{aligned}
C_l^{ave} &= \frac{1}{4\pi (2\pi)^3} \int d^3k \sum_{l'=0}^{\infty} (-i)^{l'} (2l' + 1) \Theta_{(l')(k, \eta)} \sum_{l''=0}^{\infty} (i)^{l''} (2l'' + 1) \Theta_{(l'')(k, \eta)}^* \\
&\quad \times \sum_m \left( \frac{4\pi}{2l + 1} \right)^3 Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \delta_{ll'} \delta_{ll''} \\
&= \frac{1}{4\pi (2\pi)^3} \int d^3k (2l + 1) \Theta_{(l)(k, \eta)} (2l + 1) \Theta_{(l)(k, \eta)}^* \sum_m \left( \frac{4\pi}{2l + 1} \right)^3 Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P_{\Theta_{(l)}(k)} \\
P_{\Theta_{(l)}(k)} &:= \left[ \int d\Omega_k \Theta_{(l)(k, \eta)} \Theta_{(l)(k, \eta)}^* \right] \quad (234)
\end{aligned}$$

という変形が出来る。ただしルジャンドル多項式の規格化  $\mathcal{P}_{l(1)} = 1$  を用いた。よって最終的な目標はスペクトル  $P_{\Theta_{(l)}(k)}$  を求めることである。

量子的な物理量は真空中で挟み観測に直す。

ルジャンドル変換の性質として、 $C_l$  は天球の見込み角として  $\theta \sim \pi/l$  の関係を持つ。晴れ上がりまでの共動距離は  $r \sim \eta_0$  なので傾向として  $k \sim l/\eta_0$  の大きさである。物質優勢期では Eq(17) より

$$l = \frac{2}{H_0} \frac{k}{a_0} \sim 10^{19} \frac{f_0}{\text{Hz}} \quad (235)$$

となる。ただし  $f_0$  は現在の揺らぎの周波数である。このように、CMB が測定するスペクトルは  $f_0 = 10^{-19} \sim 10^{-15} \text{Hz}$  程度の揺らぎに対応する。

### 7.10 物質場摂動の時間発展方程式

物質場摂動の時間発展方程式は、物質ごとの密度関数  $f$  を定義してボルツマン方程式を解くことで決まる。宇宙の物質成分として、バリオン<sup>18</sup>、光子、ニュートリノ、暗黒物質を取り扱う。光子の揺らぎの時間発展方程式は先に導いたボルツマン方程式である。それぞれの成分に対して摂動量  $\delta_{(X)} := \frac{\delta\rho_{(X)}}{\rho_{(X)}}$ ,  $u_{(X)}$ ,  $\Pi_{(X)}$ ,  $\delta P_{(X)}$  ( $X = b, \gamma, \mu, C$ ) を求めたい。光のボルツマン方程式に直接入ってくるのは電子-バリオン流体の速度だけだが重力摂動を通して他の物質場の揺らぎも効いてくるために計算する。

今回の解析ではバリオンと暗黒物質が非相対論的であると仮定することで、それらの圧力、非等方テンソルは 0 として扱う。<sup>19</sup> 圧力と非等方テンソルが無視できるなら連続方程式の摂動の 0,i 成分から  $\delta_{(X)} := \frac{\delta\rho_{(X)}}{\rho_{(X)}}$ ,  $u_{(X)}$  の時間発展方程式が取り出すことができる。2つの摂動量に対して二つの時間発展方程式が課されるため自由度としては十分である。

ニュートリノについては光子・バリオン流体と decouple してからの挙動のみを取り扱う。さらに massless とみなすことで現在まで相対論的粒子として振る舞う、とする。

バリオンと光子は電磁気力で結びついているため連続方程式は  $\delta T_{\nu;\mu}^{(b)\mu} + \delta T_{\nu;\mu}^{(\gamma)\mu} = 0$  でまとまる。ニュートリノと暗黒物質はエネルギー的に独立しており個別に扱う。

まずバリオン摂動の時間発展を考えるためにバリオン・光子流体の連続方程式について考える。光子の 0 次の圧力は  $P_{(\gamma)} = \rho_{(\gamma)}/3$  であり、エネルギー密度は連続方程式  $\dot{\rho}_{(\gamma)} + 4H\rho_{(\gamma)} = 0$  を満たす。ニュートンゲージで  $\delta q_{(\gamma)} = \frac{4}{3}a\rho_{(\gamma)}u_{(\gamma)}$  である。またフーリエ展開した表示で、光子の連続方程式 Eq(68) は

$$\begin{aligned} \delta T_{0;\mu}^{(\gamma)\mu}(k) &= -\rho_{(\gamma)k} \left( \delta'_{(\gamma)k} - \frac{4}{3}k^2 u_{(\gamma)k} + 4\Phi'_k \right) = 0, \\ \delta T_{i;\mu}^{(\gamma)\mu} &= \frac{4}{3}\rho_{(\gamma)k} \left( v'_{(\gamma)k} + \frac{1}{4}\delta_{(\gamma)k} + \Psi_k - \frac{k^2 \Pi_{(\gamma)k}}{2\rho_{(\gamma)k}} \right)_{;i} = \frac{4}{3}\rho_{(\gamma)k} \sigma T n_e a (u_{(b)k} - u_{(\gamma)k})_{;i} \end{aligned} \quad (237)$$

と書ける。それぞれの式で右辺に移るときに Eq(220) を用いた。バリオンでも同様に

$$\begin{aligned} \delta T_{0;\mu}^{(b)\mu}(k) &= -\rho_{(b)k} \left( \delta'_{(b)k} - k^2 u_{(b)k} + 3\Phi'_k \right), \\ \delta T_{i;\mu}^{(b)\mu} &= \rho_{(b)k} \left( v'_{(b)k} + aH u_{(b)k} + \Psi_k \right)_{;i} \end{aligned} \quad (238)$$

が取れる。以上に連続方程式  $\delta T_{\nu;\mu}^{(b)\mu} + \delta T_{\nu;\mu}^{(\gamma)\mu} = 0$  を課することでバリオン揺らぎの時間発展方程式

$$\begin{aligned} \delta'_{(b)k} - k^2 u_{(b)k} + 3\Phi'_k &= 0, \\ v'_{(b)k} + aH u_{(b)k} + \Psi_k &= -\frac{4}{3} \frac{\rho_{(\gamma)k}}{\rho_{(b)k}} \sigma T n_e a (u_{(b)k} - u_{(\gamma)k}) \end{aligned} \quad (239)$$

<sup>18</sup> 光のボルツマン分布の計算では添字  $b$  が陽子と結合した電子のみを指していたがここでは陽子も含めた全バリオンを扱っていることに注意。電子密度が大きな晴れ上がり以前ではバリオンと電子は結合しており、まとめて同じ速度を持つ流体として扱うことができる。

<sup>19</sup> 再加熱直後ではこの仮定は成り立たないが再加熱直後の光の揺らぎは Eq(223) で見たようにすべて初期条件として取り込んでしまう。可能性としては、再加熱の作り出した物質乱流が重力摂動に効いてくる、がこれはもはや再加熱に伴う重力波の生成である。また実質的に物質と重力との揺らぎ成長が重要になってくる時刻は、その波長の揺らぎが Horizon に再突入してからである。晴れ上がりでの  $\frac{k}{a_* H_*}$  の評価 Eq(288) を参考に  $l \sim 2000$  程度の揺らぎが再突入した時刻での宇宙の温度は

$$55 \sim \frac{k}{a_* H_*} = \frac{k}{a_{re} H_{re}} \frac{a_{re} H_{re}}{a_* H_*} \sim \sqrt{\frac{a_*}{a_{re}}}, \quad T_{re} \sim \frac{a_*}{a_{re}} T_0 \sim 0.7 eV \quad (236)$$

と見積もることができる。CDM は重い粒子であるためこの程度だと非相対論的に扱って良いと考えられる。

が取れる。

ニュートリノは decouple しているという仮定から無衝突粒子として振る舞う。そのため光のボルツマン方程式の衝突項が 0 になったものとして扱うと良い。光の  $\Theta(\eta, x^i, n^i)$  の構成と同様にニュートリノの密度関数  $f_{(\nu)} = f_{(\nu)}^{(0)}(p) + \delta f_{(\nu)}(\eta, x^i, p, n^i)$  に対して温度揺らぎ

$$\mathcal{N}(\eta, x^i, n^i) := \frac{1}{4} \frac{\int dpp^3 \delta f_{(\nu)}(\eta, x^i, p, n^i)}{\int dpp^3 f_{(\nu)}^{(0)}(p)} \quad (240)$$

を定義すると後は光の場合の計算結果で  $\Theta \rightarrow \mathcal{N}$  とすれば良い。つまり Eq(213) で衝突項を 0 にして

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'_{(0)}(k, \eta) + k\mathcal{N}_{(1)}(k, \eta) + \Phi'_k(\eta) &= 0 \quad , \\ \mathcal{N}'_{(1)}(k, \eta) - \frac{k}{3} (\mathcal{N}_{(0)}(k, \eta) + \Psi_k(\eta) - 2\mathcal{N}_{(1)}(k, \eta)) &= 0 \quad , \\ \mathcal{N}'_{(l)}(k, \eta) + \frac{k}{2l+1} ((l+1)\mathcal{N}_{(l+1)}(k, \eta) - l\mathcal{N}_{(l-1)}(k, \eta)) &= 0 \quad , \quad (l \geq 2) \end{aligned} \quad (241)$$

がニュートリノの時間発展方程式となりここから光の場合と同様に観測量が  $\delta_{(\nu)} = 4\mathcal{N}_{(0)}$ ,  $u_{(\nu)} = -3\frac{\mathcal{N}_{(1)}}{k}$ ,  $\Pi_{(\nu)} = \frac{4\rho_{(\nu)}\mathcal{N}_{(2)}}{k^2}$  で計算できる。

ダークマターについてはバリオンの場合と同様に連続方程式から時間発展を導く。ダークマターは光子と結びついていないため Eq(238) で  $b \rightarrow C$  として  $\delta T_{\nu;\mu}^{(C)\mu} = 0$  を課すと良い。そこから DM 摂動の時間発展方程式

$$\begin{aligned} \delta'_{(C)k} - k^2 u_{(C)k} + 3\phi'_k &= 0 \quad , \\ u'_{(C)k} + aH u_{(C)k} + \Psi_k &= 0 \end{aligned} \quad (242)$$

が得られる。

### 7.11 重力摂動の時間発展方程式

重力摂動  $\Phi_k, \Psi_k$  の時間発展は摂動アインシュタイン方程式 Eq(65) で決まる。この式には物質場の揺らぎの効果も入ってくるので先に求めた物質摂動と連立する必要がある。ニュートンゲージで、重力のスカラー摂動に対して今回の物質場の notation で摂動アインシュタイン方程式 Eq(65) 付近の式を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} 3aH (\Phi'_k - aH\Psi_k) + k^2\Phi_k &= 4\pi G a^2 (\rho_{(m)}\delta_{(m)k} + 4\rho_{(r)}\Lambda_{(0)k}) \quad , \\ \Phi'_k - aH\Psi_k &= 4\pi G a^2 \left( \rho_{(m)}u_{(m)k} - \frac{4}{k}\rho_{(r)}\Lambda_{(1)} \right) \quad , \\ k^2 (\Psi + \Phi) &= -32\pi G a^2 \rho_{(r)}\Lambda_{(2)k} \quad , \\ \Phi'' + aH (2\Phi' - \Psi') - (a^2 H^2 + 2(aH)') \Psi &= -\frac{16}{3}\pi G a^2 (\rho_{(r)}\Lambda_{(0)k} - 2\rho_{(r)}\Lambda_{(2)k}) \end{aligned} \quad (243)$$

ただし相対論的物質、非相対論的物質でまとめて次のように定義した。

$$\rho_{(m)}\delta_{(m)k} := \rho_{(c)}\delta_{(c)k} + \rho_{(b)}\delta_{(b)k} \quad , \quad \rho_{(m)}u_{(m)k} := \rho_{(c)}u_{(c)k} + \rho_{(b)}u_{(b)k} \quad , \quad \rho_{(r)}\Lambda_{(i)k} := \rho_{(\gamma)}\Theta_{(i)k} + \rho_{(b)}\mathcal{N}_{(i)k} \quad (244)$$

## 8 CMB ゆらぎの解析的な特徴

宇宙論パラメータを決定して、CMB の支配方程式を数値的に積分することで現在観測される揺らぎのスペクトルが再現できる。以下では解析的な特徴を調べていく。

### 8.1 輻射優勢期での長波長密度揺らぎの凍結

CMB スカラーモードを見るためには光のボルツマン方程式 Eq(213) に物質場の時間発展方程式 Eq(239), Eq(241), Eq(242) と重力場の時間発展方程式 Eq(243) を連立して解けばいいとわかる。具体的な解を得るためには初期条件が必要である。

初期条件は再加熱直後の輻射優勢の初めに取りたい。初期条件を考える上で、「ホライズンより大きな波長の揺らぎが凍結する」ということが一般的に成り立つことを示すのが大切である。凍結が言えると、ホライズンを出た後であれば初期条件を決める時刻に依存しない結果を得られる。より一般的な条件での証明は Chapter.(9) を参照。以下では輻射優勢期での揺らぎの凍結を示す。

現在 CMB で見えている揺らぎの波長 ( $2 \leq l \leq 2500$ ) は再加熱直後の輻射優勢期の初めの方にはホライズンの十分外にあり  $k \ll aH$  が成立する。さらに非相対論的成分を無視するという近似を Eq(239), Eq(241), Eq(242), Eq(243) に代入して

$$\begin{aligned} \delta'_{(b)k} &= -3\Phi'_k, & \delta'_{(C)k} &= -3\Phi'_k, \\ \Theta'_{(0)k} &= -\Phi'_k, & \mathcal{N}'_{(0)k} &= -\Phi'_k, \\ 3aH(\Phi'_k - aH\Psi_k) &= 4\pi G a^2 (4\rho_\gamma \Theta_{(0)k} + 4\rho_\nu \mathcal{N}_{(0)k}) \end{aligned} \quad (245)$$

が出る。よってほとんどの揺らぎが同じ時間変化を持つ。そこで  $\Phi_k$  が凍結することを示せば十分。一番下の式に輻射優勢期でのフリードマン方程式  $3a^2 H^2 = 8\pi G a^2 (\rho_\gamma + \rho_\nu)$  を代入して  $\eta$  で微分すると

$$\begin{aligned} \Phi''_k - (aH\Psi_k)' &= 2 \left[ aH\Theta_{(0)k} \frac{\rho_\gamma}{\rho_\gamma + \rho_\nu} + aH\mathcal{N}_{(0)k} \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma + \rho_\nu} \right]' \\ &= 2(aH)' \left[ \Theta_{(0)k} \frac{\rho_\gamma}{\rho_\gamma + \rho_\nu} + \mathcal{N}_{(0)k} \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma + \rho_\nu} \right] + 2aH \left[ \Theta'_{(0)k} \frac{\rho_\gamma}{\rho_\gamma + \rho_\nu} + \mathcal{N}'_{(0)k} \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma + \rho_\nu} \right] \\ &= \frac{(aH)'}{aH} (\Phi'_k - aH\Psi_k) - 2aH\Phi'_k \end{aligned} \quad (246)$$

ただし輻射成分の時間依存性は等しい  $\rho_\nu/\rho_\gamma = const.$  を用いた。ここでさらに Eq(243) で輻射の非等方ストレスを無視する近似で  $\Psi_k = -\Phi_k$  になることから

$$\Phi'' + \left( 3aH - \frac{(aH)'}{aH} \right) \Phi' = 0 \quad (247)$$

が導ける。この式を輻射優勢期での  $a \propto \eta$ ,  $aH = \frac{1}{\eta}$  で解くと  $\Phi = C_1 + C_2 \eta^{-3}$  となる。よって十分時間が経つと  $\Phi$  は定数部分のみ残り、この意味で輻射優勢期の揺らぎは凍結する。

### 8.2 密度揺らぎの初期条件の決定

以上から密度揺らぎの初期条件は Eq(245) を積分したときの積分定数を定める問題に帰着するとわかる。観測的には断熱条件 ( $\delta_{(b)k} = \delta_{(C)k} = 3\Theta_{(0)k} = 3\mathcal{N}_{(0)k}$ ) が要請される。断熱条件のときに Eq(245) を解くと  $\Psi_k, \Phi_k$  には初期条件  $\Psi_k(0) = -\Phi_k(0) = -2\Theta_{(0)k}(0)$  が掛かる。さらにこの初期条件の下で解くと  $\Theta_{(0)k}(\eta) = -\phi(\eta) + \frac{3}{2}\Phi(0)$  となる。

### 8.3 速度揺らぎの初期条件の決定

速度揺らぎについても輻射優勢期での時間発展を考え、その後初期条件を考える。ここでも  $k \ll aH$  かつ非相対論的成分を無視するという近似を用いる。

輻射優勢期にはバリオンと光子は強く結合するため  $-\frac{3}{k}\Theta_{(0)k} = u_{(\gamma)k} = u_{(b)k}$  が課される。これを使い Eq(213) を見ると  $\Theta'_{(1)k}$  を含む式において衝突項が消えるとわかる。さらに非等方ストレスを無視する近似においては高次の  $\Theta'_{(l)k}$  を通じた衝突項の寄与も効かなくなるので、 $\Theta_{(1)k}$  と  $\mathcal{N}_{(1)k}$  は同じ時間発展方程式

$$\Theta'_{(1)k} - \frac{k}{3} (\Theta_{(0)k} + \Psi_k) = 0 \quad (248)$$

に従うとわかる。また同じ理由からバリオンと CDM も同じ時間発展方程式に従う。

これらは凍結していない。そのため結果は初期値を定める時刻に依存する。そうならないためには、常に

$$\Theta_{(1)k} = \mathcal{N}_{(1)k} = -\frac{1}{3}ku_{(b)k} = -\frac{1}{3}ku_{(c)k} = \frac{k}{6aH}\Psi \quad (249)$$

が成立していればよい。今回はこれを初期条件として採用する。

#### 8.4 非等方ストレスの評価

密度揺らぎの凍結の議論において Eq(243) で輻射の非等方ストレスを無視する近似で  $\Psi_k = -\Phi_k$  となることを使ったが、これへの非等方ストレスの補正効果を考える。ここでも  $k \ll aH$  かつ非相対論的成分を無視するという近似を用いる。

Eq(213) を見ると  $\Theta_{(2)k}$  は衝突項により減衰していくが  $\mathcal{N}_{(2)k}$  は定数になる。よって非等方ストレスとしてはニュートリノの寄与のみを考慮する。このとき Eq(243) より非等方ストレスと曲率ゆらぎの関係は輻射優勢期でのフリードマン方程式  $3a^2H^2 = 8\pi Ga^2(\rho_{(\gamma)} + \rho_{(\nu)})$  を用いて

$$\mathcal{N}_{(2)k} = -\frac{k^2(\Phi_k + \Psi_k)}{12r_\nu a^2 H^2}, \quad r_\nu := \frac{\rho_{(\nu)}}{\rho_{(\gamma)} + \rho_{(\nu)}} \quad (250)$$

と書ける。

ニュートリノの非等方ストレスに対して以前は  $\mathcal{N}_{(2)k} = 0$  としていたが今回は、Eq(241) の  $l=2$  で  $\mathcal{N}_{(3)k}$  からの寄与を無視した式

$$\mathcal{N}_{(2)k}'' = \frac{2}{15}k^2(\mathcal{N}_{(0)k}z + \Psi - 2\mathcal{N}_{(2)k}) \quad (251)$$

で決める。両辺に  $\mathcal{N}_{(2)k}$  の表式を代入するが、左辺の微分項については、 $\mathcal{N}_{(2)k} = 0$  のときに  $(\Phi_k + \Psi_k)' = 0$  であったことから、 $\mathcal{N}_{(2)k}$  についての最低次の評価としては

$$\mathcal{N}_{(2)k}'' \sim -\frac{k^2(\Phi_k + \Psi_k)}{12r_\nu} \partial_\eta^2 (aH)^{-2} = -\frac{k^2(\Phi_k + \Psi_k)}{12r_\nu}, \quad (252)$$

ただし輻射優勢期で  $aH = 1/\eta$  を用いた。また右辺は  $\mathcal{N}_{(2)k} = 0$  のときに  $\Psi = -2\mathcal{N}_{(0)k}$  だったので

$$\mathcal{N}_{(0)k}z + \Psi - 2\mathcal{N}_{(2)k} \sim -\mathcal{N}_{(0)k} + 2\frac{k^2(\Phi_k + \Psi_k)}{12r_\nu a^2 H^2} \quad (253)$$

となる。これらを連立して  $\Phi$  について解くと

$$\Phi_k = -\left(1 + \frac{2}{5}r_\nu\right)\Psi \quad (254)$$

となる。よって3世代のニュートリノに対しては  $r_\nu \sim 0.405$  程度ズレる。輻射優勢期の終わりではこの項は無視できるようになる。

### 8.5 輻射優勢期での重力ポテンシャル $\Phi$ の短波長ゆらぎの減衰

長波長ゆらぎに対しては凍結が言えたので、重力ポテンシャル  $\Phi$  の短波長ゆらぎ  $k \gg aH$  の減衰も見ておく。<sup>20</sup>Eq(243)において非相対論的成分を無視して  $\rho_{(\gamma)}\Theta'_{(0)k}$  を連立消去すると

$$\Phi'' + 3aH\Phi' - aH\Psi' + \frac{1}{3}k^2\Phi - 2(a^2H^2 + (aH)')\Phi = 0 \quad (255)$$

となる。輻射優勢期での  $aH = 1/\eta$  を用いてニュートリノの非等方ストレスを無視して Eq(243)より  $\Psi_k = -\Phi_k$  を代入して

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = 0 \quad (256)$$

となる。この解はどれも  $\eta$  についての振動的減衰解であり

$$\Phi(\eta) = \frac{9\Phi(0)}{k^3\eta^3} \left[ \sqrt{3} \sin\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) - k\eta \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) \right] \quad (257)$$

となる。

### 8.6 輻射優勢期から物質優勢期への移行

先に見たように、輻射優勢期ではゆらぎは凍結している。次に物質優勢期でのゆらぎの進化を見る。移行期  $a_{eq}$  にハッブル半径を横切る波長  $k_{eq} := a_{eq}H(a_{eq})$  を定義すると、物質優勢期にホライズンに入ってくる波長は  $k \leq k_{eq}$  と書ける。

そこで物質優勢期にホライズンに入るゆらぎ  $k \leq k_{eq}$  (CMB に効く) と物質優勢期までにホライズンに入るゆらぎ  $k \geq k_{eq}$  (宇宙の大規模構造を決定) に区別して次章以降で解析していく。

ちなみに、 $k_{eq} = 0.073\Omega_{(m)}^{(0)}h^2 Mpc^{-1}$  であり 100Mpc のオーダーである。現在の周波数に直すと  $f_{eq} \sim 1.6 \times 10^{-13} \text{Hz}$  である。

### 8.7 物質優勢期のゆらぎの凍結

物質優勢期にホライズンに入るゆらぎ  $k \leq k_{eq}$  はやはり凍結していることを見る。ただし輻射優勢期から物質優勢期への移行でゆらぎのスペクトルが変わることに注意。先の議論の拡張という面もある。

まず輻射優勢期での解析 Eq(245)において、非相対論的物質を取り入れて

$$\begin{aligned} \delta'_{(b)k} &= -3\Phi'_k, & \delta'_{(C)k} &= -3\Phi'_k, \\ \Theta'_{(0)k} &= -\Phi'_k, & \mathcal{N}'_{(0)k} &= -\Phi'_k, \\ 3aH(\Phi'_k - aH\Psi_k) &= 4\pi G a^2 (\rho_{(m)}\delta_{(m)k} + 4\rho_{(\gamma)}\Theta_{(0)k} + 4\rho_{(\nu)}\mathcal{N}_{(0)k}) \end{aligned} \quad (258)$$

最後の式について、断熱条件を課して  $\delta_{(m)k} = \delta_{(b)k} = 3\Theta_{(0)k} = 3\mathcal{N}_{(0)k}$  で書き換える。無次元量  $y := \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\rho_{(m)}}{\rho_{(\gamma)}}$  を導入してフリードマン方程式  $3a^2H^2 = 8\pi G a^2 \rho_{(\gamma)}(y+1)$  により

$$y \frac{d\Phi}{dy} - \Psi = \frac{3y+4}{6(y+1)} \delta_{(m)k} \quad (259)$$

<sup>20</sup>重力ポテンシャル  $\Phi$  以外が減衰するとは言っていない。例えば光の温度分布はバリオン音響振動で揺らぎの成長が起こる。



となる。ニュートリノの非等方ストレスを無視して Eq(243) より  $\Psi_k = -\Phi_k$  を代入して  $y$  で微分して (先に  $y$  で微分すれば断熱条件に依存しないで結果が得られる。)

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{21y^2 + 54y + 32}{2y(y+1)(3y+4)} \frac{d\Phi}{dy} + \left( \frac{1}{y(y+1)(3y+4)} \right) \Phi = 0 \quad (260)$$

となる。この解は  $\Phi(y) = C_1 \frac{\sqrt{y+1}}{y^3} + C_2 \left( \frac{9y^3 + 2y^2 - 8y - 16}{y^3} \right)$  である。

先に見たように輻射優勢期では  $\Phi$  が凍結していたため、 $y = 0$  での初期条件として  $\Phi = \Phi(0)$ ,  $\frac{d\Phi}{dy} = 0$  を取ると

$$\Phi_{k(y)} = \Phi_{k(0)} \frac{9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 + 16\sqrt{y+1}}{10y^3} \quad (261)$$

となる。この解から物質優勢期への移行期では、 $\Phi$  は複雑な  $y$  依存性を持つが、 $y \rightarrow \infty$  では  $\Phi_{k(y)} \rightarrow \frac{9}{10}\Phi_{k(0)}$  と凍結する。

### 8.8 物質優勢期での短波長ゆらぎの増大

長波長ゆらぎに対しては凍結が言えたので、短波長ゆらぎ  $k \gg aH$  の傾向を考える。輻射優勢期とは異なり、集積効果でゆらぎが増大することに注意。バリオンゆらぎの方程式 Eq(239) において電子の個数が十分少ないとしてその式は CDM のゆらぎ Eq(242) と同じ形に書ける。

$$\begin{aligned} \delta'_{(m)k} - k^2 v_{(m)k} + 3\Phi'_k &= 0, \\ v'_{(m)k} + aH v_{(m)k} + \Psi_k &= 0 \end{aligned} \quad (262)$$

となる。ここで  $\eta$  微分を  $N = \ln a$  微分に直して、 $v_m$  を消去して  $N$  で微分すると

$$\frac{d^2\delta_{(m)k}}{dN^2} + \left( 2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{d\delta_{(m)k}}{dN} + \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \Phi = -3 \left[ \frac{d^2\Phi_k}{dN^2} \left( 2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{d\Phi_k}{dN} \right] \quad (263)$$

となる。ここに Eq(243) の最初の式で  $k \gg aH$  を課したもの

$$\left( \frac{k}{aH} \right)^2 \Phi \simeq \frac{3}{2} \Omega_{(m)} \delta_{(m)k}, \quad \Omega_{(m)} = \frac{8\pi G \rho_{(m)}}{3H^2} \quad (264)$$

と、ニュートリノの非等方ストレスを無視して Eq(243) の三式目より  $\Psi_k = -\Phi_k$  を代入して

$$\frac{d^2\delta_{(m)k}}{dN^2} + \left( 2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{d\delta_{(m)k}}{dN} - \frac{3}{2} \Omega_{(m)} \delta_{(m)k} = 0 \quad (265)$$

となる。物質優勢期では  $\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1+w) \sim -\frac{3}{2}$  ( $w$  は状態方程式)  $\Omega_{(m)} \sim 1$  である。この近似のもとで解は  $\delta_{(m)k} = e^N, e^{-3N/2}$  となる。成長解を取ると、 $\delta_{(m)k} \propto a \propto t^{2/3}$  となる。

またこの解を Eq(264) に代入すると  $\Phi = const$  が得られる。よって短波長側でも重力ポテンシャル  $\Phi$  は凍結している。

### 8.9 重力ポテンシャル $\Phi$ の時間発展

以上の考察から重力ポテンシャル  $\Phi$  に対して、長波長  $k \ll aH$  では輻射・物質優勢期で凍結し、移行期に 9/10 になること、短波長  $k \gg aH$  は輻射優勢期で減衰し物質優勢期では凍結することがわかった。つまり輻射優勢期には波長  $k$  が小さいほど減衰するという傾向がある。さらに後期にはダークエネルギー優勢期となり波長にあまり依存しない形で一様に重力ポテンシャル  $\Phi$  が減衰することが知られている。この重力ポテンシャル傾向をシュミレーションから計算し、近似的な関数で表したい。

輻射の高次項を無視して、 $\delta_{si(m)}k$  に寄与するのが CDM だけであるという近似を行う。インフレーション以降の重力ポテンシャル  $\Phi$  の時間的変化を一般的に取り扱うためには、フリードマン方程式 Eq(6) に基づく連続方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_r}{dN} &= -(1 + 3\Omega_\Lambda - \Omega_r)\Omega_r \quad , \\ \frac{d\Omega_\Lambda}{dN} &= (3 - 3\Omega_\Lambda + \Omega_r)\Omega_\Lambda \quad , \\ \frac{daH}{dN} &= -\frac{1}{2}(1 - 3\Omega_\Lambda + \Omega_r)aH\end{aligned}\quad (266)$$

及び、Eq(243) で先に書いた近似のもとで  $\rho_r\Theta_{(0)k}$  を消去すると

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(4 + \frac{1}{aH} \frac{daH}{dN}\right) \frac{d\Phi}{dN} + \sqrt{2 + \frac{2}{aH} \frac{daH}{dN} + \frac{1}{3} \frac{k^2}{aH}} \Phi - \frac{1}{2}\Omega_{(m)}\delta_{(m)k} = 0 \quad (267)$$

そこでこれらを Eq(242) と連立して計算すれば良い。

初期条件は断熱的  $\delta_{(m)k}(0) = \frac{3}{2}\Phi_k(0)$ ,  $v_{(C)k} = \frac{1}{2aH}\Phi(0)$  を取る。

以上の計算から輻射優勢期の減衰とダークエネルギーの効果の数値的に見積もることができる。

まず輻射優勢期の減衰を評価する関数  $T(k)$  を、物質優勢期のある時刻での波数  $k$  のゆらぎ  $\Phi_k$  (物質優勢期ではゆらぎは凍結するのでどの時刻を選んでも良い) とその時の長波長でのゆらぎ  $\Phi_k^{(LS)}$  (長波長側のゆらぎはどの  $k$  でも輻射優勢期での値の 9/10 で一定) の比を

$$T(k) := \frac{\Phi_k}{\Phi_k^{(LS)}} \quad (268)$$

と定める。この比を *BBKS* 遷移関数と呼び、シュミレーションから多項式と log による関数形が知られている。

次にダークエネルギーの効果の評価する関数  $D(a)$  を、物質優勢期で凍りついていたゆらぎ  $\Phi_{k(a_m)}$  が別の時刻で減少して  $\Phi_{k(a)}$  になったとして、

$$D(a) = a \frac{\Phi_{k(a)}}{\Phi_{k(a_m)}} \quad (269)$$

とする。傾向として左辺は波長  $k$  に依存しなくなる。

以上を組み合わせると、物質優勢期以降の重力ポテンシャルの表式は

$$\Phi_{k(a)} = \Phi_k^{(LS)(a_m)} T(k) \frac{D(a)}{a} \quad (270)$$

となる。

### 8.10 曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ の凍結

一般的な議論 Chapter.(9) からインフレーション期に凍結していたホライズン外の曲率揺らぎ  $\mathcal{R}_k$  は適当な条件のもとで、移行期も含めて輻射・物質優勢期でも凍結する。

ここまでに導いた  $\Phi$  の表式が  $\mathcal{R}_k$  の凍結と無矛盾であることは次のようにわかる。輻射・物質期の移行でホライズン外の揺らぎが  $\Phi \rightarrow \frac{9}{10}\Phi$  と変化したが Eq(79) により  $\mathcal{R} = \frac{3}{2}\Phi$  (輻射優勢),  $\mathcal{R} = \frac{5}{3}\Phi$  (物質優勢) であることを考慮すると  $\mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{R}_k$  として変化しない。

### 8.11 曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ と重力ポテンシャル $\Phi$ の関係

Chapter.(8.10) を用いるとホライズン外のインフレーションの曲率揺らぎ  $\mathcal{R}$  と現在の重力ポテンシャルのパワースペクトルを直接結びつけることができる。摂動による揺らぎでは適当な条件のもとで Eq(79) が成立する。特に物質優勢期の  $w=0$  では  $\mathcal{R}_{k(a)} = \frac{5}{3}\Phi_k^{(LS)}(a)$  が成立する。インフレーションで生成された  $\mathcal{R}$  はずっと凍結しているため左辺はインフレーション期の揺らぎのパワースペクトル Eq(131) と結びつけることが可能。そこで Eq(131) の後で定義したスペクトル指数を用いて、波数  $k_0$  周りで展開した現在の重力ポテンシャルのパワースペクトルは

$$P_{\phi k(a_0)} = \frac{18\pi^2}{25} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}(k_0)}}{k_0^{n_s-1}} k^{n_s-4} T^2(k) D^2(a_0) \quad (271)$$

となる。

### 8.12 バリオン音響揺らぎ

晴れ上がり前の輻射優勢期の短波長側で強結合近似  $\tau \gg 1$  を採用し  $\Theta_{(0)k}, \Theta_{(1)k}$  のみ考慮して温度揺らぎのスペクトルを解析する。ホライズンの外側の揺らぎは凍結しているので内側の揺らぎ  $k > aH$  を考える。

光子バリオン系の音速は、 $\delta\rho$  と  $\delta P$  を和として取り扱うことで

$$c_s^2 = \frac{1}{3(1+R_s)} \quad , \quad R_s := \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \quad (272)$$

ただし Eq(182) から光子の揺らぎについても  $\delta\rho_\gamma = \frac{1}{3}\delta P_\gamma$  が成立すること、断熱揺らぎの条件から  $\delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = \frac{4}{3}\delta\rho_b/\rho_b$  を用いた。この  $R_s$  は輻射優勢期であることから小さいことに注意。物理的な意味は、バリオンとの結合により音速が遅くなることがわかる。

いまから  $\Theta_{(0)}$  についての微分方程式を作る。これを用いて Eq(239) を書き直すと

$$v_b - v_\gamma = \frac{R_s}{\tau'} (v_b' + aHv_b + \Phi) \quad (273)$$

となる。強結合近似では右辺が 0 に近いので最低次近似で  $v_b \simeq v_\gamma = -3\frac{\Theta_{(1)}}{k}$  となる。これを逐次的に取り扱って

$$v_b \simeq -\frac{3}{k} \left[ \Theta_{(1)} + \frac{R_s}{\tau'} \left( \Theta_{(1)}' + aH\Theta_{(1)} - \frac{k}{3}\Phi \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right) \quad (274)$$

となる。これに、Eq(213) の 1、2 式目で  $\Theta_{(2)}$  を無視したもの

$$\begin{aligned} \Theta_{(1)}' - \frac{k}{3}(\Theta_{(0)} + \Psi) &\simeq \tau' \left( \Theta_{(1)} + \frac{1}{3}kv_b \right) \quad , \\ \Theta_{(1)} &= - \left( \frac{\Theta_{(0)}' + \Phi'}{k} \right) \end{aligned} \quad (275)$$

を代入して  $\Theta_{(1)}, v_b$  を消去して ( $\Theta'_{(1)}$  は残す)

$$\Theta'_{(1)} = \frac{1}{k} \left[ c_s^2 k^2 \Theta_{(0)} + 3aHc_s^2 R_s (\Theta'_{(0)} + \Phi') + \frac{k^2}{3} \Psi \right] \quad (276)$$

となる。Eq(213) の 1 式目を  $\eta$  で微分したものに代入して  $\Theta'_{(1)}$  を消去して

$$\left( \frac{d^2}{d\eta^2} + 3aHc_s^2 R_s \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right) (\Theta_{(0)} + \Phi) = k^2 \left( c - s^2 \Phi - \frac{1}{3} \Psi \right) \quad (277)$$

となる。この左辺 2 項目は条件  $R_s \ll \left(\frac{k}{aH}\right)^2$  の下では無視できる。さらに音速を  $c_s^2 \sim \frac{1}{3}$  で近似して

$$\left( \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 c_s^2 \right) (\Theta_{(0)} + \Phi) \simeq \frac{k^2}{3} (\Phi - \Psi) \quad (278)$$

となる。

これを  $\Theta_{(0)} + \Phi$  について解く。これは右辺を関数と見なすと特解と同次解の線形結合で表される。一般解は

$$\Theta_{(0)(\eta)} + \Phi(\eta) = c_1 \sin(kr_s(\eta)) + c_2 \cos(kr_s(\eta)) + \frac{k^2}{3} \int_0^\eta d\tilde{\eta} (\Phi(\tilde{\eta}) - \Psi(\tilde{\eta})) \frac{f_1(\tilde{\eta})f_2(\eta) - f_1(\eta)f_2(\tilde{\eta})}{f_1(\tilde{\eta})f_2'(\tilde{\eta}) - f_1'(\tilde{\eta})f_2(\tilde{\eta})},$$

$$r_s(\eta) := \int_0^\eta d\tilde{\eta} c_s(\tilde{\eta}) \quad (279)$$

である。 $r_s(\eta)$  は音速地平線の共動的大きさである。この表式で 1,2 項目は音の伝搬に対応する振動でありバリオン音響振動である。3 項目は音の振動に対する重力揺らぎの寄与である。初期条件として十分過去では揺らぎが凍り付いていたという条件  $(\Theta_{(0)(\eta)} + \Phi(\eta))' = 0 (\eta \rightarrow 0)$  を課すと

$$\Theta_{(0)(\eta)} + \Phi(\eta) = (\Theta_{(0)(0)} + \Phi(0)) \cos(kr_s(\eta)) + \frac{k^2}{3} \int_0^\eta d\tilde{\eta} (\Phi(\tilde{\eta}) - \Psi(\tilde{\eta})) \sin(kr_s(\eta) - kr_s(\tilde{\eta})) \quad (280)$$

が得られる。

以上より宇宙の晴れ上がり ( $\eta = \eta^*$ ) 以前で有効な揺らぎの表式が得られた。 $\Phi(\eta)$  は長波長側では凍結し、短波長側では減衰する。それを踏まえると、この表式の左辺の  $k$  依存性は  $\Theta_{(0)(\eta)}$  から主要に来ており、右辺は  $\Theta_{(0)}$  の  $k$  依存性を表す。 $k\eta$  が小さいと Eq(280) の二項目は無視できる。そこから晴れ上がりでの揺らぎ  $\Theta_{(0)(\eta^*)} + \Phi(\eta^*)$  が  $kr_s(\eta^*) = n\pi$  でピークを持つことがわかる。これをバリオン音響振動ピークという。

バリオン音響振動ピークがどの  $l$  に効いてくるか調べたい。 $n=1$  で  $\lambda = \frac{\pi}{k} = r_s(\eta^*)$  がそのままバリオン音響振動の共動長さスケールであるが、これは晴れ上がり時の音速地平線と同義である。共動角径距離  $D_A(\eta^*)$  を用いると、時間  $\eta^*$  にある共動長さ  $r_s(\eta^*)$  は現在の見込み角  $\theta_A = r_s(\eta^*)/D_A(\eta^*)$  に見える。ただし

$$D_A(\eta) = \frac{c}{a_0} \int^{\eta} \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} = -c \int_{t_0}^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = c(\eta_0 - \eta) \quad (281)$$

である。晴れ上がりなどでは、 $\eta_0 \gg \eta$  となる。共動波数  $k$  に対応する  $l$  は  $l_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{D_A(\eta^*)}{r_s(\eta^*)} = k(\eta_0 - \eta) \sim k\eta_0$  となる。

この  $l_A$  は  $H$  の進化や高次項の影響で動く。これのズレを決める因子を CMB シフトパラメータと呼び観測量である。高次の効果として Eq(275) を用いると 1 次に関してはすぐ出るが、これは 0 次と異なる位相の振動を与えるため、 $l_A$  がずれることがわかる。

### 8.13 シルク減衰

引き続き、晴れ上がり前の音響振動を扱う。特に先に落としていた高次揺らぎ  $\Theta_{(2)}$  を取り込むと小スケール  $k \gg aH$  の側で光子の拡散に伴うシルク減衰（揺らぎの平滑化）が起こる。

パラメータ  $\epsilon_c := -\frac{1}{\tau} = (n_e \sigma_T a)^{-1}$  は光のトムソン散乱下の平均自由行程  $l_\gamma = (n_e \sigma_T)^{-1}$  を共動的に直したものになっている。強結合領域でこれは小さな値  $\epsilon_c \ll 1$  となる。

Chapter.(8.5) により短波長側では晴れ上がり前後で  $\Phi$  は減衰しており今回は 0 と見なす。Eq(243) よりニュートリノの非等方ストレスを無視して  $\Psi_k = -\Phi_k$  を用いる。また 0 次近似で  $aHv_b \ll v'_b$  である。これは  $u_{(\gamma)} \sim u_b$  を仮定して Eq(275), Eq(280) から  $v'_\gamma$  を評価すると  $aHv_b/v'_b \sim \frac{aH}{c_s k}$  となり  $k \gg aH$  の元では無視できるからである。

以上の近似をふまえて Eq(220) と Eq(239) から

$$\begin{aligned} v_\gamma &\simeq \frac{3\delta'_\gamma}{4k^2} \quad , \quad v_b \simeq \frac{\delta'_b}{k^2} \quad , \\ v_b - v_\gamma &\simeq \epsilon_c \left( v'_\gamma + \frac{\delta_\gamma}{4} - 2\Theta_{(2)} \right) \simeq -\epsilon_c R_s v'_b \end{aligned} \quad (282)$$

となる。次に Eq(213) から  $\Theta_{(3)}$  を無視して

$$\Theta_{(2)}(k, \eta) = -\frac{10}{9} \epsilon_c \left[ \Theta'_{(2)}(k, \eta) + \frac{2k}{15} u_{(\gamma)} \right] \quad (283)$$

以上の 4 式 Eq(282), Eq(283) から  $\epsilon_c, v_b$  についての 1 次までの  $\delta_{(\gamma)}$  の方程式を求める。Eq(282) の最後の式に他の式を代入していく。その前に、先に  $\epsilon_c$  の 1 次まで他の量も求めておく。 $\epsilon_c$  の 0 次で

$$v_b = v_\gamma \quad , \quad \Theta_{(2)}(k, \eta) = 0 \quad (284)$$

となる。次に  $\epsilon_c$  の 1 次で

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{3\delta'_\gamma}{4k^2} + \frac{R_s \delta_\gamma}{4(1+R_s)} \epsilon_c \quad , \\ \Theta_{(2)}(k, \eta) &= -\frac{4}{27} k^2 v_\gamma \epsilon_c \end{aligned} \quad (285)$$

となる。つまり摂動の 1 次でバリオンは光子流体からズレて光の非等方ストレスが生まれる。以上を Eq(282) の最後の式に入れることで

$$\delta''_{(\gamma)} + \epsilon_c f(\eta) \delta'_{(\gamma)} + c_s^2 k^2 \delta_{(\gamma)} = 0 \quad , \quad f(\eta) := \frac{k^2}{3(1+R_s)} \left( \frac{8}{9} + \frac{R_s^2}{1+R_s} \right) \quad (286)$$

が得られる。ここで  $\dot{R}_s, \dot{\epsilon}_c$  は十分小さいとして無視した。揺らぎの減衰が  $\epsilon_c$  から生じてくるのがわかる。

これを解くと

$$\begin{aligned} \delta_{(\gamma)} &\propto e^{-\frac{k^2}{k_D^2}} \exp \left( \pm \int_0^\eta \omega(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right) \quad , \\ \omega(\eta)^2 &:= c_s^2 k^2 - \frac{f^2}{4} - \frac{f'}{2} \quad , \\ k_D^{-2} &:= \int_0^\eta d\tilde{\eta} \frac{1}{6(1+R_s) n_e \sigma_T a(\tilde{\eta})} \left( \frac{8}{9} + \frac{R_s^2}{1+R_s} \right) \end{aligned} \quad (287)$$

となる。この  $k_D$  による  $\exp$  の減衰をシルク減衰という。

8.14 大スケールの  $C_l (l \leq 20)$ 

$C_l (l \leq 20)$  の解析において SW 効果が出てくることを調べる。Eq(227) において、大スケールでは揺らぎはほとんど凍結しており、また Eq(249) から  $\Theta_{(l)k} \ll \Psi_k$  である。また今回は ISW 効果を見捨てる。初項の  $\eta_*$  での揺らぎの大きさの評価は Eq(280) を用いて晴れ上がり  $\eta = \eta_*$  で行う。晴れ上がりの時刻は  $z_{rec} \sim 1300$  程度であり、それ以降は物質優勢期となりスケールは  $a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^p$ , ( $p = 2/3$ ) で変化する。それを踏まえて ( $l \leq 20$ ) の観測に対応する波長  $k$  がホライズンの外にあるかどうか評価すると

$$\begin{aligned} z_{rec} &= \left(\frac{t_0}{t_*}\right)^p - 1 \sim 1300 \quad , \\ \alpha(t_*)H(t_*) &= \dot{a} = a_0 \left(\frac{t_*}{t_0}\right)^p \frac{p}{t_*} \quad , \\ k &\sim \frac{20}{\eta_0 - \eta_*} \quad , \\ \eta_0 - \eta_* &= \int_{t_*}^{t_0} \frac{df t}{a(t)} \sim \frac{t_0}{a_0(1-p)} \quad , \\ \frac{k}{aH} &= \frac{20}{\frac{t_0}{a_0(1-p)} a_0 \left(\frac{t_*}{t_0}\right)^p \frac{p}{t_*}} = \frac{1-p}{p} 20 (1300)^{-\frac{1-p}{p}} \sim 0.55 \quad , \quad (l = 20, q = \frac{2}{3}) \quad (288) \end{aligned}$$

であり  $\frac{k}{aH} < 1$  と評価できる。そこから  $C_l (l \leq 20)$  のゆらぎは晴れ上がりのときにはまだ凍結していたと考えて良い。

すると Chapter.(8.2) の結果が使えて、更に晴れ上がりは物質優勢期なので Eq(243) よりニュートリノの非等方ストレスを見捨てる  $\Psi_k = -\Phi_k$  を用いると

$$\Theta_{(0)k}(\eta_*) + \Psi(\eta_*) \simeq -\frac{1}{3}\Phi(\eta_*) \quad (289)$$

となる。冗長になるが現在の  $\Phi$  のパワースペクトルは Eq(271) で求めたため、それと結びつけるために物質・DE 優勢移行の減少関数  $D(a)$  を用いて  $\Phi(\eta_*) = \Phi(\eta_0) \frac{a}{D(a_0)}$  と書き直す。そこから SW 効果に起因する現在の  $\Theta_{(l)}$  が

$$\Theta_{(l)}^{SW} = -\frac{a_0}{3D(a_0)} \Phi(\eta_0) j_l(k\eta_0) \quad (290)$$

と評価できる。( $\eta_0 \gg \eta_*$  を用いた)

以上から Eq(234) にここまでの計算を代入すると次のように書ける。

$$C_{(l)}^{SW} = \frac{4\pi}{25} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)}{k_0^{n_s-1}} \int_0^\infty k^{n_s-2} T^2(k) j_l^2(k\eta_0) \quad (291)$$

長波長では輻射優勢期での減衰関数を  $T(k) \sim 1$  として無視できることを利用して積分を実行すると

$$C_{(l)}^{SW} = \frac{\pi^{3/2}}{25} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)}{(k_0\eta_0)^{n_s-1}} \frac{\Gamma(\frac{3-n_s}{2})\Gamma(\frac{2l+n_s-1}{2})}{\Gamma(\frac{4-n_s}{2})\Gamma(\frac{2l+5-n_s}{2})} \rightarrow \frac{2\pi}{25l(l+1)} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0) \quad , \quad (n_s \rightarrow 1) \quad (292)$$

となる。ポイントは SW 効果が主要な大スケールでは、 $l$  の値に依らずに  $l(l+1) C_{(l)}^{SW}$  が一定となることである。この値は直接重力揺らぎのスペクトル  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)$  に結びつくため、観測値からスペクトルの振幅への制限  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0) \sim 2 \times 10^{-9}$  が付く。これによりインフレーションのエネルギースケールに制限をつけることもできる。

### 8.15 小スケールの $C_l (l \gg 1)$

Eq(227) に対して小スケールへの寄与を考える。まず 1、2 項目の  $\eta_*$  での初期値はバリオン音響振動の解 Eq(280) で  $\eta = \eta_*$  と置いたものを用いる。

3 項目は ISW 効果である。特に早期 ISW 効果は定性的には次のように考える。効果は  $\eta = \eta_* \rightarrow \eta_0$  での重力ポテンシャルの変化幅に依存する。ところが短波長のゆらぎほど輻射優勢期に既に減衰しており、時間幅  $\eta = \eta_* \rightarrow \eta_0$  での変化量は少ない。Chapter.(8.9) について真面目に微分方程式を解くと、短波長では値の減衰が  $z \sim 10^4$  で起こるのに対して、長波長では値の変化  $\psi \rightarrow \frac{9}{10}\phi$  が  $z \sim 1000$  程度から起こっており、早期 ISW 効果に効いてくる。つまり早期 ISW 効果は長波長 ( $l \leq 300$  程度) に効く効果である。より具体的には  $j_l(x)$  は大きな  $l$  では  $x \sim l$  付近でピークを持つ。そこで早期 ISW 効果の主要な寄与は  $l \sim k\eta_0 \sim \frac{k}{a_0 H_0}$  で効く。

### 8.16 宇宙パラメータへの制限

バリオン量  $\Omega_b^{(0)} h^2$  に対する制限を考える。バリオン音響振動のピークを考えるときに、Eq(280) を用いた。この二項目の積分について  $\eta \rightarrow \eta_*$  までの重力ポテンシャルの時間変化を無視して積分すると  $\frac{\Psi(0) - \Psi_0}{\sqrt{3}c_s} [1 - \cos(kr_s(\eta_*))]$  となりバリオン音速、ひいては Eq(272) よりバリオン密度に依存する。Eq(280) の二乗が強度に寄与するのでバリオン音響振動のピークは初項のピーク  $kr_s(\eta_*) = n\pi$  で決まっていたが、先に考えた二項目は  $n$  が偶数のときは 0、奇数のときは有限の寄与をする。そのため、奇数番目のピークのみバリオン密度に依存する。それにより  $\Omega_b^{(0)} h^2$  に対する制限が付く。

次に  $\Omega_{(DE)}^{(0)}, h, \Omega_{(K)}^{(0)}$  の内、2 つを固定して 1 つを動かした場合の効果を見る。

$\Omega_{(DE)}^{(0)}, \Omega_{(K)}^{(0)}$  を固定した場合の  $h$  に対する制限を考える。特に  $\Omega_{(m)}^{(0)} h^2$  を通してどのように効くか考える。輻射・物質優勢期への移行  $z_{eq}$  は  $\Omega_{(m)}^{(0)}/\Omega_{(r)}^{(0)}$  に依存するが、 $\Omega_{(r)}^{(0)} h^2$  のまとまりでのみ値が分かっている。つまり  $z_{eq}$  は  $\Omega_{(m)}^{(0)} h^2$  で  $h$  に依存し、 $h$  が増えると輻射優勢期は短くなり、その分重力ポテンシャルの減衰は宇宙の晴れ上がりよりも早く起きる。そのため早期 ISW 効果が弱まり、ピークの強度が変化する。また Eq(15) を見ると  $H_0 \propto h$  より  $h$  が大きくなると  $H(z)$  は一律に大きく評価される。これにより晴れ上がり後の共動角径距離  $D_A(z_*) = \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)}$  が小さくなり、CMB スペクトル全体が 1 が小さい方にズレる。

次に  $\Omega_{(DE)}^{(0)}, h$  を固定して  $\Omega_{(K)}^{(0)}$  を大きくすると、まず後期宇宙での  $D_A(z_*) = \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)}$  が大きくなり CMB スペクトル全体が 1 が大きい方にズレる。また後期 ISW 効果により大スケールの振幅に効果を持つ。

次に  $\Omega_{(K)}^{(0)}, h$  を固定して  $\Omega_{(DE)}^{(0)}$  を動かすと、まず後期宇宙での  $D_A(z_*) = \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)}$  が小さくなり CMB スペクトル全体が 1 が小さい方にズレる。

## 9 長波長モードの凍結について

Chapter.(8) では具体的に場の方程式を計算することで長波長揺らぎの凍結を示した。以下では、Weinberg[2] の議論を用いて長波長モードの揺らぎの凍結について一般的な議論を行う。揺らぎの凍結を示すために、長波長  $k \rightarrow 0$  解を構成してそれが実際に凍結することを見る。

以下では一般的な宇宙の構成要素として完全流体の揺らぎ  $\Psi, \Phi, h_{ij}, \delta\rho, \delta q, \Pi, \Pi_{ij}$  を考える。また物質場として添字  $i$  で区別される複数成分があっても本質的な議論に変化は無い。

これらの構成要素を含む場合の重力の支配方程式は Chapter.(3.11) より次のように書ける。

- スカラー摂動

(0,0), (0,i) 成分から

$$\begin{aligned} 3aH(\psi' - aHA) - (\nabla^2 + 3K)\psi + aH\nabla^2\sigma &= 4\pi Ga^2\delta\rho, \\ \psi' - aHA - K\sigma &= 4\pi Ga\delta q, \\ \sigma &:= E' - B \end{aligned} \quad (293)$$

(i,j) 成分 ( $i \neq j$ ) から

$$\Psi + \Phi = -8\pi Ga^2\Pi \quad (294)$$

(i,i) 成分の trace を取って

$$\psi'' + 2aH\psi' - K\psi - aHA' - (a^2H^2 + 2(aH)')A = -4\pi Ga^2\left(\delta P + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi\right) \quad (295)$$

ただし注意が必要な点として、スカラー摂動が (i,0) や (i,j) の添字に結合する場合は微小でないベクトル量、つまり  $\partial_i$  と結合している必要があるということである。そのため長波長極限  $k \rightarrow 0$  では式  $3aH(\psi' - aHA) - (\nabla^2 + 3K)\psi + aH\nabla^2\sigma = 4\pi Ga^2\delta\rho$  のみが成立し、他の方程式は課されない。

また連続方程式  $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$  を用いると、流体の摂動  $\delta\rho$ ,  $\delta q$  に拘束条件が付き、

$$\begin{aligned} \delta\rho' + 3aH(\delta\rho + \delta P) &= -(\rho + P)[3\psi' + \nabla^2 v], \\ \delta q' + 3aH\delta q &= -a\delta P - \frac{2}{3}a(\nabla^2 + 3H)\Pi - (\rho + P)a\Psi \end{aligned} \quad (296)$$

が課される。 $k \rightarrow 0$  では 1 式目のみ有効である。

- テンソル摂動

$$(h_j^i)'' + 2aH(h_j^i)' + (2K - \nabla^2)h_j^i = 16\pi G\pi_j^{(T)i}a^2 \quad (297)$$

ベクトルゆらぎについては減衰が激しく観測が難しいことから今回は考えない。

## 9.1 メトリックのゲージ変換の読み替え

以前の議論 Eq(26) ではゲージ変換は 1 次で

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \eta + \xi^0, \\ \tilde{x}^i &= x^i + \xi^{;i} + \zeta^i, \quad (\zeta^i_{;i} = 0) \end{aligned} \quad (298)$$

のように定義していたが、以降では  $t \rightarrow t + \epsilon^0$  を用いる。 $\xi^0$  と  $\epsilon^0$  の関係は  $\Delta t = \epsilon^0$ ,  $\Delta\eta = \xi^0$  と書けることに注意すると  $\xi^0 = \Delta\eta = \frac{\Delta t}{a} = \frac{\epsilon^0}{a}$  で与えられる。

以上の読み替えを用いて、ゲージ変換を書き直す。

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[ -(1 + 2A) d\eta^2 + 2(B_{;i} - S_i) d\eta dx^i + [(1 + 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{;ij} + 2F_{j;i} + h_{ij}] dx^i dx^j \right] \quad (299)$$

に対するゲージ変換は

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - \xi^0 \frac{a'}{a} - \xi^{0'} \quad , \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi' \quad , \quad \tilde{\psi} = \psi - \xi^0 \frac{a'}{a} \quad , \quad \tilde{E} = E - \xi, \\ \tilde{F}_i &= F_i - \zeta_i \quad , \quad \tilde{S}_i = S_i + \zeta'_i \quad , \\ \tilde{h}_{ij} &= h_{ij} \end{aligned} \quad (300)$$



から次のように書き直され、

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A - \frac{\epsilon^0 a'}{a} - \left(\frac{\epsilon^0}{a}\right)' = A - \epsilon^0, & \tilde{B} &= B + \frac{\epsilon^0}{a} - a\xi, & \tilde{\psi} &= \psi - \frac{\epsilon^0}{a}\dot{a}, & \tilde{E} &= E - \xi, \\ \tilde{F}_i &= F_i - \zeta_i, & \tilde{S}_i &= S_i + \zeta_i', & & & & \\ \tilde{h}_{ij} &= h_{ij}\end{aligned}\tag{301}$$

となる。

ニュートンゲージではスカラー部分にゲージ条件

$$0 = \tilde{B} = B + \frac{\epsilon^0}{a} - a\xi, \quad 0 = \tilde{E} = E - \xi\tag{302}$$

が掛かる。またベクトル部分は  $F_i = 0$  が掛かる。

## 9.2 スカラー量のゲージ変換

以降の議論で使うので Chapter.(3.6) を再掲する。

基底量で微小でないスカラー量  $s$  のゲージ変換を、1次近似の範囲内でその摂動のズレ  $\delta s$  に押し付ける、という定式化を今回は採用している。まず  $s$  はスカラー量であり、時間のみに依存する。摂動と基底での量を合わせたものに関してはスカラーの性質  $\tilde{f}^{(b)}(\tilde{x}^\mu) + \delta\tilde{f}(\tilde{x}^\mu) = f^{(b)}(x^\mu) + \delta f(x^\mu)$  が成立する。よって無限小ゲージ変換 Eq(298) の下で次の様に変換する。

$$\begin{aligned}\tilde{s}(\tilde{x}^\mu) + \delta\tilde{s}(\tilde{x}^\mu) &= s(x^\mu) + \delta s(x^\mu), \\ \delta\tilde{s} &= \delta s(x^\mu) + s(x^\mu) - \tilde{s}(\tilde{x}^\mu) \\ &= \delta s(x^\mu) + s(\tilde{x}^\mu) - \xi^\mu \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}^\mu} - \tilde{s}(\tilde{x}^\mu) \\ &= \delta s(\tilde{x}^\mu) - \xi^\mu \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}^\mu} = \delta s(\tilde{x}^\mu) - \xi^0 \dot{s}\end{aligned}\tag{303}$$

最後の変形では、基底量がゲージ不変であるという仮定  $\tilde{f}^{(b)}(\tilde{x}^\mu) = f^{(b)}(x^\mu)$  を用いた。

また速度ベクトルのゲージ変換は、本来は時間成分の変換と合わせて考えるべきだが、定義に戻って簡単に導く方法がある。ゲージ変換の定義を  $\eta$  で微分すると、

$$\tilde{x}^{i'} = x^{i'} + \xi^{;i'} + \zeta^{i'}\tag{304}$$

となる。よって定義

$$\begin{aligned}-d\tau^2 &:= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \\ u^\mu &:= \frac{dx^\mu}{d\tau} = a^{-1} \left(1 - A, \frac{dx_i}{d\eta}\right) =: a^{-1} (1 - A, v^{;i} + v^i), \quad (v^{;i}_{;i} = 0), \\ u_\mu &:= u^\nu g_{\mu\nu} = a(-1 - A, v_{;i} + v_i + B_{;i} - S_i)\end{aligned}\tag{305}$$

より次が成立する。

$$\tilde{v} = v + \xi', \quad \tilde{v}^i = v^i + (\zeta^i)'\tag{306}$$

以後の解析ではスカラー成分  $v$  のみ使っていく。

### 9.3 ゲージ固定の不定性

ゲージ固定 Eq(3.10) から得られるメトリックは一意的だが、同じメトリックが異なるゲージ固定条件を持ちうる。その理由は、メトリック、アインシュタイン方程式の分解 Eq(3.1) には不定性が残るためである。逆にこの不定性を利用して、同じ物理状況を異なる計算で調べることができる。

簡単のために以下では共変微分を単なる微分で書く。<sup>21</sup>分解されたメトリック Eq(24) に対して、微小量  $X, \tilde{X}$  の差  $\delta X$  が次を満たす時、 $X, \tilde{X}$  はどちらも同じメトリックを持つことがわかる。

$$\begin{aligned} \delta B_{,i} - \delta S_i &= 0 \quad , \\ 2\delta_{ij}\delta\psi + 2\delta E_{,ij} + 2\delta F_{i,j} + \delta h_{ij} &= 0 \quad , \\ (\delta S_{i,i} = \delta F_{i,i} = \delta h_{ii} = \delta h_{ij;i} = 0 \quad , \quad \delta F_{j,i} = \delta F_{i,j} \quad , \quad \delta h_{ij} = \delta h_{ji}) & \end{aligned} \quad (307)$$

同じメトリックに対して、ベクトル分解した微小量はこの条件を満たす範囲で不定性を持つ。

$B, S_i$  については多様体上の調和関数  $\phi_{(HF)}$  で書ける。

$$\delta B_{,ii} = \delta S_{i,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta B = \phi_{(HF)}^{(B)} \quad (308)$$

調和関数は境界条件に応じて様々な解が存在するが、以下では一例として次のような解を考える。

$$\delta B \rightarrow a_{ij}^{(B)} x^i x^j + b_i^{(B)} x^i + c^{(B)} \quad , \quad \delta S_i \rightarrow 2a_{ij}^{(B)} x^j + b_i^{(B)} \quad , \quad (a_{ii}^{(B)} = 0) \quad (309)$$

また残りの空間部分の微小量には次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \delta\psi_{,i} + \delta E_{,ijj} &= 0 \quad , \quad \delta F_{j,ii} = \delta F_{i,ji} = 0 \\ \Rightarrow \delta F_j &= \phi_{(HF)}^{(Fj)} \rightarrow a_{ik}^{(Fj)} x^i x^k + b_i^{(Fj)} x^i + c^{(Fj)} \quad , \quad \delta\psi + \delta E_{,jj} = a^{(1)} \quad , \\ (a_{ik}^{(Fj)} = a_{jk}^{(Fi)} \quad , \quad a_{ii}^{(Fj)} = a_{jk}^{(Fi)} = 0 \quad , \quad b_{,i}^{(Fj)} = b_{,j}^{(Fi)} \quad , \quad b_{,i}^{(Fi)} = 0) & \end{aligned} \quad (310)$$

さらに  $i = j$  として

$$\begin{aligned} 3\delta\psi + \delta E_{,ii} &= 2\delta\psi + a^{(1)} = 0 \\ \Rightarrow \delta\psi &= -\frac{1}{2}a^{(1)} \quad , \\ \delta E &= \frac{3}{2}\Delta^{-1}a^{(1)} + \phi_{(HF)}^{(E)} \rightarrow \frac{3}{2}a^{(1)} \left( \frac{a_{ij}^{(1)} x^i x^j}{2a_{ii}^{(1)}} + b_i^{(1)} x^i + c^{(1)} \right) + a_{ij}^{(E)} x^i x^j + b_i^{(E)} x^i + c^{(E)} \quad , \\ (a_{ii}^{(1)} \neq 0 \quad , \quad a_{ii}^{(E)} = 0) & \end{aligned} \quad (311)$$

が成立する。更に

$$\begin{aligned} \delta h_{ij} &= \delta_{ij} a^{(1)} - 3(\Delta^{-1}a^{(1)})_{,ij} - 2(\phi_{(HF)}^{(E)})_{,ij} - 2\phi_{(HF),i}^{(Fj)} \\ &\rightarrow \delta_{ij} a^{(1)} - 3\frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{ii}^{(1)}} - 4a_{,ij}^{(E)} - 2(2a_{ik}^{(Fj)} x^k + b_i^{(Fj)}) \end{aligned} \quad (312)$$

となる。

<sup>21</sup>今回は基底のメトリック (FRLW メトリック) が空間的には一様なため、微小量の 1 次ではこのような操作が可能となる。

以上から、ゲージ固定の不定性は空間微分に対して定数、もしくは線形に効くとわかる。通常の揺らぎの計算では、定数部分は基底量に押し込み、また線形で効く部分は十分遠方では微量と言えないため、どちらも実質的に揺らぎとして扱うことはない。その意味で、不定性は存在しないと言える。

しかし、この不定性は時間  $t$  に依存しうる量であり、凍結した揺らぎ  $k \ll aH$  の解析と密接に関係する。

#### 9.4 解の構成方法の方針

解の構成方法の方針を説明する。

今回の方程式系  $F_{\lambda}(\delta s_a) = 0$  ( $F_{\lambda}$  は場の方程式 Eq(293), Eq(296) など を指している。) では摂動量  $\delta s_a(a = \Psi, \dots)$  が線形に入るので異なる解  $\delta s_a^{(1)}(x) = f_a(x)$  と  $\delta s_a^{(2)}(x) = g_a(x)$  が構成できればその差  $\delta s_a^{(3)}(x) = g_a(x) - f_a(x)$  も解になる。

ゲージ変換は一見して解の形を変えており、それを利用すると新しい解が作れそうに見える。しかしゲージ自由度は物理的ではないため、意味のある解は作れない。具体的に言うと  $s_a(x)$  をゲージ変換  $x^{\mu} \rightarrow \tilde{x}^{\mu}$  してその微小変化を  $\delta s_a(x) \rightarrow \delta \tilde{s}_a(x)$  の形で取り込んだとする。このとき、 $F_{\lambda}(\delta s_a(x)) = 0$  を満たす  $\delta s_a(x)$  は別の座標系において自明に  $F_{\lambda}(\delta \tilde{s}_a(x)) = 0$  を満たす。それらの差  $\Delta(\delta s_a(x)) := \delta \tilde{s}_a(x) - \delta s_a(x)$  は確かに  $F_{\lambda}(\Delta(\delta s_a(x))) = 0$  を満たし、元の方程式系の解となっている。この解からゲージ不変量  $G$  を計算すると  $G(\Delta(\delta s_a(x))) = G(\delta \tilde{s}_a(x)) - G(\delta s_a(x)) = 0$  になる。この意味でゲージ変換から作られる解は物理的な意味を持たない。

ただし先に見たようにベクトル、テンソルの分解での global な (一様な) 不定性が存在する。この不定性とゲージ変換を組み合わせることで新しい解を構成できる。もちろん、このように形式的に構成された解は一様解であり物理的な揺らぎとはいえない。問題は、この一様解を拡張して、波数が 0 でない物理的な解を構成できるか、という点である。

#### 9.5 変換の構成

先の議論を踏まえて、ニュートンゲージでの解が与えられたとき、その方程式系  $F_{\lambda}(\delta s_a) = 0$  を変えないような解の変換を用いて、 $k \rightarrow 0$  での揺らぎの非物理的な解が存在することを示し、それが  $k \neq 0$  での物理的な解へ延長できることを確認する。注意として、ベクトル、テンソルの分解においては調和関数の自由度だけ不定性が残っている。

まずニュートンゲージでベクトル摂動を 0 にして、 $k = 0$  でのメトリック

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha(\eta)^2 \left[ -(1 + 2A(x)) d\eta^2 + [(1 + 2\psi(x)) \gamma_{ij} + h_{ij}(x)] dx^i dx^j \right] \\ &= -(1 + 2\Psi(x)) dt^2 + \alpha(\eta)^2 [(1 + 2\Phi(x)) \gamma_{ij} + h_{ij}(x)] dx^i dx^j \end{aligned} \quad (313)$$

と他の物理量の揺らぎが、場の支配方程式  $F_{\lambda}(\delta s_a) = 0$  を満たしていると仮定する。このメトリックと物理量の揺らぎ  $\delta s_a$  に対してゲージ変換  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$  を施す。ただし  $\epsilon^{\mu}(t, \mathbf{x})$  の空間依存性は変換後のメトリック成分が空間的な依存性を持たないように注意して決める。調和関数の不定性を用いて、 $B$  と  $E, F_i$  を空間的に一様な量  $\epsilon_B(t), \epsilon_E(t), \epsilon_{F_i}(t)$  だけシフトして無理矢理メトリックをニュートンゲージに直す ( $\delta \tilde{s}_a \rightarrow \delta \hat{s}_a$ )。この操作は本来の場の方程式  $F_{\lambda}(\delta \tilde{s}_a) = 0$  に影響しないため、やはり  $\delta \hat{s}_a$  も場の方程式を満たす解である。

上の操作を具体的に構成していく。まず、一般的な微小変換  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(t, \mathbf{x})$  に対してメ

トリックの変換は ( $d\eta = adt$  に注意)

$$\begin{aligned}
h_{00} &:= -(1 + 2A) \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{00} := -(1 + 2A - 2\dot{\epsilon}_0) \quad , \\
h_{0i} &:= a(B_{;i} - S_i) \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{0i} := a \left( B_{;i} - S_i + \left( \frac{\epsilon_0}{a} - a\dot{\xi} \right)_{;i} - (+\zeta'_i) \right) = a \left( B_{;i} - S_i + \frac{\epsilon_{0;i}}{a} - a\dot{\epsilon}_i \right) \quad , \\
h_{ij} &:= a^2 (1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2a^2 E_{;ij} + 2a^2 F_{j;i} + a^2 h_{ij} \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{ij} := a^2 \left( 1 + 2 \left( \psi - \frac{\epsilon^0}{a} \dot{a} \right) \right) \gamma_{ij} + 2a^2 E_{;ij} + 2a^2 F_{j;i} - 2a^2 \epsilon_{j;i} + a^2 h_{ij} \quad (314)
\end{aligned}$$

となる。ただし変換前がニュートンゲージでベクトル成分を消去していたので

$$\begin{aligned}
h_{00} &:= -(1 + 2A) \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{00} := -(1 + 2A - 2\dot{\epsilon}_0) \quad , \\
h_{0i} &:= 0 \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{0i} := a \left( \frac{\epsilon_{0;i}}{a} - a\dot{\epsilon}_i \right) \quad , \\
h_{ij} &:= a^2 (1 + 2\psi) \gamma_{ij} + a^2 h_{ij} \quad , \\
&\rightarrow \tilde{h}_{ij} := a^2 \left( 1 + 2 \left( \psi - \frac{\epsilon^0}{a} \dot{a} \right) \right) \gamma_{ij} - 2a^2 \epsilon_{j;i} + a^2 h_{ij} \quad (315)
\end{aligned}$$

で十分。

ここで、 $\tilde{h}_{00}$  の空間的一様性を課すと  $\epsilon_0 = \epsilon(t) + \chi(x)$  として空間成分と時間成分に分かれる。次に、元のメトリックと同様に  $\tilde{h}_{0i} = 0$  を課すと  $\frac{\epsilon_{0;i}}{a} - a\dot{\epsilon}_i = 0 \Rightarrow \epsilon_i = f_{;i}(x) + \int dt \frac{\chi_{;i}(x)}{a^2}$  となる。このとき

$$\begin{aligned}
\Delta(h_{ij}) &:= \tilde{h}_{ij} - h_{ij} = -2\gamma_{ij} a \dot{a} \epsilon_0 - 2a^2 \epsilon_{j;i} \\
&= -2\gamma_{ij} a \dot{a} (\epsilon(t) + \chi(x)) - 2a^2 f_{i;j}(x) + \int dt \frac{\chi_{;ij}(x)}{a^2} \quad (316)
\end{aligned}$$

となるが、これの  $x$  依存性がなくなるためには  $\chi(x) = const$  かつ  $f_{i;j}(x) = const$  であることが必要。 $\epsilon_0 = \epsilon(t) + \chi(x)$  で  $\epsilon(t)$  に定数を取り込んでしまえば  $\chi(x) = 0$  と出来る。一方、 $f_{;i}(x)$  は  $f_{;i}(x) = \omega_{ij} x^j + \omega_i$  が一般的な表示である。 $\Delta(h_{ij}) = \Delta(h_{ji})$  より  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$  である。よって最終的に

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{00} &:= -(1 + 2A - 2\dot{\epsilon}) \quad , \\
\tilde{h}_{0i} &:= 0 \quad , \\
\tilde{h}_{ij} &:= a^2 \left( 1 + 2 \left( \psi - H\epsilon - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \omega_{kk} \right) \right) \gamma_{ij} - 2a^2 \left( \omega_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \omega_{kk} \right) + a^2 h_{ij} \quad (317)
\end{aligned}$$

となる。通常のゲージ変換では、この表式から Eq(301)

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A - \dot{\epsilon} \quad , \quad \tilde{B} = B + \frac{\epsilon^0}{a} \quad , \quad \tilde{\psi} = \psi - \frac{\epsilon}{a} \dot{a} \quad , \quad \tilde{E} = E - \xi, \\
\tilde{F}_i &= F_i - \zeta_i \quad , \quad \tilde{S}_i = S_i \quad , \\
\tilde{h}_{ij} &= h_{ij} \quad , \\
(\xi^i + \zeta^i &= \omega_{ij} x^j + \omega^i) \quad (318)
\end{aligned}$$

を結論付ける。だがこれではニュートンゲージから変わってしまうため、調和関数の不定性を用いて、tr で除去できない部分をテンソルモードの変化に押し付ける。以上からゲージ変換と調和関数の不定性を用いて、次の新しい一様解が構成できる。

$$\begin{aligned}\Delta(A) &= -\dot{\epsilon}(t) \quad , \quad \Delta(B) = 0 \quad , \quad \Delta(\psi) = -H\epsilon(t) - \frac{1}{3}\omega_{kk} \quad , \quad \Delta(E) = 0, \\ \Delta(F_i) &= 0 \quad , \quad \Delta(S_i) = 0 \quad , \\ \Delta(h_{ij}) &= -2\left(\omega_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\omega_{kk}\right)\end{aligned}\tag{319}$$

ただし  $\omega_{ij}$  は空間・時間的な定数である。ここでニュートンゲージでの量をゲージ不変量で書くと、

$$\begin{aligned}\Delta(\Psi) &= -\dot{\epsilon}(t) \quad , \quad \Delta(B) = 0 \quad , \quad \Delta(\Phi) = -H\epsilon(t) - \frac{1}{3}\omega_{kk} \quad , \quad \Delta(E) = 0, \\ \Delta(F_i) &= 0 \quad , \quad \Delta(S_i) = 0 \quad , \\ \Delta(h_{ij}) &= -2\left(\omega_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\omega_{kk}\right)\end{aligned}\tag{320}$$

となる。

以上から一様解として、スカラーモード

$$\Psi = -\dot{\epsilon}(t) \quad , \quad \Phi = -H\epsilon(t) - \frac{1}{3}\omega_{kk} \quad , \quad \delta P = -\dot{P}\epsilon \quad , \quad \delta\rho = -\dot{\rho}\epsilon \quad , \quad v = \epsilon \quad , \quad \pi^{(s)} = 0\tag{321}$$

とテンソルモード

$$h_{ij} = 2\left(\omega_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\omega_{kk}\right) \quad , \quad \pi_{ij}^{(T)} = 0\tag{322}$$

が得られた。ただし、最後のストレス項が 0 になる理由は今回の変換による解の構成の枠組みでは 2 次の微小量になるからである。<sup>22</sup>

## 9.6 一様解の拡張

先に求めた解が場の方程式系を満たすか確認して、それを有限の  $k$  へ拡張していく。微分方程式系を空間方向にフーリエ変換することで運動量  $k$  は方程式系のパラメータとして解釈できる。 $k = 0$  で成立する解が存在したときに、解が  $k$  について連続的につながっているような場合には  $k \neq 0$  でも解が存在すると期待できる。ただし、方程式全体に  $k$  がかかっているときは、 $k = 0$  では存在しなかった拘束条件が  $k \neq 0$  で追加される。そのため、スカラーモードの支配方程式 Eq(293) の  $(i, j)$ ,  $(0, i)$  式が解を満たすか調べる必要がある。

テンソルモードは自明に拡張できる。まず定数解で  $k = 0$  なら、場の発展方程式 Eq(297) は自明に成立する。次に  $h_{ij}(t, k)$ , ( $k \neq 0$ ) を場の発展方程式 Eq(297) に代入して、曲率を無視  $K = 0$  して

$$(h_j^i)'' + 2aH(h_j^i)' + k^2 h_j^i = 16\pi G \pi_j^{(T) i} a^2\tag{323}$$

<sup>22</sup> この仮定は具体的に Chapter.(11.12) などでは成立している。

となる。この式は  $k$  をパラメーターと見なすと  $h_{ij}(t, k)$  の時間についての 2 階微分方程式である。この方程式の解はグリーン関数を用いると一般的に解くことができる。その解が  $k \rightarrow 0$  で先の定数解に一致することは関数の連続性から要請される。

スカラーモードについて、一様解 Eq(321) が揺らぎの支配方程式の  $(0, i)$ ,  $(i, j)$  成分を満たすかどうかを確認する。このときに、式全体に付いた  $k$  を除いた上で  $k \rightarrow 0$  極限を取る。このようにすることで  $k \neq 0$  に連続的につながるような拘束条件を確かめることができる。 $(0, i)$ ,  $(i, i)$  成分に一様解 Eq(321) を代入すれば自明に成立する。次に  $(i, j)$ ,  $(i \neq j)$  成分は非自明な拘束を与える。

$$\Psi + \Phi = -8\pi G a^2 \Pi \rightarrow 0 \quad (324)$$

この条件に  $k = 0$  での解 Eq(321) を代入することで  $\epsilon$  に条件  $\dot{\epsilon} = -H\epsilon + \frac{\omega_{kk}}{3}$  が掛かる。ところで、Eq(321) を見るとニュートンゲージで  $\mathcal{R} := \psi + \frac{H}{P+\rho}\delta q = \psi + aHv = -\frac{1}{3}\omega_{kk}$  は時間発展しない量になっている。そこでこれを用いて  $\epsilon$  を解くと  $T$  を適当な定数として

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_T^t \alpha(t') dt' & , \quad (\mathcal{R} \neq 0) \\ C_1/a(t) & , \quad (\mathcal{R} = 0) \end{cases} \quad (325)$$

と書ける。これを Eq(321) に代入すると  $\mathcal{R} \neq 0$  で

$$\Psi = \Phi = \mathcal{R} \left( 1 + \frac{H}{a} \int_T^t \alpha(t') dt' \right) , \quad \frac{\delta P}{\dot{P}} = \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} = -v = -\epsilon = \frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_T^t \alpha(t') dt' \quad (326)$$

また  $\mathcal{R} = 0$  で

$$\Psi = \Phi = -\frac{C_1}{a} , \quad \frac{\delta P}{\dot{P}} = \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} = -v = -\epsilon = -\frac{C_1}{a} \quad (327)$$

となり解が 2 つ決まる。以上で、2 つの断熱的解の存在が示せ、かつこの場合には  $h_{ij}$  と  $\mathcal{R}$  が凍結する量であるとわかった。

現実の宇宙では多数のモードが存在するが、宇宙膨張の過程で上記の凍結モードだけ残り、他の減衰モードは消えていくと考えられる。

### 9.7 一様解の別導出

微小変換  $\epsilon^\mu = (\epsilon_0, \omega_{ij}x^j + \omega_i)$  についてキリングベクトル方程式の導出を利用することでも、一様解を構成できる。つまり座標変換とメトリックの変化の関係

$$\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \delta g_{\mu\nu} \quad (328)$$

を用いて、右辺がニュートンゲージかつ空間に依存しないように条件を課して  $\epsilon_\nu$  について解く。この手法でも先と同じ解が得られ、

$$\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \begin{pmatrix} -2\dot{\epsilon}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2a^2\omega_{ij} + 2a\dot{a}\epsilon_0\delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (329)$$

となる。ただし、 $\epsilon_\mu = g_{\mu\nu}\epsilon^\nu$  であり、また  $\epsilon^\mu$  は一次の微小量として最低次で計算した。そのとき、0 次のクリストッフエル記号も寄与するが、0 次のものは  $\Gamma_{0i}^\sigma = \delta_{i\sigma}H$ ,  $\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}a\dot{a}$  のみである。

## 9.8 波数依存性のユニバーサリティー

具体的なゆらぎの時間発展を考える前に、Horizon-crossing で凍結する物理量に対する一般的な波数依存性の傾向を考えたい [2]。

物理量  $Z(x, t)$  の量子化を考える。

$$Z(x, t) =: \sum_N \int d^3q e^{iq \cdot x} b_{N,q} z_{Nq}(t) + h.c. \quad (330)$$

ここで  $b$  は生成消滅演算子とする。  $N$  は  $Z$  の自由度に応じて変わる。このとき  $z_{Nq}(t) \propto q^{-3/2}$  という依存性がインフレーションの重力揺らぎなどで観測されるがその理由を見る。

空間曲率が無視できる場合を考える。このような空間にはスケールがないので  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $q \rightarrow q/\lambda$  というスケール変換に対して物理量  $Z$  は不変であるべき。生成消滅演算子は交換関係によりデルタ関数になるように規格化されている。よって  $b \rightarrow \lambda^{3/2} b$  で変換される。また積分の測度の変換と組み合わせると、残りの係数は  $z_q \rightarrow \lambda^{3/2} z_q$  で変換すべきである。つまり  $z_{q/\lambda} = \lambda^{3/2} z_q$  となり、  $z_q \propto q^{-3/2}$  が期待される。

上の考察が成立する条件として、  $z_q$  がスケール  $\alpha(t)$  に直接依存しないことが必要である。その理由は、スケール  $\alpha(t)$  自体の変換性が、座標のスケール変換  $x \rightarrow \lambda x$  に対して物理的波長  $\alpha(t)$  が不変に保たれることを要求すると  $\alpha(t) \rightarrow \lambda^{-1} \alpha(t)$  となるからである。もし  $z_q$  がスケール  $\alpha(t)$  に依存すると  $z_{q(\alpha(t), t)} = \alpha(t) q^{-5/2}$  のような形式も  $q^{-3/2}$  と同じ依存性を満たしてしまう。

地平線の外側で凍り付く物理量は上の条件を満たすと考えられる。なぜなら地平線の外側にいる間にも  $\alpha(t)$  は増加するがそれにも関わらず凍結したままという点で  $\alpha(t)$  への依存性は弱いと考えられるからである。

インフレーション期には空間の曲率が引き延ばされ 0 に近いので、空間曲率を無視できるという条件も成立する。以降で見るように、スケール不変からのズレはインフレーションの詳細としてスペクトルインデックス  $n_s$  に現れる。

## Part III

# B-mode 偏光

インフレーションモデルを区別する上で Tensor to Scalar Ratio ( $r$ ) は有力な指標の 1 つである。Cosmic Microwave Background (CMB) を通して  $r$  を測定するためには重力波により生成される B-mode 偏光を測定する必要がある。B-mode 偏光の生成メカニズムと将来的な検出感度を review する。

Weinberg の Cosmology[2] から B-mode 偏光をまとめる。メトリックは Eq(313) を用いる。

## 10 偏光付きボルツマン方程式の構成

光は偏光を持つので偏光成分ごとに密度行列を定義することが必要。偏極ベクトル  $e^i$  は次を満たすように定義する。

$$g_{ij} e^i e^{j*} = 1 \quad , \quad p_i e^i = 0 \quad , \quad e_i := g_{ij} e^j \quad (331)$$

そして偏光は 2 成分あるので偏光ベクトルは 2 本の独立なベクトルで完全系が張れる。一般的な方向への偏光ベクトルは  $e^i(p) = a_+ e^i_{+(p)} + a_- e^i_{-(p)}$  と書ける。

偏光ベクトルの時間発展を考える。4元ベクトルにするため  $e^0 = 0$  を  $t = 0$  で定義する。この時、上の関係式はすべて4元内積になるが、式は変更されない。単純に光の軌道に沿って  $e^\mu(t)$  を平行移動すると

$$\frac{de^\mu(t)}{dt} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} \quad , \quad (?) \quad (332)$$

となるが、これだと  $e^0 = 0$  が維持されない。そこで、光のゲージ変換の自由度を用いて、<sup>23</sup>次の様に時間発展を考える。

$$\begin{aligned} \frac{de^\mu(t)}{dt} &= -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \alpha(t)\frac{dx^\mu(t)}{dt} \\ &= -\left[\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t)) - \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right]e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} \quad , \\ \alpha(t) &= \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t))e^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} \end{aligned} \quad (333)$$

ここでゲージ自由度は0成分を消去するように決めた。

独立変数が  $(t, x^i, p_i)$  で書けるときには、上の式を

$$\frac{de^\mu(t)}{dt} = \frac{\partial e^\mu(t)}{\partial t} + \frac{\partial e^\mu(t)}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial e^\mu(t)}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \quad (334)$$

と比較すると、

$$\frac{\partial e^\mu(t)}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial e^\mu(t)}{\partial x^\lambda} = -\left[\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t)) - \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right]e^\nu(t) \quad (335)$$

となることに注意。

### 10.1 1次での表示

以降の計算で用いるかもしれないので今回のメトリック Eq(313)でのクリストッフェル記号を1次まで考える。メトリックのベクトル成分を無視  $g^{0i} = 0$  しているので  $\Gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2}g^{ij}(g_{j\alpha,\beta} + g_{j\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,j})$  になる。よって

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2}g^{ij}g_{00,j} = g^{ij}\Psi_{,j} \sim \gamma^{ij}\frac{\Psi_{,j}}{a^2} \quad , \\ \Gamma_{0k}^i &= \frac{1}{2}g^{ij}(g_{j0,k} + g_{jk,0} - g_{0k,j}) = \frac{1}{2}g^{ij}\left[2\frac{\dot{a}}{a}g_{jk} + a^2(2\Psi_{,0}\gamma_{jk} + h_{jk,0})\right] \sim \frac{\dot{a}}{a}\delta_k^i + \Psi_{,0}\delta_k^i + \frac{1}{2}\gamma^{ij}h_{jk,0} \quad , \\ \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2}g^{ij}(g_{jk,l} + g_{jl,k} - g_{kl,j}) \sim \frac{1}{2}\gamma^{ij}(2\Phi_{,l}\gamma_{jk} + h_{jk,l} + 2\Phi_{,k}\gamma_{jl} + h_{jl,k} - 2\Phi_{,j}\gamma_{lk} - h_{lk,j}) \end{aligned} \quad (336)$$

という近似形を持つ。注意点として、微量に付随していても  $\frac{\partial}{\partial t}$  と  $g^{ij}$  は交換しない。これは FRLW メトリックのスケール  $a$  が時間微分に依存するからである。

<sup>23</sup> $e^\mu$  と内積で掛かる量  $X^\mu$  はすべて wald-Id により  $X \cdot p = 0$  が課されるからこのような自由度が許される。このような縦成分の除去は  $A^0$  成分と縦成分の打ち消しで理解できる。



また Eq(176) にならって局所ローレンツ系での運動量  $p$  を次のように導入する。

$$\begin{aligned} p^0 &:= \sqrt{\frac{g^{lm}p_l p_m}{-g_{00}}} \sim \frac{p}{a} \left( 1 - \Psi - \Phi - \frac{h_{ab}\gamma^{ai}\gamma^{bj}p_i p_j}{2p^2} \right), \quad (p^2 := p_i p_j \gamma^{ij}), \\ p_0 &= \sqrt{\frac{g^{lm}p_l p_m}{-g^{00}}} \sim \frac{p}{a} \left( 1 + \Psi - \Phi - \frac{h_{ab}\gamma^{ai}\gamma^{bj}p_i p_j}{2p^2} \right) \end{aligned} \quad (337)$$

## 10.2 偏光付きボルツマン方程式運動項

偏光付き密度行列を定義する。テンソル密度行列  $f^{ij}(x, p, t)$  は、向き  $e^i$  の偏光を持つ光の密度行列が  $e_i^* e_j f^{ij}(x, p, t)$  で書けるような行列として定義される。これは次のようにして構成できる。運動量  $p^i$  に対する密度行列を偏光の基底  $e_A^i (A = \pm)$  とその偏光成分の存在確率  $P_A$  を用いて

$$f^{ij}(x, p, t) := \sum_A P_A e_A^i e_A^{j*} \quad (338)$$

で定義すると、向き  $e^i = a_+ e_+^i + a_- e_-^i$  の光子の存在確率が

$$\begin{aligned} P &:= e_i^* e_j f^{ij}(x, p, t) \\ &= (a_+^* e_{+i}^* + a_-^* e_{-i}^*) (a_+ e_{+j} + a_- e_{-j}) \sum_A P_A e_A^i e_A^{j*} \\ &= P_+ |a_+|^2 + P_- |a_-|^2 \end{aligned} \quad (339)$$

となり、確かに偏光向きの存在確率を定義できている。

ボルツマン方程式の構成では運動量変化  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$  を測地線方程式で処理した。ところが今回は偏光添字  $i$  も時間発展とともに混ざるため、その考慮も必要。スカラー揺らぎの場合の定義 Eq(176) では  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} := P^\mu \rightarrow p^\mu$  に変数変換したが、ここでは  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} := p^\mu$  という記号で定義する。存在確率密度  $P_A$  は単なるスカラー関数であり、ニュートンゲージでのスカラー量のボルツマン方程式 Eq(183) と同様な時間依存性を持ち、

$$\frac{dP_A}{dt} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial t} \frac{\partial P_A}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial P_A}{\partial p_i} = \frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial P_A}{\partial x^i} + \frac{a}{2p} \left( -2\Psi_{,i} \frac{p^2}{a^2} + g_{jl,i} p^j p^l \right) \frac{\partial P_A}{\partial p_i} \quad (340)$$

となる。ただし式変形には

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d^2 \lambda} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \\ \rightarrow \frac{dp^i}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^2 x^i}{d^2 \lambda} = -\frac{1}{p^0} \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \\ \rightarrow \frac{dp_i}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt} g_{ij} \frac{dp^j}{d\lambda} + \frac{d\lambda}{dt} p^j \frac{dg_{ij}}{d\lambda} = -\frac{1}{p^0} g_{ij} \Gamma_{\alpha\beta}^j p^\alpha p^\beta + p^j p^\alpha g_{ij,\alpha} \frac{1}{p^0} \\ &= \frac{1}{p^0} \left[ p^j p^\alpha g_{ij,\alpha} - g_{ij} \frac{g^{jl}}{2} (g_{l\alpha,\beta} + g_{l\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,l}) p^\alpha p^\beta \right] \\ &= \frac{1}{2p^0} \left( g_{00,i} (p^0)^2 + g_{jl,i} p^j p^l \right) = \frac{a}{2p} \left( -2\Psi_{,i} \frac{p^2}{a^2} + g_{jl,i} p^j p^l \right) \end{aligned} \quad (341)$$

を用いた。測地線方程式は上添字、相対論的な運動量は下添字なのでその入れ替えの分で変更が生じることに注意。

この式を使って  $\frac{df^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \sum_A P_A e_A^i e_A^{j*}$  を計算しようとする、偏光ベクトルの時間発展 Eq(333) の分だけ微分方程式が変化する。具体的には Eq(335) で見たように独立変数  $(t, x^i, p^i)$  の微分で  $\frac{\partial e^{\mu}(\tau)}{\partial x^\lambda}$  のみ 0 でないことから、ボルツマン方程式の  $\frac{\partial f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^\lambda}$  が  $P_A$  とは異なる依存性を持つ。代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{ij}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial P_A}{\partial x^\lambda} e_A^i e_A^{j*} + P_A \frac{\partial e_A^i}{\partial x^\lambda} e_A^{j*} + P_A e_A^i \frac{\partial e_A^{j*}}{\partial x^\lambda} \\ &= \frac{\partial P_A}{\partial x^\lambda} e_A^i e_A^{j*} - P_A \left[ \Gamma_{\nu\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right] e_A^{\nu} e_A^{j*} - P_A e_A^i \left[ \Gamma_{\nu\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right] e_A^{\nu*} \\ &= \frac{\partial P_A}{\partial x^\lambda} e_A^i e_A^{j*} - \left[ \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right] f^{lj} - \left[ \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right] f^{il} \end{aligned} \quad (342)$$

という関係になる。

そこで Eq(340) に  $e_A^i e_A^{j*}$  を掛けて、それに上の微分方程式の変換を導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{df^{ij}}{dt} &= \frac{\partial f^{ij}}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial f^{ij}}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl, i} p^j p^l - 2\Psi_{,i} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial f^{ij}}{\partial p_k} \\ &\quad + \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \left( \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) f^{lj} + \left( \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) f^{il} \right] \end{aligned} \quad (343)$$

となり、偏光付きボルツマン方程式の運動項が計算できた。

### 10.3 偏光付きボルツマン方程式衝突項

最初に電子が静止している場合の衝突項を計算し、次に電子に速度があるような場合に拡張する。衝突により光子の運動量が  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$  になったとする。電子が静止している場合には、 $m_e \gg |\mathbf{q}|, |\mathbf{p}|$  の下で  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|$  が成立する。そこで  $\mathbf{q}$  の角度依存性に対する積分が必要になる。最初にミンコフスキー空間での衝突項を出して、あとでメトリックを導入して曲がった空間での項に直す。

まず散乱により運動量  $p$  にあった光子が減少する量は、

$$C_-^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\sigma_T n_e(t) f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (344)$$

次に衝突で増える分を考える。静止電子による光の低エネルギー散乱において、運動量の小さな極限での散乱確率の角度依存性は

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \left| \epsilon_i^\mu \epsilon_f^{\nu*} \left( \bar{u} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu u + \bar{u} \gamma^\nu \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2} \gamma^\mu u \right) \right|^2 \propto (\epsilon_i \cdot \epsilon_f)^2 \quad (345)$$

となることが知られている。(クライン-仁科の公式) よって最終的な散乱の偏光向きの結果はスピン偏光の積の 2 乗に比例する。

それを踏まえて、ある 1 光子が散乱により始状態  $F_{(i)}^{ij}$  から終状態  $F_{(f)}^{ij}$  に移る事を考える。1 光子なので  $F_{(i)}^{ii} = 1$  である。  $F^{ij} := f^{ij}/f^{kk}$  で定義できる。今後大文字で書くときはこの規格化を仮定する。始状態の各偏光成分  $P_\pm^i$  が終状態の  $e^i$  向きに寄与する確率は、先の考察から  $(e \cdot e_+)^2 P_+ + (e \cdot e_-)^2 P_- = e^i e^j F_{(i)}^{ij}$  に比例する。これが終状態の光の密度行列  $F_{(f)}^{ij}$  に比例するはずである。よって終状態の密度行列には次の条件が掛かる。

$$e^i e^j F_{(i)}^{ij} \propto e^i e^j F_{(f)}^{ij} \quad , \quad \hat{p}_i F_{(f)}^{ij} = 0 \quad , \quad F_{(f)}^{ii} = 1 \quad (346)$$

ただし  $\hat{p}^i$  は終状態の光子の運動量向きの単位ベクトルである。この条件を満たす行列を探す。よく見るように方向  $p_i$  に直交するためには

$$F_{(j)}^{ij} := (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^i - \hat{p}^j \hat{p}_l) S^{kl} \quad (347)$$

とすると良い。ここで

$$\begin{aligned} e_i e_j F_{(j)}^{ij} &= e_i e_j S_{ij} \propto e_i e_j F_{(i)}^{ij} \\ F_{(j)}^{ii} &= (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^i - \hat{p}^i \hat{p}_l) S^{kl} = S^{ii} - \hat{p}_i \hat{p}_j S^{ij} \end{aligned} \quad (348)$$

となることから次の様に選ぶと条件が満たされるとわかる。

$$F_{(j)}^{ii} := \left(1 - p_a p_b F_{(i)}^{ab}\right)^{-1} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^i - \hat{p}^i \hat{p}_l) F_{(i)}^{kl} \quad (349)$$

以上より 1 光子の散乱での終状態がわかったので、光子の個数を掛けることで衝突項による増加分として

$$C_{+}^{ij}(x, p, t) = n_e \int d\Omega_q \frac{d\sigma}{d\Omega_p} \left(1 - p_a p_b F^{ab}\right)^{-1} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^i - \hat{p}^i \hat{p}_l) f^{kl}(x, q, t) \quad (350)$$

が得られる。因子  $(2 - 2p_i p_j F^{ij})^{-1}$  は  $F^{ij} := f^{ij}/f^{kk}$  で定義される。

角度積分を遂行するにあたって、次の書き換えを行う。微分散乱断面積の終状態の角度  $\Omega_p$  依存性 Eq(345) について、 $\sum_{f,A=\pm} P_A (\epsilon_{A(q)} \cdot \epsilon_{f(p)})^2 = f^{kk} (1 - \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij})$  と書き直せることを示す。ただし  $\hat{p}^i$  は終状態の光子の運動量向きの単位ベクトル、 $f^{ij}(x, q, t) := \sum_A P_A e_A^i e_A^{j*}$  である。次のように示す。終状態の運動量  $\hat{p}^i$  を用いて 3 次元空間に基底を張ると  $\{\hat{p}, \epsilon_{f+}, \epsilon_{f-}\}$  が取れる。そこで完全性より

$$\hat{p}_i \hat{p}_j + \epsilon_i^{f+} \epsilon_{*j}^{f+} + \epsilon_i^{f-} \epsilon_{*j}^{f-} = \delta_{ij} \quad (351)$$

が成立する。そこから、

$$\sum_{f,A=\pm} P_A (\epsilon_A \cdot \epsilon_f)^2 = \sum_{A=\pm} P_A \epsilon_A^i \epsilon_A^{*j} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = f^{kk} (1 - \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij}) \quad (352)$$

が示せた。

そこで  $\frac{d\sigma}{d\Omega_q} \propto (1 - \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij})$  が言える。この比例定数を求めるために

$$\begin{aligned} \sigma_T &:= \int d\Omega_p \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega_p} \\ &= A \int d\Omega_p (1 - \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij}(q)) = A \left(4\pi - \int d\Omega_p \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij}\right) \\ &= A \left(4\pi - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} F^{ij}\right) = A \frac{8\pi}{3}, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_p} &= \frac{3\sigma_T}{8\pi} (1 - \hat{p}_i \hat{p}_j F^{ij}(q)) \end{aligned} \quad (353)$$

を考える。ただし積分  $\int d\Omega_p \hat{p}_i \hat{p}_j$  は  $i \neq j$  で奇関数の積分

$$0 = \int dp^3 e^{-\sigma p^2} p_i p_j = \left(\int_0^\infty dp p^4 e^{-\sigma p^2}\right) \left(\int d\Omega_p \hat{p}_i \hat{p}_j\right) \quad (354)$$

に比例し 0 になることと、 $i = j$  では  $i$  を  $z$  向きに取って  $\int d\Omega_p (\hat{p}_z)^2 = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos^2\theta = 2\pi \frac{2}{3}$  を用いた。以上を用いて Eq(350) の変形を続けると

$$\begin{aligned} C_{+}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= n_e \int d\Omega_q \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left(1 - \hat{p}_c \hat{p}_d F^{cd}\right) \left(1 - p_a p_b F^{ab}\right)^{-1} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}^j \hat{p}_l) f^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) \\ &= n_e \int d\Omega_q \frac{3\sigma_T}{8\pi} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}^j \hat{p}_l) f^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (355)$$

となる。

以上の結果にメトリックを入れて一般相対論的に書くと、光子に対する衝突項として

$$\begin{aligned} C^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= C_{-}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + C_{+}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= -\sigma_T n_e f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\sigma_T n_e}{8\pi} \left( \delta_k^i - \frac{g^{ai} p_a p_k}{-g_{00} (p^0)^2} \right) \left( \delta_l^j - \frac{g^{bj} p_l p_b}{-g_{00} (p^0)^2} \right) \\ &\quad \times \int \frac{d^3 q \sqrt{g}}{g_{00} (p^0)^2} f^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) \delta(p_0 - q_0) \Bigg|_{\substack{q_0(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) := \sqrt{-g^{ij}(\mathbf{x}, t) q_i q_j / g^{00}} \\ p_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) := \sqrt{-g^{ij}(\mathbf{x}, t) p_i p_j / g^{00}}} \end{aligned} \quad (356)$$

が得られる。 $(a, b = 1, 2, 3)$

#### 10.4 熱平衡での衝突項

熱平衡状態においては衝突項が 0 になることを示す。またここから上の表式のゲージ不変性を利用して、摂動があっても平衡状態に対して衝突項を無視できることが言える。Eq(344) と Eq(355) に熱平衡での分布関数

$$\begin{aligned} f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2} \left( g^{ij} - \frac{g^{ik} g^{jl} p_k p_l}{-g_{00} (p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))^2} \right) f(T(t), p) \quad , \\ f(T(t), p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{kT(t)}\right) - 1} \end{aligned} \quad (357)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} C_{-}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= -\sigma_T n_e(t) \frac{1}{2} \left( g^{ij} - \frac{g^{ik} g^{jl} p_k p_l}{g^{ab} p_a p_b} \right) f(T(t), p) \quad , \\ C_{+}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= n_e \int d\Omega_q \frac{3\sigma_T}{8\pi} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}^j \hat{p}_l) \frac{1}{2} \left( g^{kl} - \frac{g^{tk} g^{sl} q_t q_s}{g^{ab} q_a q_b} \right) f(T(t), q) \\ &= n_e \frac{3\sigma_T}{8\pi} (\delta_k^i - \hat{p}^i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}^j \hat{p}_l) \frac{4\pi}{3} g^{kl} f(T(t), q) \\ &= n_e \frac{\sigma_T}{2} (g^{ij} - \hat{p}^i \hat{p}^j) f(T(t), q) \end{aligned} \quad (358)$$

として一致する。

#### 10.5 ボルツマン方程式の表式の確認

確認として、偏光の自由度を無視した場合の衝突項

$$C^{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\sigma_T n_e f_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\sigma_T n_e}{8\pi} (\delta_{kl} - \hat{p}_k \hat{p}_l) \int d\Omega_q f_{kl}(\mathbf{q}) \quad (359)$$

と、以前求めた表式 Eq(197) とを比較する。衝突項

$$C_\gamma [f(\mathbf{p})] = \frac{3\sigma_T n_e}{16\pi} \int d^3 p' \frac{1}{p'} \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 \right] [f(p') - f(p)] \\ \times \left[ \delta_{p-p'} + \mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial p'} \delta_{p-p'} \right] \quad (360)$$

において $[\dots]$ の初項のデルタ関数の部分が今回考えている量である。今は電子速度を0にしているため二項目は今回無視する。無偏光の場合は $f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) := \frac{f}{2} (e_+^i e_+^{j*} + e_-^i e_-^{j*}) = \frac{f}{2} (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j)$ である。減少項 $-f(p)$ は積分 $\int d\Omega [1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2] = \frac{16\pi}{3}$ に注目すると一致するとわかる。<sup>24</sup>増加項 $f(p')$ の計算が少々面倒だが、

$$(\delta_{kl} - \hat{p}_k \hat{q}_l) f_{kl}(\mathbf{q}) = (\delta_{kl} - \hat{p}_k \hat{p}_l) \frac{f}{2} (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) \\ = \frac{f}{2} (3 - 2 + (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) \quad , \\ \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 \right] = 1 + (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \quad (361)$$

でありこれらの比較から一致がわかる。

## 10.6 光の微小摂動

運動項 Eq(343) と衝突項 Eq(356) からボルツマン方程式が得られる。ここで光の微小摂動を次で定義する。

$$f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left( g^{ij} - \frac{g^{ik} g^{jl} p_k p_l}{-g_{00} (p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))^2} \right) f(T(t), p_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) + \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad , \\ f(T(t), p_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p_0}{kT(t)}\right) - 1} \quad , \quad (p_i \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0) \quad (362)$$

光については $\alpha(t)T(t) = const$ である。ただし非摂動部分が無偏光になるように定義した。

以上を踏まえて摂動の1次でのボルツマン方程式を構成する。Eq(343), Eq(356) に Eq(362) を代入して変形していく。まず $\sum_A e_A^i e_A^j = g^{ij} - \frac{p^i p^j}{p_k p^k}$ を念頭に Eq(335) を利用した次の計算を考える。

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,i} p^j p^l - 2\Psi_{,i} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right] e_A^i e_A^j \\ + \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \left( \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) e_A^l e_A^j + \left( \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) e_A^i e_A^l \right] \\ = \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \frac{\partial e_A^i}{\partial x^\lambda} + \left( \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) e_A^l \right] e_A^j + \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \frac{\partial e_A^j}{\partial x^\lambda} + \left( \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) e_A^l \right] e_A^i \\ = 0 \quad (363)$$

<sup>24</sup>光のエネルギー分だけ因子 $\frac{1}{p}$ がかかっているが、これはスカラーの場合での導出 [1] では、両辺を $p$ で割ったものをボルツマン方程式として扱っていたからである。

この両辺に  $\sum_A$  を掛けることで

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,k} p^j p^l - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \left( g^{ij} - \frac{p^i p^j}{p_s p^s} \right) \\ & + \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \left( \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) \left( g^{lj} - \frac{p^l p^j}{p_s p^s} \right) + \left( \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) \left( g^{il} - \frac{p^i p^l}{p_s p^s} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (364)$$

が成立する。次に平衡状態の分布関数を変形していく。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,k} p^j p^l - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_k} \right] f(T(t), p(x, p, t)) \\ & = \frac{\partial f(T(t), p(x, p, t))}{\partial p_0} \left[ kT(t) \frac{\partial_{-p_0}}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial p_0}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,k} p^j p^l - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial p_0}{\partial p_k} \right] \\ & = \frac{\partial f(T(t), p(x, p, t))}{\partial p_0} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial (ap_0)}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}}}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,k} p^j p^l - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}}}{\partial p_k} \right] \end{aligned} \quad (365)$$

ここで更に Eq(337) を用いて変形する。注意点として、 $p_i$  は  $t$  と独立だが  $p^i = g^{ij} p_j$  は  $g^{ij}$  を通じて  $t$  依存性があるということ。次のように空間微分は<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}}}{\partial x^k} & = \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}} \frac{p^k}{p^0} \left[ -\frac{1}{2} \frac{g_{,k}^{00}}{g^{00}} + \frac{1}{2} \frac{g_{,k}^{lm} p^l p^m}{g_{lm} p^l p^m} \right] \\ & = \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}} \frac{p^k}{p^0} \left[ \Psi_{,k} - \frac{1}{2} \frac{(2\Phi_{,k} \gamma_{lm} + h_{lm,k}) p_a p_b \gamma^{al} \gamma^{bm}}{p^2} \right] \\ & = \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}} \frac{ap^k}{p} \left[ -\Phi_{,k} + \Psi_{,k} - \frac{h_{lm,k} p_a p_b \gamma^{al} \gamma^{bm}}{2p^2} \right] \end{aligned} \quad (366)$$

であり、運動量微分は

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2p} \left( g_{jl,k} p^j p^l - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}}}{\partial p_k} \\ & = \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}} \frac{a}{2p} \left( (2\gamma_{jl} \Phi_{,k} + h_{jl,k}) p_a p_b \gamma^{aj} \gamma^{bl} - 2\Psi_{,k} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{g^{km} p_m}{g^{ab} p_a p_b} \\ & = \sqrt{\frac{g_{lm} p^l p^m}{-g^{00}}} \frac{p^k}{ap} \left[ p^2 \Phi_{,k} - p^2 \Psi_{,k} + \frac{h_{jl,k}}{2} p_a p_b \gamma^{aj} \gamma^{bl} \right] \frac{a^2}{p^2} \end{aligned} \quad (367)$$

となるが、これらは打ち消し合う。また時間微分については

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (ap_0)}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial p \left( 1 + \Psi - \Phi - \frac{h_{ab} \gamma^{ai} \gamma^{bj} p_i p_j}{2p^2} \right)}{\partial t} = -\frac{p}{a} \left( \dot{h}_{ab} \gamma^{ai} \gamma^{bj} \frac{p_i p_j}{2p^2} - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) \quad (368)$$

<sup>25</sup>  $a$  の order を見ることで添字の上付き、下付きの取り違いのミスをチェックできる。具体的には  $p_i, x^i \propto a^0$ ,  $p^i \propto a^{-2}$ ,  $x_i \propto a^2$ ,  $p^0 \propto a^{-1}$

となる。

次に右辺の衝突項については Chapter.(10.4) での考察から、一様分布は衝突に寄与しないため、ゆらぎの部分のみ取り扱えば良いとわかる。同じことだが衝突項は基底部分が 0 であるため、微小量の一次が主要項になる、とも言える。Eq(356) では  $\delta f^{ij}$  を含む因子が主要項となるため、それにかかる積分に入っているメトリックなどは基底量で考えれば十分である。以上より光の状態密度のゆらぎに対するボルツマン方程式の運動項

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{a}{2p} \left( g_{jl,i} p^j p^l - 2\Psi_{,i} \frac{p^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right] \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\
& - \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p}{a} \left( \dot{h}_{ab} \gamma^{ai} \gamma^{bj} \frac{p_i p_j}{2p^2} - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) \frac{1}{2} \left( g^{ij} - \frac{g^{ik} g^{jl} p_k p_l}{-g_{00} (p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))^2} \right) \\
& + \frac{p^\lambda}{p^0} \left[ \left( \Gamma_{l\lambda}^i(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) \delta f^{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \left( \Gamma_{l\lambda}^j(x(t)) - \Gamma_{l\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right) \delta f^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \right] \\
& = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p}{2a^3} \left( \dot{h}_{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \\
& - \frac{p^k}{2p^0} \frac{2\dot{a}}{a} g_{lk} \left[ \frac{p^i}{p^0} \delta f^{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{p^j}{p^0} \delta f^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{2\dot{a}}{a} 2\delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\
& = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hat{p}^k}{a} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p}{2a^3} (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \left( \dot{h}_{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) + \frac{2\dot{a}}{a} \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (369)
\end{aligned}$$

(式変形で直交条件  $p_i \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0$  を用いた。) および衝突項

$$C^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\sigma_T n_e \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\sigma_T n_e}{8\pi} (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \int d\Omega_q \delta f^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) \quad (370)$$

の形がわかった。

以上から光の状態密度のゆらぎに対するボルツマン方程式として

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hat{p}^k}{a} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p}{2a^3} (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \left( \dot{h}_{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) + \frac{2\dot{a}}{a} \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\
& = -\sigma_T n_e \delta f^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\sigma_T n_e}{8\pi} (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \int d\Omega_k \delta f^{kl}(\mathbf{x}, p\hat{\mathbf{k}}, t) \quad (371)
\end{aligned}$$

が取れる。

## 10.7 プラズマ流速の取扱

電子プラズマが静止していない場合、上表式は変更を受ける。この変更は、速度  $\delta u_i = v_i + v_i$  に比例するが、この量はスカラー、ベクトルゆらぎのみを含む。つまりテンソルゆらぎには関わってこない。

速度の効果は、Eq(371) の右辺に

$$-\frac{\sigma_T n_e}{2a^3} p_k \delta u_k f' (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \quad (372)$$

として入ってくる。これは Eq(197) で計算した量に、等方ゆらぎについての重み  $(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j)$  がついたものとして理解できる。

## 11 テンソルゆらぎの支配方程式

テンソルモードのゆらぎの方程式を用いて、宇宙の各構成要素に対して時間発展を計算していく。

### 11.1 揺らぎの確率変数 $\beta_q$

スカラー揺らぎのみの議論とは違い、以下ではスカラー揺らぎとテンソル揺らぎが同時に方程式に入ってくる。この揺らぎを厳密に扱うことでアンサンブル平均  $\langle \rangle$  と量子平均  $\langle 0|0 \rangle$  の意味をはっきりさせたい。

まず単純な例として、位置  $x$  に依存する場  $\Phi(x)$  をフーリエ変換して定まる運動量  $q$  の成分が大きき  $\Phi_q \beta_q$  を持つとする。  $\beta_q$  は確率的に様々な複素数の値を持つ確率変数とする。  $\beta_q$  に期待される性質として、運動量が異なる揺らぎはそれぞれ別の揺らぎをしていること、及び揺らぎの二乗平均が規格化されていることである。これはアンサンブル平均  $\langle \rangle$  を取ったときに  $\langle \beta_q \beta_{q'}^* \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(q - q')$  となる、という条件と同値である。

本来、異なる場の成分  $\Phi_q, \Psi_q$  の確率変数  $\beta_q[\Phi], \beta_q[\Psi]$  は相関を持たない。しかし、揺らぎの間に方程式が存在すると揺らぎは相関して成長する。特に今回のような一次近似では、それぞれの揺らぎは支配方程式を通じて線形関係を満たし、

$$f(q, t)\Phi_q \beta_q[\Phi] = g(q, t)\Psi_q \beta_q[\Psi] \quad (373)$$

のような関係を満たす。両辺の確率的な揺らぎを考えると、規格化により  $\beta_q[\Phi] = \beta_q[\Psi]$  が課される。このように方程式で結ばれた二つの量の確率変数は一致する。今、方程式をベクトル、スカラー、テンソル分解できるため、確率変数も  $\beta_q^S, \beta_q^V(\sigma), \beta_q^T(\lambda)$  を用意すれば十分である。ただし  $\sigma, \lambda$  はスピン  $\pm 1, \pm 2$  を区別している。

以上のように、古典的な確率変数としてみた場合、  $\beta_q$  はアンサンブル平均を導入するための統計的な道具にすぎない。ところが Eq(131) で見たように、量子起源の揺らぎを考える場合、アンサンブル平均と量子揺らぎを関係づける必要性が生じる。

まず思いつく方法として、単純に確率変数を生成消滅演算子と同一視して  $\beta_q = \hat{a}_q^\dagger$  を課すことで、うまく対応が付きそうに見える。しかしこの場合、先の支配方程式による対応関係  $\beta_q[\Phi] = \beta_q[\Psi]$  が異なる場の生成消滅演算子の同一性  $\hat{a}[\Phi] = \hat{a}[\Psi]$  (?) につながり不自然である。

そこで、アンサンブル平均と量子揺らぎの対応はもっと限定的なものであると考えるべきである。まず状態が真空の場合のみで対応を付ける。場の量子的、古典的な展開として

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x, t) &= \int d^3q \left( e^{-iq \cdot x} \hat{a}_q \Phi(q, t) + e^{iq \cdot x} \hat{a}_q^\dagger \Phi^*(q, t) \right) , \\ \Phi(x, t) &= \int d^3q e^{-iq \cdot x} \beta_q \tilde{\Phi}(q, t) \end{aligned} \quad (374)$$

を考える。状態が真空である場合に、アンサンブル平均と場の二点関数の期待値を同一視することは量子力学の基本的な考えから妥当である。つまり、

$$\langle \Phi(x, t) \Phi(x', t) \rangle = \langle 0 | \hat{\Phi}(x, t) \hat{\Phi}(x', t) | 0 \rangle \Rightarrow |\Phi(q, t)|^2 = |\tilde{\Phi}(q, t)|^2 \quad (375)$$

を対応関係として仮定することで、量子的な揺らぎを古典的な揺らぎに対応させる。

この対応関係は、状態が真空でない場合には成立しない。例えば運動量固有状態の1粒子状態  $|k\rangle$  に対しては

$$\langle \Phi(x, t) \Phi(x', t) \rangle = \langle k | \hat{\Phi}(x, t) \hat{\Phi}(x', t) | k \rangle \Rightarrow |\tilde{\Phi}(q, t)|^2 = |\Phi(q, t)|^2 \left( 1 + 2 \frac{\delta^3(k - q)}{\delta^3(p = 0)} \right) \quad (376)$$

という因子が付く。



## 11.2 テンソルモードの偏光

光の偏光と同様にテンソルモードについても偏光ベクトルを定義する。偏極ベクトル  $e_{ij}(\hat{p}, \lambda)$  は次を満たすように定義する。偏光ベクトルは  $\hat{p}$  に直交する単位ベクトル  $\mathbf{m}, \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0)$  として

$$e_{ij}(\hat{p}, +) = m_i m_j - n_i n_j, \quad e_{ij}(\hat{p}, \times) = m_i n_j + n_i m_j \quad (377)$$

で組まれる。異なる角度での単位ベクトルの接続は、ij 添字が回転行列を満たすように決める。つまりは  $\hat{p}$  が回転したら同じ回転行列で  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  も回せば良い。

偏極ベクトルは

$$\gamma^{ia} \gamma^{jb} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) e_{ab}(\hat{q}, \lambda') = 2\delta^{\lambda\lambda'} \quad (378)$$

を満たす。

さらに Chapter.(B.1) から

$$\begin{aligned} \Pi_{ijkl}(\hat{q}) &:= \sum_{\lambda} e_{ij}^*(\hat{p}, \lambda) e_{kl}(\hat{p}, \lambda) \\ &= (\delta_{ik} - \hat{q}_i \hat{q}_k) (\delta_{lj} - \hat{q}_l \hat{q}_j) + (\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l) (\delta_{kj} - \hat{q}_k \hat{q}_j) - (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) \end{aligned} \quad (379)$$

が成立する。

## 11.3 メトリックの支配方程式

Chapter.(3.11) から

$$(h_j^i)'' + 2aH (h_j^i)' + (2K - \nabla^2) h_j^i = 16\pi G \pi_j^{(T)i} a^2 \quad (380)$$

が得られたことを思い出す。これを  $K = 0$ ,  $h_{ij} := \gamma_{ik} h_j^k \sim h_j^i$ ,  $\pi_{ij}^{(T)} := \gamma_{ik} \pi_j^{(T)k} \sim \pi_j^{(T)i}$  によって書き直すと<sup>26</sup>

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - a^{-2}\nabla^2 h_{ij} = 16\pi G \pi_{ij}^{(T)} \quad (381)$$

方程式の性質

簡単な場合についてどのような解があるのか見ておく。 $h_{ij}$  は対称  $h_{ij} = h_{ji}$ , トレースレス  $h_{ii} = 0$ , divergentless  $\partial_i h_{ij} = 0$  であり、自由度は 2 つある。それらは二階の微分方程式を満たすので、解は  $2 \times 2$  個ある。凍結の議論で見たように断熱解が存在する。さらにもう一つの解は、非等方テンソルの形に依存するが、ホライゾン外で  $\pi_{ij}^{(T)}$  を無視するという近似のもとで

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} = 0 \Rightarrow D_{ij} = \text{const}, \int a^{-3} dt \quad (382)$$

の二つの解が取れる。

以降の議論で非等方テンソルも取り入れた一般的な議論を行う。

<sup>26</sup>テンソルとしては、添字の上げ下げが正しくないが、以下では添字が下にまとまっていた方が見やすいため、書き直す。

以降の計算に使いやすいように、テンソル成分をフーリエ展開する。

$$\begin{aligned} h_{ij}(\mathbf{x}, t) &:= \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) h_q(t) \quad , \\ \pi_{ij}^{(T)}(\mathbf{x}, t) &:= \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \pi_q^{(T)}(t) \end{aligned} \quad (383)$$

ただし偏光成分  $\lambda = \pm 2$  はそれぞれ同等であり強度に違いはないと仮定した。

この表記だと時間発展は

$$\ddot{h}_q(t) + 3H\dot{h}_q(t) + a^{-2}q^2 h_q(t) = 16\pi G \pi_q^{(T)}(t) \quad (384)$$

と書ける。

右辺の非等方テンソルの内訳は光、CDM、ニュートリノである。

#### 11.4 光の支配方程式

光は観測量であると同時に非等方テンソルを通じて重力 Eq(384) とも結合している。光のボルツマン方程式を観測量に結びつける。

光の揺らぎを次のように定義する。<sup>27</sup>

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(t, x^i, \hat{p}^i) &:= \frac{\frac{1}{a^2} \int 4\pi p^3 dp \delta f^{ij}(t, x^i, p, \hat{p}^i)}{\frac{2}{a^4} \int dp p^3 f(p)} = \frac{\frac{1}{a^2} \int 4\pi p^3 dp \delta f_{ij}(t, x^i, p, \hat{p}^i)}{\rho_\gamma} \quad , \\ \rho_\gamma &:= \frac{2}{a^4} \int d^3p p f(p) = \frac{8\pi}{a^4} \int dp p^3 f(p) \end{aligned} \quad (385)$$

表記を楽にするため、この定義の時点で添字をおろしていることに注意。添字の上げ下げに伴い、手動で  $a$  の依存性を取ったことに注意。スカラー揺らぎに対して定義した  $\Theta$  との違いは、今回の定義では  $p$  を再定義していないため  $a$  で割る必要があるということ、 $f_{ij}$  の定義に  $\frac{q^{ij}}{(2\pi)^3}$  が入ったために  $a^{-2}$  の効果があること、さらに偏光を考えるので  $\hat{p}$  に対する依存性を積分せずに残している点である。また今の段階では  $\delta f_{ij}$  に対してテンソル・ベクトル・スカラー成分の分離はしていないので対称性としては  $\delta f_{ij} = \delta f_{ji}$ 、 $p_i \delta f_{ij} = 0$  のみ成立する。

この  $\Theta_{ij}$  をフーリエ変換して

$$\Theta_{ij}(t, x^i, \hat{p}^i) := \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) \quad (386)$$

を定義する。 $\Theta_{ij}$  に対する確率的重み  $\beta$  はテンソル分解が出来た後で改めて導入する。スカラー的摂動を

$$\Psi(t, x^i) := \int d^3q \beta_q^{(S)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \Psi_q(t) \quad , \quad \Phi(t, x^i) := \int d^3q \beta_q^{(S)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \Phi_q(t) \quad (387)$$

で定義する。ボルツマン方程式 Eq(371) に  $\int dp p^3$  を掛けて、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) + (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \left( \sum_{\lambda=\pm 2} \beta(\mathbf{q}, \lambda) \dot{h}_q(t) e_{ab}(\hat{q}, \lambda) \hat{p}_a \hat{p}_b - \beta_q^{(S)} \dot{\Psi}_q + \beta_q^{(S)} \dot{\Phi}_q \right) \\ = -\sigma_T n_e \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i, \lambda) + \frac{3\sigma_T n_e}{2} (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \Theta_{kl}(t, q^i, \hat{k}^i, \lambda) \end{aligned} \quad (388)$$

<sup>27</sup>非常に紛らわしいのだが以前に定義した Eq(188) とは 4 倍異なる。

となる。ただし  $\frac{2a}{a} \delta f^{ij}$  項は  $\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t}$  を組むときに余分に出てくる  $a$  と打ち消すことと、

$$\begin{aligned} \int dpp^3 p \frac{\partial f}{\partial p_0} &\sim \frac{1}{(2\pi)^3} \int dpp^3 p \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{akT(t)}\right) - 1} \\ &= -\frac{4}{a(2\pi)^3} \int dpp^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{akT(t)}\right) - 1} = \frac{a^3}{2\pi} \rho_\gamma \end{aligned} \quad (389)$$

を用いた。

このまま Eq(388) 自体をテンソル分解出来るように見えるが、今回は  $\mathbf{q}$  以外にベクトルが存在するために、うまく行かない。もともと微分方程式のテンソル分解は、位置  $\mathbf{x}$  に対してフーリエ変換で定義される  $\mathbf{q}$  に対する直交性を利用した分解だった。ただしそれは、考えている微分方程式系に  $\mathbf{x}$  (フーリエ変換後は  $\mathbf{q}$ ) しかベクトルがない場合のみに適用できる分解であった。

今回は位相空間座標として  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  の運動量が既に定義されており、さらに追加的に  $\mathbf{x}$  を運動量  $\mathbf{q}$  に置き換える  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  座標系を採用している。運動量が二つあるという意味で、今の定式化は物理的に理解しがたい。

そのそもボルツマン方程式は粒子描像が前提である。ある位置に局在した物質が固有の運動量を持てる。これを場の理論で理解しようとする  $\delta(x)$  を  $\delta(p)$  のフーリエ変換で書くという不可能な状況に相当する。そこから、ボルツマン方程式に依る定式化は本質的に場の理論を反映しているとは言えない。だが、場の理論をボルツマン方程式に近似的に当てはめられる状況として、希薄極限がある。これは運動量の精度よりも粒子間の距離が不確定性的な意味で広い場合であり、このときは位置座標を平均化的な意味で理解することでボルツマン方程式は粒子を平均化した流体的描像として見る事が出来る。そのため、 $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  座標においては、偏光の情報を担うべきは、本質的な粒子の進む向きを表している  $\mathbf{p}$  の方である。

一方で、粒子数密度  $f$  は常に  $\int d^3x d^3p$  が掛かったものとして理解する必要がある。特に  $d^3p$  を先にやりきると、粒子数密度  $f$  はもはや無限の位置決定精度を持つ場  $F(x)$  と見なすべきである。その意味でボルツマン方程式は運動量分布を足しきることによって場の理論に帰着する。そのため、この場  $F(x)$  に対する運動量を指定する場合にはフーリエ変換的な方法で決まる  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$  を用いるのが良い。

この原理を念頭に置くと、Eq(388) や  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i)$  をテンソル分解するためには、 $d^3p$  で積分して位置表示に直す必要がある。(実際にはテンソル分解には角度しか関わらないので  $d\Omega_p$  だけで十分) Eq(371) を角度積分して

$$\begin{aligned} \int d\Omega_p \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) + \int d\Omega_p (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \left( \sum_{\lambda=\pm 2} \beta(\mathbf{q}, \lambda) \dot{h}_{q(t)} e_{a\lambda}(\hat{q}, \lambda) \hat{p}_a \hat{p}_b - \beta_q^{(S)} \dot{\Psi}_q + \beta_q^{(S)} \dot{\Phi}_q \right) \\ = -\sigma_T n_e \int d\Omega_p \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i, \lambda) + \frac{3\sigma_T n_e}{2} \int d\Omega_p (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \Theta_{kl}(t, q^i, \hat{k}^i, \lambda) \end{aligned} \quad (390)$$

となる。

角度積分が実行できる部分はやってしまうと Chapter.(B.2) より

$$\begin{aligned} \int d\Omega_p \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j)}{2a^3} \left( \sum_{\lambda=\pm 2} \beta(\mathbf{q}, \lambda) \dot{h}_{q(t)} e_{a\lambda}(\hat{q}, \lambda) \hat{p}_a \hat{p}_b - \beta_q^{(S)} \dot{\Psi}_q + \beta_q^{(S)} \dot{\Phi}_q \right) \\ = \frac{\partial f}{\partial p_0} \frac{p}{2a^3} \left[ \frac{2\pi}{15} \sum_{\lambda=\pm 2} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{a\lambda}(\hat{q}, \lambda) (\dot{h}_{q(t)} + \dot{h}_{q(t)}) + \frac{8\pi}{3} \beta_q^{(S)} \delta_{ij} (\dot{\Phi}_{q(t)} - \dot{\Psi}_{q(t)}) \right] \end{aligned} \quad (391)$$

および

$$\begin{aligned} \int d\Omega_p (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \Theta_{kl}(t, q^i, \hat{k}^i) &= d\Omega_p (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) \Theta_{kl}(t, q^i, \hat{p}^i) \\ &= \pi \left( \frac{22\delta_{ij}\Theta_{kl}(t, q^i, \hat{k}^i) + 4\Theta_{kl}(t, q^i, \hat{k}^i)}{15} \right) \end{aligned} \quad (392)$$

となる。

以上により、各項の ij 添字はベクトル  $q_i$  のみに依存するようになった。そこで各項をテンソル分解することが出来る。角度積分のみ考慮すればいいので、慣例的に次のようにテンソル分解が定義される。

$$\int d\Omega_p \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) =: \sum_{\lambda=\pm 2} -\frac{8\pi}{3} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \Delta(q, t) \beta_q(\lambda) + \sum_{s=\pm 1} \beta_q^V(s) (\hat{q}_i V_j(s, q, t) + \hat{q}_j V_i(s, q, t)) + \delta_{ij} S(q, t) \beta_q^{(s)} \quad (393)$$

両辺は  $q, t$  の関数である。ここで強度因子  $\Delta(q, t)$  がもはや  $\lambda$  に依存していない理由は、等方宇宙でテンソル揺らぎの  $+, \times$  を区別する方法はないからである。 $\beta_q(\lambda)$  はテンソル部分に対する量子的・確率的重みである。

今回考えたい量はテンソル揺らぎであり、 $V_j = 0, S = 0$  となるような  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i, \lambda)$  に興味がある。以降の計算で必要になるため、許される  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i, \lambda)$  の形を考える。 $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i, \lambda)$  への拘束条件は Eq(385) を見ると  $\delta f^{ij}$  から継承した  $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}, p_i \Theta_{ij} = 0$  がある。ただし  $\hat{q}$  との直交条件は積分してからのみ課される。使用できるベクトル・テンソルとしては  $\hat{p}, \hat{q}, e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  がある。また  $d\Omega_p$  積分した結果として添字 (ij) は  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  として出てくる必要がある。つまりは  $(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j)$  や  $(\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l)$   $(\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j)$  を  $e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$  にくっつけると良い。あり得る組み合わせとして次のような項が可能である。ここで強度因子  $\Delta_{\Psi}(q, t)$  が  $\lambda$  に依存しないことから不要な  $\lambda$  依存性は取り除いている。

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) &= \sum_{\lambda=\pm 2} \beta_q(\lambda) \left[ \Delta_1(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \right. \\ &\quad + \Delta_2(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \\ &\quad \left. + \Delta_3(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}, \lambda) \right] \end{aligned} \quad (394)$$

これらの角度積分  $\int d\Omega_p$  で  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  が出てくるかどうかは、今回の積分が単位ベクトルの角度積分ではなく  $\Delta_{1,2,3}(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})$  からも  $\hat{p} \cdot \hat{q}$  依存性を持っているため非自明である。公式 Eq(630) を用いて角度積分を処理することが出来る。これによりどの項も最終的には  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  になることがわかる。計算結果を  $\int d\Omega_p \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i)$  のテンソル分解と比較すると、

$$\begin{aligned} \Delta(q, t) &= -\frac{3}{32\pi} \int d\Omega_p \\ &\quad \times \left[ -\Delta_1 \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2 + \Delta_2 \left[ 4 - 4 \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right) + \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2 \right] + \Delta_3 \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2 (\hat{q} \cdot \hat{p})^2 \right] \end{aligned} \quad (395)$$

となる。また Eq(394) の分解は一意である。(簡単な説明としては  $e_{kl}$  を取り除いた部分と比較する。1,2 行目は明らかに項が余分であり独立、3 行目は 1,2 行目とは違い  $p$  への依存性も含まれるため大半の  $p$  において上の二項とは性質が異なる。以上から 3 項は独立である。)

ボルツマン方程式 Eq(388) のメトリック成分のうちスカラー部分は  $d^3p$  で積分するとテンソル成分に寄与しない。そこで  $d^3p$  で積分した後にスカラー部分・テンソル部分を区別して取り出すという操作が可能になる。テンソル部分に寄与するものを積分前の方程式で表すと

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \\
& \times \left[ \Delta_1 (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl} + \Delta_2 (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) e_{kl} + \Delta_3 (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab} \right] \\
& + (\delta^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \dot{h}_{q(t)} e_{ab}(\hat{q}, \lambda) \hat{p}_a \hat{p}_b \\
& = -\sigma_T n_e \left[ \Delta_1 (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl} + \Delta_2 (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) e_{kl} \right. \\
& \quad \left. + \Delta_3 (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab} \right] - \sigma_T n_e \Delta (\delta_k^i - \hat{p}_i \hat{p}_k) (\delta_l^j - \hat{p}_j \hat{p}_l) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \quad (396)
\end{aligned}$$

となる。先に見たようにこの各項は添字についてのテンソル分解で3つの種類に分けることが出来る。この分解により

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_1 + \dot{h}_{q(t)} &= -\sigma_T n_e \Delta_1 \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_2 &= -\sigma_T n_e \Delta_2 - \sigma_T n_e \Delta \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_3 &= -\sigma_T n_e \Delta_3 \quad (397)
\end{aligned}$$

となる。この表式からわかるように第3成分を励起する source が存在しないために、減衰するのみである。よって以降は  $\Delta_3 = 0$  とする。

以上によって光のテンソル成分支配方程式が得られた。注目すべきは  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i)$  について Tr 成分が0でないことである。Tr 成分が0になるべき量は  $d\Omega_p$  積分した後のものであり、積分する前の  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i)$  に対しては Tr の制限が緩んでいる。そこで  $\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i)$  を分解する上で Tr 成分とそれ以外になるように変数を置き直しておく後に便利である。つまり、

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) &= \sum_{\lambda=\pm 2} \beta_q(\lambda) \left[ \frac{1}{2} (\Delta_T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) + \Delta_P(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \right. \\
& \quad \left. + \Delta_P(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \right], \\
\Delta_1 &=: \frac{1}{2} (\Delta_T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) + \Delta_P(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})) \quad , \quad \Delta_2 =: \Delta_P(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) \quad (398)
\end{aligned}$$

と定義して、<sup>28</sup>これらの満たす支配方程式は

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_T &= -\sigma_T n_e \Delta_T + \sigma_T n_e \Delta - 2\dot{h}_{q(t)} \quad , \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_P &= -\sigma_T n_e \Delta_P - \sigma_T n_e \Delta \quad , \\
\Delta(t, q) &:= -\frac{3}{64\pi} \int d\Omega_p \left[ -\left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2 \Delta_T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q}) + \left(8(\hat{q} \cdot \hat{p})^2 + \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2\right) \Delta_P \right] \quad (399)
\end{aligned}$$

である。

<sup>28</sup>T,P は温度・偏光を意味する。

### 11.5 光の部分波展開

後の計算では  $\mu := \hat{p} \cdot \hat{q}$  を使う。

Eq(399) を部分波展開する。つまり  $\mu$  依存性を分解する。

$$\Delta_{T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})} := \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Delta_{T, l}(q, t) \mathcal{P}_l(\mu) \quad , \quad \Delta_{T, l}(q, t) = i^l \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \Delta_{T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})} \mathcal{P}_l(\mu) \quad (400)$$

P 成分も同様。

ルジャンドル多項式の漸化式を用いて式変形すると

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{T, l}(q, t) + \frac{q}{a} \frac{1}{2l+1} [(l+1) \Delta_{T, l+1}(q, t) - l \Delta_{T, l-1}(q, t)] &= \left( \sigma_{Tn_e} \Delta(t, q) - 2\hat{h}_q(t) \right) \delta_{l0} - \sigma_{Tn_e} \Delta_{T, l}(q, t) \quad , \\ \dot{\Delta}_{P, l}(q, t) + \frac{q}{a} \frac{1}{2l+1} [(l+1) \Delta_{P, l+1}(q, t) - l \Delta_{P, l-1}(q, t)] &= -\sigma_{Tn_e} \Delta(t, q) \delta_{l0} - \sigma_{Tn_e} \Delta_{P, l}(q, t) \quad (401) \end{aligned}$$

となる。

次に  $\Delta$  の表示に対して部分波展開およびルジャンドル多項式の積分公式より

$$\Delta(t, q) := \frac{1}{10} \Delta_{T, 0}(q, t) + \frac{1}{7} \Delta_{T, 2}(q, t) + \frac{3}{70} \Delta_{T, 4}(q, t) - \frac{3}{5} \Delta_{P, 0}(q, t) + \frac{6}{7} \Delta_{P, 2}(q, t) - \frac{3}{70} \Delta_{P, 4}(q, t) \quad (402)$$

となる。

以上が閉じた方程式系として光の時間発展を決めるが、1の大きいところまで計算するのは大変である。

### 11.6 光の非等方ストレステンソル

以上までで求めた諸量を光の非等方ストレステンソル  $\pi_{T\gamma ij}(\mathbf{x}, t)$  に結びつける。完全流体での物理量の定義を思い出すと、非等方テンソルとはエネルギー運動量テンソルの  $\delta T_{ij}$  成分の Traceless Tranceverce (TT) テンソル成分であった。今回はテンソルの物理量しか計算してないので、 $\delta T_{ij}$  を計算すれば自動的に  $\pi_{T\gamma ij}(\mathbf{x}, t)$  になる。

$\delta T_{ij}(\mathbf{x})$  を  $\mathbf{x}$  についてフーリエ変換して

$$\begin{aligned} \pi_{T\gamma ij}(\mathbf{x}, t) = \{ \delta T_{\gamma j}^i \}_{(x)} &:= \frac{2}{a^4} \int d^3 p a^2 \delta f_{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p \hat{p}_i \hat{p}_j \\ &= \rho_\gamma(t) \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) \\ &= \rho_\gamma(t) \sum_\lambda \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \beta_{q(\lambda)} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{T(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q})} \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \\ &= \frac{\rho_\gamma(t)}{4} \sum_\lambda \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \beta_{q(\lambda)} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{T(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q})} \left( 1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (403)$$

となる。Eq(383) を参考に  $q$  表示で書くと

$$\begin{aligned} \pi_{T\gamma q}(t) &= \frac{\rho_\gamma(t)}{4} \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{T(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q})} \left( 1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \right)^2 \\ &= 2\rho_\gamma(t) \left[ \frac{1}{15} \Delta_{T, 0}(t, \mathbf{q}) + \frac{2}{21} \Delta_{T, 2}(t, \mathbf{q}) + \frac{1}{35} \Delta_{T, 4}(t, \mathbf{q}) \right] \end{aligned} \quad (404)$$

である。これによりメトリックの時間発展への光のテンソルの寄与がわかる。

### 11.7 光の視線方向積分

スカラー揺らぎの計算 [1] でも用いた視線方向積分を  $l$  の高次項まで扱うために考える。Eq(397) を元にして視線方向積分を行う。初期時間  $t_1$  では十分光学的に不透明  $\sigma_{Tn_\epsilon(t_1)} \gg H(t_1)$  とする。これは揺らぎの初期値を落とすことにつながる。このとき、視線方向積分は

$$\begin{aligned}\Delta_T(\mathbf{q}, t, \mu) &= - \int_{t_1}^t dt' \left( 2\dot{h}_q(t') - \sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right) \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \sigma_{Tn_\epsilon(t'')} dt'' \right], \\ \Delta_P(\mathbf{q}, t, \mu) &= - \int_{t_1}^t dt' \left( \sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right) \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \sigma_{Tn_\epsilon(t'')} dt'' \right]\end{aligned}\quad (405)$$

となる。ただしこの中で  $\Delta$  はそれ自体が  $\Delta_T(\mathbf{q}, t, \mu)$ ,  $\Delta_P(\mathbf{q}, t, \mu)$  の関数であるためこれはむしろ積分方程式である。

最終的に閉じた表式を得るために  $\Delta$  を求めることが必要である。 $\Delta$  の表式 Eq(399) に Eq(405) を代入して  $\int d\Omega_p$  積分がやりきれるので

$$\begin{aligned}\Delta(t, q) &:= - \frac{3}{64\pi} \int_{t_1}^t dt' \exp \left[ - \int_{t'}^t \sigma_{Tn_\epsilon(t'')} dt'' \right] \int d\Omega_p \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right] \\ &\quad \times \left[ \left( 1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2 \right)^2 \left( 2\dot{h}_q(t') - 2\sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right) - 8(\hat{q} \cdot \hat{p})^2 \sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right] \\ &= - \frac{3}{32} \int_{t_1}^t dt' \exp \left[ - \int_{t'}^t \sigma_{Tn_\epsilon(t'')} dt'' \right] \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d\mu \left[ (1 - \mu^2)^2 \left( 2\dot{h}_q(t') - 2\sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right) - 8\mu^2 \sigma_{Tn_\epsilon(t')} \Delta(\mathbf{q}, t') \right] \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right]\end{aligned}\quad (406)$$

という、 $\Delta(t, q)$  についての積分方程式が得られる。 $\mu$  積分は実行できるので、残りの量を反復法で解くことになる。

### 11.8 ニュートリノの支配方程式

テンソル揺らぎの原因としてニュートリノの持つ非等方テンソルを考える。これは重力場の揺らぎを通して光の揺らぎに関わってくる。光の場合に見たように、非等方テンソルの計算 Eq(403) では密度関数に  $p_i p_j$  を掛けたものを見ていることに注意。

ニュートリノは偏光がないとして、光のボルツマン方程式 Eq(371) から偏光、衝突項に由来する項を取り除いた

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hat{p}^k}{a} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \delta f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial f_\nu}{\partial p_0} \frac{p}{2} \left( \dot{h}_{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \right) = 0 \quad (407)$$

が基本方程式となる。ただし偏極因子  $g^{ij} \dots$  の効果で  $\delta f \propto a^{-2} f_\nu$  となっており余分な項が一つ落ちることに注意。この式の二項目は平均値  $f_\nu$  を含んでいる。ここでニュートリノ種数  $g_\nu$  として (SM では  $g_\nu = 6$ ) それらを同じ密度分布に従う粒子として取り扱う。p 方向に足し合わせて

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(t, x^i, \hat{p}^i) &:= \frac{g_\nu \frac{1}{a^4} \int 4\pi p^3 dp \delta f_\nu(t, x^i, p, \hat{p}^i)}{g_\nu \frac{1}{a^4} \int dp p^3 f(p)} = \frac{\frac{1}{a^4} g_\nu \int 4\pi p^3 dp \delta f_{ij}(t, x^i, p, \hat{p}^i)}{\rho_\gamma}, \\ \rho_\gamma &:= g_\nu a^{-4} \int d^3 p p f_\nu(p)\end{aligned}\quad (408)$$

となる。これをボルツマン方程式に代入すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hat{p}^k}{a} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \mathcal{N}(t, x^i, \hat{p}^i) - 2 \left(\dot{h}_{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \dot{\Psi} + \dot{\Phi}\right) = 0 \quad (409)$$

となる。

これ以降の議論は Eq(388) を参考にする。まずフーリエ変換で変数を  $(x, p) \rightarrow (q, p)$  に直す。

$$\mathcal{N}(t, x^i, \hat{p}^i) =: \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{N}(t, q^i, \hat{p}^i) \quad (410)$$

これを用いて<sup>29</sup>

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p}\cdot\mathbf{q}}{a}\right) \mathcal{N}_\nu(t, q^i, \hat{p}^i) + 2 \left(\sum_{\lambda=\pm 2} \beta(\mathbf{q}, \lambda) \dot{h}_q(t) e_{ab}(\hat{q}, \lambda) \hat{p}_a \hat{p}_b - \beta_q^{(S)} \dot{\Psi}_q + \beta_q^{(S)} \dot{\Phi}_q\right) = 0 \quad (411)$$

となる。単純に  $d\Omega_p$  積分をするだけではメトリックのテンソル揺らぎは出て来ずにスカラー揺らぎのみ扱うことになる。ここでは、非等方テンソルに必要なテンソル揺らぎは落ちる。テンソル分解は、 $d\Omega_p$  積分の後で行うべきである。そこで光の場合と少し異なるが最終的に計算する非等方テンソルの表式を参考に  $d\Omega_p p_i p_j$  を掛けてから<sup>30</sup>テンソル分解する。

$$\int d\Omega_p p_i p_j \mathcal{N}_\nu(t, q^i, \hat{p}^i) =: \sum_{\lambda=\pm 2} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \Delta_{\mathcal{N}}(q, t) \beta_q(\lambda) + \sum_{s=\pm 1} \beta_q^{(V)}(s) (\hat{q}_i V_j(s, q, t) + \hat{q}_j V_i(s, q, t)) + \delta_{ij} S(q, t) \beta_q^{(S)} \quad (412)$$

この右辺のテンソル成分に興味がある。右辺のテンソル成分を作るような  $\mathcal{N}_\nu(t, q^i, \hat{p}^i)$  を  $\hat{p}_i, e_{ij}(\hat{q})$  から構成するためには、光の場合と違って添字の構造がないので、次の組み合わせしか存在しない。

$$\mathcal{N}_\nu(t, q^i, \hat{p}^i) =: \sum_{\lambda=\pm 2} \beta_q(\lambda) \hat{p}_i \hat{p}_j e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \Delta_\nu(q, t) \quad (413)$$

ニュートリノのボルツマン方程式 Eq(411) から最終的にテンソル成分となる量を抜き出すと次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q\mu}{a}\right) \Delta_\nu(t, q^i, \mu) + 2\dot{h}_q(t) = 0 \quad (414)$$

## 11.9 ニュートリノの部分波展開

光の場合と同様に Eq(414) を部分波展開する。

$$\Delta_\nu(t, q, \nu) := \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Delta_{\nu, l}(q, t) \mathcal{P}_l(\mu) \quad , \quad \Delta_{\nu, l}(q, t) = i^l \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \Delta_\nu(t, q, \nu) \mathcal{P}_l(\mu) \quad (415)$$

P 成分も同様。

ルジャンドル多項式の漸化式を用いて式変形すると

$$\dot{\Delta}_{\nu, l}(q, t) + \frac{q}{a} \frac{1}{2l+1} [(l+1) \Delta_{T, l+1}(q, t) - l \Delta_{T, l-1}(q, t)] = -2\dot{h}_q(t) \delta_{l0} \quad (416)$$

となる。

<sup>29</sup> 確率的重み  $\beta$  はテンソル分解が出来た後で改めて導入する。

<sup>30</sup> 光の場合は偏極因子  $\delta_{ij} - p_i p_j$  として取り入れていた。



### 11.10 ニュートリノの非等方ストレステンソル

以上までで求めた諸量をニュートリノの非等方ストレステンソル  $\pi_{\nu ij}(\mathbf{x}, t)$  に結びつける。完全流体での物理量の定義を思い出すと、非等方テンソルとはエネルギー運動量テンソルの  $\delta T_{ij}$  成分の TT テンソル成分であった。今回はテンソルの物理量しか計算してないので、 $\delta T_{ij}$  を計算すれば自動的に  $\pi_{\nu ij}(\mathbf{x}, t)$  になる。

$$\begin{aligned}
\pi_{\nu ij}(\mathbf{x}, t) &= \{\delta T_{\nu j}^i\}_{(T)} := \frac{1}{a^4} \int d^3 p a^2 \delta f_{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p \hat{p}_i \hat{p}_j \\
&= \rho_{\nu}(t) \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \mathcal{N}_{\nu}(t, q^i, \hat{p}^i) \\
&= \rho_{\nu}(t) \sum_{\lambda} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \beta_{q(\lambda)} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{\nu}(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \\
&= \rho_{\nu}(t) \sum_{\lambda} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \beta_{q(\lambda)} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \frac{1}{4} \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{\nu}(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q}) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right)^2
\end{aligned} \tag{417}$$

欲しいのは  $(x, p)$  表示ではなくて  $(q, p)$  表示なのでフーリエ表示 Eq(383) を参考に

$$\begin{aligned}
\pi_{\nu q}(t) &= \frac{\rho_{\nu}(t)}{4} \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \Delta_{\nu}(t, q^i, \hat{p} \cdot \hat{q}) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right)^2 \\
&= 2\rho_{\nu}(t) \left[ \frac{1}{15} \Delta_{\nu,0}(t, \mathbf{q}) + \frac{2}{21} \Delta_{\nu,2}(t, \mathbf{q}) + \frac{1}{35} \Delta_{\nu,4}(t, \mathbf{q}) \right]
\end{aligned} \tag{418}$$

である。これによりメトリックの時間発展へのニュートリノのテンソルの寄与がわかる。

### 11.11 ニュートリノの視線方向積分

Eq(414) を元にして視線方向積分を行う (ただしさかのぼる初期時間  $t_1$  はニュートリノと物質の相互作用が切れた直後  $T \simeq 10^{10} K$  とする。こうすると揺らぎは温度摂動、速度摂動に主に由来するようになるがこれらはテンソル成分を生まないので、テンソル揺らぎの初期値はやはり無視できる。初期値を無視するという仮定のもとで

$$\Delta_{\nu}(q, t, \mu) = -2 \int_{t_1}^t dt' \dot{h}_{q(t')} \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right] \tag{419}$$

という積分表示が得られる。

### 11.12 支配方程式のまとめ

以上から重力、光、ニュートリノの支配方程式 Eq(384), Eq(399), Eq(414)

$$\ddot{h}_{q(t)} + 3H\dot{h}_{q(t)} + a^{-2}q^2 h_{q(t)} = 16\pi G\pi_q^{(T)}(t) \tag{420}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_T = -\sigma_T n_e \Delta_T + \sigma_T n_e \Delta - 2\dot{h}_{q(t)} \quad ,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a} \right) \Delta_P = -\sigma_T n_e \Delta_P - \sigma_T n_e \Delta \quad ,$$

$$\Delta_{(t, q)} := -\frac{3}{64\pi} \int d\Omega_p \left[ -\left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2 \Delta_{T(t, q, \hat{p} \cdot \hat{q})} + \left(8(\hat{q} \cdot \hat{p})^2 + \left(1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2\right)^2\right) \Delta_P \right] \tag{421}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{q\mu}{a}\right)\Delta_{\nu}(t, q^i, \mu) + 2\dot{h}_q(t) = 0 \quad (422)$$

および非等方ストレスの表式 Eq(404), Eq(418)

$$\pi_{r\gamma q}(t) = 2\rho_{\gamma}(t) \left[ \frac{1}{15}\Delta_{T,0}(t, \mathbf{q}) + \frac{2}{21}\Delta_{T,2}(t, \mathbf{q}) + \frac{1}{35}\Delta_{T,4}(t, \mathbf{q}) \right] \quad (423)$$

$$\pi_{\nu q}(t) = 2\rho_{\nu}(t) \left[ \frac{1}{15}\Delta_{\nu,0}(t, \mathbf{q}) + \frac{2}{21}\Delta_{\nu,2}(t, \mathbf{q}) + \frac{1}{35}\Delta_{\nu,4}(t, \mathbf{q}) \right] \quad (424)$$

が得られた。

これら表式はすべて本来はテンソル成分  $\beta_{q(\lambda)}$  が掛かった表式であることに注意。その意味でスカラーゆらぎとは全く独立。

ちなみに視線方向積分の公式と非等方ストレスを比較すると  $\dot{h}_q = 0$  で非等方ストレスが 0 になること、つまりは揺らぎの凍結解に対しては  $\pi_{rij} = 0$  になるという Eq(321) が成立していることがわかる。

## 12 テンソルモードの解析解

解析的に解ける範囲でテンソルモードを考える。

計算としては

- 非等方ストレステンソルが無視できるほど後期の重力揺らぎの時間発展
- 非等方ストレステンソルの効果

を扱う。

### 12.1 メトリックの後期時間発展

非等方ストレステンソルが無視できるほど後期の重力揺らぎの時間発展を扱う。特に輻射優勢期から物質優勢期にまたがった時期の時間発展に興味がある。式 Eq(384) で非等方ストレステンソルを無視したもの

$$\ddot{h}_q(t) + 3H\dot{h}_q(t) + a^{-2}q^2 h_q(t) = 0 \quad (425)$$

から始める。

宇宙の構成要素としては放射と非相対論的物質を仮定する。つまり

$$\rho(t) = \rho_r(t) + \rho_m(t) = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^4 + \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \quad (426)$$

を仮定する。この 0 は現在の値という意味。ここで移行時期  $a_{eq} := a_0 \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}}$  を定義して、時間変数を  $t \rightarrow y := \frac{a(t)}{a_{eq}} = \frac{\rho_m(t)}{\rho_r(t)}$  に取り替える。この置き換えにより重力の支配方程式は

$$\left[ (1+y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( 2\frac{1+y}{y} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \kappa^2 \right] h_q = 0 \quad ,$$

$$\kappa := \frac{\sqrt{2}q}{\dot{a}_{eq}} \simeq 19.3 \frac{q}{a_0 \Omega_M h^2} [\text{Mpc}^{-1}] \quad (427)$$

となる。 $\kappa$ の大小は輻射-物質優勢移行期間において揺らぎがホライゾンの外にあるか中にあるかを表す。重力波として直接観測しうるのは $\kappa \gg 1$ だが、CMBに効きうる成分としては $\kappa \ll 1$ も考える必要がある。それぞれの極限での結果を解析する。

まず初期条件は $\frac{q}{a} \ll H \leftrightarrow y \ll 1$ で定めるとする。この時間では先に見たように揺らぎは凍結しており、減衰していない解は定数解 $h_q^{(in)}$ と取れる。<sup>31</sup>初期条件につながる解を探すために $y \ll 1$ での解を探す。その後で $y \ll 1$ の解につながるような一般の $y$ での解を $\kappa \gg 1$ もしくは $\kappa \ll 1$ の条件下で求める。

$y \ll 1$ で解くべき方程式はEq(427)より

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \kappa^2 \right] h_q = 0 \quad (428)$$

であり特に $y \rightarrow 0$ で凍結する解は

$$h_q = \frac{\sin(\kappa y)}{\kappa y} h_q^{(in)} \quad (429)$$

だとわかる。

次に短波長揺らぎ $\kappa \gg 1$ を考える。Eq(425)で1階微分を除去するように $t \rightarrow x := \int dt a^{-3}(t)$ に変数変換すると

$$\frac{d^2}{dx^2} h_q(t) + q^2 a^4 h_q(t) = 0 \quad (430)$$

となる。この最後の項が $a$ の時間変化に対して速いフェーズとして働くのでWKB近似が使えて、 $h_q(t) = A(t) \exp(\pm i q \int a^2 dx)$ を代入すると $q$ の高次項において $A$ についての条件式

$$\frac{dA}{dx} = -A \frac{1}{2a^2} \frac{d(a^2)}{dx} \Rightarrow A(t) = C \frac{1}{a} \quad (431)$$

が取れる。この解を初期解Eq(429)に結びつくように線形結合すると

$$h_q(t) = \frac{1}{\kappa y} \sin \left( q \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \right) h_q^{(in)} \rightarrow \frac{\sqrt{\Omega_{r0} H_0^2}}{k} \sin(k\eta + k(t - t_0)) h_q^{(in)}, \quad (a \rightarrow a_0) \quad (432)$$

が得られる。ただし $k := \frac{q}{a_0}$ は物理的波数、 $\eta := \int \frac{dt}{a}$ は共形時間である。

次に長波長揺らぎ $\kappa \ll 1$ を考える。この場合は物質優勢期に入っても揺らぎは凍結したままなのでEq(427)において $y \gg 1$ を見ればよく、

$$\begin{aligned} & \left[ y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \kappa^2 \right] h_q = 0 \\ \Rightarrow h_q(t) &= A_1 \left[ -\frac{\cos(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}} \right] + A_2 \left[ \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\cos(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (433)$$

が解になる。初期条件に合わせると(Eq(429)を見ると、 $y \gg 1$ では解が凍結しないように見えるが、今回は $\kappa y \ll 1$ も課すことで凍結であると見なせる。)

$$h_q(t) = \frac{3}{4} h_q^{(in)} \left[ -\frac{\cos(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}} \right] \quad (434)$$

<sup>31</sup>この揺らぎ自体は揺らぎがホライゾンから出たとき、つまりインフレーション期の物理的状況で決まる。大部分は真空の取り替えによる零点振動の寄与から来る。

という解になる。

最後に実用上の目的から、物質優勢期  $y \gg 1$  での任意の  $\kappa$  に対して使える表式を書いておく。

$$\begin{aligned}
 h_q(t) &= \frac{3}{4} \frac{\mathcal{U}_\kappa}{4\kappa^2} h_q^{(in)} \left[ -\frac{\cos(2\kappa\sqrt{y} + \Xi_\kappa)}{\kappa^2 y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y} + \Xi_\kappa)}{2\kappa^3 y^{3/2}} \right], \\
 \mathcal{U}_0 = 1 &\rightarrow \mathcal{U}_\kappa = \frac{4}{3}\kappa, & (\kappa = 0 \rightarrow \infty) \\
 \Xi_0 = 0 &\rightarrow \Xi_\kappa = \frac{\pi}{2} - 2\kappa, & (\kappa = 0 \rightarrow \infty)
 \end{aligned} \tag{435}$$

具体的な  $\mathcal{U}$ ,  $\Xi$  の表式は数値計算により求める必要がある [2]。

## 12.2 非等方ストレステンソルの効果

非等方ストレステンソルを入れると微分積分方程式になるので、シミュレーションによって得られたフィッティング関数により解を合わせていくことになる。

物質優勢期では比較的簡単に結果を書くことが出来て、Eq(435) において  $\mathcal{U}_\kappa \rightarrow \mathcal{U}_\kappa \alpha_\kappa$  として追加の減衰因子  $\alpha_\kappa \sim \frac{1+0.8026\kappa}{1+\kappa}$  が付く。

輻射優勢期ではニュートリノの非等方テンソルが大きいいためより複雑な振る舞いをする。

## 13 B-mode の観測量

### 13.1 温度揺らぎとエネルギー揺らぎ

以前計算したスカラー揺らぎとの相違点について注意点を記しておく。

スカラー揺らぎの解析での定義 Eq(188) とここでの定義 Eq(385) は  $\Theta$  が 4 倍異なる。その理由は、今回の定義では  $\Theta$  は光のエネルギー密度のズレであり温度の揺らぎという意味を考えていなかったため。温度揺らぎ  $\Delta T(t, \mathbf{x}, \hat{p})$  とエネルギー密度揺らぎ  $\Theta_{ij}(t, \mathbf{x}, \hat{p})$  を関係付けるためには、ボルツマンの法則  $\epsilon \propto T^4$  に留意して  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4}\Theta_{ii}$  を用いる。ここで Tr 成分が取られることに注意。Eq(415) で定義したテンソル揺らぎ温度モード  $\Delta_T$  はこれを通して温度分布に寄与する。つまり、温度揺らぎはスカラーモードの寄与とテンソルモードの寄与が独立に掛かる。ただし確率変数  $\beta_q(\lambda)$ ,  $\beta_q^S$  が異なるので 2 点相関関数で干渉はしない。

温度揺らぎの成分の書き方として、 $C_{TT,l}^S$  は温度相関関数 (TT) に対するスカラーモード (S) の寄与による多重極強度、 $C_{TT,l}^T$  は温度相関関数 (TT) に対するテンソルモード (T) の寄与による多重極強度である。

### 13.2 ストークス・パラメーター

光の偏光分布を取り扱う際に有効な観測量としてストークスパラメーターが存在する。放射強度が  $\Theta_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t)$  で表される輻射場において、現在  $t = t_0$  で  $\mathbf{x} = 0$  にいる観測者が視線方向  $\hat{n}$  からやってくる光  $\hat{p} = -\hat{n}$  を観測したとする。このとき、偏光の観測により次の 4 つの観測量が得られる。簡単のため  $\hat{n} = e_z$  とすると

$$\Theta_{ij}(0, -e_z, t_0) = \frac{2}{T_0} \begin{bmatrix} \Delta T(e_z) + Q(e_z) & U(e_z) - iV(e_z) & 0 \\ U(e_z) + iV(e_z) & \Delta T(e_z) - Q(e_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書ける。ベクトル  $e_{\pm}(e_z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$  との内積で書いて定義することも出来る。一般の方向  $\hat{n}$  についての定義は

$$\begin{aligned} Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n}) &:= \frac{T_0}{2} e_{\pm i}(\hat{n}) e_{\pm j}(\hat{n}) \Theta_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) \quad , \\ V(\hat{n}) &:= \frac{T_0}{4} e_{-i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) (\Theta_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) - \Theta_{j\bar{i}}(0, -\hat{n}, t_0)) \end{aligned} \quad (436)$$

となる。これらは温度の次元を持つ。V は円偏光を表すがこの成分は今回の非相対論的電子の散乱では生成されない。<sup>32</sup>

よって  $Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})$  を考えていくが、この量は回転不変ではない。その理由は偏光ベクトルが単純な 3 元ベクトルでないためである。というのも、偏光ベクトルはその偏光軸まわりの回転に対して位相が変化する。具体的に次のように導く。まず、z 方向の偏光ベクトルを  $e_{\pm}(e_z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$  で定義すると任意の  $\hat{n} := (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  方向での偏光ベクトルは

$$\begin{aligned} e_{\pm i}(\hat{n}) &:= S_{ij}(\hat{n}) e_{\pm j}(e_z) \\ S_{ij}(\hat{n}) &:= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \theta & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

により定義されるが、この状態で一般の方向  $\hat{n}$  に回転行列 R を掛けると次のようになる。

$$\begin{aligned} e_{\pm i}(R\hat{n}) &= S_{ij}(R\hat{n}) e_{\pm j}(e_z) \\ &= [RS(\hat{n}) (S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n}))]_{ij} e_{\pm j}(e_z) \end{aligned} \quad (437)$$

この固まりに分けた理由は、単純な回転行列なら  $e_{\pm i}(R\hat{n}) = R_{ij} e_{\pm j}(\hat{n}) = RS(\hat{n}) e_{\pm j}(e_z)$  を入れるべきだからである。しかし今回は余分な因子  $(S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n}))$  が挟まっている。この行列はベクトルの向きを変えない。しかし R が  $\hat{n}$  周りに及ぼす回転は  $S(R\hat{n})$  では除去されるため、その分  $S^{-1}(\hat{n})R^{-1}$  による  $\hat{n}$  周りの回転が入ってくる。つまり余計な因子は  $e_z$  周りの回転を表しており、偏光ベクトルに対してそれは  $(S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n}))_{kj} e_{\pm j}(e_z) = e^{\pm i\psi(R, \hat{n})} e_{\pm k}(e_z)$  で働く。以上から、偏光ベクトルは 3 元ベクトルではなく

$$e_{\pm i}(R\hat{n}) = e^{\pm i\psi(R, \hat{n})} R_{ij} e_{\pm j}(\hat{n}) \quad (438)$$

となる。

そこから

$$R [Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})] = e^{\pm 2i\psi(R, \hat{n})} [Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})] \quad (439)$$

として回転が作用する。

### 13.3 ストークスパラメータの展開

先に見たようにストークスパラメータは回転に対してスカラーではないため単純な球面調和関数の展開では取り扱うことが出来ない。このようなスピン 2 を持つ演算子の球面調和関数的展開のためには同じスピン 2 の変換性を持つ関数で展開する必要がある。

<sup>32</sup> ボルツマン方程式衝突項 Eq(388) の生成成分を見ると  $\Theta_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) \rightarrow \Theta_{j\bar{i}}(0, -\hat{n}, t_0)$  という入れ替えで値が変わらないことに注意

次のように展開すると良いことが知られている。

$$\begin{aligned}
Q(\hat{n}) + iU(\hat{n}) &:= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{P,lm} \mathcal{Y}_l^m(\hat{n}) \quad , \\
\mathcal{Y}_l^m(\hat{n}) &:= 2 \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} e_{+i(\hat{n})} e_{+j(\hat{n})} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_l^m(\hat{n}) \quad , \\
\tilde{\nabla} &:= \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad \hat{\theta} := (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad , \quad \hat{\phi} := (-\sin \theta, \cos \phi, 0)
\end{aligned} \tag{440}$$

以下、スピン 2 の球面調和関数  $\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})$  の性質を見ていく。まず通常の球面調和関数の回転 R に対する変換則を

$$Y_l^m(R\hat{n}) = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)}(R^{-1}) Y_l^{m'}(\hat{n}) \tag{441}$$

で書くことにする。<sup>33</sup>次に  $D_{mm'}^{(l)}(R)$  は角運動量  $l$  の回転群の既約表現となっている。 $\tilde{\nabla}$  は通常の  $\nabla$  の r 微分成分を除去したものであり、回転に対してはベクトルとして作用する。そこで余分な偏光因子の効果によって  $\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})$  は回転に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_l^m(R\hat{n}) &= e^{+2iq(R, \hat{n})} \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)}(R^{-1}) \mathcal{Y}_l^{m'}(\hat{n}) \quad , \\
\mathcal{Y}_l^{m*}(R\hat{n}) &= e^{-2iq(R, \hat{n})} \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(R) \mathcal{Y}_l^{m'*}(\hat{n})
\end{aligned} \tag{442}$$

となる。この意味で確かにスピン 2 の球面調和関数というにふさわしい性質を持つ。

球面調和関数としての直交性を  $\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})$  は引き継いでおり

$$\int d\omega \mathcal{Y}_l^{m*}(\hat{n}) \mathcal{Y}_{l'}^{m'}(\hat{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{443}$$

となる。

次に空間反転 P に対する性質から次の二つの組み合わせが便利である。

$$\begin{aligned}
a_{E,lm} &:= -\frac{1}{2} (a_{P,lm} + a_{P,l-m}^*) \quad , \\
a_{B,lm} &:= i\frac{1}{2} (a_{P,lm} - a_{P,l-m}^*)
\end{aligned} \tag{444}$$

空間反転  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ,  $\phi \rightarrow \phi \pm \pi$ , ( $\Leftrightarrow \hat{n} \rightarrow -\hat{n}$ ) に対して

$$\begin{aligned}
e_{\pm}(\hat{n}) &\rightarrow e_{\pm}(-\hat{n}) = e_{\mp}(\hat{n}) \quad , \\
Q(\hat{n}) &\rightarrow Q(-\hat{n}) \quad , \quad U(\hat{n}) \rightarrow -U(-\hat{n}) \quad , \quad V(\hat{n}) \rightarrow V(-\hat{n})
\end{aligned} \tag{445}$$

<sup>33</sup>球面調和関数の位相は  $Y_l^{m*}(\hat{n}) = Y_l^{-m}(\hat{n})$  で定めるため、量子力学でブラケットから定める角運動量とは位相が異なる場合がある。

ただし Eq(436) を用いた。さらに  $\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})$  に対しては  $P[\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})] = (-1)^l Y_l^m(\hat{n})$  を考慮すると

$$\begin{aligned}
P[\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})] &= 2\sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} e_{+i(-\hat{n})} e_{+j(-\hat{n})} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_l^m(-\hat{n}) \\
&= 2(-1)^l \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} e_{-i(\hat{n})} e_{-j(\hat{n})} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_l^m(\hat{n}) \\
&= 2(-1)^l \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} e_{+i(\hat{n})}^* e_{+j(\hat{n})}^* \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_l^{-m*}(\hat{n}) \\
&= (-1)^l \mathcal{Y}_l^{-m*}(\hat{n}) \tag{446}
\end{aligned}$$

となる。

これを用いると Eq(440) に対して

$$\begin{aligned}
P[Q(\hat{n}) + iU(\hat{n})] &= Q(-\hat{n}) + iU(-\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{P,lm}^* \mathcal{Y}_l^{m*}(-\hat{n}) = P \left[ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{P,lm} \mathcal{Y}_l^m(\hat{n}) \right] \\
&= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l P[a_{P,lm}] P[\mathcal{Y}_l^m(\hat{n})] = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l P[a_{P,lm}] (-1)^l \mathcal{Y}_l^{-m*}(\hat{n}) \tag{447}
\end{aligned}$$

となる。よって  $P[a_{P,lm}] = (-1)^l a_{P,l-m}^*$  となる。ここから

$$P[a_{E,lm}] = (-1)^l a_{E,lm} \quad , \quad P[a_{B,lm}] = -(-1)^l a_{B,lm} \tag{448}$$

であり、それぞれがパリティの固有状態になっている。

またこれらの変数は実数条件  $a_{E/B,lm} = a_{E/B,l-m}^*$  を満たす。証明としては Eq(444) から明らかである。

### 13.4 ストークスパラメータの相関関数

相関関数を計算する際にテンソル揺らぎであっても干渉するモード、しないモードに分けることが出来ることを説明する。

先にはパリティの固有状態で展開係数を書き直した。パリティ変換は運動量表示では  $\beta_q(\lambda) \rightarrow \beta_{-q}(\lambda)$  として異なる確率分布関数に移す。ここで注目すべきは確率分布関数への依存性である。定義 Eq(444) から  $a_{E,lm} \propto \beta_q + \beta_{-q}$ ,  $a_{B,lm} \propto \beta_q - \beta_{-q}$  となる。またテンソル成分が作る温度揺らぎモード ( $\Delta T \propto \Theta_{ii}$  をモード展開した係数  $a_{T,lm}$ ) は  $\Delta T^T(\hat{n}) =: \sum_{lm} a_{T,lm} Y_m^l(\hat{n})$  (テンソルモードの添字<sup>(T)</sup>は省略) として定義されるので温度の実数性と  $Y_m^l$  の実数条件の元では  $a_{T,lm} = \frac{1}{2} (a_{T,lm} + a_{T,l-m}^*) \propto \beta_q + \beta_{-q}$  となる。ここで

$$\begin{aligned}
\langle (\beta_q + \beta_{-q})^2 \rangle &= \langle (\beta_q - \beta_{-q})^2 \rangle = 2 \langle \beta_q^2 \rangle \quad , \\
\langle (\beta_q + \beta_{-q})(\beta_q - \beta_{-q}) \rangle &= 0 \tag{449}
\end{aligned}$$

を考えるとテンソル揺らぎの観測量 T,E,B のうち、相関性が残る組み合わせは

$$\begin{aligned}
\langle a_{T,lm}^* a_{T,l'm'} \rangle &= C_{TTl} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad , \\
\langle a_{T,lm}^* a_{E,l'm'} \rangle &= C_{TEl} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad , \\
\langle a_{E,lm}^* a_{E,l'm'} \rangle &= C_{EEl} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad , \\
\langle a_{B,lm}^* a_{B,l'm'} \rangle &= C_{BBl} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{450}
\end{aligned}$$

しかないことがわかる。またそれぞれの実数条件  $a_{E/B/T,lm} = a_{E/B/T,l-m}^*$  からすべての  $C_{XY,l}$  ( $X, Y = T, E, B$ ) は実数である。

いわゆる B-mode の観測はこの  $C_{BBl}$  を測定することである。

## 14 $C_{BBl}$ のスペクトル

この節の目的は  $C_{BBl}$  のスペクトルに対して、重力場の方程式や初期値  $h_q^{(in)}$  がどのように効いてくるのかを見ることである。

### 14.1 $a_{P,lm}$ の計算

まず Eq(398) に視線方向積分 Eq(405) を代入することで

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(t, q^i, \hat{p}^i) = & - \sum_{\lambda=\pm 2} \beta_q(\lambda) \int_{t_1}^t dt' \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \sigma_{Tn_\epsilon}(t'') dt'' \right] \\ & \times \left[ \dot{h}_{q^i}(t') (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) + \sigma_{Tn_\epsilon}(t') \Delta(q, t') (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \right] \end{aligned} \quad (451)$$

という積分表示が得られる。これを元にして  $a_{P,lm}$  を計算する。

最初に Eq(436) によりストークスパラメータを計算するが、条件  $\hat{n}_{e_{+i}(\hat{n})} = 0$ ,  $e_{+i}(\hat{n})e_{+j}(\hat{n}) = 0$  ( $\hat{n} = -\hat{p}$ ) により  $e_{+i}(\hat{n})e_{+j}(\hat{n}) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = 0$  となる。よって残るのは  $\Delta$  項だけになる。現在の値を見たいので  $t = t_0$  とする。また  $x = 0$  での値なので逆フーリエ変換  $\int d^3q e^{-i0 \cdot q}$  を掛けて、

$$\begin{aligned} Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n}) = & -\frac{T_0}{2} e_{+i}(\hat{n})e_{+j}(\hat{n}) \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \beta_q(\lambda) \\ & \times \int_{t_1}^{t_0} dt' \exp \left[ -iq\mu \int_{t'}^{t_0} \frac{dt''}{a(t'')} \right] \mathcal{P}(t') \Delta(q, t') \quad , \\ \mathcal{P}(t') := & \sigma_{Tn_\epsilon}(t') \exp \left( - \int_{t'}^{t_0} \sigma_{Tn_\epsilon}(t'') dt'' \right) \end{aligned} \quad (452)$$

を得る。この  $\mathcal{P}(t)$  は生き残った光子数に散乱確率を掛けているので最終散乱の確率を表しており、最終散乱時刻でのみ大きな確率を持つ量である。

次に Eq(452) に  $\mathcal{Y}_l^{m*}(\hat{n})$  の直交性を用いて

$$\begin{aligned} a_{P,lm} = & \int \Omega_n \mathcal{Y}_l^{m*}(\hat{n}) (Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})) \\ = & -\frac{T_0}{2} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3q \beta_q(\lambda) \int_{t_1}^{t_0} dt' g_{lm}(q r(t), \hat{q}, \lambda) \mathcal{P}(t') \Delta(q, t') \quad , \\ g_{lm}(\rho, \hat{q}, \lambda) := & \int \Omega_n \mathcal{Y}_l^{m*}(\hat{n}) e^{i\rho \hat{q} \cdot \hat{n}} e_{+i}(\hat{n})e_{+j}(\hat{n}) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \quad , \\ r(t) := & \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \end{aligned} \quad (453)$$

と書ける。 $r$  は共動的動径距離であり関数  $g_{lm}$  は  $q$  についての回転群の固有ベクトルである。<sup>34</sup>

<sup>34</sup>添字  $l$  が足し合わせと角運動量両方の意味で使われていることに注意。 $(lm)$  の組で入っている場合は角運動量を指す場合が多い



$g_{lm}$  の添字は球面調和関数に依存しているので回転行列を用いて

$$g_{lm}(\rho, \hat{q}, \lambda) = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)}(S(\hat{q})) g_{lm'}(\rho, e_z, \lambda) \quad , \quad S(\hat{q})_{ij} (e_z)_j = \hat{q}_i \quad (454)$$

に動かすことが出来る。そこで簡単のために  $g_{lm}(\rho, e_z, \lambda)$  を求める。Chapter.(B.3) の結果を代入すると次のように書ける。

$$\begin{aligned} a_{P,lm} &= T_0 i^l \sqrt{\pi \frac{2l+1}{8}} \sum_{\pm} \int d^3q \beta_q(\pm 2) D_{m,\pm 2}^{(l)}(S(\hat{q})) \int_{t_1}^{t_0} dt \mathcal{P}(t) \Delta(q, t) \\ &\times \left[ 12 + 8\rho \frac{d}{d\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \mp 8i\rho \mp 2i\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right] \frac{j_l(\rho)}{\rho^2} \Big|_{\rho:=qr(t)} \end{aligned} \quad (455)$$

## 14.2 $a_{E/B,lm}$ の計算

$a_{P,lm}$  を  $a_{E/B,lm}$  に分解する際には各因子の位相を調べる必要がある。

$e_{ij}(\hat{q}, \pm 2)$  の具体的な表式は、z 方向での +, × モードを x, y ベクトルで書き直し、それを回転行列 Eq(437) で回転させることで次のように得られる。

$$\begin{aligned} e_{ij}(\hat{q}, \pm 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S^{(1)}(\hat{q}) \pm iS^{(1)}(\hat{q}))_i (S^{(1)}(\hat{q}) \pm iS^{(1)}(\hat{q}))_j \quad , \\ S^{(1)}(\hat{q}) \pm iS^{(1)}(\hat{q}) &= (\cos \theta \cos \phi \mp i \sin \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi \pm i \cos \phi, -\sin \theta) \end{aligned} \quad (456)$$

そこで次のように複素共役が取れるとわかる。

$$e_{ij}^*(\hat{q}, \pm 2) = e_{ij}(\hat{q}, \mp 2) = e_{ij}(-\hat{q}, \pm 2) \quad (457)$$

次にテンソルモードの確率変数  $\beta_q(\lambda)$  については Eq(383) において  $h_q(t)$  が実になるように取ることとする。すると、

$$\beta_q^*(\lambda) = \beta_{-q}(\lambda) \quad (458)$$

となる。

以上により  $a_{P,l-m}^*$  を計算するために必要な道具がそろった。まとめて次のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{E,lm} \\ a_{B,lm} \end{pmatrix} &= T_0 i^l \sqrt{\pi \frac{2l+1}{8}} \sum_{\pm} \int d^3q \beta_q(\pm 2) D_{m,\pm 2}^{(l)}(S(\hat{q})) \int_{t_1}^{t_0} dt \mathcal{P}(t) \Delta(q, t) \\ &\times \begin{pmatrix} - \left( 12 + 8\rho \frac{d}{d\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \right) \\ \pm \left( 8 \text{rho} + 2\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) \end{pmatrix} \frac{j_l(\rho)}{\rho^2} \Big|_{\rho:=qr(t)} \end{aligned}$$

## 14.3 $C_{BBL}$ の計算

Eq(459) から相関関数 Eq(450) を組む。その際、

$$\begin{aligned} \langle \beta_q(\lambda) \beta_{q'}(\lambda') \rangle &= \delta^3(q - q') \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \\ \int \Omega_q D_{m,\pm 2}^{(l)}(S(\hat{q})) D_{m',\pm 2}^{(l)*}(S(\hat{q})) &= \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \end{aligned} \quad (459)$$

を用いる。結果として次のようになる。

$$\begin{pmatrix} C_{EE,l} \\ C_{BB,l} \end{pmatrix} := \pi^2 T_0^2 \int_0^\infty dq q^2 \begin{pmatrix} \left| \int_{t_1}^{t_0} dt \mathcal{P}(t) \Delta(q,t) \left( 12 + 8\rho \frac{d}{d\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \right) \frac{j_l(\rho)}{\rho^2} \right|^2 \\ \left| \int_{t_1}^{t_0} dt \mathcal{P}(t) \Delta(q,t) \left( 8\rho + 2\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) \frac{j_l(\rho)}{\rho^2} \right|^2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\rho:=qr(t)}$$

#### 14.4 $C_{BB,l}$ の近似表式

Eq(460) の表式で特に  $C_{BB,l}$  を見通しよく近似したい。

ベッセル関数の漸近形

$$\begin{aligned} j_l(\rho) &\rightarrow \frac{\cos b}{\nu \sqrt{\sin b}} \cos \left[ \nu (\tan b - b) - \frac{\pi}{4} \right], \quad (\rho^2 - \nu^2 \gg \nu^{4/3}), \\ \cos b &:= \frac{\nu}{\rho}, \quad \nu := l + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (460)$$

を用いる。また Eq(452) で定義した  $P(t)$  は最終散乱時刻でのみ大きな確率を持つ量でありデルタ関数的に近似できる。ただし最終散乱の時刻  $t_L$  で変化が少ない量に対してのみである。 $b = \cos^{-1}(\frac{\nu}{qr(t)}) \rightarrow b_L := \cos^{-1}(\frac{\nu}{qr_L})$  に置き換えても良い。ただし  $\cos[\nu(\tan b - b)]$  の固まりは  $\nu$  が大きいと速く回転するので置き換えるのは良い近似ではない。以上から

$$C_{BB,l} := \pi^2 T_0^2 \int_{\nu/r_L}^\infty dq q^2 4 \sin^2 b_L \cos^2 b_L \left| \int_{t=r^{-1}(\nu/q)}^{t_0} dt \mathcal{P}(t) \Delta(q,t) \left( \frac{\cos[\nu(\tan b - b)]}{\sqrt{\sin b}} \right) \right|^2 \Bigg|_{\rho:=qr(t)} \quad (461)$$

という近似ができる。

#### 14.5 B-mode から見える重力波

最終的な目標は重力波を通じた beyond SM の物理へのアクセスである。今回、b-mode スペクトルに重力波が関わってくる点としては次が考えられる。

インフレーション期の構造についてのプローブとして使える。まず凍結する際の初期値  $h_q^{(in)}$  である。大部分はインフレーション期の真空の取り替えに伴う零点振動からの寄与である。もし波長が飛び出す直前に相転移などのイベントから出た重力波が残っていれば、それが減衰する前にホライズンを飛び出し凍り付いた初期値に反映されることはあり得る。計算としては零点振動に加えてイベントで作られた揺らぎも取り入れて、それらをまとめて増幅させる必要がある。

揺らぎが再びホライズン内に入ってきた後のプローブとして使える。主に、晴れ上がり前の光学的に見えない状況のプローブ。つまり  $z > 1000$  で起こったイベントに対して光学的には均されてしまっていて見えないが、重力波・ニュートリノのテンソル密度揺らぎならアクセスが可能かもしれない。計算上は、晴れ上がり時点での密度揺らぎにテンソルとして寄与する可能性、その後の光の伝搬でテンソルとして効く可能性がある。重力波・ニュートリノ非等方ストレスの時間発展方程式に対してデルタ関数的に揺動が掛かってスペクトルを動かす可能性を計算することになる。

## 15 インフレーションと観測との比較

### 15.1 宇宙論パラメータへの制限

Planck2015CosmologicalResult[9] を参考に現在の宇宙論パラメータへの制限を見ていく。

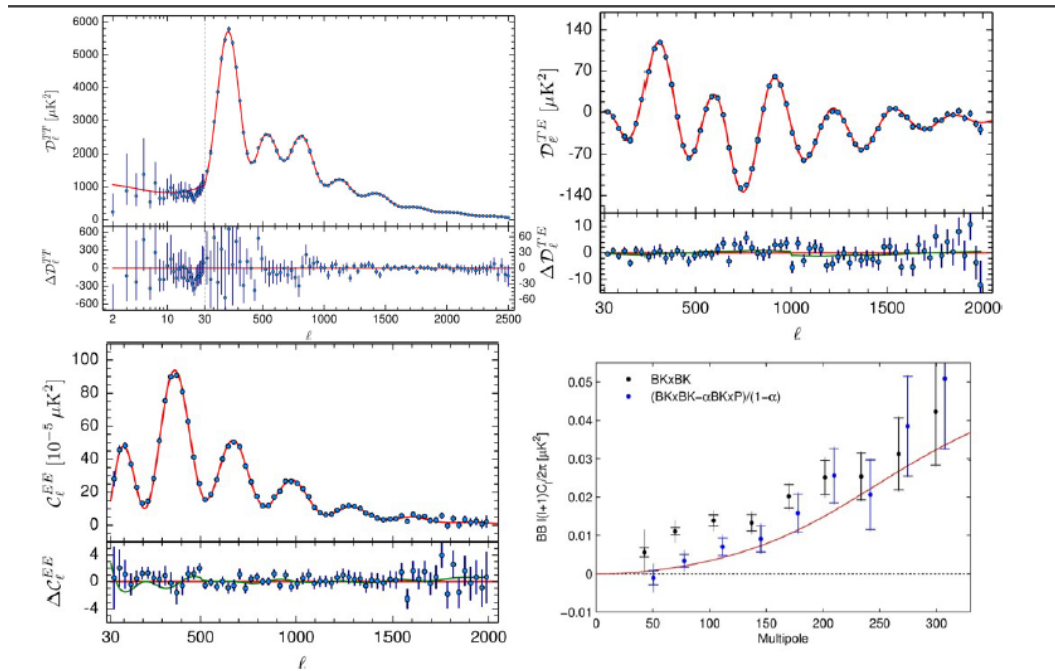


Figure 2: CMB anisotropy angular power spectra in temperature and polarization as measured by *Planck* 2015. The upper left panel is the temperature spectrum, the upper right is the temperature-E-mode cross-correlations, the lower left panel is the E-mode and the lower right panel is the joint analysis of Planck and BICEP2/Keck of B-mode polarization.

Figure 2: パワースペクトラムの観測値

右下のグラフについては Planck and BICEP2/Keck の joint analysis から決めている。(Planck Collaboration, D. Paoletti, “Planck 2015 Cosmological Results,” in Proceedings, Magellan Workshop: Connecting Neutrino Physics and Astronomy: Hamburg, Germany, March 17-18, 2016, pp. 71-86. 2016. [9] から引用)

Planck2015ではパワースペクトラムがFig.(2)のように得られている。TT,ET,EEモードは見つかっているが、BBモードは上から制限が付いているのみである。TTモードのグラフの形はスカラー揺らぎの解析から定性的に理解できる。大スケールの大きなピークはバリオン音響振動 Chapter.(8.12)に対応しており、このピークの大きさ、 $l$ が晴れ上がり付近の物理を反映している。小スケールではシルク減衰 Chapter.(8.13)により揺らぎは小さくなっている。また大スケールにはSW効果 Chapter.(8.14)が主要な寄与を持ち  $D_l = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l T_0^2$ , ( $T_0 := 2.725\text{K}$ )がフラットに振る舞うことがわかる。小スケールの揺らぎの大きさにはISW効果 Chapter.(8.15)も寄与しており、これにより揺らぎの大きさが変化する。

パワースペクトラムを再現するように Fig.(2)では適当な宇宙論パラメータで計算したCMBスペクトルが赤色の曲線が描かれている。ただしB-modeについては後述のようにダストの寄与に注意する必要がある。 $\Lambda\text{CDM}$ モデルを表すパラメータとして Fig.(3)がある。

正しく観測結果を再現するパラメータ範囲の一部を Fig.(4)で例として引用した。

インフレーションモデルの分類において、特に興味のあるパラメータは重力揺らぎのスペクトルインデックス  $n_s$  と Tensor to Scalar ratio  $r$  である。この2つのパラメータに関して、インフレーションモデルを表にした結果が Fig.(5)である。この図から、多くのインフレーションモデルが棄却されることがわかる。68%では  $R^2$  inflation, Hilltop quartic modelなどが上手く当てはまっている。

**Table 1.** Primordial, baseline, and optional late-time cosmological parameters.

Parameter	Definition
$A_s$ . . . . .	Scalar power spectrum amplitude (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ )
$n_s$ . . . . .	Scalar spectral index (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ , unless otherwise stated)
$dn_s/d \ln k$ . . . . .	Running of scalar spectral index (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ , unless otherwise stated)
$d^2 n_s/d \ln k^2$ . . . . .	Running of running of scalar spectral index (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ )
$r$ . . . . .	Tensor-to-scalar power ratio (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ , unless otherwise stated)
$n_t$ . . . . .	Tensor spectrum spectral index (at $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ )
$\omega_b$ . . . . .	Baryon density today
$\omega_c$ . . . . .	Cold dark matter density today
$\theta_{MC}$ . . . . .	Approximation to the angular size of sound horizon at last scattering
$\tau$ . . . . .	Thomson scattering optical depth of reionized intergalactic medium
$N_{\text{eff}}$ . . . . .	Effective number of massive and massless neutrinos
$\Sigma m_\nu$ . . . . .	Sum of neutrino masses
$Y_p$ . . . . .	Fraction of baryonic mass in primordial helium
$\Omega_K$ . . . . .	Spatial curvature parameter
$w_{\text{de}}$ . . . . .	Dark energy equation of state parameter (i.e., $p_{\text{de}}/\rho_{\text{de}}$ ) (assumed constant)

Figure 3:  $\Lambda$ CDM モデルのパラメーター一覧

(Planck Collaboration, P. A. R. Ade et al., “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,” *Astron. Astrophys.* 594 (2016) A20[8] から引用)

## 15.2 B-mode の観測

現在の制限は PLANCK と BICEP2 の joint-analysis[10] により、制限として  $r < 0.09$  が付いている。high- $l$  ( $l > 100$ ) ではダストの重力レンズでゆがめられた E-mode が B-mode に主要な寄与をするため、重力波由来の B-mode を見るためには low- $l$  での観測を行う必要がある。以前の測定 Fig.(2) では low- $l$  に対して強い制限がかからなかったため、B-mode を見つけることはできなかった。

将来的な制限は POLARBEAR2[11] によって、Fig.(6) が得られ、精度としては  $\sigma(r) < 0.01$  及びダストの解析からニュートリノ質量の総和にも制限  $\sigma(\sum m_\nu) < 90 \text{ meV}$  が付くと期待されている。

## Part IV

# non-Gaussianity

CMB の  $C_{BB}$  などの観測量では光のゆらぎの二点相関関数を調べていた。三点相関関数を調べることでさらなる揺らぎの情報を得ることができる。もし揺らぎが完全に gauss 的であるならば三点相関関数は 0 であるが、アインシュタイン方程式+スカラー場のラグランジアンは三点相関関数を持ちうるような高次項を tree レベルで持っている。以下ではラグランジアンの高次展開を行い、それを用いて三点相関関数を計算する。

Parameter	TT+lowP	TT+lowP+lensing	TT,TE,EE+lowP	TT+lowP+lensing+ext
$\Omega_b h^2$	$0.02222 \pm 0.00023$	$0.02226 \pm 0.00023$	$0.02225 \pm 0.00016$	$0.02227 \pm 0.00020$
$\Omega_c h^2$	$0.1197 \pm 0.0022$	$0.1186 \pm 0.0020$	$0.1198 \pm 0.0015$	$0.01184 \pm 0.0012$
$100\theta_{MC}$	$1.04085 \pm 0.00047$	$1.04103 \pm 0.00046$	$1.04077 \pm 0.00032$	$1.04106 \pm 0.00041$
$\tau$	$0.078 \pm 0.019$	$0.066 \pm 0.016$	$0.079 \pm 0.017$	$0.067 \pm 0.013$
$\ln(10^{10} A_s)$	$3.089 \pm 0.036$	$3.062 \pm 0.029$	$3.094 \pm 0.034$	$3.064 \pm 0.024$
$n_s$	$0.9655 \pm 0.0062$	$0.9677 \pm 0.0060$	$0.9645 \pm 0.0049$	$0.9681 \pm 0.0044$
$H_0$	$67.31 \pm 0.96$	$67.81 \pm 0.92$	$67.27 \pm 0.66$	$67.90 \pm 0.55$

Table 1: Parameter 68% confidence limits for the base  $\Lambda$ CDM model from *Planck* CMB power spectra, in combination with lensing reconstruction ("lensing") and external data ("ext", i.e. BAO+JLA+H0)[6].

Figure 4: 宇宙論パラメータへの制限

(Planck Collaboration, D. Paoletti, "Planck 2015 Cosmological Results," in Proceedings, Magellan Workshop: Connecting Neutrino Physics and Astronomy: Hamburg, Germany, March 17-18, 2016, pp. 71-86. 2016.[9] から引用)

## 16 ADM分解

ADM分解の review を参考 [12] に

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} R = \frac{1}{2} \int \sqrt{h} [NR^3 + N^{-1} (E_{ij}E^{ij} - E^2)] \quad , \\
ds^2 &= : -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) \quad , \\
E_{ij} &:= \frac{1}{2} (\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \quad , \\
E &:= E^i_i
\end{aligned} \tag{462}$$

を導出する。

### 16.1 メトリックの基本的計算

まずベクトル  $n^\mu := \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\right)$  を考える。このベクトルは単位ベクトルである。

$$n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu = \left(-N, \vec{0}\right) \quad , \quad n^2 := n_\mu n^\mu = -1 \tag{463}$$

次にメトリックの逆について

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} - n \times n^t \tag{464}$$

となる。

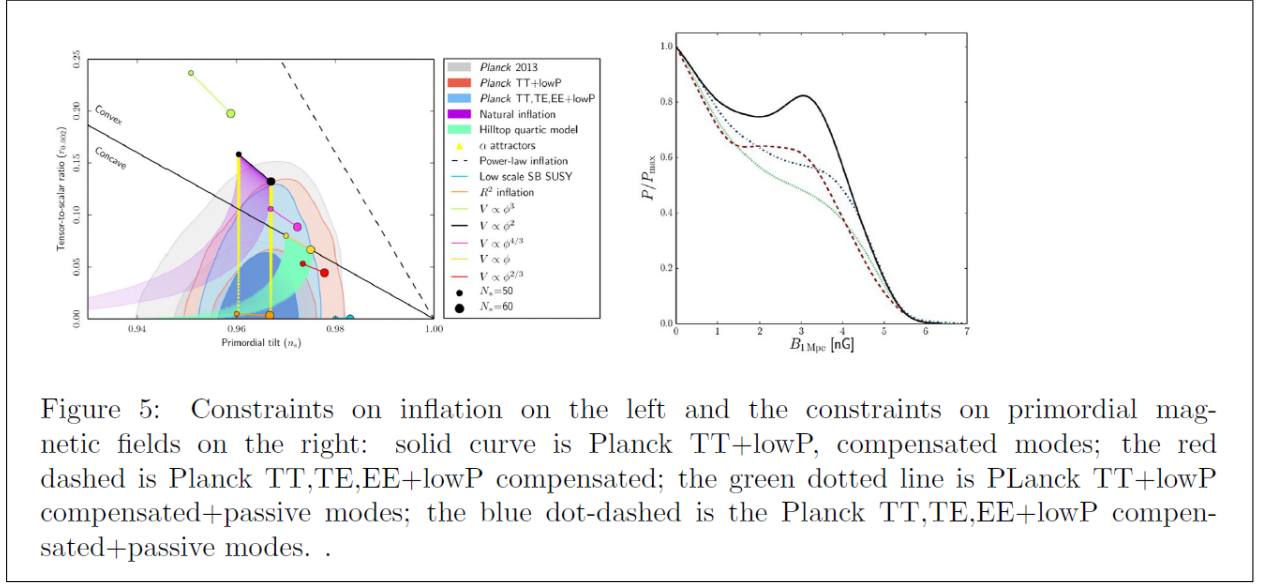


Figure 5: Constraints on inflation on the left and the constraints on primordial magnetic fields on the right: solid curve is Planck TT+lowP, compensated modes; the red dashed is Planck TT,TE,EE+lowP compensated; the green dotted line is Planck TT+lowP compensated+passive modes; the blue dot-dashed is the Planck TT,TE,EE+lowP compensated+passive modes. .

Figure 5: インフレーションモデルの分類と観測値

左のグラフが  $n_s$ - $r$  パラメータ平面を表している。右のグラフは primordial magnetic field に対する制限である。左のグラフでは Planck の制限にそれぞれ二本の曲線が引かれているが、それぞれ 68% ,95% CL を表している。(Planck Collaboration, D. Paoletti, “Planck 2015 Cosmological Results,” in Proceedings, Magellan Workshop: Connecting Neutrino Physics and Astronomy: Hamburg, Germany, March 17-18, 2016, pp. 71-86. 2016.[9] から引用)

次に det について局所的に

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) = -N^2 dt^2 + h_{ij} du^i du^j \quad , \\
 (dt, du^i)^\mu &:= dt, (dx^i + N^i dt)^\mu = U_\nu^\mu dx^\nu \quad , \\
 U_\nu^\mu &:= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ N^i & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (465)
 \end{aligned}$$

というように変数変換する。この時、座標  $(dt, du^i)^\mu$  に対するメトリック  $\tilde{g}_{\mu\nu} = U_\mu^\rho U_\nu^{t\rho} g_{\rho\tau}$  の det は

$$\begin{aligned}
 \det \tilde{g}_{\mu\nu} &= \det U_\mu^\rho U_\nu^{t\rho} g_{\rho\tau} = \det U_\mu^\rho \det U_\nu^{t\rho} \det g_{\rho\tau} = \det g_{\rho\tau} \\
 &= \det \begin{pmatrix} -N^2 & \vec{0} \\ \vec{0} & h_{ij} \end{pmatrix} = -N^2 \det h_{ij} =: -N^2 h \quad (466)
 \end{aligned}$$

となる。

三次元的なクリストッフェル記号を次で定義する。

$$\Gamma_{ijk}^{(3)} := \Gamma_{ijk} \quad (467)$$

添字の位置に注意。

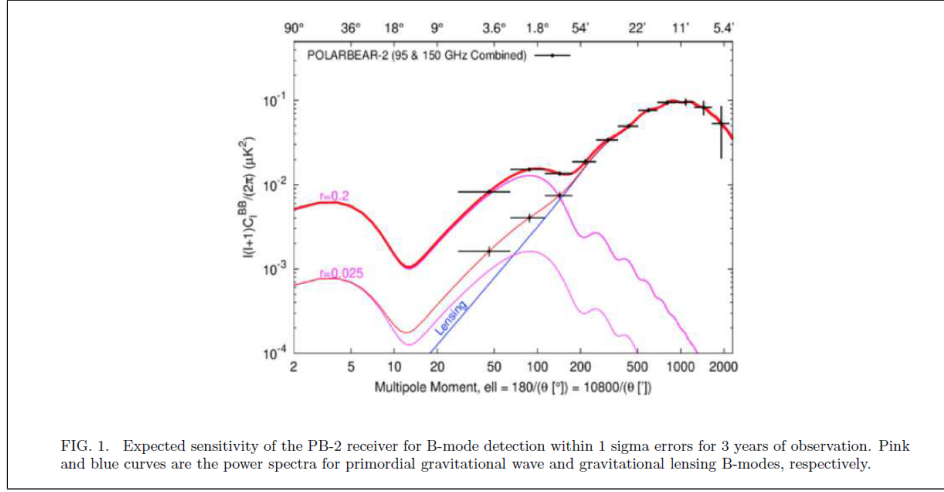


Figure 6: POLARBEAR2で期待される B-mode への制限

(M. J. Mortonson and U. Seljak, “A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization uncertainty,” JCAP 1410 (2014) 035[10] から引用)

$t = const$  での extrinsic curvature という量を<sup>35</sup>

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &:= -\nabla_i n_j = \Gamma_{ij}^\mu n_\mu = -N\Gamma_{ij}^0 \\
 &= -\frac{N}{2}g^{0\mu}(g_{i\mu,j} + g_{j\mu,i} - g_{ij,\mu}) = (2N)^{-1} \left[ N_{i,j} + N_{j,i} - h_{ij,0} - N_l g^{lk} (h_{ik,j} + h_{jk,i} - h_{ij,k}) \right] \\
 &= \frac{1}{2N} \left( \nabla_j^{(3)} N_i + \nabla_i^{(3)} N_j - h_{ij,0} \right)
 \end{aligned} \tag{468}$$

で定義する。(  $n_\mu$  の空間成分が 0 であることに注意)  
 クリストッフエル記号は Chapter.(C.1.1) から

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij0} &= \Gamma_{i0j} = -NK_{ij} + \nabla_j^{(3)} N_i \quad , \\
 \Gamma_{ijk} &= \Gamma_{ijk}^{(3)} \quad , \\
 \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{N} \left( \dot{N} + N^i N_{,i} - N^i N^j K_{ij} \right) \quad , \\
 \Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{N} \left( N_{,i} - N^j K_{ij} \right) \quad , \\
 \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = -\frac{N^i N_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2} \right) K_{jk} + \nabla_j^{(3)} N^i \quad , \\
 \Gamma_{ij}^0 &= -\frac{1}{N} K_{ij} \quad , \\
 \Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{jk}^{(3)i} + \frac{N^i}{N} K_{jk}
 \end{aligned} \tag{469}$$

である。

<sup>35</sup>一般には Chapter.(C.2) を参照。ただし定義の符号が異なる。これは結局  $K$  が二乗で入るので問題ない。

## 16.2 作用の計算

クリストッフエル記号 Eq(469) を参考に Chapter.(C.1.2) を使うと、

$$R = R^{(3)} + K_a^a K_b^b + K_{ab} K^{ab} - 2 \frac{\dot{K}_i^i}{N} - 2 \frac{\Delta^{(3)} N}{N} + 2 \frac{1}{N} N^k \nabla_k^{(3)} K_i^i \quad (470)$$

がわかる。そこで重力の作用は Eq(466) と合わせて

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= N\sqrt{h} \left( R^{(3)} + K_a^a K_b^b + K_{ab} K^{ab} \right) - 2\sqrt{h}\Delta^{(3)}N + \sqrt{h} \left[ -2\dot{K}_i^i + 2N^k \nabla_k^{(3)} K_i^i \right] \\ &= N\sqrt{h} \left( R^{(3)} - K_a^a K_b^b + K_{ab} K^{ab} \right) - 2\sqrt{h}\Delta^{(3)}N - 2\sqrt{-g}\nabla_\mu^{(3+1)} (K_i^i n^\mu) \end{aligned} \quad (471)$$

となる。ただし最後項では 4 次元テンソルになりきれていない量を  $\int dt d^3x$  のガウス積分の表面項になるように処理した。

$$\begin{aligned} & - 2\sqrt{-g}\nabla_\mu^{(3+1)} (K_i^i n^\mu) \\ := & - 2\partial_0 \left( \sqrt{h} K_i^i \right) + 2\sqrt{h} \nabla_j^{(3)} (K_i^i N^j) \\ = & - 2\sqrt{h} \partial_0 K_i^i - 2K_i^i \partial_0 \sqrt{h} + 2\sqrt{h} N^j \nabla_j^{(3)} K_i^i + 2\sqrt{h} K_i^i \nabla_j^{(3)} N^j \\ = & - 2\sqrt{h} \dot{K}_i^i + 2\sqrt{h} N^j \nabla_j^{(3)} K_i^i - 2K_i^i \frac{\sqrt{h}}{2} h^{ij} \dot{h}_{ij} + 2\sqrt{h} K_i^i \nabla_j^{(3)} N^j \\ = & - 2\sqrt{h} \dot{K}_i^i + 2\sqrt{h} N^j \nabla_j^{(3)} K_i^i - 2K_i^i \frac{\sqrt{h}}{2} h^{ij} \left( \nabla_j^{(3)} N_i + \nabla_i^{(3)} N_j - 2N K_{ij} \right) + 2\sqrt{h} K_i^i \nabla_j^{(3)} N^j \\ = & - 2\sqrt{h} \dot{K}_i^i + 2\sqrt{h} N^j \nabla_j^{(3)} K_i^i + 2N\sqrt{h} K_a^a K_b^b \end{aligned} \quad (472)$$

以上から作用として組んだときに全微分項を落とすと、ADM 形式での作用

$$\begin{aligned} S &= \int dt d^3x N \sqrt{h} \left( R^{(3)} - K_a^a K_b^b + K_{ab} K^{ab} \right) , \\ K_{ij} &:= \frac{1}{2N} \left( \nabla_j^{(3)} N_i + \nabla_i^{(3)} N_j - h_{ij,0} \right) \end{aligned} \quad (473)$$

となる。

## 17 single canonical scalar inflation の作用の高次展開

単一スカラーインフレーションでの作用を 3 次まで展開する。元になる作用は

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - (\nabla\phi)^2 - 2V(\phi) \right] \quad (474)$$

である。(以下では  $M_{pl}^{-2} := 8\pi G_N = 1$ ) 更にメトリックはスカラー・ベクトルゆらぎに注目してゲージを固定することで

$$\begin{aligned} \delta\phi &= 0 \quad , \quad h_{ij} = e^{2\rho+2\zeta} (e^{\gamma_{ij}})_{ij} \quad , \\ \gamma_{ij,i} &= 0 \quad , \quad \gamma_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (475)$$

ただし  $\rho$  は最低次の解である。n 次の微小量をまとめて  $\mathcal{O}(\zeta^n)$  で表す。

また

$$h := \det h_{ij} = e^{3\rho+3\zeta} \det e^\gamma = e^{3\rho+3\zeta} e^{Tr\gamma} = e^{3\rho+3\zeta} \quad (476)$$

である。



### 17.1 0 次の解

Eq(474) の空間的に一様な最低次の解は次を満たす。

$$\begin{aligned} 3\dot{\rho}^2 &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \\ \ddot{\rho} &= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad , \\ 0 &= \ddot{\phi} + 3\dot{\rho}\dot{\phi} + V'(\phi) \end{aligned} \quad (477)$$

ただし注意点として今までの計算の宇宙スケールに対して  $a = e^\rho$ ,  $H := \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\rho}$  である。

そして今スローロール条件  $\frac{\dot{H}}{H}\Delta t \sim \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1$  を要請する。この条件を書くためにスローロールパラメータ

$$\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3XP_{,X}}{2XP_{,X} - P} \quad (478)$$

を定義する。更に  $\epsilon, \dot{\epsilon}/H, \ddot{\epsilon}/H^2 \ll 1$  なども課し、Eq(477) により

$$\epsilon_V := \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad , \quad \eta_V := \frac{M_{pl}^2 V_{,\phi\phi}}{V} \quad , \quad \xi_V := \frac{M_{pl}^4 V_{,\phi} V_{,\phi\phi\phi}}{V^2} \quad (479)$$

を用いると便利。これらすべてが 1 より十分小さいという条件 (スローロール条件) が満たされている場合には、

$$\begin{aligned} \epsilon_V &\simeq \epsilon \simeq \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2 M_{pl}^2} \quad , \quad \eta_V \simeq 2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} \sim -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\rho}\dot{\phi}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2 M_{pl}^2} \quad , \\ \xi_V^2 &\simeq \left( 2\epsilon_V - \frac{\dot{\eta}_V}{H\eta_V} \right) \eta_V \quad , \quad H \simeq -\frac{V}{V_{,\phi}} \frac{\dot{\phi}}{M_{pl}^2} \end{aligned} \quad (480)$$

である。

### 17.2 ADM 分解での高次展開

作用の高次展開のために、微小量の作用 Eq(474) を ADM 分解する。Eq(473) を参考に

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ NR^{(3)} - NK_a^a K_b^b + NK_{ab} K^{ab} - Ng^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2NV(\phi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ NR^{(3)} - NK_a^a K_b^b + NK_{ab} K^{ab} + \frac{1}{N} \dot{\phi}^2 - 2NV(\phi) \right] \end{aligned} \quad (481)$$

となる。ただし、場  $\phi$  については基底量は一様でかつ、変分も 0 になるようなゲージを取っていることで空間微分が 0 であることに注意。

$N, N^i$  は作用の中で運動項を持たないので、ハミルトン形式に移る前に拘束条件として除去

する必要がある。そのために、変分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta N} &= \frac{1}{2}\sqrt{h} \left[ R^{(3)} - 2V(\phi) + K_a^a K_b^b - K_{ab} K^{ab} - \frac{1}{N^2} \dot{\phi}^2 \right] = 0 \quad , \\
\frac{\delta S}{\delta N^i} &= \left[ \left( \sqrt{h} K_a^a \right)_{,i} - \sqrt{h} K_a^a \Gamma_{bi}^{(3)b} - \left( \sqrt{h} K_{ab} \right)_{,i}^a + \sqrt{h} K_{ab} g^{ac} \Gamma_{ci}^{(3)b} \right] \\
&= \sqrt{h} \left[ K_{a,i}^a - K_{i,a}^a - K_i^c \Gamma_{sc}^{(3)s} + K_b^c \Gamma_{ci}^{(3)b} \right] \\
&= -\sqrt{h} \nabla_a^{(3)} \left( K_i^a - \delta_i^a K_b^b \right) = 0 \tag{482}
\end{aligned}$$

となる。注意点として、部分積分の際に  $\partial^a$  ではなく、 $g^{ac}\partial_c$  になおしてから反変微分を部分積分しなくてはならない。

$N, N^i$  の解の形を次の様に仮定する。それぞれ添字 1,2,... は次数を表す。

$$\begin{aligned}
N &=: 1 + N_{(1)} + N_{(2)} + \dots \quad , \\
N^i &=: N_{(1)}^i + N_{(2)}^i + \dots =: (\psi_{(1)} + \psi_{(2)} + \dots)_{,i} + N_{(T1)}^i + N_{(T2)}^i + \dots \quad , \\
\partial_i N_{(Tj)}^i &:= 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{483}
\end{aligned}$$

ただし、0 次の解がこのように書けることは Eq(482) において、 $R^{(3)}$  の高次展開 Chapter.(C.1.3) を  $R^{(3)} = R^{(3,1)} + R^{(3,2)} + \dots$  と書いて Eq(482) を展開した結果からわかる。

$$\begin{aligned}
0 &= -2V(\phi) + 9\rho^2 - 3\dot{\rho}^2 - \dot{\phi}^2 \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^0) \quad , \\
0 &= R^{(3,1)} - 4\dot{\rho} \left( 3\rho N_{(1)} + e^{-2\rho} \Delta \psi_{(1)} - 3\dot{\zeta} \right) + 2N_{(1)} \dot{\phi}^2 \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^1) \quad , \\
0 &= R^{(3)} - 2V(\phi) + K_a^a K_b^b - K_{ab} K^{ab} - \frac{1}{N^2} \dot{\phi}^2 \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^n) \quad , \\
0 &= 0 \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^0) \quad , \\
0 &= \left( 3\dot{\rho} N_{(1)} + e^{-2\rho} \Delta \psi_{(1)} - 3\dot{\zeta} \right)_{,i} - \left( \dot{\rho} N_{(1),i} + e^{-2\rho} \Delta \psi_{(1),i} + e^{-2\rho} \frac{\Delta N_{(T1)i}}{2} - \dot{\zeta}_{,i} \right) \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^1) \quad , \\
0 &= K_{a,i}^a - K_{i,a}^a - K_i^c \Gamma_{sc}^{(3)s} + K_b^c \Gamma_{ci}^{(3)b} \quad , & : \mathcal{O}(\zeta^n) \tag{484}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
K_{ij} &:= \frac{1}{2(1+N_{(1)}+N_{(2)}+N_{(3)})} \left[ 2(\psi_{(1),s} h^{si} + \psi_{(2),s} h^{si} + \psi_{(3),s} h^{si})_{,j} \right. \\
&\quad + (N_{(T1)}^s h_{si} + N_{(T2)}^s h_{si} + N_{(T3)}^s h_{si})_{,j} + (N_{(T1)}^s h_{sj} + N_{(T2)}^s h_{sj} + N_{(T3)}^s h_{sj})_{,i} \\
&\quad + \left( \delta_i^s \zeta_{,j} + \delta_j^s \zeta_{,i} + \delta_{ij} \zeta^{,s} + \frac{\gamma_{i,j}^s + \gamma_{j,i}^s - \gamma_{ij}^{,s}}{2} \right) (\psi_{(1),t} + \psi_{(2),t} + N_{(T1)}^t + N_{(T2)}^t) h_{ts} \\
&\quad \left. - e^{2\rho} (2\dot{\rho} \delta_{it} + 2\dot{\zeta} \delta_{it} + \dot{\gamma}_{it}) \left( 1 + 2\zeta + 2\zeta^2 + \frac{4}{3}\zeta^3 \right) \left( \delta_{tj} + \gamma_{tj} + \frac{1}{2}\gamma_{tk}\gamma_{kj} + \frac{1}{6}\gamma_{tk}\gamma_{kl}\gamma_{lj} \right) \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
&= -e^{2\rho} \dot{\rho} \delta_{ij} \\
&\quad + e^{2\rho} \dot{\rho} N_{(1)} \delta_{ij} + e^{2\rho} \psi_{(1),ij} + e^{2\rho} \frac{N_{(T1),j}^i + N_{(T1),i}^j}{2} - e^{2\rho} \dot{\rho} (2\zeta \delta_{ij} + \gamma_{ij}) - e^{2\rho} \frac{2\dot{\zeta} \delta_{ij} + \dot{\gamma}_{ij}}{2} \\
&\quad + \mathcal{O}(\zeta^2) \quad , \\
K_j^i &:= h^{ik} K_{kj} = \frac{1}{a^2} (\delta_{ik} - 2\delta_{ik} \zeta - \gamma_{ik} + \mathcal{O}(\zeta^2)) \\
&\quad \times \left( -e^{2\rho} \dot{\rho} \delta_{kj} + e^{2\rho} \dot{\rho} N_{(1)} \delta_{kj} + e^{2\rho} \psi_{(1),kj} + e^{2\rho} \frac{N_{(T1),j}^k + N_{(T1),k}^j}{2} \right. \\
&\quad \left. - e^{2\rho} \dot{\rho} (2\zeta \delta_{kj} + \gamma_{kj}) - e^{2\rho} \frac{2\dot{\zeta} \delta_{kj} + \dot{\gamma}_{kj}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^2) \right) \\
&= -\dot{\rho} \delta_{ij} \\
&\quad + \dot{\rho} (2\delta_{ij} \zeta + \gamma_{ij}) + \dot{\rho} N_{(1)} \delta_{ij} + \psi_{(1),ij} + \frac{N_{(T1),j}^i + N_{(T1),i}^j}{2} - \dot{\rho} (2\zeta \delta_{ij} + \gamma_{ij}) - \frac{2\dot{\zeta} \delta_{ij} + \dot{\gamma}_{ij}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^2) \\
&= -\dot{\rho} \delta_{ij} + \dot{\rho} N_{(1)} \delta_{ij} + \psi_{(1),ij} + \frac{N_{(T1),j}^i + N_{(T1),i}^j}{2} - \frac{2\dot{\zeta} \delta_{ij} + \dot{\gamma}_{ij}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^2) \tag{485}
\end{aligned}$$

を用いた。(添字の上げ下げが一貫していないため注意)

さて今、Eq(484) の  $\mathcal{O}(\zeta^0)$  の 2 式は基底の運動方程式から、もしくは自明に成立する。ここから、 $N, N^i$  の零次の取り方がこれで良いとわかる。

ついでに一次の解も求めておくと、Eq(484) の  $\mathcal{O}(\zeta^1)$  の 2 式からは次の

$$\begin{aligned}
0 &= -4a^{-2} \Delta \zeta - 12\dot{\rho}^2 N_{(1)} - 4\dot{\rho} \Delta \psi_{(1)} + 12\dot{\rho} \dot{\zeta} + 2N_{(1)} \dot{\phi}^2 \quad , \\
0 &= 2\dot{\rho} N_{(1),i} - \frac{\Delta N_{(T1)i}}{2} - 2\dot{\zeta}_{,i} \tag{486}
\end{aligned}$$

条件式が得られる。二式目はベクトル分解して  $\Delta N_{(T1)i} = 0$  と  $0 = \dot{\rho} N_{(1),i} - \dot{\zeta}_{,i}$  に分かれることに注意。この解は

$$N_{(1)} = \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\rho}} \quad , \quad N_{(T1)} = 0 \quad , \quad \psi_{(1)} = -e^{-2\rho} \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\rho}} + \chi \quad , \quad \chi := \Delta^{-1} \frac{\dot{\phi}^2}{2\dot{\rho}^2} \dot{\zeta} \tag{487}$$

となる。そこで添字の上げ下げに注意して

$$N_{(1)} = \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\rho}} \quad , \quad N_{(1)}^i = -e^{-2\rho} \frac{\dot{\zeta}_{,i}}{\dot{\rho}} + \chi_{,i} \tag{488}$$

が解として取れる。

次に拘束条件の高次項がどのように作用に効いてくるのかを確認する。以下では形式的に変分で計算するが、変分に関しての注意点がある。2階以上の変分は処理が面倒である。具体的には例えば  $S = \int d^3x f^{ij}(x) N_i N_j$  を変分したときに  $\frac{\delta^2 S}{\delta N \delta N} \frac{N^2}{2} = 0 \neq f^{ij}(x) N_i N_j$  である。微分が一つしか含まれない場合はこのような問題は起こらない。以下での変分表記は、厳密には  $N_i$  と  $N$  を独立と見なして  $\frac{\delta S}{\delta N} = \frac{\partial S}{\partial N} \delta N + \frac{\partial S}{\partial N_i} N_i$  と考える。

Eq(481) を  $N, N^i$  のみに注目して高次展開すると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ NR^3 - NK_a^a K_b^b + NK_{ab} K^{ab} + \frac{1}{N} \dot{\phi}^2 - 2NV(\phi) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ R^3 + \frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] + \dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right] \\
&\quad + \int dt d^3x \left[ \frac{\delta S}{\delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)} + N_{(2)} + \dots) + \frac{\delta S}{\delta N^i} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^i + N_{(2)}^i + \dots) \right. \\
&\quad + \frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{(N_{(1)} + N_{(2)} + \dots)^2}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{(N_{(1)}^i + \dots)(N_{(1)}^j + \dots)}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^i + \dots)(N_{(1)} + \dots) \\
&\quad \left. + \frac{\delta^3 S}{\delta N^3} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^3}{3!} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^2}{2} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^j \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^j N_{(1)}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \right] \quad (489)
\end{aligned}$$

となる。ただし、作用は  $N^i$  に関して高々2次であることを用いた。ここで拘束条件から

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)} + N_{(2)} + \dots) + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^i + \dots) &= \mathcal{O}(\zeta^2) \quad , \\
\frac{\delta S}{\delta N^i} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^j + \dots) + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)} + \dots) &= \mathcal{O}(\zeta^2) \quad (490)
\end{aligned}$$

である。これを用いて変形すると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ R^{(3)} + \frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] + \dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right] \\
&\quad + \int dt d^3x \left[ \frac{\delta S}{\delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)} \right. \\
&\quad + \left( -\frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)} + N_{(2)} + \dots) - \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^i + \dots) \right) (N_{(2)} + N_{(3)} + \dots) \\
&\quad + \frac{\delta S}{\delta N^i} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)}^i + \left( -\frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^j + \dots) - \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)} + \dots) \right) (N_{(2)}^i + N_{(3)}^i + \dots) \\
&\quad + \frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^2}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^j}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)}^i N_{(1)} \\
&\quad + \frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)} N_{(2)} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(2)}^j + N_{(1)}^j N_{(2)}^i}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} (N_{(1)}^i N_{(2)} + N_{(2)}^i N_{(1)}) \\
&\quad + \left. \frac{\delta^3 S}{\delta N^3} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^3}{3!} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^2}{2} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^j \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^j N_{(1)}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ R^{(3)} + \frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] + \dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right] \\
&\quad + \int dt d^3x \left[ \frac{\delta S}{\delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)} + \frac{\delta S}{\delta N^i} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)}^i \right. \\
&\quad + \frac{\delta^2 S}{\delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^2}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N^j} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^j}{2} + \frac{\delta^2 S}{\delta N^i \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} N_{(1)}^i N_{(1)} \\
&\quad + \left. \frac{\delta^3 S}{\delta N^3} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^3}{3!} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^2} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^2}{2} + \frac{\delta^3 S}{\delta N^i \delta N^j \delta N} \Big|_{\substack{N=1 \\ N^i=0}} \frac{N_{(1)}^i N_{(1)}^j N_{(1)}}{2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \right] \quad (491)
\end{aligned}$$

として、 $N, N^i$  の展開は 1 次までの成分しか効いてこないことがわかる。

そこで 1 次までを取り込んで Eq(481) を高次展開すると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{h} \left[ NR^{(3)} + \frac{1}{4N} \left[ -h^{ab} h_{ab,0} h^{cd} h_{cd,0} + h^{ac} h_{ab,0} h^{bd} h_{cd,0} \right] + \frac{\delta_{KK1}}{2N} + \frac{\delta_{KK2}}{4N} + \frac{1}{N} \dot{\phi}^2 - 2NV(\phi) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int dt d^3x e^{3\rho+3\zeta} \left[ R^{(3)} + \frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] + \frac{\delta_{KK1}}{2} + \frac{\delta_{KK2}}{4} + \dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right. \\
&\quad + N^{(1)} \left( R^{(3)} - \frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] - \frac{\delta_{KK1}}{2} - \frac{\delta_{KK2}}{4} - \dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right) \\
&\quad + N^{(1)2} \left( +\frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] + \frac{\delta_{KK1}}{2} + \dot{\phi}^2 \right) \\
&\quad + \left. N^{(1)3} \left( -\frac{1}{4} \left[ h^{ab} h_{ac,0} h^{cd} h_{bd,0} - (h^{ab} h_{ab,0})^2 \right] - \dot{\phi}^2 \right) \right] \quad (492)
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{2N} \left( (N^c h_{cb})_{,a} + (N^c h_{ca})_{,b} - 2\Gamma_{ab}^c N^d h_{dc} - h_{ab,0} \right) =: \frac{1}{2N} (\delta E_{ab} - h_{ab,0}) \quad , \\
\delta E_{ab} &:= \nabla_a^{(3)} N_b + \nabla_b^{(3)} N_a \\
&= N_{,a}^c h_{cb} + N_{,b}^c h_{ca} + N^c (h_{cb,a} + h_{ca,b}) - 2\Gamma_{ab}^{(3)c} N^d h_{dc} \sim \mathcal{O}(\zeta^1) \quad , \\
-NK_a^a K_b^b + NK_{ab} K^{ab} &= \frac{1}{4N} \left[ -h^{ab} (\delta E_{ab} - h_{ab,0}) h^{cd} (\delta E_{cd} - h_{cd,0}) + h^{ac} (\delta E_{ab} - h_{ab,0}) h^{bd} (\delta E_{cd} - h_{cd,0}) \right] \\
&= \frac{1}{4N} \left[ -h^{ab} h_{ab,0} h^{cd} h_{cd,0} + h^{ac} h_{ab,0} h^{bd} h_{cd,0} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4N} \left[ 2h^{ab} \delta E_{ab} h^{cd} h_{cd,0} - 2h^{ac} \delta E_{ab} h^{bd} h_{cd,0} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4N} \left[ -h^{ab} \delta E_{ab} h^{cd} \delta E_{cd} + h^{ac} \delta E_{ab} h^{bd} \delta E_{cd} \right] \\
&= \frac{1}{4N} \left[ -h^{ab} h_{ab,0} h^{cd} h_{cd,0} + h^{ac} h_{ab,0} h^{bd} h_{cd,0} \right] + \frac{1}{2N} \delta_{KK1} + \frac{1}{4N} \delta_{KK2} \tag{493}
\end{aligned}$$

であり省略として

$$\begin{aligned}
\delta_{KK1} &:= h^{ab} \delta E_{ab} h^{cd} h_{cd,0} - h^{ac} \delta E_{ab} h^{bd} h_{cd,0} = 2\nabla_a^{(3)} N^a h^{cd} h_{cd,0} - 2h_{cd,0} \nabla^{(3)c} N^d \\
&= -8e^{-2\rho} \Delta \zeta + 8H \Delta \chi \\
&\quad - 24e^{-2\rho} \zeta_{,i}^2 + 24H \zeta_{,i} \chi_{,i} - 8 \frac{e^{-2\rho}}{H} \Delta \zeta \dot{\zeta} + 8 \Delta \chi \dot{\zeta} - 2\chi_{,ij} \dot{\gamma}_{,ij} + \frac{2e^{-2\rho}}{H} \zeta_{,ij} \dot{\gamma}_{,ij} \\
&\quad - 24 \frac{e^{-2\rho}}{H} \zeta_{,i}^2 \dot{\zeta} + 24 \zeta_{,i} \chi_{,i} \dot{\zeta} + 2\zeta_{,i} \chi_{,j} \dot{\gamma}_{ij} - 2\zeta_{,i} \chi_{,j} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{e^{-2\rho}}{H} \zeta_{,i} \gamma_{jk,i} \dot{\gamma}_{jk} - \chi_{,i} \gamma_{jk,i} \dot{\gamma}_{jk} + \mathcal{O}(\zeta^4) \sim \mathcal{O}(\zeta^1) \quad , \\
\delta_{KK2} &:= -h^{ab} \delta E_{ab} h^{cd} \delta E_{cd} + h^{ac} \delta E_{ab} h^{bd} \delta E_{cd} \\
&= -4 (\nabla_a^{(3)} N^a)^2 + 2 \left[ (\nabla_b^{(3)} N^a)^2 + \nabla_a^{(3)} N^b \nabla_b^{(3)} N^a \right] \\
&= -4 \frac{e^{-4\rho}}{H^2} \Delta \zeta^2 + 4 \frac{e^{-4\rho}}{H^2} \zeta_{,ij}^2 + 8 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \Delta \zeta \Delta \chi - 8 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \zeta_{,ij} \chi_{,ij} \\
&\quad - 16 \frac{e^{-4\rho}}{H^2} \Delta \zeta \zeta^2 + 16 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \Delta \zeta \zeta_{,i} \chi_{,i} + 16 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \zeta_{,i}^2 \Delta \chi - 16 \zeta_{,i} \chi_{,j} \chi_{,ij} \\
&\quad + 4 \frac{e^{-4\rho}}{H^2} \zeta_{,i} \zeta_{,jk} \gamma_{jk,i} - 4 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \zeta_{,ij} \chi_{,k} \gamma_{ij,k} - 4 \frac{e^{-2\rho}}{H^2} \zeta_{,i} \chi_{,jk} \gamma_{jk,i} + 4 \chi_{,i} \chi_{,jk} \gamma_{jk,i} + \mathcal{O}(\zeta^4) \sim \mathcal{O}(\zeta^2) \tag{494}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}h^{ab}h_{ab,0} &= \frac{1}{2} \left[ 6\frac{\dot{a}}{a} + 6\dot{\zeta} \right] + \mathcal{O}(\zeta^4) = 3\dot{\rho} + 3\dot{\zeta} + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad , \\
\frac{1}{2}h^{ab}h_{bi,0} &= \delta_{ai}\dot{\rho} + \dot{\zeta}\delta_{ai} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ai} + \frac{\gamma_{ik}\dot{\gamma}_{ka} - \dot{\gamma}_{ik}\gamma_{ka}}{4} + \frac{\dot{\gamma}_{ik}\gamma_{ks}\gamma_{sa} + \gamma_{ik}\gamma_{ks}\dot{\gamma}_{sa} - 2\dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}_{ks}\gamma_{sa}}{12} + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad , \\
\nabla_b^{(3)}N^a &= -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,ab} + \chi_{,ab} + \Gamma_{bc}^{(3)a} \left( -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,c} + \chi_{,c} \right) \\
&= -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,ab} + \chi_{,ab} \\
&\quad + \left( -\delta_{bc}\zeta_{,a} + \delta_{ac}\zeta_{,b} + \delta_{ab}\zeta_{,c} + \frac{\gamma_{ab,c} + \gamma_{ac,b} - \gamma_{bc,a}}{2} \right) \left( -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,c} + \chi_{,c} \right) \\
&\quad + \left( \delta_{cb}\zeta_{,s}\gamma_{as} - \zeta_{,a}\gamma_{bc} + \frac{2\gamma_{as}\gamma_{cb,s} - \gamma_{as}\gamma_{sb,c} - \gamma_{as}\gamma_{sc,b} + \gamma_{as,b}\gamma_{sc} + \gamma_{as,c}\gamma_{sb} - \gamma_{bs,a}\gamma_{sc} - \gamma_{cs,a}\gamma_{sb}}{4} \right) \\
&\quad \times \left( -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,c} + \chi_{,c} \right) + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad , \\
\nabla_a^{(3)}N^a &= -\frac{e^{-2\rho}}{H}\Delta\zeta + \Delta\chi + 3\zeta_{,c} \left( -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,c} + \chi_{,c} \right) + (\zeta_{,s}\gamma_{cs} - \zeta_{,a}\gamma_{ac}) \left( -\frac{e^{-2\rho}}{H}\zeta_{,c} + \chi_{,c} \right) + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad , \\
\Gamma_{jk}^{(3)i} &= -\delta_{jk}\zeta_{,i} + \delta_{ik}\zeta_{,j} + \delta_{ij}\zeta_{,k} + \frac{\gamma_{ij,k} + \gamma_{ik,j} - \gamma_{jk,i}}{2} \\
&\quad + \delta_{kj}\zeta_{,s}\gamma_{is} - \zeta_{,i}\gamma_{jk} + \frac{2\gamma_{is}\gamma_{kj,s} - \gamma_{is}\gamma_{sj,k} - \gamma_{is}\gamma_{sk,j} + \gamma_{is,j}\gamma_{sk} + \gamma_{is,k}\gamma_{sj} - \gamma_{js,i}\gamma_{sk} - \gamma_{ks,i}\gamma_{sj}}{4} \\
&\quad + \mathcal{O}(\zeta^3) \tag{495}
\end{aligned}$$

を用いた。これらは以下の計算でも用いる。

以上で得られた3次までの展開について、以降で詳しく見ていく。

### 17.3 微小量の運動項

微小量の運動項は先の展開 Eq(494) の二次までの部分を見ると出てくる。0次の項は基底の運動方程式を決定するために使われる。1、2次の項のみ抜き出してくると

$$\begin{aligned}
S_{kin} &:= \int dt d^3x \left[ + \left( -4a\Delta\zeta - 6a^3\dot{H}\zeta - 18a^3H^2\zeta + 2a^3H\Delta\chi - 6a^3H\dot{\zeta} \right) \right. \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{2aH^2}\Delta\zeta^2 - 8a\Delta\zeta\dot{\zeta} - 9a^3\dot{H}\zeta^2 - 27a^3H^2\zeta^2 - 7a\zeta_{,i}^2 + \frac{1}{2aH^2}\zeta_{,ij}^2 + 6a^3H\zeta_{,i}\chi_{,i} + \frac{a}{H}\Delta\zeta\Delta\chi \right. \\
&\quad + 6a^3H\zeta\Delta\chi - \frac{a}{H}\zeta_{,ij}\chi_{,ij} + 2a\zeta_{,ij}\dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{8}a\gamma_{ij,k}^2 - \frac{2a}{H}\Delta\zeta\dot{\zeta} - 18a^3H\zeta\dot{\zeta} - \frac{a^3\dot{H}}{H^2}\dot{\zeta}^2 \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}a^3\chi_{,ij}\dot{\gamma}_{ij} + \frac{1}{8}a^3\dot{\gamma}_{ij}^2 + \frac{a}{2H}\zeta_{,ij}\dot{\gamma}_{ij} \right] \right] \tag{496}
\end{aligned}$$

となる。さらに部分積分と基底の運動方程式 Eq(477) を用いる。また  $\gamma_{ij}$  は  $d^3x$  の部分積分でいくつか項が落ちる。その後、空間微分の個数で項を分類する。(  $\chi$  は-2個分でカウントする。)

残った量について次のようなテクニックを用いて変形していく。

$$\begin{aligned} \int dt d^3x 2 \frac{e^\rho}{\dot{\rho}} \zeta_{,i} \dot{\zeta}_{,i} &= \int dt d^3x 2 \frac{e^\rho}{\dot{\rho}} \frac{d}{dt} \frac{\zeta_{,i}^2}{2} = \int dt d^3x \left( - \left( e^\rho - \frac{\ddot{\rho}}{\dot{\rho}^2} e^\rho \right) \zeta_{,i}^2 \right) , \\ \int dt d^3x \left( -18 e^{3\rho} \dot{\rho} \zeta \dot{\zeta} \right) &= \int dt d^3x -9 e^{3\rho} \dot{\rho} \zeta \dot{\zeta} + \int dt d^3x 9 \left( e^{3\rho} 3 \dot{\rho}^2 \zeta + e^{3\rho} \dot{\rho} \dot{\zeta} + e^{3\rho} \ddot{\rho} \zeta \right) \zeta \\ &= \int dt d^3x \left( 27 e^{3\rho} \dot{\rho}^2 \zeta^2 + 9 \ddot{\rho} e^{3\rho} \zeta^2 \right) \end{aligned} \quad (497)$$

最終的に

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \frac{\dot{\phi}^2}{\rho^2} \left( e^{3\rho} \zeta^2 - e^\rho \zeta_{,i}^2 \right) + \frac{1}{8} \int dt d^3x \left( e^{3\rho} \dot{\gamma}_{ij}^2 - e^\rho \dot{\gamma}_{ij,l}^2 \right) + \int dt d^3x 2a^3 H \Delta \chi \quad (498)$$

となる。 $2a^3 H \Delta \chi$  は  $\chi$  が  $\Delta^{-1}$  を含む (Eq(488)) ために全微分で除去することが出来ない。

本来、場を古典解周りで展開した際に一次の項は消えるべきであるが、今回は残ってしまっている。 $2a^3 H \Delta \chi$  は拘束の表面項  $N_{(1),i}^i$  に由来しており、消えずに残る原因は拘束  $N_{(1)}^i$  が境界でラプラシアン  $\Delta^{-1}$  に由来する特異性を持つからである。

このような拘束条件を解いて初めて出てくる特異性は、ここまでの計算では常に無視してきた。もし拘束が表面積分で消えないという特異性を認めると、ADM 分解 Eq(472) で落としていた項からも

$$\begin{aligned} \frac{-2}{2} \sqrt{-g} \nabla_\mu^{(3+1)} (K_i^i n^\mu) &= -\partial_0 \left( \sqrt{h} K_i^i \right) + \sqrt{h} N^j \nabla_j^{(3)} K_i^i + \sqrt{h} K_i^i \nabla_j^{(3)} N^j \\ &\supset -3a^3 H N_j^j \end{aligned} \quad (499)$$

が出てくる。ただし「 $B \subset A$ 」は「 $A$  の中に加法的に  $B$  が含まれる」を意味する。

結局合わせると  $-a^3 H N_j^j$  だけラグランジアン密度に一次の項が残る。この項は全微分であり古典的な運動方程式を変えないため、出発点の作用から事前に除去する必要がある。詳しい議論は Chapter.(C.2) 参照。

#### 17.4 3次相互作用項の簡単化の手順

相互作用項を簡単にしたい。一般的な簡単化の手順に沿って部分積分していく。

- $\mathcal{O}(e^n), \mathcal{O}(H^n), \mathcal{O}(\partial_i)$  で項を分類する。
- $\mathcal{O}(e^n)$  が低いものから順に、部分積分で項を減らしていく。まず  $\mathcal{O}(H^n), \mathcal{O}(\partial_i)$  が同じ項を簡単化する。
- $\mathcal{O}(H^n)$  が異なる項は、低いオーダーの項を  $a = \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) - \epsilon a$  により高次に変形する。
- $\mathcal{O}(\partial_i)$  が異なる項は、高いオーダーの項を Eq(498) から得られる運動方程式について変形した  $\zeta = \Delta^{-1} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} + \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \right)$  を用いることで低次に変換する。このとき、 $\zeta, \Delta \zeta$  の塊を部分積分で作ってから代入する。
- $\ddot{\zeta}$  が出ないように計算すると良い。
- 時間の部分積分では  $\epsilon, a, H$  などから  $\mathcal{O}(e^n)$  高次項が出ることに注意。



これらの操作により Chapter.(C.5.1) の結果として

$$S_{\zeta 3} = 4a^5 H \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} + f(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} + \mathcal{O}(\zeta^3) \quad ,$$

$$f(\zeta) = -\frac{1}{H} \dot{\zeta} \zeta + \frac{1}{4a^2 H^2} \zeta_{,i}^2 - \frac{1}{4a^2 H^2} \Delta^{-1} (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} H} \zeta^2$$

$$- \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) - \frac{\epsilon}{2H} \Delta^{-1} (\zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij})_{,ij} + a^3 \Delta^{-1} (\dot{\zeta}^2) \frac{1}{2\epsilon a} + 2a^3 \dot{\zeta} \Delta^{-1} \dot{\zeta} \frac{1}{2\epsilon a}$$
(500)

と変形できる。

結論として  $\zeta^3$  型相互作用では  $\frac{\delta L_2}{\delta \zeta}$  の部分を除くと最高次の項が  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  となり、また  $\mathcal{O}(H^1)$ ,  $\mathcal{O}(\partial^{-2})$  となる。

## 18 in-in formalism の定式化

ワインバーグ [3] の Appendix を参考に今回計算する相関関数を定義し計算方法をまとめる。

### 18.1 明示的に時間に依存するハミルトニアン の量子化

in-in formalism の計算では作用に基づいて計算するので以下の処方本来不要だが一応記載しておく。今後扱うハミルトニアン  $H(\phi(x), \pi(x), t)$  はスケールファクターなど明示的に時間  $t$  に依存し、空間  $x$  には場を通じてのみ依存するような形をしている。このような系を量子化する場合の構成の仕方を考える。ここで古典的な一様解  $\bar{\phi}(t)$ ,  $\bar{\pi}(t)$  が取れたとする。古典解は正準関係方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}(t) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\pi}} \quad , \quad \frac{d}{dt} \bar{\pi}(t) = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\phi}} \quad ,$$

$$\mathcal{H}[\phi, \pi] := \int d^4x H(\phi(x), \pi(x), t) \quad (501)$$

量子化すると

$$\frac{d}{dt} \hat{\phi}(t) = i [\mathcal{H}, \hat{\phi}] \quad , \quad \frac{d}{dt} \hat{\pi}(t) = i [\mathcal{H}, \hat{\pi}] \quad ,$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x)] = i \delta^3(x-y) \quad , \quad [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x)] = [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x)] = 0 \quad (502)$$

を解くことになる。

ここで今回注目する量は古典解からのズレである。つまり、場を

$$\hat{\phi}(x) = : \bar{\phi}(t) + \delta\phi(x) \quad , \quad \hat{\pi}(x) = : \bar{\pi}(t) + \delta\pi(x) \quad (503)$$

という風に分解した量を考える。

この量に対して、c-数の可換性より次の交換関係が成り立つ。

$$[\delta\phi(x), \delta\pi(x)] = i \delta^3(x-y) \quad , \quad [\delta\pi(x), \delta\pi(x)] = [\delta\phi(x), \delta\phi(x)] = 0 \quad (504)$$

運動方程式は元のハミルトニアンに対しては成り立たないので代わりに次のハミルトニアンを考える。

$$\tilde{\mathcal{H}}[\delta\phi, \delta\pi] = \mathcal{H}[\hat{\phi}, \hat{\pi}] - \mathcal{H}(\bar{\phi}, \bar{\pi}) - \int d^3x \frac{\delta\mathcal{H}[\bar{\phi}, \bar{\pi}]}{\delta\bar{\phi}} \delta\phi(x) - \int d^3x \frac{\delta\mathcal{H}[\bar{\phi}, \bar{\pi}]}{\delta\bar{\pi}} \delta\pi(x) \quad (505)$$

このとき運動方程式は

$$i[\tilde{\mathcal{H}}, \delta\phi] = i\left([\mathcal{H}, \hat{\phi}] - \int d^3x' \frac{\delta\mathcal{H}[\bar{\phi}, \bar{\pi}]}{\delta\bar{\pi}} [\delta\pi(x'), \delta\phi]\right) = \frac{d}{dt}\hat{\phi}(t) - \frac{d}{dt}\bar{\phi}(t) = \frac{d}{dt}\delta\phi(t) \quad , \quad (506)$$

$$i[\tilde{\mathcal{H}}, \delta\pi] = i\left([\mathcal{H}, \hat{\pi}] - \int d^3x' \frac{\delta\mathcal{H}[\bar{\phi}, \bar{\pi}]}{\delta\bar{\phi}} [\delta\phi(x'), \delta\pi]\right) = -\frac{d}{dt}\hat{\pi}(t) + \frac{d}{dt}\bar{\pi}(t) = -\frac{d}{dt}\delta\pi(t) \quad (507)$$

となる。このように微小量  $\delta\phi(x), \delta\pi(x)$  の時間発展はハミルトニアン  $\tilde{\mathcal{H}}[\delta\phi, \delta\pi]$  に支配されている。

## 18.2 期待値の計算

宇宙論で考慮される量は散乱振幅ではなく期待値である。期待値をどの状態に対して取るかが非自明である。インフレーションの観測から揺らぎを引き起こす原因が空間の膨張にあると考えられる。低エネルギー発散の問題を無視すると、膨張によるゆらぎの生成は Bunch-Davies 真空 (BD 真空) を取ることで記述される。期待値の計算は BD 真空で計算する。BD 真空は  $t = -\infty$  での真空と見なせる。これは場の理論に置ける in-state と同じである。

場の相互作用描像を構成する。時間発展演算子  $U(t, t')$  を

$$\delta\phi(t) = U^{-1}(t, t')\delta\phi(t')U(t, t') \quad (508)$$

で定める。これは  $U$  に対して

$$\frac{d}{dt}U(t, t') = -i\tilde{H}U(t, t') \quad , \quad U(t, t) = 1 \quad (509)$$

を課すことで満たされる。相互作用描像に移るため、ハミルトニアンを運動項と相互作用項に分ける。

$$\tilde{H} = H_0 + H_I \quad (510)$$

相互作用描像は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_0(t, t') &= -iH_0(t)U_0(t, t') \quad , \quad U_0(t, t) = 1 \quad , \\ \delta\phi^I &:= U_0^{-1}(t, t_0)\delta\phi(t_0)U_0(t, t_0) \end{aligned} \quad (511)$$

により定義される。相互作用描像を通常の場合と一致させる時刻は  $t_0 \rightarrow -\infty$  とする。つまり相互作用描像における真空は  $|in\rangle$  となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[U_0^{-1}(t, t_0)U(t, t_0)] &= -i(U_0^{-1}(t, t_0)H_I(t)U_0(t, t_0))(U_0^{-1}(t, t_0)U(t, t_0)) \\ \Rightarrow U_0^{-1}(t, t_0)U(t, t_0) &= \text{T exp}\left(-i\int_{t_0}^t H^I(t)dt\right) \quad , \\ H^I(t) &:= U_0^{-1}(t, t_0)H_I(t)U_0(t, t_0) \end{aligned} \quad (512)$$

を用いることで、場の積で書ける一般的な演算子に対して相互作用描像での書き換えを試みると

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(t) &= U^{-1}(t, t_0)\mathcal{O}(t_0)U(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)U_{\mathcal{O}}(t, t_0)\mathcal{O}^I(t)U_0^{-1}(t, t_0)U(t, t_0) \\ &= \left[ \bar{T} \exp \left( i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right] \mathcal{O}^I(t) \left[ T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right]\end{aligned}\quad (513)$$

となる。ただし逆行列を取ると順序が逆になり T 積の代わりに時間が過去の順から並べる  $\bar{T}$  積に移ることに注意。

### 18.3 ファインマンダイアグラムの定義

in-in formalism におけるファインマンダイアグラムを整備する。 $H^I(t)$  について摂動展開を行う。

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}(t) \rangle &= \langle in | \left[ \bar{T} \exp \left( i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right] \mathcal{O}^I(t) \left[ T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right] | in \rangle \\ &= \langle in | \left[ 1 + \bar{T} \left( i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) + \frac{1}{2} \bar{T} \left( i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right)^2 + \dots \right] \mathcal{O}^I(t) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 + T \left( -i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) + \frac{1}{2} T \left( -i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right)^2 \right] | in \rangle\end{aligned}\quad (514)$$

そしてそれぞれの項に対して wick の定理で縮約を行うが、T 積、 $\bar{T}$  積が混在するために注意が必要。また散乱振幅の計算では外線は  $t = \pm\infty$  にあり T 積には自由に出入りできたが、今回の計算では外線  $\mathcal{O}$  は T 積に挟まれており、特別な扱いが必要。

具体的なルールは

- $\bar{T}$  積に含まれる場の数だけ左に点 (left vertex) を書く。外線  $\mathcal{O}$  に含まれる場の数だけ左に点 (external vertex) を書く。T 積に含まれる場の数だけ右に点 (right vertex) を書く。
- 可能なダイアグラムを書き下しプロパゲーターで結ぶ。ただし端点の vertex ごとにプロパゲーターの種類が変わる。left-left なら  $\langle \bar{T} \phi(x) \phi(x') \rangle$ 、right-right なら  $\langle T \phi(x) \phi(x') \rangle$ 、left-right, left-external, external-right, external-external はこの順序で  $\langle \phi(x) \phi(x') \rangle$  を計算する。
- どの external vertex ともつながっていない disconnected な部分が存在する場合、そのダイアグラムは 0 になる。理由としては in-out formalism でのバブルの処理と同様である。ただし、in-in formalism では  $\langle \left[ \bar{T} \exp \left( i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right] \left[ T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H^I(t) dt \right) \right] \rangle = 1$  となるのでわざわざ  $\langle in | in \rangle = 1$  で割らなくても自動的に落ちている。

である。また  $H^I(t)$  が既にノーマルオーダーで書かれていると仮定することで、一つの vertex でループを作るような発散は計算から除去される。

ただし一般に曲がった時空中でのプロパゲーターの導出は困難である。そのため、普通の場の理論のようにファインマンダイアグラムから直接ファインマンルールで遷移振幅を求めることは出来ない。ダイアグラムは縮約の組み合わせを明示し項を分類するためにもっぱら用いる。実際の計算では T 積を尊重するように時間積分の区間を変更する。つまり場が T 積の順序通りに並ぶように時間積分の区間を変更する。

## 19 $\zeta^3 - \text{bispectrum}$ の計算

single canonical scalar inflation に対する bispectrum を計算したい。特に今回は  $\zeta^3$  型の相互作用を調べる。二点相関関数ではスカラー揺らぎはテンソル揺らぎに比べて観測が容易であり、同様の理由から  $\zeta^3 - \text{bispectrum}$  は観測からの制限が強くついているという点で興味深い量である。

### 19.1 $\zeta^3$ 型相互作用の簡単化

演算子の変換  $\zeta \rightarrow \zeta_c - f(\zeta_c)$  によって作用の 2 次の項は  $S_{\mathcal{L}(\zeta)} \rightarrow S_{\mathcal{L}(\zeta_c)} - f(\zeta_c) \frac{\delta S_2}{\delta \zeta}$  となり、 $-f(\zeta_c) \frac{\delta S_2}{\delta \zeta}$  の分だけ相互作用項がズレる。これを利用して Eq(500) の項を減らすことが出来る。以降の計算 Eq(519) では  $f(\zeta_c)$  を晴れ上がりの時刻で評価する。晴れ上がりの時刻では運動量が多い項は  $k\eta \ll 1$  で押さえられるため、運動量の最低次で近似すれば良い。<sup>36</sup>時間微分は Eq(527) により  $\frac{d}{dt} \propto k^2$  として効くことに注意する。よって変数シフト

$$\zeta =: \zeta_c + \left( \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}\dot{\rho}} + \frac{1}{8} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \right) \zeta_c^2 + \frac{1}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \Delta^{-1} (\zeta_c \Delta \zeta_c) + \dots \quad (515)$$

の下で<sup>37</sup>三次の相互作用項は

$$S_3 = \int dx^4 \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} e^{5\rho} \dot{\rho} \zeta_c^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta}_c + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (516)$$

と書ける。

### 19.2 $\zeta^3$ 型 3 点関数の計算

ここでは weinberg の計算方法を参考に  $\langle \zeta(x_1) \zeta(x_2) \zeta(x_3) \rangle$  を計算する。ただし  $t_0 := t_1 = t_2 = t_3$  は最終散乱面での時間である。計算はスローロールパラメータの最低次で見る。そこで、Eq(516) の  $\zeta_c$  へのシフトがスローロールの低次で

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_c + \epsilon \lambda \zeta_c^2, \\ \epsilon \lambda \zeta_c^2 &=: \left( \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}\dot{\rho}} + \frac{1}{8} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \right) \zeta_c^2 + \frac{1}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \Delta^{-1} (\zeta_c \Delta \zeta_c) \end{aligned} \quad (517)$$

と書けるので、<sup>38</sup>三点関数は相互作用項もスローロールの高次であることに注意して

$$\begin{aligned} &\langle in | \zeta(x_1) \zeta(x_2) \zeta(x_3) | in \rangle \\ &= \langle in | \zeta_c(x_1) \zeta_c(x_2) \zeta_c(x_3) | in \rangle + \lambda [ \langle \zeta_c(x_1) \zeta_c(x_2) \rangle \langle \zeta_c(x_2) \zeta_c(x_3) \rangle + (cyclic) ] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (518)$$

と書ける。ただしこの (cyclic) は 6 通りを回るとする。以降、相関関数の状態に指定がない場合は自由場の BD 真空基底  $\langle 0|A|0 \rangle$  を指すものとする。<sup>39</sup>

<sup>36</sup>  $S_3$  自体は Horizon crossing での値が主要になるために  $k\eta \ll 1$  という近似が出来ないことに注意。

<sup>37</sup> ... は運動量、スローロールの高次項を表す。

<sup>38</sup> 形式的に演算子  $\lambda$  は  $\epsilon$  の 0 次

<sup>39</sup> この場合、 $|in\rangle$  は相互作用を取り入れた  $t \rightarrow -\infty$  での真空基底、 $|0\rangle$  は相互作用を取り入れない  $t \rightarrow -\infty$  での真空基底であることに注意。どちらも粒子の定義は BD 真空中的に決まる。

二点関数は最低次で計算すれば十分であるため、上の変形では in-in formalism から自由場の基底に移している。そこで計算は自由場の交換関係で考えればよい。作用の quadratic Term の形に対応した BD 真空を取ることで、

$$\langle \zeta_{k(t)} \zeta_{k'(t)} \rangle \sim (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{1}{2k^3} \frac{\dot{\rho}_*^2}{M_{pl}^2 \phi_*^2} \quad (519)$$

となる。ただし\*は Horizon crossing での値である。右辺の値は Horizon crossing 以降  $k\eta \ll 1$  の凍結した値である。この凍結の時間は波数  $k_1, k_2, k_3$  がすべて凍結しているような適当な時間を取る。インフレーション中に凍結している値については、凍結しているどの時間でとっても結果は同じなのでこのように取り扱う。まずは  $\lambda$  を単なる数と見なして計算する。すべての寄与をフーリエ変換した上で足すと

$$\begin{aligned} & \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} 2\lambda (\langle \zeta_d(x_1) \zeta_d(x_2) \rangle \langle \zeta_d(x_2) \zeta_d(x_3) \rangle + (cyclic)) \\ &= \lambda (2\pi)^6 \frac{H_*^8}{\phi_*^4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \\ & \times \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k''_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 - i\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}''_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_3} \delta^3(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2) \delta^3(\mathbf{k}''_2 + \mathbf{k}'_3) \frac{1}{4k_2'^3 k_2''^3} + (cyclic) \right) \\ &= \lambda \frac{H_*^8}{\phi_*^4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \\ & \times \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_3} \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} + (cyclic) \right) \\ &= \lambda \frac{H_*^8}{\phi_*^4} (2\pi)^{3 \times 3} \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_3) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_3) + (cyclic) \right) \\ &= \lambda \frac{H_*^8}{\phi_*^4} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i \mathbf{k}_i) \left( \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} + (cyclic) \right) \quad (520) \end{aligned}$$

となる。ここで  $\lambda$  の二項目が演算子的になっているので上の計算においてその寄与を調べると、

$$\begin{aligned} & \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} [\Delta_2^{-1} (\langle \zeta_d(x_1) \zeta_d(x_2) \rangle \langle \Delta_2 \zeta_d(x_2) \zeta_d(x_3) \rangle) + (cyclic)] \\ &= (2\pi)^6 \frac{H_*^8}{\phi_*^4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \\ & \times \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k''_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 - i\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}''_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_3} \delta^3(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2) \delta^3(\mathbf{k}''_2 + \mathbf{k}'_3) \frac{1}{4k_2'^3 k_2''^3} \frac{k_2''^2}{(k_2' + k_2'')^2} + (cyclic) \right) \\ &= \frac{H_*^8}{\phi_*^4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \\ & \times \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_2 + i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}'_3 \cdot \mathbf{x}_3} \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} \frac{k_3^2}{(k_1 + k_3)^2} + (cyclic) \right) \\ &= \frac{H_*^8}{\phi_*^4} (2\pi)^{3 \times 3} \left( \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} \frac{k_3^2}{(k_1 + k_3)^2} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_3) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_3) + (cyclic) \right) \\ &= \frac{H_*^8}{\phi_*^4} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i \mathbf{k}_i) \left( \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} k_2 k_3^2 + (cyclic) \right) \quad (521) \end{aligned}$$

となる。

三点関数は作用の形に注意しつつ、Chapter.(C.3) の計算を参考にして処理していく。時間積分は weinberg が指摘した [3] ように波長がホライゾンの外に出る付近が主要な寄与を与える。そのため、時間微分のうち、exp で入るもの以外は Horison Crossing での値  $H_*$  に置き換えていく。ただしここでの\*は、揺らぎの典型的な波長スケールに対応した値にする。<sup>40</sup>

$$\begin{aligned}
& \langle in | \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} | in \rangle \\
&= \langle \bar{T} e^{-iS_3} \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} T e^{iS_3} \rangle \\
&= \langle \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} T \{iS_3\} \rangle + \langle \bar{T} \{-iS_3\} \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} \rangle \\
&= i \int_{t_0}^{\infty} dt dx^3 \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} \dot{\rho} e^{5\rho} \left[ \langle \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} T \{ \dot{\zeta}_c^2(x) \Delta^{-1} \dot{\zeta}_d(x) \} \rangle - \langle \bar{T} \{ \dot{\zeta}_c^2(x) \Delta^{-1} \dot{\zeta}_d(x) \} \zeta_{d(x_1)} \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_3)} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{522}$$

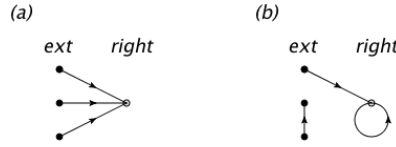


Figure 7: 三点相関のダイアグラム

まず (a) 型の diagram については次のようになる。

$$\begin{aligned}
(a) &= i \int_{-\infty}^{t_0} dt dx^3 \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} \dot{\rho} e^{5\rho} \left[ \langle \zeta_{d(x_1)} \dot{\zeta}_d(x) \rangle \langle \zeta_{d(x_2)} \dot{\zeta}_d(x) \rangle \langle \zeta_{d(x_3)} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_d(x) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \dot{\zeta}_d(x) \zeta_{d(x_1)} \rangle \langle \dot{\zeta}_d(x) \zeta_{d(x_2)} \rangle \langle \Delta^{-1} \dot{\zeta}_d(x) \zeta_{d(x_3)} \rangle \right] + (cyclic) \\
&= i \int_{-\infty}^{t_0} dt dx^3 \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} \dot{\rho} e^{5\rho} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)} e^{i\mathbf{k}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_3)} \\
&\quad \times \left[ -\frac{1}{k_3^2} \zeta_{k_1}^{s*}(t_0) \dot{\zeta}_{k_1}^s(t) \zeta_{k_2}^{s*}(t_0) \dot{\zeta}_{k_2}^s(t) \zeta_{k_3}^{s*}(t_0) \dot{\zeta}_{k_3}^s(t) + \frac{1}{k_3^2} \dot{\zeta}_{k_1}^{s*}(t) \zeta_{k_1}^s(t_0) \dot{\zeta}_{k_2}^{s*}(t) \zeta_{k_2}^s(t_0) \dot{\zeta}_{k_3}^{s*}(t) \zeta_{k_3}^s(t_0) \right] + (cyclic) \\
&= -i \int_{-\infty}^{t_0} dt \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} \dot{\rho} e^{5\rho} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1(-\mathbf{x}_1)} e^{i\mathbf{k}_2(-\mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{k}_3(-\mathbf{x}_3)} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) (2\pi)^3 \\
&\quad \times \frac{\dot{\rho}_*^3}{\dot{\phi}_*^3} \frac{H_*^3}{\sqrt{2^3 k_1^3 k_2^3 k_3^3}} \left[ \frac{1}{k_3^2} \dot{\zeta}_{k_1}^s(t) \dot{\zeta}_{k_2}^s(t) \dot{\zeta}_{k_3}^s(t) \right] + (cyclic) + c.c.
\end{aligned} \tag{523}$$

ただし記号が面倒なので  $\zeta_c$  の古典解として  $\zeta^s$  を用い、また二点関数

$$\langle \zeta_{d(x_2)} \zeta_{d(x_1)} \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} \zeta_k^{s*}(t_2) \zeta_k^s(t_1) \tag{524}$$

<sup>40</sup>現在の計算では  $k_1 \sim k_2 \sim k_3$  を仮定している。これらの運動量が異なる場合は、 $H_*$  をどれに取るのか、問題となる。しかしスローロールインフレーションでは  $H_*$  の時間変化がスローロールパラメーターの高次となるため、最低次では問題にならない。

を用いた。<sup>41</sup> また場の古典解 Chapter.(C.3)

$$\zeta_{\mathbf{k}}^s(t) = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (1 - ik\eta) e^{ik\eta} \quad (525)$$

に対して、 $t$  はホライゾンの外に出た後の時間であり、場の値の凍結から

$$\zeta_{\mathbf{k}}^s(t) \sim \frac{\dot{\rho}_*}{\dot{\phi}_*} \frac{H_*}{\sqrt{2k^3}}, \quad (|k\eta| \ll 1) \quad (526)$$

を用いた。

次に (a) を運動量表示で表す。全時間での解としてスローロール近似の下で

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{\mathbf{k}}^s(t) &= \left[ \frac{\ddot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}^2} \ddot{\phi} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{\dot{H}}{\sqrt{2k^3}} \right] (1 - ik\eta) e^{ik\eta} \\ &\quad - ik \frac{1}{a} \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} e^{ik\eta} + ik \frac{1}{a} \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (1 - ik\eta) e^{ik\eta} \\ &= \left[ \frac{\ddot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}^2} \ddot{\phi} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{\dot{H}}{\sqrt{2k^3}} \right] (1 - ik\eta) e^{ik\eta} + k^2 \eta \frac{1}{a} \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} e^{ik\eta} \\ &\sim k^2 \eta \frac{1}{a} \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} e^{ik\eta} \end{aligned} \quad (527)$$

となる。初項が無視できる理由はスローロール近似 Chapter.(C.4) である。時間積分の中身は、Horizon Crossing の時間の値で近似して  $\exp$  以外は外に出していく。このときドジッター宇宙での近似  $\eta \sim -\frac{1}{H_* a_*}$  を使っていく。以上から、フーリエ展開した後の運動量表示として

$$\begin{aligned} (a)_{k_1 k_2 k_3} &= -i (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{t_0} dt \frac{\dot{\phi}^4}{\dot{\rho}^4} \dot{\rho} e^{5\rho} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{\dot{\rho}_*^3}{\dot{\phi}_*^3} \frac{H_*^3}{\sqrt{2^3 k_1^3 k_2^3 k_3^3}} \left[ \frac{1}{k_3^2} \dot{\zeta}_{k_1}^s(t) \dot{\zeta}_{k_2}^s(t) \dot{\zeta}_{k_3}^s(t) \right] + (\text{cyclic}) + c.c. \\ &\sim i (2\pi)^3 \frac{\dot{\rho}_*^6}{\dot{\phi}_*^6} \frac{H_*^3}{8 \prod_i k_i^3} \frac{\dot{\phi}_*^4}{\dot{\rho}_*^4} \dot{\rho}_* \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) k_1^2 k_2^2 \int_{-\infty}^{t_0} dt e^{5\rho} \frac{1}{a^6} e^{i\eta(k_1+k_2+k_3)} + (\text{cyclic}) + c.c. \\ &= i (2\pi)^3 \frac{1}{\dot{\phi}_*^2} \frac{H_*^6}{8 \prod_i k_i^3} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) k_1^2 k_2^2 \int_{-\infty}^{\eta_0} d\eta e^{i\eta(k_1+k_2+k_3)} + (\text{cyclic}) + c.c. \\ &= i (2\pi)^3 \frac{1}{\dot{\phi}_*^2} \frac{H_*^6}{8 \prod_i k_i^3} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) k_1^2 k_2^2 \frac{1}{\sum_i |\mathbf{k}_i|} e^{i\eta_0(k_1+k_2+k_3)} + (\text{cyclic}) + c.c. \\ &= 4 (2\pi)^3 \frac{1}{\dot{\phi}_*^2} \frac{H_*^6}{8 \prod_i k_i^3} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\mathbf{k}_i|} \end{aligned} \quad (528)$$

となる。ただし  $\eta_0 k_i \ll 1$  より  $e^{i\eta_0(k_1+k_2+k_3)} = 1$  として扱った。

次に (b) 型の相互作用について、効かないことが言える。その理由は次のようにわかる。このダイアグラムの計算は因子  $\langle \zeta_{d(x_i)} \text{TS}_3 \rangle$  や  $\langle \bar{\text{TS}}_3 \zeta_{d(x_i)} \rangle$  を含んでいるが、これは  $\zeta_{d(x_i)}$  の持つ運動量

<sup>41</sup> ここでは省略しているが本来この二点関数には T 積が付いており  $\zeta$  に二階の時間微分が付いている場合には微分を外に出すことは出来ない。その特異性は contact term (平坦な空間における  $(\square_x + m^2) \langle \phi(x) \phi(x_1) \rangle = \langle (\square_x + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \rangle - i\hbar \delta^4(x - x_1)$  に相当 [13]) のように二点が一一致する場合に現れる。これが三点関数での  $\frac{\delta L_2}{\delta \zeta}$  と変数のシフト  $\zeta = \zeta_c + f(\zeta_c)$  が同じ寄与を持つ理由である。具体的には  $\langle \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \int d^4x \frac{\delta L_2}{\delta \zeta}(x) f(\zeta(x)) \rangle = i\hbar \langle \zeta_2 \zeta_3 f(\zeta(x_1)) \rangle + (\text{cyclic})$  により変数シフトで出てくる項と一致する。ただし、時間の1回微分ではこのような特異性は現れないため、今回の計算では  $\langle \rangle$  と  $\frac{d}{dt}$  の順序を入れ替えている。

が0である場合のみ値を持つ。その意味で物理的ではないため、最終的に  $k_1, k_2, k_3 \neq 0$  を計算する場合には無視できる。というよりこれは場の理論に置けるいわゆる tadpole や Disconnected Diagram に対応するのでそれら进行处理すると同様の手法で除去できると考えられる。

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
& \langle in | \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} | in \rangle \\
&= 4 (2\pi)^3 \frac{1}{\dot{\phi}_*^2} \frac{H_*^6}{8 \prod_i k_i^3} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\mathbf{k}_i|} \\
&+ \left( \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} \dot{\rho}} + \frac{1}{8} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \right) \frac{H_*^8}{\dot{\phi}_*^4} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i \mathbf{k}_i) \left( \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} + (\text{cyclic}) \right) \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \frac{H_*^8}{\dot{\phi}_*^4} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i \mathbf{k}_i) \left( \frac{1}{4k_1^3 k_3^3 k_2^2} k_2 k_3^2 + (\text{cyclic}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{H_*^4}{\dot{\phi}_*^4} \frac{H_*^4}{M_{pl}^4} \frac{1}{\prod_i (2k_i^3)} \left[ 4 \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\mathbf{k}_i|} + \left( 2 \frac{\ddot{\phi}_*}{\dot{\phi}_* H_*} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \right) \sum_i k_i^3 + \frac{\dot{\phi}_*^2}{2H_*^2} \sum_{i \neq j} k_i k_j^2 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{529}$$

となり、三点関数が計算できた。

### 19.3 non-gaussianity の指標 $f_{NL}$

non-gaussianity を実験値と定量的に比較するために  $f_{NL}$  について説明する。

Eq(518) で見たように三点相関を計算するとき次の定数  $f_{NL}$  によるシフト

$$\zeta = \zeta_g - \frac{3}{5} f_{NL} \zeta_g^2 \tag{530}$$

を行うと、3点相互作用がなくても三点関数は値を持つ。このように、三点相互作用を再現するようなシフトによって non-gaussianity の程度を定義する。三点関数への寄与は

$$\langle in | \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} | in \rangle = - \frac{3}{5} f_{NL} \frac{H_*^8}{\dot{\phi}_*^4} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i \mathbf{k}_i) \left( \frac{1}{4k_1^3 k_3^3} + (\text{cyclic}) \right) \tag{531}$$

となる。

もともと定数で  $f_{NL}$  を定義したが、三点相互作用がある場合には必ずしも三点関数は Eq(531) の運動量依存性にはならない。そこで、Eq(531) をむしろ  $f_{NL}$  の定義にしてしまうことで運動量に依存した  $f_{NL}$  を定義する。

$\zeta(x)$  は無次元であり、そのため  $f_{NL}$  も無次元となる。

### 19.4 局所型 $\zeta^3 - \text{bispectrum}$ の物理的意味

まず局所型  $k_3 \ll k_1 \sim k_2$  に注目する。このとき Eq(529) より  $k = |\mathbf{k}_1| \sim |\mathbf{k}_2|$  を用いて

$$\begin{aligned}
\langle in | \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} | in \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{H_*^4}{\dot{\phi}_*^4} \frac{H_*^4}{M_{pl}^4} \frac{1}{\prod_i (2k_i^3)} \left[ 4 \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \frac{k^3}{2} + \left( 2 \frac{\ddot{\phi}_*}{\dot{\phi}_* H_*} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \right) 2k^3 + \frac{\dot{\phi}_*^2}{2H_*^2} 2k^3 \right] \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{H_*^4}{\dot{\phi}_*^4} \frac{H_*^4}{M_{pl}^4} \frac{2}{\prod_i 2k_3 2k^3} \left( \frac{\ddot{\phi}_*}{\dot{\phi}_* H_*} + \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \right)
\end{aligned} \tag{532}$$



となる。

この量は定性的には次のように説明できる。時間変化の遅い波長  $k_3$  の波は背景場として扱う。スカラー揺らぎ  $\zeta_{k_3}$  はスケールの変換に対応する。相関を見る場合は  $\zeta_{k_3}$  による  $\langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle$  への影響を評価する必要がある。つまり背景場  $\zeta_{k_3} = 0$  の場合と  $\zeta_{k_3} \neq 0$  での  $\langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle$  の値の差

$$\langle in | \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} | in \rangle = \langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle_{\zeta_3} - \langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle_{\zeta_3=0} \quad (533)$$

を見たい。スケールに影響するということは、horizon crossing の時刻  $\frac{k}{a_*} = H_*$  が動くということである。スローロール近似において

$$\begin{aligned} k &= a_* H_* = e^{H_* t_*} H_* = \left( 1 + \frac{\langle \zeta_{k_3} \zeta_{-k_3} \rangle}{\delta^3(0)} \right) e^{H_*(t_* + \delta t)} H_* \\ \Rightarrow \delta t &= - \frac{\langle \zeta_{k_3} \zeta_{-k_3} \rangle}{\delta^3(0) H_*} \end{aligned} \quad (534)$$

となる。

さらに horizon crossing の時刻がズレた場合の二点関数の値の変化はスローロールパラメータを通じて次のように書ける。まず時間  $t_*$  と波長  $k$  が  $\dot{\rho}(t_*) e^{A(t_*)} \sim k$  の関係を持つことに注意する。これにより二点関数の  $k$  依存性を時刻  $t_*$  の依存性に読み替えることが出来る。二点関数の強度は  $\frac{H_*^4}{M_{pl}^2 \dot{\phi}_*^2} \frac{1}{k^3}$  で決まることから

$$\begin{aligned} n_s &:= k \frac{d}{dk} \log \left( \frac{H_*^4}{M_{pl}^2 \dot{\phi}_*^2} \right) \sim \frac{1}{\dot{\rho}} \frac{d}{dt_*} \log \left( \frac{H_*^4}{M_{pl}^2 \dot{\phi}_*^2} \right) \\ &= 4 \frac{\dot{H}}{H^2} - 2 \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} H} = -4\epsilon - 2(\epsilon - \eta_V) = -6\epsilon - 2\eta_V \end{aligned} \quad (535)$$

となる。ただしを Chapter.(C.4) 用いた。

以上を合わせ Eq(519) で二点関数の値を代入すると  $k_3 \ll k_1 \sim k_2$  において

$$\begin{aligned} \langle in | \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} | in \rangle &= \delta t \frac{d}{dt_*} \langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle = - \frac{\langle \zeta_{k_3} \zeta_{-k_3} \rangle}{\delta^3(0) H_*} \langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \rangle H n_s \\ &= - \frac{1}{2k_3^3} \frac{\dot{\rho}_*^2}{M_{pl}^2 \dot{\phi}_*^2} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{1}{2k_3^3} \frac{\dot{\rho}_*^2}{M_{pl}^2 \dot{\phi}_*^2} n_s \end{aligned} \quad (536)$$

となり、これは Eq(532) を再現している。

## 19.5 $\zeta^3 - \text{bispectrum}$ の観測量との比較

$\zeta^3 - \text{bispectrum}$  の寄与を Eq(531) で定義した  $f_{NL}$  で書くと

$$\begin{aligned} f_{NL}(k) &= \frac{4 \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\mathbf{k}_i|} + \left( 2 \frac{\ddot{\phi}_*}{\dot{\phi}_* H_*} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} \right) \sum_i k_i^3 + \frac{\dot{\phi}_*^2}{2H_*^2} \sum_{i \neq j} k_i k_j^2}{-\frac{3}{5} 4 \sum_i k_i^3} \\ &= - \frac{15\epsilon - 10\eta_V}{12} - \frac{10}{3} \epsilon \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{\sum_i |\mathbf{k}_i| \sum_i k_i^3} - \frac{5}{12} \epsilon \frac{\sum_{i \neq j} k_i k_j^2}{\sum_i k_i^3} \end{aligned} \quad (537)$$

となる。このように Single field Canonical Scalar inflation では non-gaussianity はスローロールパラメーターで抑えられた微小量であり小さい。だが Eq(110) のようなモデルでは

$$f_{NL}^{equal} \simeq -\frac{85}{27} \frac{1}{\epsilon} \simeq -105 \quad (538)$$

程度になるものがあり、モデルの区別に役立つ [1]。基本的に運動項が正準的でない入り方をすると non-gaussianity は大きくなる。超弦理論の低エネルギー理論を用いたインフレーションなどに対して制限を与えると考えられる。

non-Gaussianity には PLANCK などにより既に制限がついている。観測的には Planck2015[8] では

$$f_{NL}^{equal} = -3.7 \pm 43 \quad , \quad f_{NL}^{local} = 0.8 \pm 5.0 \quad (539)$$

という制限がついている。

## Part V

# 初期重力波測定の実状

ヒエラルキー問題を避けるためには、電弱統一のスケール  $10^2 \text{ GeV}$  とプランクスケール  $10^{19} \text{ GeV}$  の間に何らかの構造が存在すれば良い。例えば SUSY やダークセクターなどが考えられる。仮にそのような中間構造が存在したとして、将来的には加速器の能力の向上で直接新粒子を観測すべきだが、別の方法で事前に構造があることがわかっていると、加速器を建造する際のエネルギースケールの決定など役立つことは多い。

このような広いエネルギースケールの物理現象を網羅的に探索する手段として初期宇宙観測を使いたい。特に自発的対称性の破れ (SSB) に伴う相転移現象、位相欠陥が初期宇宙にあった場合、観測によりそのシグナルを見つけられる可能性がある。

直接晴れ上がり以前の物理現象を観測するには重力波を使うことができる。重力波の晴れ上がりは (存在すれば) プランクスケール程度であり、晴れ上がり以降の重力波の観測を通して原理的には見たいエネルギースケールすべての情報を運ぶことが出来る。重力波の観測可能性については、近年 Advanced LIGO で初めて連星衝突由来の重力波が測定されたばかりであり、今後発展していくと考えられる。

## 20 背景重力波の定義

### 20.1 stochastic gravitational wave background とは

Stochastic gravitational wave background (SGWB) とは全天から一様に降り注ぐ重力波を指しており、光で言うと CMB や全天に一様に分布した星の光を指している。特に初期宇宙のイベントから生じた SGWB は Relic Gravitational wave、Primordial Gravitational wave と呼ばれる。また近年観測された連星合体の頻度を考えると、全天で一様に散らばった個々を区別できないような連星合体のシグナルが大きな寄与を持つ [14] ことも考えられており、それも含めて SGWB と呼ばれている。

Advanced LIGO で測定されたような単独の連星合体シグナルは SGWB とは呼ばない。

継続して重力波を出すような天体 (合体時期ではないただの連星) からのシグナルは persistent gravitational wave と呼ばれている。[15] このような天体のシグナルが十分強ければ位置を特定

することが出来るが、多数の天体から発せられた persistent gravitational wave が識別不可能な場合は SGWB に寄与する。

SGWB は等方・一様・非偏極のシグナルと考えられ、唯一の情報であるスペクトル形状を評価するためには次の3つの関数のどれかが使われることが多い。

- 単位 log 周波数間隔あたりのエネルギー密度  $h_0^2 \Omega_{gw}(f)$
- メトリックのフーリエ成分の確率的平均  $S_h(f)$
- 特徴的振幅  $h_\alpha(f)$

これらを定義して関係性を見る。

## 20.2 $\Omega_{GW}(f)$ の定義

$$\Omega_{GW}(f) := \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \log f} \quad (540)$$

ただし  $\rho_{GW}$  は重力波のエネルギー密度である。現在のハッブル定数の不定性  $h_0$  を取り込む理由は、 $\rho_c$  を通じて入ってくる分を打ち消すためである。これで  $h_0^2 \Omega_{gw}(f)$  が定義できる。<sup>42</sup>

## 20.3 $S_h(f), h_c(f)$ の定義

原点  $\mathbf{x} = 0$  で観測した重力波の一般的なシグナルは TT ゲージで

$$h_{ij}(t) := \sum_{A=\times,+} \int_{-\infty}^{\infty} df d\Omega h_A(f, \Omega) e^{-2\pi i f t} e_{ij}^A(\Omega) \quad (541)$$

である。周波数を負の領域まで伸ばす代わりに強度は  $1/2$  がつく。揺らぎの実性から強度スペクトルには次の条件  $h_{A(-f, \omega)} = h_A^*(f, \omega)$  が付く。偏極ベクトルは  $\Omega$  に直交する単位ベクトル  $\mathbf{m}, \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0)$  として

$$e_{ij}^+(\Omega) = m_i m_j - n_i n_j, \quad e_{ij}^\times(\Omega) = m_i n_j + n_i m_j \quad (542)$$

で組まれる。また偏極ベクトルは  $e_{ij}^A(\Omega) e^{Bij}(\Omega) = 2\delta^{AB}$  を満たす。

ランダムな背景重力場のゆらぎは異なる成分同士に相関がないと考える。つまりアンサンブル平均において

$$\langle h_A^*(f, \Omega) h_A(f', \Omega') \rangle = \delta(f - f') \frac{\delta(\phi - \phi')}{4\pi} \frac{\delta(\cos \theta - \cos \theta')}{2} \delta_{AA'} S_h(f) \quad (543)$$

を仮定する。

次に  $h_\alpha^2(f)$  と  $S_h(f)$  を次で定義する。

$$\langle h_{ij}(t) h^{ij}(t) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} df S_h(f) = 2 \int_{f=0}^{f=\infty} d(\log f) h_\alpha^2(f) \quad (544)$$

このとき、 $h_\alpha^2(f) = 2f S_h(f)$  の関係が言える。

<sup>42</sup>観測 [16] から  $h_0 = 69.6 \pm 0.7$

電磁波と同様にエネルギー密度を定義すると

$$\rho_{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}(t) \dot{h}^{ij}(t) \rangle \quad (545)$$

となる。<sup>43</sup>

ここで  $\Omega_{\text{GW}}(f)$  と  $S_h(f)$  や  $h_c(f)$  を関係づけると

$$\begin{aligned} \rho_{\text{GW}} &= \frac{4}{32\pi G} \int_{f=0}^{f=\infty} d(\log f) f (2\pi f)^2 S_h(f) \quad , \\ \Omega_{\text{GW}}(f) &= \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^2 h_c^2(f) \quad , \\ \Omega_{\text{GW}}(f) &= \frac{4\pi^2}{3H_0^2} f^3 S_h(f) \end{aligned} \quad (546)$$

となる。

## 20.4 振幅・強度の便利な表記

振幅を評価する上で次の様に書くと使いやすい。

$$h_{\text{d}}(f) \simeq 1.263 \times 10^{-18} \left( \frac{1\text{Hz}}{f} \right) \sqrt{h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f)} \quad (547)$$

ただし  $h_c$  は振幅であるため、測定周波数幅  $f \rightarrow f + \Delta f$  を取り扱うためには、

$$\int_f^{f+\Delta f} d(\log f) h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f) \simeq \frac{f + \Delta f}{f} h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f) \quad (548)$$

を参考に

$$\begin{aligned} h_{\text{d}}(f, \Delta f) &:= h_{\text{d}}(f) \left( \frac{f + \Delta f}{f} \right)^{1/2} \\ &= 2.249 \times 10^{-25} \left( \frac{1\text{Hz}}{f} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f)}{10^{-6}}} \left( \frac{\Delta f}{3.17 \times 10^{-8}\text{Hz}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (549)$$

( $\frac{1}{1\text{gy}} \simeq 3.17 \times 10^{-8}\text{Hz}$ ) を用いることもある。

真空の取替を取り扱うときには粒子数密度  $n$  を強度に結びつけると便利である。現在での粒子数密度を一様等方  $n(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = n(|k|)$  として

$$\begin{aligned} \rho_{\text{GW}} &= 2 \int \frac{d^3 k}{a_0^4 (2\pi)^3} k n = 16\pi^2 \int_0^\infty d(\log f) f^4 n \quad , \\ h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f) &\simeq 3.6 \left( \frac{n}{10^{37}} \right) \left( \frac{f}{1\text{kHz}} \right)^4 \end{aligned} \quad (550)$$

と計算できる。<sup>44</sup>

<sup>43</sup>これはワインバーグの教科書 [6] で計算した重力波のエネルギー運動量テンソル（これはアインシュタイン方程式でゆらぎの線形項を運動項として、残りの高次項をすべて Energy Momentum Tensor に押し込んだものであり、平面波に対してのみ Energy Momentum Tensor と解釈できる。）と 2 倍だけ異なる。この理由は今回の定義では極座標で周波数を負の方向まで拡張したからである。今回の計算では振幅が 2 倍小さくなるが、その代わり周波数積分に正負の 2 項が寄与する。

<sup>44</sup>今回の notation だと  $k$  は共動的波数、 $f$  は現在での周波数であり、 $k = 2\pi a_0 f$  となる。積分は物理的波数  $\frac{k}{a_0}$  に対して取られている。

## 20.5 重力波の転送関数

重力波が生成された時間から揺らぎの凍結や減衰を経て、現在の重力波が測定される。生成された重力波の強度が現在観測される強度にどのように関係するかを評価する関数を考える [17]。

重力波の振幅は、Horizon-crossing で凍結した後に、re-entry で減衰を始め、 $h_k(t_0) = h_k(t_k) \frac{\tilde{a}_k}{a_0}$  という変動をする。ただし  $t_k$  は波長  $k$  の揺らぎの Horizon-crossing の時刻、 $\tilde{a}_k$  は re-entry の時刻である。これはエネルギー密度  $\rho_k \propto k^2 h_k^2$  が輻射に対して  $\rho_k \propto a^{-4}$  で減衰することからわかる。そこで、Horizon-crossing での重力波のスペクトルを現在の値に持ってくる転送関数  $\mathcal{T}_k$  として  $\mathcal{T}_k := \frac{\tilde{a}_k}{a_0}$  を考えたい。

特に今回は重力波が輻射優勢期の時刻  $\tilde{t}_k$  に reentry したとする。輻射優勢期のハッブル定数は

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho \Rightarrow H(\tilde{t}_k) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{30} g_* T^4}}{M_{pl}} \quad (551)$$

である。更にエントロピー密度の一定性  $g_{*s} a^3 T^3 = const$  より、 $\frac{\tilde{a}_k}{a_0} = \frac{T_0}{T_k}$  である。ここから、reentry の温度  $\frac{T_k}{T}$  に対して

$$\begin{aligned} k = \tilde{a}_k \tilde{H}_k &\Rightarrow \frac{k}{a_0 H_0} = \frac{\tilde{a}_k \tilde{H}_k}{a_0 H_0} = \left(\frac{g_{s0}}{g_{s*}}\right)^{1/3} \frac{T_0 T_k^2}{T_k T_0^2} \sqrt{\frac{g_*}{g_0}} \\ &\Rightarrow \frac{T_k}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_*}} \left(\frac{g_{s*}}{g_{s0}}\right)^{1/3} \frac{k}{a_0 H_0} = 2.8 \times \sqrt{\frac{g_0}{g_*}} \left(\frac{g_{s*}}{g_{s0}}\right)^{1/3} \frac{f}{10^{-19} \text{Hz}} \\ &\Rightarrow \mathcal{T}_k = 3.5 \times \sqrt{\frac{g_*}{g_0}} \left(\frac{g_{s0}}{g_{s*}}\right)^{1/3} \frac{10^{-20} \text{Hz}}{f} \end{aligned} \quad (552)$$

となる。

## 20.6 インフレーション期の重力波との関係

CMBの解析においてはインフレーション期に Horizon-crossing で凍りついた振幅  $\mathcal{P}_h(k)$  (Eq(143)) が Tensor to Scalar ratio:  $r$  などの計算に使われる。今回定義した  $\Omega_{GW}(f)$  と  $\mathcal{P}_h(k)$  の関係を調べる。このとき、それぞれの相関を見ている場の定義に注意する。以前のインフレーション期のテンソル揺らぎ  $h_\lambda$  の計算とここでのテンソル揺らぎ  $h_A$  の計算ではフーリエ展開が異なる。

まず、それぞれの揺らぎの展開を同時刻で関係づける。実際にはインフレーション期の揺らぎを現在観測するために転送関数  $\mathcal{T}_k$  を用いる必要がある。

展開 Eq(119)<sup>45</sup> と Eq(541)

$$\begin{aligned} h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) &:= \sum_{\lambda=\times,+} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} h_\lambda(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e_{ij}^\lambda(\Omega) \quad , \\ h_{ij}(t) &:= \sum_{A=\times,+} \int_{-\infty}^{\infty} df d\Omega \tilde{h}_A(f, \Omega) e^{-2\pi i f t} e_{ij}^A(\Omega) \end{aligned} \quad (553)$$

とを比較すると  $h_A(f, \Omega) \frac{(2\pi)^3}{f^2} = h_\lambda(\eta, \mathbf{k})$  となる。更に Eq(131) と  $S_h$  の定義 Eq(543) を比較すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | h_\lambda(0, \mathbf{k}_1) h_\lambda(0, \mathbf{k}_2) | 0 \rangle &= |h_\lambda(\eta, \mathbf{k})|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad , \\ \langle h_A^*(f, \Omega) h_A(f', \Omega') \rangle &= \delta(f - f') \frac{\delta(\phi - \phi') \delta_{\cos\theta - \cos\theta'}}{4\pi} \frac{\delta_{AA'}}{2} S_h(f) \end{aligned} \quad (554)$$

<sup>45</sup>このときはスカラー揺らぎ  $\mathcal{R}$  に対して書いていたが同じ展開をテンソル  $h_{ij}$  に対しても用いる。

これらから  $\frac{f^2}{(2\pi)^3} S_h = |h_{\lambda(\eta, \mathbf{k})}|^2$  が言える。ここに  $\mathcal{P}_{h(k)}$ (Eq(143)) と  $\Omega_{GW(f)}$ (Eq(546)) を代入して

$$\Omega_{GW(f)} = \frac{1}{96\pi^2} \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 \mathcal{P}_{h(k)} \quad (555)$$

となる。

実際にはインフレーション期の揺らぎを現在観測するために転送関数を用いる。Eq(552)より、

$$\begin{aligned} \Omega_{GW(f)} &= \frac{1}{96\pi^2} \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 \mathcal{T}_k^2 \mathcal{P}_{h(k)} \\ &= \frac{g_*}{g_0} \left( \frac{g_{s*}}{g_{s0}} \right)^{-2/3} \left( \frac{a_0 H_0}{k} \right)^2 \frac{1}{96\pi^2} \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 \mathcal{P}_{h(k)} \\ &= \frac{g_*}{g_0} \left( \frac{g_{s*}}{g_{s0}} \right)^{-2/3} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{96\pi^2} \mathcal{P}_{h(k)} \end{aligned} \quad (556)$$

となる。

注意点は、 $\Omega_{GW(f)}$  はエネルギー密度比で測っているため現在でも  $\mathcal{P}_{h(f)}$  と同じオーダーであるということ、及びスケール不変性を  $\mathcal{P}_{h(f)}$  から継承している点である。

## 21 SGWB の観測方法

### 21.1 複数検出器の相関による感度の向上

Relic GW は BH 連星合体のように瞬間的なイベントではないので、長時間測定に依る感度の向上が可能である。更に複数検出器の相関を見ることでノイズレベルを大きく下げることが出来る。重力波干渉計の感度を考える際は、そのあたりを念頭に置く必要がある。

典型的には2つのディテクターで一年間相関を取ると単独の場合に比べて100倍程度感度が向上する [5]。

## 22 $h_0^2 \Omega_{GW}(f)$ への間接的な制限

### 22.1 元素合成での $N_{eff}$ を通した制限

まず元素合成から  $N_{eff}$  に制限がつくことを見て、次に  $N_{eff}$  に重力場のエネルギーが寄与することを示す。

まず元素合成は陽子-中性子個数比  $\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{Q}{T}}$  ( $Q \simeq 1.3 \text{ MeV}$ ) に敏感に依存する。そこで熱平衡が破れ元素合成が起こり始める時間  $H(t_s) = \Gamma_{pe \leftrightarrow n\nu} \sim G_F^2 T^5$  での温度  $T$  の評価が必要である。

ハッブル定数は  $H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho$  で書ける。 $\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$  を通じて重力場のエネルギー密度依存性が効いてくる。ここで  $g_*$  は有効的な相対論的物質の自由度であり、

$$\begin{aligned} g_* &= \sum_{\text{all boson}=i} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{all fermion}=i} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4, \\ T_i^4 &:= T^4 \left( \frac{\rho_i}{\rho_\gamma} \right) \end{aligned} \quad (557)$$

と書かれる。 $g_i$  は各粒子の自由度である。各粒子の温度  $T_i$  は、光に対するエネルギー密度の比になるように定義されている。T は光のエネルギー密度から  $\rho_\gamma =: 2 \left( \frac{\pi^2}{30} \right) T^4$  で決まる。

元素合成は輻射優勢期に起こるのでこのときに効いてくるのは相対論的物質のみである。SM の範囲内で元素合成の際に相対論的物質は電子 4 自由度、光子 2 自由度、ニュートリノ 6 自由度である。そこで  $g_* \sim 2 + \frac{7}{8}(4 + 2 \times 3)$  となる。しかし、他の粒子の寄与が無いわけではなく、その分を N-effective という形で取り扱う。つまり SM のみでは  $g_* = 2 + \frac{7}{8}(4 + 2N_\nu)$ ,  $N_\nu \sim 3$  でありこの 3 からのズレを

$$\frac{7}{4}(N_\nu - 3) := \sum_{\text{extra boson}=i} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{extra fermion}=i} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (558)$$

で取り込む。このように decouple していない数十 MeV 以下の未知の軽粒子が存在すると N-effective に寄与して元素合成を変えてしまう。

Planck2015[16] の測定からは最も幅が小さい評価で

$$N_{eff} = 3.04 \pm 0.18 \quad (68\% \text{constraints}) \quad (559)$$

が得られている。

### 22.1.1 N-effective への重力場の寄与

extra-boson として重力場を考える。要は  $g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 = 2 \frac{\rho_{GW}}{\rho_\gamma} = \frac{7}{8}(N_\nu - 3)$  を考えれば良い。光はそもそもの温度の定義であり  $2 \frac{\pi^2}{30} T^4$  である。重力場も光も  $a^{-4}$  で減衰していくので現在での値から評価すればよいが、光の温度を現在の温度から外挿するためには、電子が対消滅してエントロピーが光に流れ込む分を考慮する必要がある。これはニュートリノの温度の評価と同様に電子の対消滅前後の温度を  $T_1, T_2$  として  $\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3}$  で評価できる。この  $T_2, T_1$  は同時刻で電子のエネルギーを含めたか含めていないかの違いである。より厳密には残存電子やニュートリノへの流入分も考える必要がある。

よって現在での重力場の電磁場に対するエネルギー密度比として

$$\frac{\rho_{GW0}}{\rho_{\gamma 0}} \leq 0.227 (N_\nu - 3) \quad (560)$$

が得られる。これを以前書いた強度の評価で書くと次のようになる。

$$\int_{f=0}^{f=\infty} d(\log f) h_0^2 \Omega_{GW}(f) \leq 5.6 \times 10^{-6} (N_\nu - 3) \quad (561)$$

Eq(559) で評価すると

$$\int_{f=0}^{f=\infty} d(\log f) h_0^2 \Omega_{GW}(f) \leq 5.6 \times 10^{-6} (0.04 \pm 0.18) = (0.2 \pm 1.0) \times 10^{-6} \quad (562)$$

となる。

## 22.2 COBE-bound

Turner ら [18] によると揺らぎのテンソルモードも SW 効果を通じて単純な温度揺らぎの観測に効き、

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_\theta \sim h(z_*, k(\theta)) \quad , \quad k(\theta) \sim \left(\frac{200^\circ}{\theta}\right) \quad (563)$$

として入ってくる。<sup>46</sup>ただし  $h(z_*, k(\theta))$  は晴れ上がり  $z_*$  での波長  $k(\theta)$  の揺らぎ。

晴れ上がり  $z_*$  での揺らぎの強度を現在の揺らぎの強度に持ってくる。揺らぎの強度は、重力波がホライゾンの外にあるときには凍結していると考えられる。ホライゾンの中に入った後には  $\rho_{GW} \sim f^2 h_c^2(f)$  において、左辺が  $a^{-4}$ 、右辺の  $f$  が  $f \propto a^{-1}$  で動くことから  $h_c \propto a^{-1}$  となる。そこから揺らぎがホライゾンの中に入る時間を  $a_H$  として現在の揺らぎは

$$h_d(z=0, f) = \frac{a_H}{a_0} h(z_*, k(\theta)) \sim \frac{a_H}{z_* a_*} h(z_*, k(\theta)) \quad (564)$$

となる。ただし  $a_* z_* := a_* \left(\frac{a_0}{a_*} - 1\right) \sim a_0$  を用いた。物質優勢期では  $a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$  である。物質優勢期にホライゾンに入ってくる時間は  $a_H H_H = k \sim a_0 f$  で決まり<sup>47</sup>、

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_H}{a_0} H_H = \left(\frac{t_H}{t_0}\right)^{2/3} \frac{2}{3} \frac{1}{t_H} \Rightarrow t_H^{1/3} = \left(\frac{1}{t_0}\right)^{2/3} \frac{2}{3f} \quad , \\ \eta_* &:= \int \frac{dt}{a} = \frac{3}{a_0} t_0^{2/3} t_*^{1/3} \quad , \\ \frac{a_H}{a_*} &= \left(\frac{t_H}{t_*}\right)^{2/3} = \left(\frac{3}{a_0 \eta_*}\right)^2 t_0^{4/3} \left(\frac{1}{t_0}\right)^{4/3} \left(\frac{2}{3f}\right)^2 = \left(\frac{2}{f a_0 \eta_*}\right)^2 \end{aligned} \quad (565)$$

および、

$$z_* \sim \frac{a_0}{a_*} = \left(\frac{t_0}{t_*}\right)^{2/3} = \left(\frac{3t_0}{a_0 \eta_*}\right)^2 = \left(\frac{2}{H_0 a_0 \eta_*}\right)^2 \quad (566)$$

を用いると現在での強度が次のように評価できる。

$$h_d(z=0, f) \sim \left(\frac{2}{f a_0 \eta_*}\right)^2 \left(\frac{2}{H_0 a_0 \eta_*}\right)^{-2} h[z_*, k(\theta)] \sim \left(\frac{H_0}{f}\right)^2 h(z_*, k(\theta)) \sim \left(\frac{H_0}{f}\right)^2 \left(\frac{\delta T}{T}\right)_\theta \quad (567)$$

これを Eq(546) に入れると

$$\Omega_{GW}(f) \sim \left(\frac{H_0}{f}\right)^2 \left(\frac{\delta T}{T}\right)_\theta^2 \quad (568)$$

となる。このようにして重力波の強度の上限を揺らぎの大きさから評価できる。

<sup>46</sup>この 200 はおそらく  $\pi = 180^\circ$  を指す。

<sup>47</sup>この関係式についてどの時刻の物理量を見ているかに注意。k は共動的波数であり物理的な波長に直すためにはその物理的な波数が定義された時刻での距離のスケール  $a$  を掛ける必要がある。  $a_*$  にしない理由は観測量として現在の振動数を知りたいから。



ただしこの解析が有効である周波数帯には制限がある。まず、SW 効果は現在ホライズンに入ってきている重力波しか寄与し得ない。よって、

$$H_0 \sim 68 \frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}} = 2.2 \times 10^{-19} \text{sec}^{-1} \quad ,$$

$$f > 2\pi H_0 \sim 1.4 \times 10^{-18} \text{Hz} \quad (569)$$

が条件である。<sup>48</sup>

また晴れ上がりの時点で因果的な波長  $k < a_* H_*$  は SW 効果よりもバリオン音響振動を強く受けるため、SW 効果を主要に見ることは出来ない。よって SW 効果が見える波長  $k$  は Eq(281) を用いて  $l, f$  に換算すると

$$l \sim k\eta(t_0) > 2 \frac{a_* H_*}{a_0 H_0} = 2 \frac{1}{1120} \sqrt{\Omega_m^{(0)}} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} = 37.3 \quad ,$$

$$f = \frac{k}{a_0} > \frac{a_* H_*}{a_0} = 4.1 \times 10^{-18} \text{Hz} \quad (570)$$

となる。ただし晴れ上がりの評価は Chapter.(7.2) を用いた。この評価はシミュレーションを用いた厳密な評価ではないので 1 割程度ズレる。

より厳密な評価をした上で、強度の上限を COBE の  $l = 2 \sim 30$  から与えると<sup>49</sup>

$$\Omega_{GW}(f) \leq 7 \times 10^{-11} \left( \frac{H_0}{f} \right)^2 \sim 3 \times 10^{-10} \text{Hz} \left( \frac{10^{-19}}{f} \right)^2 \quad (3 \times 10^{-18} \text{Hz} < f < 10^{-16} \text{Hz}) \quad (571)$$

という制限になる。

## 22.3 B-mode での制限

B-mode は現在見つからないが現在の上限を調べる。要は  $l = 2 \sim 2500$  に対応する波長とその上限を知れば良い。B-mode 揺らぎと重力揺らぎを直接結びつける解析解を求めることは大変だが、SW 効果に限ればスカラー揺らぎと同様に Eq(568) で書けると考えられる。B-mode 揺らぎの上限  $r < 0.09[10]$  およびスカラー揺らぎのスペクトル強度  $\ln(10^{10} A_s) = 3.064 \pm 0.024$  (Fig.(4)[9]) を組み合わせることで

$$\Omega_{GW}(f) \lesssim 0.09 A_s = 0.2 \times 10^{-10} \quad (572)$$

程度となる。ただし Eq(556) から  $\Omega_{GW}(f)$  と  $\mathcal{P}_h(f)$  が高々同じオーダーであるということ、及び CMB 揺らぎの定義 Eq(132)、重力揺らぎの定義 Eq(546)、スペクトル強度の定義  $\mathcal{P}_S = A_s \left( \frac{k}{k_0} \right)^n$  を用いた。

## 23 $h_0^2 \Omega_{GW}(f)$ への直接的な制限

### 23.1 LIGO による制限

LIGO[19] の各検出器単独の感度は Fig.(8) で評価される。

<sup>48</sup>ちなみに  $H_0 \sim 1.2 \times 10^{-34} \text{eV}$

<sup>49</sup> $l$  が小さな部分には Cosmic variance も大きく掛かるので精度をあげることは難しいと考えられる。

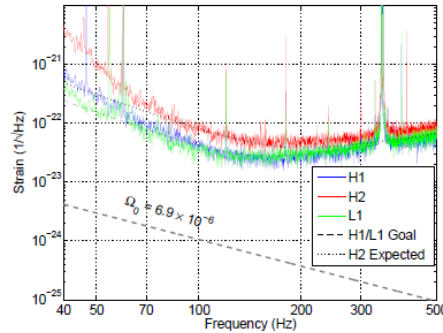


FIG. 1: Sensitivities of LIGO interferometers. LIGO interferometers reached their design sensitivity in November 2005, resulting in the interferometer strain noise at the level of  $3 \times 10^{-22}$  rms in a 100 Hz band around 100 Hz. This figure shows typical strain sensitivities of LIGO interferometers during the subsequent science run S5. Also shown is the strain amplitude corresponding to the upper limit on the GW energy density presented in this paper (gray dashed line). Note that this upper limit is  $\sim 100$  times lower than the individual interferometer sensitivities, which illustrates the advantage of using the cross-correlation technique in this analysis.

Figure 8: LIGO の各検出器の感度

検出器は H1(4km) と H2(2km) が Hanford, L1(4km) が Livingston にある。データセットは run S2(November 2005 to September 2007) を用いた。gray dashed line は cross-correlation により得られた SGWB の上限である。単独の検出器より感度が上がっている。(VIRGO, LIGO Scientific Collaboration, B. P. Abbott et al., “An Upper Limit on the Stochastic Gravitational-Wave Background of Cosmological Origin,” Nature 460 (2009) 990[19] から引用)

SGWB を探索する際は複数の検出器の相関を取ることでノイズの除去が行われた。run S2(November 2005 to September 2007) のデータを用いて  $41.5 \sim 169.25 \text{ Hz}$  間で SGWB の探索が行われた。探索では  $\alpha$  を固定した上で次の形の重力波を仮定してマッチングが行われた。

$$\Omega_{GW}(f) = \Omega_\alpha \left( \frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^\alpha \quad (573)$$

結果として  $\Omega_0 = (2.1 \pm 2.7) \times 10^{-6}$  ( $\alpha = 0$ ) が得られた。また  $\alpha = -3 \sim 3$  の範囲では上限として  $\Omega_\alpha < (1.9 \sim 7.1) \times 10^{-6}$  が得られた。

LIGO の意義としてはある周波数帯において、SGWB への最も強い制限が SGWB の直接観測から得られるようになったことである。SGWB への制限は BBN, CMB(WMAP) から付けることは出来ていた。BBN, CMB からの制限はそれぞれ BBN, 晴れ上がり時点での SGWB の制限であり、それ以降に生成された SGWB (cosmic string など) は制限できていなかった。しかし LIGO が制限する SGWB は現在の値であるため、現在までのあらゆるイベントで生成された SGWB への制限を与えている。

### 23.2 Advanced LIGO による制限

Advanced LIGO の 2016 年レポート [20] では、SGWB についても解析が行われた。

Advanced LIGO で連星合体 (Binary Black Hole; BBH) が観測された。観測的に比較的大

きな BBH が存在することから連星生成のモデルが改良され、背景重力波として初期宇宙由来の premodal な重力波だけでなく、等方的な連星合体のシグナル集合が考慮され始めている。[14]

runO1 での測定結果を解析する際に重力波スペクトルに対して次のようなプロファイルを仮定した。

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{df} = \Omega_\alpha \left( \frac{f}{f_{ref}} \right)^\alpha \quad (574)$$

$f_{ref} = 25\text{Hz}$  は Advanced LIGO の最高感度付近である。

Advanced LIGO の複数の検出器による cross-correlation により重力波が探索された。Fig.(9) は周波数幅  $df = 0.031\text{Hz}$  ごとに平坦なスペクトル  $\Omega_0$  を課して解析した結果である。特に  $\alpha = 0$  に対しては  $\Omega_0 < 1.7 \times 10^{-7}$  (95% confidence) という制限がかかる。ほとんどの制限は 20 ~ 86Hz から来ている。スペクトル形状を決めると各周波数幅のノイズを  $N$  個分平均化することが出来るのでおよそ  $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{30}$  程度精度が改善する。

また別の  $\alpha$  で解析した場合の制限が Eq(10) で与えられている。

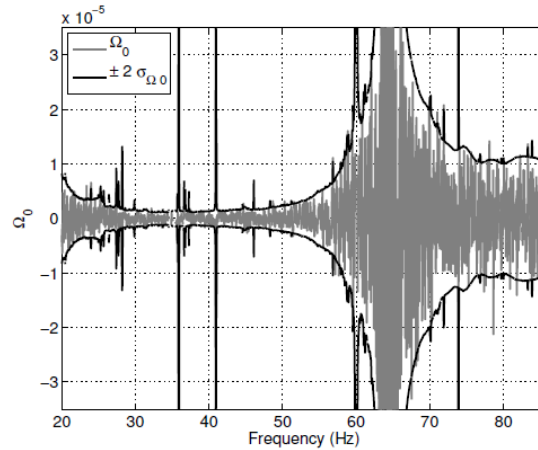


FIG. 1. We show the estimator for  $\Omega_0$  in each frequency bin, along with  $\pm 2\sigma$  error bars, in the frequency band that contains 99% of the sensitivity for  $\alpha = 0$ . The loss of sensitivity at around 65 Hz is due to a zero in the overlap reduction function. There are several lines associated with known instrumental artifacts which do not lead to excess cross-correlation. The data are consistent with Gaussian noise, as described in the Results section.

Figure 9: aLIGO による SGWB の周波数ごとの制限

グレーが中心値、黒が  $\pm 2\sigma$ 。有意なシグナルは存在しなかった。(Virgo, LIGO Scientific Collaboration, B. P. Abbott et al., “Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO’s First Observing Run,” [20] から引用)

重力波に対する広い周波数帯に対する制限は Fig.(11) のようになっている。

### 23.3 Advanced LIGO による非等方重力波への制限

Advanced LIGO では全天で一様な重力波以外にも方向依存性を持った重力波に対しても上限を与えた。[15] 測定期間は *September 2015 ~ January 2016* である。

初期宇宙由来の全宇宙で一様な SGWB と周期的な重力波を放出する天体からの persistent gravitational wave を区別するためには重力波の到来方向  $\theta$  に対する依存性を調べる必要があ

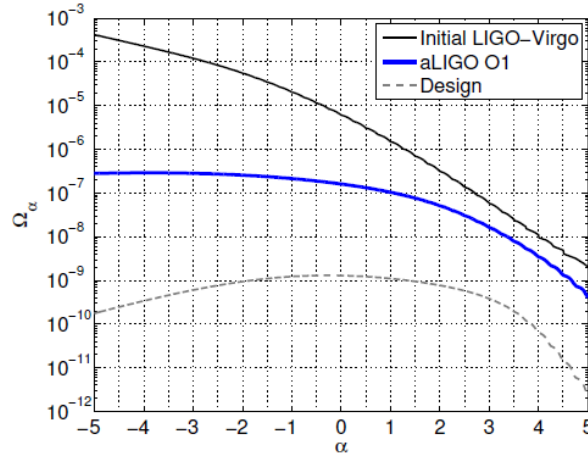


FIG. 2. Following [48], we present 95 % confidence contours in the  $\Omega_\alpha - \alpha$  plane. The region above these curves is excluded at 95% confidence. We show the constraints coming from the final science run of Initial LIGO-Virgo [33] and from O1 data. Finally, we display the projected (not observed) design sensitivity to  $\Omega_\alpha$  and  $\alpha$  for Advanced LIGO and Virgo [50].

Figure 10: aLIGO による SGWB の  $\alpha$  ごとの制限

曲線は  $\Omega_\alpha$  の上限を表している。(Virgo, LIGO Scientific Collaboration, B. P. Abbott et al., “Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO ’s First Observing Run,” [20] から引用)

る。そのため B. Allen と A. C. Ottewil[21] が導入した次の展開を用いる。

$$\langle h_A^*(f, \Omega) h_A(f', \Omega') \rangle = \delta_{AA'} \delta(f - f') \delta^2(\Omega, \Omega') H(f) P(\Omega) \quad (575)$$

右辺の周波数依存性と角度依存性が分離されているのは、このように仮定したためである。実際、非等方重力波に主要な寄与を与えるものが連星合体のみである場合には連星合体の周波数依存性に、その天球上の個数分布が角度依存性として重畳されたものになる。

これを用いて強度などを評価していく。

$$\Omega_{gw}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^3 H(f) \int d\Theta \mathcal{P}(\Theta) \quad (576)$$

ただし  $H_0$  はハッブル定数。  $f_{ref}$  は適当な振動数である。この時、実験データの解析には  $H(f) = \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha-3}$  を仮定して、シグナルの探索が行われた。

更に次の2つの量を定義する。一つ目は、 $\Theta$  方向に進む重力波のエネルギー密度

$$\begin{aligned} \Omega_{gw}(f, \Theta) &= \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^3 H(f) \mathcal{P}(\Theta) = \Omega_\alpha(\Theta) \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^\alpha, \\ \Omega_\alpha(\Theta) &= \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f_{ref}^3 \mathcal{P}(\Theta) \end{aligned} \quad (577)$$

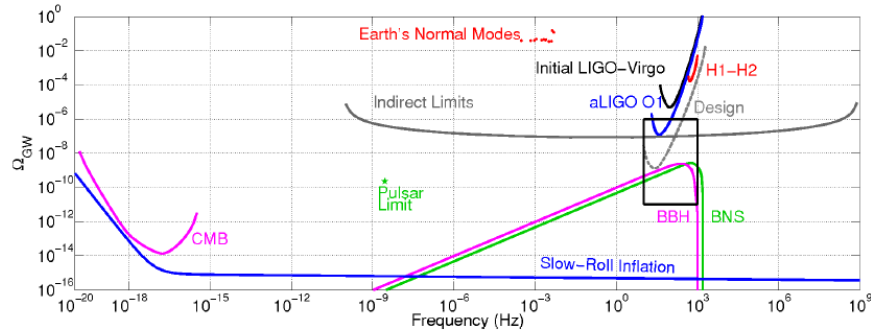


FIG. 3. Presented here are constraints on the background in PI form [51], as well as some representative models, across many decades in frequency. We compare the limits from ground-based interferometers from the final science run of Initial LIGO-Virgo, the co-located detectors at Hanford (H1-H2), Advanced LIGO (aLIGO) O1, and the projected design sensitivity of the advanced detector network assuming two years of coincident data, with constraints from other measurements: CMB measurements at low multipole moments [52], indirect limits from the Cosmic Microwave Background (CMB) and Big-Bang Nucleosynthesis [53, 54], pulsar timing [54], and from the ringing of Earth's normal modes [55]. In Figure 5 we show the region in the black box in more detail.

Figure 11: SGWB の周波数  $f$  ごとの制限

BBH, BNS はそれぞれ Binary Black Hole, Binary Neutron Star の雑音により予想されるシグナル。(Virgo, LIGO Scientific Collaboration, B. P. Abbott et al., “Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO’s First Observing Run,” [20] から引用)

および、そのエネルギーフラックス

$$\mathcal{F}(f, \theta) = \frac{c^3 \pi}{4G} f^2 H(f) \mathcal{P}(\theta) = \mathcal{F}_\alpha(\theta) \left( \frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha-1},$$

$$\mathcal{F}_\alpha(\theta) = \frac{c^3 \pi \pi^2}{4G} f_{ref}^2 \mathcal{P}(\theta) \quad (578)$$

である。エネルギーフラックスは物理次元  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$  を持つ。

Advanced LIGO では最高感度付近の  $f_{ref} = 25 \text{Hz}$  に決める。

以上のパラメーターを利用することで角度ごとの SGWB 強度を観測から決定できる。この観測の段階では、意味のある SGWB シグナルは得られておらず、SNR と upperbound の全天マップ Fig.(12) が論文 [15] では与えられている。

### 23.4 将来的な eLISA の感度

将来的には地上ではなく宇宙に重力波干渉計を作る計画が進められている。代表的なものとして eLISA, DECIGO, BBO があるがここでは eLISA の SGWB に対する感度をまとめる。SGWB の測定では長時間、多数検出器の相関を取ることで大きく感度を上昇させることが出来る。ただし各検出器の位置関係によりどの程度 SNR が向上するかは変わってくる。eLISA はいくつかの配置計画があるが、それぞれの配置に置ける SGWB への感度は Fig.(13) のようになる。[22]

eLISA は mHz 領域の重力波に対して強力な探索能力を持つことが期待されるが、この周波数帯には Fig.(11) に記載しているように Binary Black Hole (BBH), Binary Neutron Star (BNS) などのノイズが存在すると考えられるため、弱すぎる初期重力波はどうしても観測できない。一方でこれは、BBH, BNS シグナルを eLISA と Advanced LIGO のそれぞれが独立に検出することが可能になることも意味する。

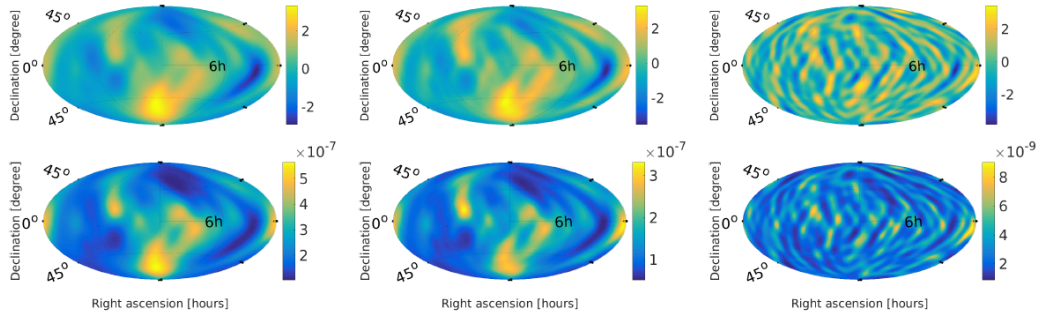


FIG. 1. All-sky radiometer maps for point-like sources showing SNR (top) and upper limits at 90% confidence on energy flux  $\mathcal{F}_\alpha$  [ $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ] (bottom) for three different power-law indices,  $\alpha = 0, 2/3$  and  $3$ , from left to right, respectively. The p-values associated with the maximum SNR are (from left to right)  $p = 7\%$ ,  $p = 12\%$ ,  $p = 47\%$  (see Table I).

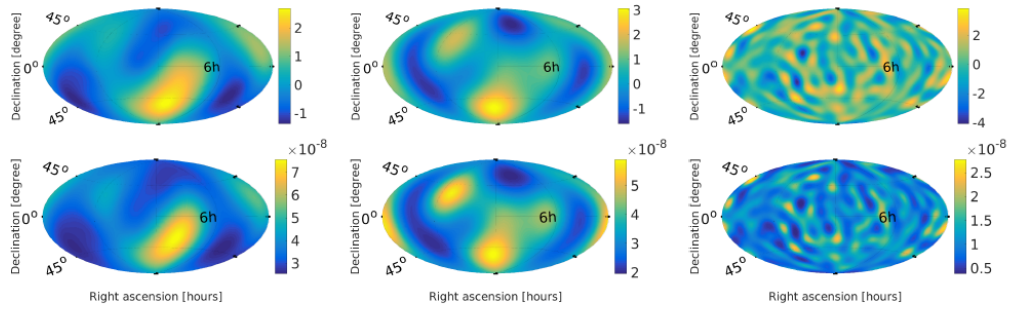


FIG. 2. All-sky maps for extended sources showing SNR (top) and upper limits at 90% confidence on the energy density of the gravitational wave background  $\Omega_g$  [ $\text{sr}^{-1}$ ] (bottom) for three different power-law indices  $\alpha = 0, 2/3$  and  $3$ , from left to right, respectively. The p-values associated with the maximum SNR are (from left to right)  $p = 18\%$ ,  $p = 11\%$ ,  $p = 11\%$  (see Table I).

Figure 12: SNR と upper bound の全天マップ

6つの図は、列ごとに左から  $\alpha = 0, \frac{2}{3}, 3$  を仮定した場合の解析結果であり、上の図は天球上でのSNRを表し、下の図はその時の上限を表す。上の6つの図はpoint-sourceから放出されたと仮定した結果、下の6つの図がextended-sourceから放出されたと仮定した結果を表す。両者では解析方法が異なる。(Virgo, LIGO Scientific Collaboration, B. P. Abbott et al., “Directional limits on persistent gravitational waves from Advanced LIGO’s first observing run,” [15] から引用)

## 24 背景重力波の評価

一般には再加熱から晴れ上がりまでの間に生じたイベントからの重力波をPremordial GW(Relic GW)と呼ぶ。イベントとしては真空の相転移や位相欠陥の進化などが考えられている。

### 24.1 The characteristic frequency

重力波生成の詳細に立ち入らずに、どのような性質を持つか一般的に調べる。

時刻  $t_*$  に周波数  $f_*$  の重力波が生じたとして、どのようなスペクトルになるか考える。

現在の重力波スペクトルにおいて特徴周波数  $f_0$  を  $f_*$  を用いて計算する。 $f_0 = f_* \frac{a(t_*)}{a(t_0)}$  は自明だが、 $\frac{a(t_*)}{a(t_0)}$  を重力波放出時の温度スケール  $T_*$  で書き直したい。

輻射・物質優勢期の宇宙はエントロピー保存が十分よく成り立つと考えられる。そこで

$$S = \text{const} \times g_s(T_0) a^3(t_0) T_0^3 = \text{const} \times g_s(T_*) a^3(t_*) T_*^3 \quad (579)$$

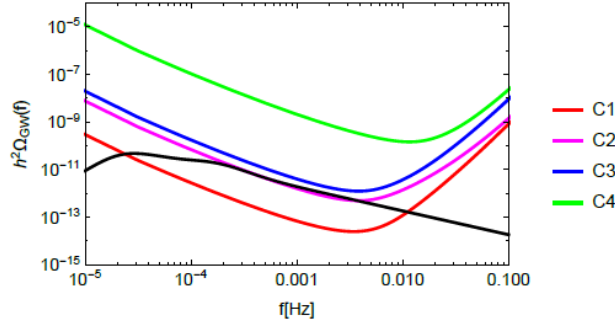


Figure 1: Sensitivity curves of the C1-C4 configurations given in Table 1 compared with a typical GW signal. We have chosen the signal predicted in the Higgs portal scenario described in Section 4.2.2 with benchmark values  $T_* = 59.6$ ,  $\alpha = 0.17$ ,  $\beta/H_* = 12.54$ ,  $\phi_*/T_* = 4.07$  (see Table 3).

### Figure 13: eLISA の設計と SGWB 感度

(C. Caprini et al., “Science with the space-based interferometer eLISA. II: Gravitational waves from cosmological phase transitions,” JCAP 1604 no. 04, (2016) 001[22] から引用)

を用いることで ( $g_S(T)$  はエントロピーに寄与する温度  $T$  での自由度の数を光の温度に対して規格化したもの。)

$$f_0 \simeq 8.0 \times 10^{-14} f_* \left( \frac{100}{g_S(T_*)} \right)^{1/3} \frac{1 \text{ GeV}}{T_*} \quad (580)$$

と書く使いやすい。

特にこの時間で典型的な  $f_*$  を見積もりたい。時間  $t_*$  でのホライゾン半径  $H_*^{-1}$  は、その時点で起きたイベントが因果的に関連づく最長のスケールである。よって、イベントにより生成される重力波ゆらぎの波長  $\lambda$  は  $H_{*-1}$  よりも短いと考えられる。よって  $f_* = \frac{1}{\lambda} = \varepsilon H_*$  ( $0 < \varepsilon < 1$  であり、特別なスケールが入らない限り、そこまで小さくはならない。) および輻射優勢期のハッブル定数  $H^{*2} = \frac{8\pi}{3} G \rho_r(t_*) = \frac{8\pi^3 g_* T_*^4}{90 M_{pl}^2}$  を組み合わせると

$$f_0 > 1.65 \times 10^{-7} \left( \frac{100}{g_S(T_*)} \right)^{1/3} \left( \frac{g(T_*)}{100} \right)^{1/2} \frac{T_*}{1 \text{ GeV}} \quad (581)$$

となる。数十 Hz の RelicGW が測定に掛かったら、温度としては  $10^9 \text{ GeV}$  程度の高エネルギー状態が見えることになる。

ここで考慮すべきは、Fig.(11) からわかるように連星合体のノイズがちょうど  $(1-10^{10}) \text{ GeV}$  の領域に重なっている点である。このスケールのシグナルを観測するためにはノイズ軽減のための手法を開発する必要がある。もしくは連星合体シグナルと重ならない領域での背景重力波観測を行う必要がある。

この解析はインフレーション期の終わりの温度スケール  $T_{pl} \sim M_{pl} \sim 10^{18} \text{ GeV}$  まで使えるので、RelicGW の最大周波数として  $f_0 > 100 \text{ GHz}$  かそれ以上が推定される。

## 24.2 インフレーション由来の背景重力波

インフレーションに伴う重力波として、真空の基底の取り替えにより生成されるものがある。時間とともにメトリックが変わると、場の基底が変わり粒子生成が起こる。粒子数で書くと

$$\tilde{n}_k = n_k + 2|\beta_k|^2 \left( n_k + \frac{1}{2} \right) \quad (582)$$

となり、増幅因子  $1 + 2|\beta_k|^2$  として効く。重力波があった場合はその信号は増幅され、また重力波がなくてもその零点振動が粒子に転換される。

増幅効果としてインフレーション期-輻射優勢期転移 (De Sitter-RD transition) を考察する。 $t = t_{dsR}$  で転移したとする。この転移の時刻は  $t_{ref}$  とは微妙に異なるが大体同じ時刻である。

インフレーション期は  $a(t) = a_{DSE} e^{H_{ds} t}$  であり、この間は  $\eta = \int \frac{dt}{a} = -\frac{1}{aH_{ds}}$  となる、よって  $\alpha(\eta) = -\frac{1}{H_{ds}\eta}$ , ( $-\infty < \eta < \eta_{dsR}$ ) となる。インフレーション期のモード関数の方程式を [1] から引用してくと

$$v'' + \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) v = 0 \quad (583)$$

となるが、簡単のため  $c_s = 1$  で解くと ( $z \propto a$  である。)

$$v_k(\eta) = \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta} \quad (584)$$

となる。ただし Bunch-Davies 条件 ( $v_k(\eta = -\infty) = e^{-ik\eta}$ ) で解を組んだ。<sup>50</sup>

次に ( $\eta_1 < \eta$ ) では輻射優勢期であり、 $\alpha(t) = a_R t^{1/2} = \frac{1}{H\eta_{dsR}^2} (\eta - 2\eta_{dsR})$  となる。インフレーション期の支配方程式 Eq(583) として計算したが FLRW 背景時空での計算なので  $c_s = 1$ ,  $\frac{z''}{z} = \frac{a''}{a}$  としてしまえば、輻射優勢期でも使える。<sup>51</sup>このとき、

$$v_k(\eta) = \alpha_k e^{-ik\eta} + \beta_k e^{+ik\eta} \quad (585)$$

が解となる。これらの線形結合は  $\eta = \eta_1$  での接続条件からきまる。そこで、モード関数  $v_k, v'_k$  が滑らかにつながることを課すと

$$\alpha_k = 1 - \frac{i}{k\eta_{dsR}} - \frac{1}{2k^2\eta_{dsR}^2}, \quad \beta_k = \frac{1}{2k^2\eta_{dsR}^2} \quad (586)$$

となり増幅が有効に効く波数が  $k|\eta_{dsR}| \ll 1$  だとわかった。

この条件  $k|\eta_{dsR}| \ll 1$  をもっとわかりやすく書き直す。まず現在観測される周波数  $f_0$  と結びつけるには  $2\pi f_0 = k/a_0$  を用いる。(k は共動的な量である。)そして

$$k\eta_1 = 2\pi f_0 \alpha(t_0) |\eta_{dsR}| = \frac{2\pi f_0}{H(t_{dsR})} \frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t_{dsR})} = \frac{2\pi f_0}{H(t_{dsR})} \left( \frac{t_0}{t_{eq}} \right)^{2/3} \left( \frac{t_{eq}}{t_{dsR}} \right)^{1/2} = \frac{f_0}{f_{amp}},$$

$$f_{amp} := \frac{H(t_{dsR})}{2\pi(1+z_{eq})} \left( \frac{t_{dsR}}{t_{eq}} \right)^{1/2} \quad (587)$$

<sup>50</sup> 以前とはモード関数の規格化の定義が異なるが、 $\beta_k$  の定義に必要なのはモード関数の比であり問題ない。

<sup>51</sup>  $z'' \propto a'' = 0$  の解は  $a = C, C\eta$  ( $C: \text{const}$ ) である。前者は静的宇宙であり、後者は  $\frac{a}{C} = \int \frac{dt}{a} \Rightarrow \frac{d}{dt} a^2 = \text{const}$  の解であり  $a \propto t^{1/2}$  から輻射優勢期である。



より増幅率は  $1 + \frac{f_{amp}^4}{2f^4}$  で書ける。

ここで因子  $f_{amp}$  を評価する。まず輻射優勢期の膨張  $a(t) \propto t^{2/3}$  を用いて  $(t_0/t_{eq})^{2/3} = 1 + z_{eq}$  と変形されていることに注意。物質-輻射平衡は

$$\Omega_r(t_{eq}) = \Omega_r^0 (1 + z_{eq})^4 = \Omega_m(t_{eq}) = \Omega_m^0 (1 + z_{eq})^3 \quad (588)$$

で決まることから現在での観測値  $\Omega_r^0, \Omega_m^0$  により  $1 + z_{eq}$  を求めることが出来る。輻射の成分は光と主にニュートリノであり  $\Omega_r^0 = \Omega_\gamma^0 (1 + 0.2271 N_{eff})$  と書ける。具体的には  $\Omega_m^0 = 0.141, N_{eff} = 3.04$  [16], および  $\Omega_\gamma^0 = 9.04 \times 10^{-5}$  [1] である。これを用いて、

$$\left( \frac{t_0}{t_{eq}} \right)^{2/3} = 1 + z_{eq} := 922.1 \quad (589)$$

となる。また  $t_{eq}$  は  $t_0 = 138$  億年程度 [1] であることから

$$t_{eq} = 1.54 \times 10^{13} \text{ sec} \quad (590)$$

となる。次に、 $t_{dsR}/t_{eq}$  を考える。まず  $t_{dsR}$  ではインフレーション中のハッブルスケール  $H_{ds}$  が定数に近いことから、 $H(t_{dsR}) \sim H_{ds}$  であることを用いる。輻射優勢期において  $H(t) = \frac{1}{2t}$  を用いると、 $t_{dsR} = \frac{1}{2H_{ds}}$  となる。以上から

$$f_{amp} := \frac{H(t_{dsR})}{2\pi(1+z_{eq})} \left( \frac{t_{dsR}}{t_{eq}} \right)^{1/2} \simeq 2 \times 10^9 \left( \frac{H(t_{dsR})}{10^{-4} M_{pl}} \right)^{1/2} \text{ Hz} \quad (591)$$

ただし、次のように計算した。プランク質量  $M_{pl} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV} \cdot c^2$  を用いて  $M_{pl}$  で測定した

$$H_{ds} = A \cdot M_{pl} = A \cdot 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV} c^2 = A \cdot 1.2 \cdot 10^{19} \frac{\text{GeV} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} = A \frac{3.6 \cdot 10^{45}}{200 \text{ sec}} \quad (592)$$

に対して  $A = H_{ds}/M_{pl}$  に注意しながら代入した。注意点としてスローロール近似では  $H(t_1) \sim H_{ds} \sim \sqrt{\frac{V}{3M_{pl}^2}}$  であり、インフレーションのエネルギースケールと関係付く。DS-RD 転移のときの温度スケールが  $\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \sim 1$  程度だとすると、 $f = 100 \text{ Hz}$  程度に対して  $10^{28}$  倍の増幅が掛かる。

特に零点振動のみが増幅された場合のエネルギー密度は Eq(550) を用いて

$$h_0^2 \Omega_{GW}(f) \sim 2 \times 10^{-13} \left( \frac{H_{ds}}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \quad (593)$$

となる。スペクトルは  $f$  に依存しないフラットな形になることに注意。<sup>52</sup>

特にエネルギースケールが GUT scale :  $T \sim 10^{16} \text{ GeV} \sim 10^{-3} M_{pl}$  だと、 $H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho, \rho = 2 \frac{\pi^2}{30} T^4$  を用いて

$$h_0^2 \Omega_{GW}(f) \sim 10^{-17} \quad (594)$$

となる。

注意点として、先の計算では De Sitter-RD transition を瞬間的に扱ったが、実際は遷移の典型的な時間スケール  $\delta\tau$  に相当する周波数  $f_{max:dsR} := \frac{a_{dsR}}{a_0} \frac{1}{\delta\tau}$  以上の揺らぎの増幅は抑制され

<sup>52</sup> エネルギー密度が時間に依存していないように見えるが、現在の時刻という情報は  $f_{amp}$  に取り込まれている。

る。<sup>53</sup>仮に、再加熱のスケールが抑制に効くとすると、 $\delta\tau$ は再加熱の詳細で決まる。[1]を参考に、例えばあり得る例として再加熱の時間スケールを $\frac{1}{\tau} \sim 0.2 \times 10^{23} \text{Hz}$ とすると、 $f_{max:dsR} \sim \frac{a_{dsR}}{a_0} \frac{1}{\tau} \sim 9 \times 10^{-8} \left( \frac{10^{-4} M_{pl}}{H_{ds}} \right)^{1/2} \text{Hz}$ となる。また再加熱での温度上昇に伴うグラビティーノの過剰生成を避けるための条件から $10^{23} \text{Hz} > \frac{1}{\delta\tau} [1]$ が課されると、 $f_{max:dsR} \sim 10^{-7} \left( \frac{10^{-4} M_{pl}}{H_{ds}} \right)^{1/2} \text{Hz}$ 程度になる。その他に preheating が有効に働く場合はまた異なった $\delta\tau$ が出てくる。観測的に重力波の抑制 $f_{max:dsR}$ がわかれば reheating プロセスへ制限を掛けられる。

De Sitter-RD transition と同様に輻射優勢-物質優勢期転移 (RD-MD transition) でも増幅は生じる。先と同様に RD-MD transition の典型的な時間スケール $H_{eq} \sim \frac{1}{2t_{eq}}$ に相当する波数 $\frac{k}{a_{eq}} \sim H_{eq}$ 以上では増幅は抑制される。RD-MD transition を受ける揺らぎの最大の周波数は

$$f_{max;R-M} := \frac{a_{eq} H_{eq}}{2\pi a_0} = 6 \times 10^{-18} \text{Hz} \quad (595)$$

となる。それ以下の周波数では [5] より

$$h_0^2 \Omega_{gw}(f) \sim 10^{-13} \left( \frac{f_{eq}}{f} \right)^2 \left( \frac{H_{ds}}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \quad (596)$$

という増幅が働く。

このように生じる背景重力波の強度はとても弱く、最大限大きく見積もっても eLISA で見えるかどうかという程度である [24]。

### 24.3 Gravitational wave black body background

CMB の重力波版が存在するためには、インフレーション後に重力が他の粒子と熱平衡にある期間が必要となる。

そのため、Gravitational wave black body background の生成時間としてさかのぼれる限界は、インフレーション末期、再加熱の時期となる。

重力黒体輻射の温度を見積もる [24]。重力波も CMB と同様に十分初期の宇宙では熱平衡にあった可能性がある。その場合、当時の自由度に応じた重力場の黒体輻射があったと考えられる。Chapter.(22.1.1) の議論を参考に、簡単に黒体重力輻射の温度を計算する。現在の CMB の温度 $T_\gamma \sim 2.7\text{K}$ に対する黒体重力輻射の温度比 $\frac{T_{gw}}{T_\gamma}$ は熱平衡であった時刻の有効な自由度 $g_{gweq}$ を用いて書くことができる。Standard Model に重力子を足したモデルでは、 $g_{gweq} \sim 100$ であり、現在相対論的な輻射は光子 (2 自由度)、ニュートリノ (6 自由度)、重力子 (2 自由度) である。まず、重力子が熱平衡から離脱してから相対論的自由度が電子 (4 自由度)、光子 (2 自由度)、ニュートリノ (6 自由度) だけになる時期 $t_r$ までの間でエントロピーの等式として

$$a_{gweq}^3 g_{gweq} T_{gweq}^3 = a(t_r)^3 \left[ 2T_{gw(t_r)}^3 + 2T_r^3 + \frac{7}{8} (4T_r^3 + 6T_r^3) \right] \quad (597)$$

が成立する。ここで重力子が熱平衡にある時刻を $gweq$ と置いた。重力子の温度は熱平衡からの離脱以降、 $a_{gweq}^3 T_{gweq}^3 = a(t_r)^3 T_{gw(t_r)}^3$ で減少することから、

$$g_{gweq} a(t_r)^3 T_{gw(t_r)}^3 \sim a(t_r)^3 \left[ 2 + \frac{7}{8} (4 + 6) \right] T_r^3 \quad (598)$$

<sup>53</sup>[23] の Adiabatic vacuum を参照。ただしこの時のスケールには幾つかあり、 $\delta\tau = \frac{1}{H_{ds}}$ なども考えられる。詳細については数値計算が必要。Fig.(11)を見る限りでは相当弱い抑制になっている。これはこの場合の揺らぎの生成は DeSitter-RD transition よりもインフレーション期の膨張が主要な寄与になっているためと考えられる。

となる。 $t_r$ での光の温度  $T_r$  と現在の光の温度  $T_\gamma$  を結びつけるためには、現在はニュートリノが熱平衡から離脱し、電子陽電子が対消滅していることに注意して

$$a(t_r)^3 \left[ 2 + \frac{7}{8}(4+6) \right] T_r^3 = a_0^3 \left[ 2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}6T_\nu^3 \right] \quad (599)$$

を考える。ニュートリノの現在の温度  $T_\nu$  は熱平衡からの離脱以降、 $a(t_r)^3 T_r^3 = a_0^3 T_\nu^3$  で減少することから、

$$\frac{T_r a(t_r)}{T_\gamma a_0} = \frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} \quad (600)$$

となる。ここから、現在の重力波の温度  $T_{gw}$  として

$$\frac{T_{gw}}{T_\gamma} = \frac{T_{gw(t_r)} a(t_r) T_r}{T_r a_0 T_\gamma} \sim \left( \frac{43}{4g_{gweq}} \right)^{1/3} \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} \sim 0.9\text{K} \quad (601)$$

となる。

この重力波のスペクトルは熱平衡での粒子数の公式 ( $f = \frac{k}{2\pi a}$ )

$$n_k = e^{-\frac{2\pi f}{k_b T_{gw}}} \quad (602)$$

と Eq(550) を組み合わせると得られる。

$$h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f) \simeq 3.6 \left( \frac{e^{-\frac{2\pi f}{k_b T_{gw}}}}{10^{37}} \right) \left( \frac{f}{1\text{kHz}} \right)^4 \quad (603)$$

最大値は  $f = \frac{4k_b T_{gw}}{2\pi} = 8.6 \times 10^{10}\text{Hz}$  において  $h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f) = 3.6 \times 10^{-7}$  である。

#### 24.4 再加熱前後での重力波について

Gravitational wave black body background のように熱平衡にある重力波以外にも、再加熱に伴って重力波が生成される可能性はある。再加熱で非平衡的な乱流などが起こると再加熱温度  $T_{reh}$  のスケールの重力波が生成されうる。

また preheating においても重力波は生成されうる。しかし preheating 自体がモデル依存性が高いために、インフレーションモデルごとに異なる重力波シグナルになると考えられる。

#### 24.5 Cosmic String Network の重力波生成

位相欠陥の典型的な string 形状の Cosmic String Network が放出する重力波を計算する [24]。位相欠陥はその性質、分裂・合体の時間発展を調べるために数値計算を用いることが必要である。今回は必要な性質を論文から引きながら、解析的に計算する。SGWB は Network がちぎれて形成されるループの振動により生じる。

位相欠陥は輻射優勢期に生成されたとする。Cosmic String Network はネット構造とちぎれて出来たループからなる。数値計算から Cosmic String Network はスケーリング則に従うことが知られている [25]。つまりネットワークの形状は典型的な長さスケール  $l(t)$  によってのみ決まる。例えば、長さ  $l(t)$  の箱の中に入っている Cosmic String のネット構造の総距離はある定数  $A$  を用いて  $A l(t)$  と書ける。また Network がちぎれて形成される 1 つのループの円周の長さは  $\frac{\alpha}{2} l(t)$  で書ける。位相欠陥の長さあたりの質量を  $\mu$  で定義する。

輻射優勢期において、空間は  $\alpha(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$  で膨張する。そこで共変体積  $V = L^3 \alpha(t)^3$  を定義する。

エネルギー的な条件から Cosmic String Network が作るループの個数を見積もる。ネットワークの典型的なスケールは宇宙の膨張とともに変化するため、輻射優勢期のハッブル半径  $l(t) = H^{-1} = 2tc$  に取る。Cosmic String のネット形状の持つエネルギー密度は先のスケーリングの議論から

$$\rho(t) = \frac{\mu c^2 \times A l(t)}{l(t)^3} = \frac{\mu A}{4t^2} \quad (604)$$

と書ける。エネルギー保存則より時間とともに減少するエネルギーはループの生成に費やされていると考えられる。つまり、エネルギー保存則

$$d(V(t)\rho(t)) + (\mu\alpha t c^3) dN_{loops} = 0 \quad (605)$$

が成立する。ここから、

$$\frac{dN_{loops}}{dt} = \frac{1}{8} \frac{L^3 A}{\alpha c^3} t_0^{-3/2} t^{-5/2} \quad (606)$$

となる。

次にループが放出する SGWB を考える。ループの放出する放出重力波強度  $P$  はループの形状のみに依存して大きさには依存しないことが知られている [25]。強度  $P$  は典型的な形状のループに対して

$$P = \gamma G \mu^2 c \quad (607)$$

で与えられる。  $G$  はニュートン定数、  $\gamma \sim 50$  は定数。そこでループは単調にその長さを減らしていく。  $t_{birth}$  に生成されたループの、時間  $t$  での長さを  $l(t_{birth}, t)$  と置くと、

$$l(t_{birth}, t) = \alpha c t_{birth} - \gamma G \mu \left( \frac{t - t_{birth}}{c} \right) \quad (608)$$

となる。よって消滅する時刻  $t_{death}(t_{birth})$  は

$$t_{death}(t_{birth}) = \left( 1 + \frac{\alpha c^2}{\gamma G \mu} \right) t_{birth} =: \beta t_{birth} \quad (609)$$

と書ける。

以上の計算からわかることとして、現在に近づくほどループの生成数は減っていき、新しいループの生み出す重力波も減っていく。簡単な見積もりとして、現在生き残っているループは無視して、  $t_0/\beta$  までに生成されたループの作った重力波のみを考える。簡単のため物質優勢期を無視し、輻射優勢期のみで考える。その全放出エネルギーは、真空が相転移して Cosmic String Network が生成された時刻  $t_{form}$  を用いて

$$\begin{aligned} E_{GW} &= \int_{t_{form}}^{\frac{t_0}{\beta}} dt' \frac{dN_{loop}(t')}{dt} \int_{t'}^{\beta t'} dt'' \gamma G \mu^2 c \frac{\alpha(t'')}{\alpha(t_0)} \\ &= \int_{t_{form}}^{\frac{t_0}{\beta}} dt' \frac{dN_{loop}(t')}{dt} \frac{2}{3} \gamma G \mu^2 c t_0^{-1/2} t'^{3/2} (\beta^{3/2} - 1) \\ &= \frac{1}{8} \frac{L^3 A}{\alpha c^2} t_0^{-2} \frac{2}{3} \gamma G \mu^2 (\beta^{3/2} - 1) \left( \ln \left( \frac{t_0}{t_{form}} \right) - \ln \beta \right) \end{aligned} \quad (610)$$

となる。ただしエネルギーの定義に赤色変位  $\frac{a(t'')}{a(t_0)}$  が入っていることに注意。この最後の因子はモデルによっては

$$\ln\left(\frac{t_0}{t_{form}}\right) \gg \ln\beta \quad (611)$$

として二項目を無視できる。以下では二項目は無視する。

ここで周波数ごとのエネルギーの表示を得るためにはループから放出される重力波のスペクトルの情報が必要になる。仮にループの大きさに関わらず一定のスペクトルを持つとしたら、その中心周波数  $f_0$  として、赤色変位によりスペクトルはおよそ  $f = f_0 \frac{a(t_{form})}{a_0}$  に分布する。更におおざっぱな見積もりとして、先に求めたエネルギー  $E_{GW}$  が  $f$  に依存せずに分布したとすると、

$$\begin{aligned} \Omega_{GW}(f) &= \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho}{d \ln f} = \frac{1}{\rho_c} \frac{E_{GW}}{L^3 \ln(f_{max}/f_{min})} \\ &= \frac{1}{\rho_c} \frac{E_{GW}}{L^3 \ln(f_{max}/f_{min})} = \frac{1}{8} \frac{A}{\alpha c^2} \frac{32\pi G}{3c^2} \frac{2}{3} 2\gamma G\mu^2 \left(\beta^{3/2} - 1\right) \end{aligned} \quad (612)$$

となる。ただし  $H_0^2 = \frac{1}{4t_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c$  を用いた。

今回の計算は物質優勢期を無視しているため、実際は RD-MD transition の寄与や膨張率の評価に誤りがある。ただし目安としてはこの程度である。この量の具体的な大きさは Cosmic String の詳細による。

## 25 結論

本卒論では初期宇宙を調べる重要な道具である CMB 観測を導出する計算を扱った。ボルツマン方程式の解析を通して、宇宙が時間発展する中で起こるイベントがゆらぎのスペクトルに与える影響を見積もることができた。また次世代の観測として non-gaussianity と背景重力波について基礎的な計算手法をまとめた。

本卒論のまとめとして、今後の初期宇宙論の展望を議論したい。現在の初期宇宙観測で最も重要な観測は B-mode ゆらぎであり、Fig.(5) からインフレーションモデルに強力な制限を掛けることができる。しかし、インフレーションモデルは無数にあり、初期宇宙論を用いて Beyond Standard model を探索するためには更なる観測が必要になると考えられる。B-mode の次に重要になる観測として、non-gaussianity と背景重力波は強い期待を持たれている。non-gaussianity はその計算からわかるように高次の微分項があるほど強力に効く。non-gaussianity の観測はインフレーションモデルに対して、微分の高次項についての制限を与えることにつながる。背景重力波は弱いシグナルである一方、CMB では減衰してしまった晴れ上がり以前の物理の影響を現在まで保持している可能性がある。特に加速器物理で未探索な  $10^4$  GeV 以上のエネルギースケールの物理現象を探索するために、強力な手法となる。しかし、連星合体のノイズの問題を解決しない限り  $10^4 \sim 10^{10}$  GeV 付近への感度はあまり向上しない。そのためノイズ軽減の手法が必要とされる。

## Part VI

## Appendix

## A 初期宇宙論の基礎

## A.1 再加熱での崩壊率

参考文献 [1] では古典解をボルン近似で求めると書いていたが、ここでは場の理論を用いて摂動的に解く。tree の寄与しか計算しないため、実質的に古典的な場合の解と同じである。

ラグランジアン Eq(154) のファインマンルールは

$$\begin{array}{c} \phi \rightarrow \text{---} \text{---} \phi\text{-bar} \\ \phi \rightarrow \text{---} \text{---} \phi \\ \hline = -if \end{array}, \quad \begin{array}{c} \phi \rightarrow \text{---} \text{---} \chi \\ \phi \rightarrow \text{---} \text{---} \chi \\ \hline = -i\sigma \end{array} \quad (613)$$

である。場の理論からは先に崩壊率 Eq(156) を導く方が楽であり、崩壊数  $n$  は Eq(156) の直前の議論を逆に辿ればたどり着ける。

始状態は静止系  $q^\mu = (m_\phi, \vec{0})$  から終状態  $p, p'$  に崩壊したとしてそれぞれの崩壊過程の振幅は、

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(\phi \rightarrow \bar{\varphi}\varphi) &= -if\bar{v}_{p'}u_p, \\ i\mathcal{M}(\phi \rightarrow \chi\chi) &= -2i\sigma \end{aligned} \quad (614)$$

である。崩壊率は近似  $m_\phi \gg m_\varphi, m_\chi$  のもとで

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi \rightarrow \bar{\varphi}\varphi) &= \frac{1}{2m_\phi} \int \sum_{spins} |\mathcal{M}(\phi \rightarrow \bar{\varphi}\varphi)|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta_{p+p'-q} \\ &= \frac{1}{2m_\phi} f^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{1}{4E_p^2} \delta_{2E_p - m_\phi} Tr(\not{p}\not{p}') = \frac{1}{\pi m_\phi} f^2 \int dp p^2 \delta_{2E_p - m_\phi} \\ &= \frac{m_\phi f^2}{8\pi} \end{aligned} \quad (615)$$

および

$$\Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_\phi} |\mathcal{M}(\phi \rightarrow \chi\chi)|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta_{p+p'-q} = \frac{\sigma^2}{8\pi m_\phi} \quad (616)$$

となる。ボソンは終状態を区別できないため半分になることに注意。

## B B-mode 偏光

## B.1 テンソルモードの spin sum

Eq(379) を次のように導出できる。これは  $\hat{p}$  のみに依存し、その構成から拘束  $\Pi_{ijk\ell}(\hat{q}) = \Pi_{klij}^*(\hat{q}) = \Pi_{jik\ell}(\hat{q})$ ,  $\gamma^{ab} p_a \Pi_{bjk\ell}(\hat{q}) = 0$ ,  $\Pi_{iik\ell}(\hat{q}) = 0$  ( $\sum_i$  は当然省く) が掛かっている。特に後者の拘束を満

たすためにはすべての添字に対して  $(\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j)$  が課されるべきである。つまり、4つの添字に対する巡回組み合わせ  $\sigma$  を用いて

$$\Pi_{ijk\ell}(\hat{q}) := \sum_{\sigma} a_{\sigma} (\delta_{\sigma(i)\sigma(j)} - \hat{q}_{\sigma(i)} \hat{q}_{\sigma(j)}) (\delta_{\sigma(k)\sigma(\ell)} - \hat{q}_{\sigma(k)} \hat{q}_{\sigma(\ell)}) \quad (617)$$

で書けるべき。(ij)(kl) 対称性よりありうる組み合わせは次となる。

$$\Pi_{ijk\ell}(\hat{q}) := a (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) + b [(\delta_{ik} - \hat{q}_i \hat{q}_k) (\delta_{lj} - \hat{q}_l \hat{q}_j) + (\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l) (\delta_{kj} - \hat{q}_k \hat{q}_j)] \quad (618)$$

これは  $(ij \leftrightarrow kl)$  対称性を満たしている。さらに  $\Pi_{iik\ell}(\hat{q}) = 0$  より

$$\begin{aligned} \Pi_{iik\ell}(\hat{q}) &:= 2a (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) + b [(\delta_{lk} - \hat{q}_l \hat{q}_k - \hat{q}_l \hat{q}_k + \hat{q}_l \hat{q}_j) + (\delta_{lk} - \hat{q}_l \hat{q}_k - \hat{q}_l \hat{q}_k + \hat{q}_l \hat{q}_j)] \\ &= 2(a + b) (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) \\ \Rightarrow \Pi_{ijk\ell}(\hat{q}) &:= a [(\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) - (\delta_{ik} - \hat{q}_i \hat{q}_k) (\delta_{lj} - \hat{q}_l \hat{q}_j) - (\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l) (\delta_{kj} - \hat{q}_k \hat{q}_j)] \end{aligned} \quad (619)$$

となる。最後に比例係数を決まるため、直交基底  $e_1 = m, e_2 = n, e_3 = \hat{p}$  で  $i, j, k, l = 1$  と置くと  $e_{11}^*(\hat{p}, +) = 1, e_{11}^*(\hat{p}, \times) = 0$  より

$$\begin{aligned} \Pi_{1111}(e_3) &= \sum_{\lambda} e_{ij}^*(\hat{p}, \lambda) e_{k\ell}(\hat{p}, \lambda) = 1 \\ &= a [\delta_{11} \delta_{11} - \delta_{11} \delta_{11} - \delta_{11} \delta_{11}] = -a \end{aligned} \quad (620)$$

以上より

$$\Pi_{ijk\ell}(\hat{q}) := (\delta_{ik} - \hat{q}_i \hat{q}_k) (\delta_{lj} - \hat{q}_l \hat{q}_j) + (\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l) (\delta_{kj} - \hat{q}_k \hat{q}_j) - (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) (\delta_{kl} - \hat{q}_k \hat{q}_l) \quad (621)$$

## B.2 角度積分

### B.2.1 拘束なし

$$\begin{aligned} \int d\Omega n_i n_j &= \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad , \\ \int d\Omega n_i n_j n_k n_l &= \frac{2\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \end{aligned} \quad (622)$$

を次のように処理する。

$$\begin{aligned} \int d^3 p p_i p_j e^{-\sigma p^2} &= \int d p p^2 p^2 e^{-\sigma p^2} \left( \int d\Omega n_i n_j \right) \\ &= \delta_{ij} \int d^3 p p_i p_i e^{-\sigma p^2} = \frac{\delta_{ij}}{3} \int d^3 p p^2 e^{-\sigma p^2} = \frac{\delta_{ij}}{3} 4\pi \int d p p^2 p^2 e^{-\sigma p^2} \end{aligned} \quad (623)$$

ただし途中の  $p_i p_i$  は和を取っていない。よって

$$\left( \int d\Omega n_i n_j \right) = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (624)$$

同様に  $\int p^{2n} e^{-\sigma p^2} dp = \frac{(2n-1)!!}{(2\sigma)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}$  を使って

$$\int d^3 p p_i p_j p_k p_l e^{-\sigma p^2} = \int dp p^6 e^{-\sigma p^2} \left( \int d\Omega n_i n_j n_k n_l \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma^7}} \frac{15}{8} \left( \int d\Omega n_i n_j n_k n_l \right) \quad (625)$$

に対して  $1 = i = j = k = l$  で

$$\int d^3 p p_1 p_1 p_1 p_1 e^{-\sigma p^2} = \int dp p_1^4 e^{-\sigma p_1^2} \int dp_2 e^{-\sigma p_2^2} \int dp_3 e^{-\sigma p_3^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{3}{4\sigma^2} \quad (626)$$

$1 = i = j, 2 = k = l$  で

$$\int d^3 p p_1^2 p_2^2 e^{-\sigma p^2} = \int dp_1 p_1^2 e^{-\sigma p_1^2} \int dp_2 p_2^2 e^{-\sigma p_2^2} \int dp_3 e^{-\sigma p_3^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{1}{4\sigma^2} \quad (627)$$

対称性から以上を調べれば十分。以上から

$$\int d^3 p p_i p_j p_k p_l e^{-\sigma p^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{1}{4\sigma^2} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \quad (628)$$

比較すると

$$\int d\Omega n_i n_j n_k n_l = \frac{2\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \quad (629)$$

### B.2.2 拘束あり

$$\begin{aligned} \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j e_{jk}(\hat{q}) &= \frac{1}{2} e_{ij}(\hat{q}) \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right), \\ \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}) &= \frac{1}{4} e_{ij}(\hat{q}) \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right)^2, \\ \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) &= \frac{1}{4} e_{ij}(\hat{q}) \int d\phi d(\cos\theta) f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right)^2 (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \end{aligned} \quad (630)$$

を次のように処理する。

まず次の積分  $\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sin^n \phi \cos^m \phi$  を考える。n が奇数なら奇関数で 0、m が奇数なら  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$  としてやはり奇関数で 0。よって  $n + m \leq 4$  の範囲で 0 でない積分は具体的には

$$\int d\phi \sin^4 \phi = \int d\phi \cos^4 \phi = \frac{3\pi}{4}, \quad \int d\phi \sin^2 \phi \cos^2 \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \int d\phi \sin^2 \phi = \int d\phi \cos^2 \phi = \pi \quad (631)$$

となる。

さて今、座標系を  $\hat{q} = e_z$  になるように取り直す。このとき、ijkl 添字は必ずしも新しい座標系での xyz 方向を向いていない。そこで回転行列  $U_{ij}$  を用いて添字が新しい座標系に対して xyz 方向を持つように変形する。このとき、



$$\int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_k e_{jk}(\hat{q}) = U_{is} U_{jt} \int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) \hat{p}_s \hat{p}_k e_{tk}(e_z) \quad (632)$$

となるが、特に積分  $\int d\phi \hat{p}_s \hat{p}_k e_{tk}(e_z)$  の  $s$  に具体的な成分を入れて取り扱う。 $s = z$  では、 $\int d\phi \hat{p}_z \hat{p}_k = 0$ , ( $k \neq z$ ) より  $k = z$  のみが値を持つ。しかし今、 $e_{tz}(e_z) = 0$  となるため、結局  $\int d\phi \hat{p}_z \hat{p}_k e_{tk}(e_z) = 0$  となる。次に  $s = x$  のとき、 $\int d\phi \hat{p}_x \hat{p}_k = \delta_{xk} \pi \sin^2 \theta$  となる。 $s = y$  も同様。以上から、

$$\int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_k e_{jk}(\hat{q}) = U_{is} U_{jt} \pi \int d(\cos \theta) f(\cos \theta) e_{ij}(e_z) \sin^2 \theta \quad (633)$$

となる。 $\pi = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi}{2}$  と  $\sin^2 \theta = 1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2$  より Eq(630) となる。

後半の式も同様に座標変換して、

$$\int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}) = U_{is} U_{jt} \int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) \hat{p}_s \hat{p}_t \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(e_z) \quad (634)$$

右辺を取りうる  $st$  の値で分類していく。 $(s, t) = (z, z)$  の時、 $\int d\phi \hat{p}_z^2 \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(e_z) = \hat{p}_z^2 \int d\phi (\hat{p}_x^2 e_{xx}(e_z) + \hat{p}_y^2 e_{yy})$  となり積分を行うと  $e_{xx} + e_{yy}$  が出てくるが、TT ゲージでの条件  $e_{zk} = 0$  かつ  $\sum_i e_{ii} = 0$  より 0 となる。 $(s, t) = (x, x)$  の時、

$$\int d\phi \hat{p}_x^2 \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(e_z) = \sin^4 \theta \left( \frac{3\pi}{4} e_{xx}(e_z) + \frac{\pi}{4} e_{yy}(e_z) \right) = \sin^4 \theta \frac{\pi}{2} e_{xx}(e_z) \quad (635)$$

$(s, t) = (y, y)$  も同様。次に  $(s, t) = (z, x)$  の時、 $(k, l) = (z, x)$  の組のみ値を持つが、それは  $e_{zk} = 0$  より 0 になる。 $y$  についても同様。最後に  $(s, t) = (x, y)$  の時は

$$\int d\phi \hat{p}_x \hat{p}_y \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(e_z) = 2 \sin^4 \theta \frac{\pi}{4} e_{xy}(e_z) = \sin^4 \theta \frac{\pi}{2} e_{xy}(e_z) \quad (636)$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}) \\ &= U_{is} U_{jt} \int d(\cos \theta) f(\cos \theta) e_{st}(e_z) \sin^4 \theta \frac{\pi}{2} \\ &= U_{is} U_{jt} \int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) e_{st}(e_z) \left(1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2\right)^2 \theta \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (637)$$

として Eq(630) となる。

最後に

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) \\ &= U_{is} U_{jt} \int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) (\hat{q}_s - \hat{p}_z \hat{p}_s) (\hat{q}_t - \hat{p}_z \hat{p}_t) \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) \end{aligned} \quad (638)$$

について、 $(s, t) = (z, z)$  で

$$\int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) (1 - \hat{p}_z^2) (1 - \hat{p}_z^2) \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) = 0 \quad (639)$$

となる。\$(s, t) = (z, x)\$ で

$$\int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) (1 - \hat{p}_z^2) (-\hat{p}_z \hat{p}_x) \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) = 0 \quad (640)$$

となり \$(s, t) = (z, y)\$ でも同様。さらに \$(s, t) = (x, x)\$ で

$$\int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) (-\hat{p}_z \hat{p}_x) (-\hat{p}_z \hat{p}_x) \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) = \int d(\cos \theta) f(\cos \theta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta \frac{\pi}{2} e_{xx}(\hat{q}) \quad (641)$$

となり \$(s, t) = (y, y)\$ でも同様。次に \$(s, t) = (x, y)\$ で

$$\int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) (-\hat{p}_z \hat{p}_x) (-\hat{p}_z \hat{p}_y) \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) = 2 \int d(\cos \theta) f(\cos \theta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta \frac{\pi}{4} e_{xy}(\hat{q}) \quad (642)$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_p f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (\delta_{il} - \hat{p}_i \hat{p}_l) (\delta_{kj} - \hat{p}_k \hat{p}_j) \hat{q}^k \hat{q}^l \hat{p}_a \hat{p}_b e_{ab}(\hat{q}) \\ &= U_{is} U_{jt} \int d\phi d(\cos \theta) f(\cos \theta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta \frac{1}{4} e_{st}(\hat{q}) \\ &= \frac{1}{4} e_{ij}(\hat{q}) \int d\phi d(\cos \theta) f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2 (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \end{aligned} \quad (643)$$

### B.3 \$g\_{lm}(\rho, e\_z, \lambda)\$ の表式

Eq(453) の計算の処理を行う。

$$g_{lm}(\rho, \hat{q}, \lambda) := \int \Omega_n \mathcal{Y}_l^{m*}(\hat{n}) e^{i\rho \hat{n}_z} e_{+l}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) e_{ij}(e_z, \lambda) \quad (644)$$

を計算する。

最初に偏光ベクトルが \$e\_{\pm}(e\_z) := \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i, 0)\$ で定まるとき、\$\hat{n}\$ 方向へは次のように書ける。

$$\begin{aligned} e_{\pm}(\hat{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\theta} \pm i \hat{\phi}) \\ \hat{\theta} &:= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad , \quad \hat{\phi} := (-\sin \theta, \cos \phi, 0) \end{aligned} \quad (645)$$

ここから具体的に成分を代入することで

$$e_{+l}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) e_{ij}(e_z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{+1}(\hat{n}) \pm i e_{+2}(\hat{n})) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\pm 2i\phi} (1 \mp \cos \theta)^2 \quad (646)$$

となり \$\phi\$ についての依存性が \$e^{\pm 2i\phi}\$ だとわかる。積分 \$\int \Omega\_n = \int d\cos \theta d\phi\$ において、\$\phi\$ 積分は \$\mathcal{Y}\_l^{m\*}(\hat{n}) = e^{-im\phi} \times (\theta\$ の関数) であることを思い出すと、\$m = \lambda = \pm 2\$ のみで値を持ち、それ以外では \$\int\_0^{2\pi} d\phi e^{im\phi} = 0 (m \neq 0)\$ である。よって以下の解析は \$m = \lambda = \pm 2\$ に限る。

Eq(440) を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_l^{\pm 2}(\hat{n}) &= e^{\pm 2i\phi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \partial_{\pm} P_l^{(2)}(\cos\theta) \quad , \\
\partial_{\pm} &:= (1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} \pm 4 \frac{d}{d\mu} + 4 \frac{1 \pm \mu}{1-\mu^2} \quad , \\
P_l^{(2)}(\cos\theta) &:= (1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} P_l(\mu) \quad , \\
\mu &:= \cos\theta
\end{aligned} \tag{647}$$

である。

以上により最後に残った積分  $\int d\cos\theta = \int_{-1}^1 d\mu$  を処理する準備ができた。球ベッセル関数への積分

$$\int_{-1}^1 d\mu e^{i\rho\mu} P_l(\mu) = 2i^l j_l(\rho) \tag{648}$$

を用いて計算を処理していくと

$$g_{lm}(\rho, e_z, \pm 2) := -2^l \delta_{m, \pm 2} \sqrt{\pi \frac{2l+1}{8}} \left[ 12 + 8\rho \frac{d}{d\rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \mp 8i \rho \frac{d}{d\rho} \mp 2i\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right] \frac{j_l(\rho)}{\rho^2} \tag{649}$$

と書き変わる。

## C non-Gaussianity

### C.1 計算集

#### C.1.1 $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ の計算

ADM 分解されたメトリック Eq(462) からクリストッフェル記号を計算する。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij0} &= \Gamma_{i0j} = \frac{1}{2} (g_{i0,j} + g_{ij,0} - g_{0j,i}) \\
&= \frac{1}{2} (N_{i,j} - N_{j,i} + h_{ij,0}) = \frac{1}{2} \left( \nabla_j^{(3)} N_i - \nabla_i^{(3)} N_j + h_{ij,0} \right) = -NK_{ij} + \nabla_j^{(3)} N_i \quad , \\
\Gamma_{ijk} &= \Gamma_{ijk}^{(3)} \quad , \\
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\mu} (2g_{\mu 0,0} - g_{00,\mu}) = \frac{1}{2} g^{00} (2g_{00,0} - g_{00,0}) + \frac{1}{2} g^{0i} (2g_{i0,0} - g_{00,i}) \\
&= -\frac{1}{2N^2} \left( -2N\dot{N} + \dot{h}_{ij} N^i N^j + 2h_{ij} N^i \dot{N}^j \right) + \frac{N^i}{2N^2} \left( 2\dot{N}_i + 2NN_{,i} - h_{kj,i} N^k N^j - 2h_{kj} N^k N_{,i}^j \right) \\
&= \frac{1}{2N^2} \left( 2N\dot{N} + \dot{h}_{ij} N^i N^j + 2N^i NN_{,i} - h_{kj,i} N^i N^k N^j - 2h_{kj} N^i N^k N_{,i}^j \right) \\
&= \frac{1}{N} \left( \dot{N} + N^i N_{,i} \right) - \frac{1}{2N^2} N^i N^j \left( h_{kj,i} N^k + 2N_{j,i} - 2h_{kj,i} N^k - \dot{h}_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left( \dot{N} + N^i N_{,i} - N^i N^j K_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{650}$$

更に

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{0\mu}(g_{\mu i,0} + g_{\mu 0,i} - g_{0i,\mu}) = \frac{1}{2}g^{00}(g_{0i,0} + g_{00,i} - g_{0i,0}) + \frac{1}{2}g^{0k}(g_{ki,0} + g_{k0,i} - g_{0i,k}) \\
&= -\frac{1}{2N^2}(\dot{N}_i - 2NN_{,i} + h_{jk,i}N^kN^j + 2N_jN_{,i}^j - \dot{N}_i) + \frac{N^k}{2N^2}(h_{ki,0} + N_{k,i} - N_{i,k}) \\
&= \frac{1}{2N^2}(2NN_{,i}) \\
&+ \frac{1}{2N^2}(-\dot{N}_i - h_{jk,i}N^kN^j - 2N_jN_{,i}^j + \dot{N}_i + N^k h_{ki,0} + N^k N_{,i}^j h_{jk} + N^k N^j h_{jk,i} - N^k N_{,k}^j h_{ji} - N^k N^j h_{ji,k}) \\
&= \frac{1}{2N^2}(2NN_{,i}) + \frac{N^k}{2N^2}(-2h_{jk}N_{,i}^j + \dot{h}_{ki} + N_{,i}^j h_{jk} - N_{,k}^j h_{ji} - N^j h_{ji,k}) \\
&= \frac{1}{2N^2}(2NN_{,i}) - \frac{N^k}{2N^2}(N_{k,i} - h_{jk,i}N^j - \dot{h}_{ki} + N_{i,k} - h_{ij,k}N^j + N^j h_{ji,k}) \\
&= \frac{1}{N}(N_{,i} - N^j K_{ij}) \tag{651}
\end{aligned}$$

である。次に

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{i0}(g_{0j,0} + g_{00,j} - g_{0j,0}) + \frac{1}{2}g^{ik}(g_{kj,0} + g_{k0,j} - g_{0j,k}) \\
&= \frac{N^i}{2N^2} \left( -2NN_{,j} + h_{kl,j}N^kN^l + 2h_{kl}N^kN_{,j}^l \right) + \frac{1}{2} \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) (h_{kj,0} + N_{k,j} - N_{j,k}) \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} + \frac{N^i}{2N^2} \left( h_{kl,j}N^kN^l + 2h_{kl}N^kN_{,j}^l \right) - \frac{1}{2} \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) \left( -h_{kj,0} - \nabla_j^{(3)}N_k + \nabla_k^{(3)}N_j \right) \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} + \frac{N^i}{2N^2} \left( h_{kl,j}N^kN^l + 2h_{kl}N^kN_{,j}^l \right) - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} + \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) \left( \nabla_j^{(3)}N_k \right) \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} \\
&\quad + \frac{N^i}{2N^2} \left( h_{kl,j}N^kN^l + 2h_{kl}N^kN_{,j}^l \right) + \nabla_j^{(3)}N^i - N_k \nabla_j^{(3)}h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \left( \nabla_j^{(3)}N_k \right) \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} + \nabla_j^{(3)}N^i \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \left( -\frac{N^2}{2}N^l (h_{jl,t} + h_{lt,j} - h_{jt,l}) h^{ti} - \frac{N^2}{2}N^t (h_{jl,t} + h_{lt,j} - h_{jt,l}) h^{li} \right) \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \left( N^i h_{kl}N^kN_{,j}^l - N^2N_k h_{,j}^{ik} - N^iN^kN_{k,j} \right) + \frac{1}{N^2}N^iN^kN^l \left( \frac{1}{2}h_{kl,j} + \frac{1}{2}(h_{jl,k} + h_{kl,j} - h_{kj,l}) \right) \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} + \nabla_j^{(3)}N^i \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \left( N^i h_{kl}N^kN_{,j}^l - N^iN^k h_{sk}N_{,j}^s - N^iN^kN^s h_{sk,j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( 2N_k h^{im} h^{lk} h_{ml,j} - N^l (h_{jl,t} + h_{lt,j} - h_{jt,l}) h^{ti} - N^t (h_{jl,t} + h_{lt,j} - h_{jt,l}) h^{li} \right) + \frac{1}{N^2}N^iN^kN^l h_{kl,j} \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} + \nabla_j^{(3)}N^i \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \left( N^i h_{kl}N^kN_{,j}^l - N^iN^k h_{sk}N_{,j}^s - N^iN^kN^s h_{sk,j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( 2N^l h^{im} h_{ml,j} - N^l (h_{jl,t} + h_{lt,j} - h_{jt,l}) h^{ti} - N^l (h_{jt,l} + h_{lt,j} - h_{jl,t}) h^{li} \right) + \frac{1}{N^2}N^iN^kN^l h_{kl,j} \\
&= -\frac{N^iN_{,j}}{N} - N \left( h^{ik} - \frac{N^iN^k}{N^2} \right) K_{jk} + \nabla_j^{(3)}N^i \tag{652}
\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{0j,i} + g_{0i,j} - g_{ij,0}) + \frac{1}{2}g^{0k}(g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \\
&= -\frac{1}{2N^2} (N_{j,i} + N_{i,j} - h_{ij,0}) + \frac{N^k}{2N^2} (h_{kj,i} + h_{ki,j} - h_{ij,k}) = -\frac{1}{N}K_{ij} \tag{653}
\end{aligned}$$

となる。

最後に

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i0}(g_{0j,k} + g_{0k,j} - g_{jk,0}) + \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \\
&= \frac{N^i}{2N^2}(N_{j,k} + N_{k,j} - h_{jk,0}) + \frac{1}{2}\left(h^{il} - \frac{N^i N^i}{N^2}\right)(h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{jk,l}) \\
&= \Gamma_{jk}^{(3)i} + \frac{N^i}{N}K_{jk}
\end{aligned} \tag{654}$$

ただしここで

$$\Gamma_{jk}^{(3)i} := h^{is}\Gamma_{sjk}^{(3)} = h^{is}\frac{1}{2}(h_{sj,k} + h_{sk,j} - h_{jk,s}) \tag{655}$$

を用いた。

### C.1.2 $R_{\mu\nu\tau\rho}$ の計算

クリストッフエル記号 Eq(469) を参考にリーマンテンソルを構成していく。まず

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &:= g_{i\rho}\Gamma_{lj,k}^\rho - g_{i\rho}\Gamma_{kj,l}^\rho + \Gamma_{ik\rho}\Gamma_{lj}^\rho - \Gamma_{il\rho}\Gamma_{kj}^\rho \\
&= \left[ -N_i \left( \frac{K_{jl}}{N} \right)_{,k} + h_{im} \left( \Gamma_{jl}^{(3)m} + \frac{N^m}{N}K_{jl} \right)_{,k} - \frac{K_{jl}}{N} (-NK_{ik} + \nabla_k^{(3)}N_i) + \Gamma_{ikm}^{(3)} \left( \Gamma_{jl}^{(3)m} + \frac{N^m}{N}K_{jl} \right) \right] \\
&\quad - [k \leftrightarrow l] \\
&= R_{ijkl}^{(3)} + \left\{ K_{jl} \left[ -h_{im,k} \frac{N^m}{N} + \frac{1}{N}\Gamma_{ki}^{(3)s}N_s + \Gamma_{ikm}^{(3)} \left( \frac{N^m}{N} \right) \right] + K_{jl}K_{ik} \right\} - \{k \leftrightarrow l\} \\
&= R_{ijkl}^{(3)} + K_{jl}K_{ik} - K_{jk}K_{il}
\end{aligned} \tag{656}$$

次に  $n^\mu n^\nu R_{\mu\nu j}$  を計算したい。まず

$$n_\mu R^\mu{}_{i\alpha j} = n^\mu R_{\mu i \alpha j} = \frac{1}{N}R_{0i\alpha j} - \frac{N^k}{N}R_{ki\alpha j} \tag{657}$$

について  $\alpha = j$  で

$$\begin{aligned}
n_\mu R^\mu{}_{ijk} &= -NR_{ijk}^0 = -N(\Gamma_{ki,j}^0 + \Gamma_{j\rho}^0\Gamma_{ki}^\rho) + N(\Gamma_{ji,k}^0 + \Gamma_{k\rho}^0\Gamma_{ji}^\rho) \\
&= -\left[ -K_{ki,j} + \frac{N_{,j}}{N}K_{ki} - (N_{,j} - N^s K_{js})\frac{K_{ki}}{N} - K_{js} \left( \Gamma_{ki}^{(3)s} + \frac{N^s}{N}K_{ki} \right) \right] + [j \leftrightarrow k] \\
&= [K_{ki,j} + K_{js}\Gamma_{ki}^{(3)s}] + [j \leftrightarrow k] \\
&= \nabla_j^{(3)}K_{ki} - \nabla_k^{(3)}K_{ji}
\end{aligned} \tag{658}$$

また  $\alpha = 0$  で

$$\begin{aligned}
n_\mu R^\mu_{i0j} &= -NR^0_{i0j} = -N \left( \Gamma_{ji,0}^0 + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{ji}^\rho \right) + N \left( \Gamma_{0i,j}^0 + \Gamma_{j\rho}^0 \Gamma_{0i}^\rho \right) \\
&= \left[ K_{ij,0} - \frac{\dot{N}}{N} K_{ij} + \frac{K_{ij}}{N} \left( \dot{N} + N^s N_{,s} - N^s N^t K_{st} \right) - (N_{,k} - N^s K_{ks}) \left( \Gamma_{ij}^{(3)k} + \frac{N^k}{N} K_{ij} \right) \right] \\
&\quad - \frac{N_{,j}}{N} (N_{,i} - N^s K_{is}) + (N_{,ij} - N^s_{,j} K_{is} - N^s K_{is,j}) + \frac{1}{N} (N_{,j} - N^s K_{js}) (N_{,i} - N^t K_{it}) \\
&\quad - K_{jk} \left( -\frac{N^k N_{,i}}{N} - N \left( h^{ks} - \frac{N^k N^s}{N^2} \right) K_{is} + \nabla_i^{(3)} N^k \right) \\
&= K_{ij,0} + N^s K_{ks} \Gamma_{ij}^{(3)k} - N_{,k} \Gamma_{ij}^{(3)k} + N_{,ij} - N^s_{,j} K_{is} - N^s K_{is,j} + NK_{jk} K_i^k - K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k \\
&= K_{ij,0} + NK_{jk} K_i^k - K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k - \nabla_j^{(3)} (N^s K_{is}) + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N \\
&\quad + N^s K_{ks} \Gamma_{ij}^{(3)k} - N_{,k} \Gamma_{ij}^{(3)k} - N^s \Gamma_{ji}^{(3)k} K_{sk} + \Gamma_{ij}^{(3)s} \nabla_s^{(3)} N \\
&= K_{ij,0} + NK_{jk} K_i^k - K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k - \nabla_j^{(3)} (N^s K_{is}) + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N \tag{659}
\end{aligned}$$

となる。

以上を組み合わせて

$$\begin{aligned}
n^\mu n^\nu R_{\mu\nu j} &= n^0 n^\mu R_{\mu i 0 j} + n^k n^\mu R_{\mu i k j} \\
&= \frac{1}{N} \left( K_{ij,0} + NK_{jk} K_i^k - K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k - \nabla_j^{(3)} (N^s K_{is}) + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N \right) - \frac{N^k}{N} \left( \nabla_k^{(3)} K_{ji} - \nabla_j^{(3)} K_{ki} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left( K_{ij,0} + NK_{jk} K_i^k - K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k - \nabla_j^{(3)} (N^s K_{is}) + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N - N^k \nabla_k^{(3)} K_{ji} + N^k \nabla_j^{(3)} K_{ki} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left( K_{ij,0} + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N + NK_{jk} K_i^k - \text{Lie}_{\bar{N}} K_{ij} \right) , \\
\text{Lie}_{\bar{N}} K_{ij} &:= K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k + \nabla_j^{(3)} (N^s K_{is}) + N^k \nabla_k^{(3)} K_{ji} - N^k \nabla_j^{(3)} K_{ki} \\
&= K_{jk} N_{,i}^k + K_{ik} N_{,j}^k + N^k K_{ji,k} + K_{jk} g_{is}^k N^s + K_{ik} g_{js}^k N^s - N^k g_{ik}^s K_{js} - N^k g_{jk}^s K_{is} \\
&= K_{jk} N_{,i}^k + K_{ik} N_{,j}^k + N^k K_{ji,k} \\
&= K_{jk} \nabla_i^{(3)} N^k + K_{ik} \nabla_j^{(3)} N^k + N^k \nabla_k^{(3)} K_{ij} \tag{660}
\end{aligned}$$

となる。

更にこれから

$$h^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

と定義した公式を用いて、添字対称性  $R_{\mu\alpha\nu\beta} = -R_{\alpha\mu\nu\beta} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} = R_{\nu\beta\mu\alpha}$  に注意すると、

$$\begin{aligned}
R &:= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} = (h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu) \left( h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta \right) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} - n^\mu n^\nu h^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} - h^{\mu\nu} n^\alpha n^\beta R_{\mu\alpha\nu\beta} + n^\mu n^\nu n^\alpha n^\beta R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= h^{ij} h^{kl} R_{ikjl} - 2n^\mu n^\nu h^{ij} R_{\mu i \nu j} \\
&= h^{ij} h^{kl} \left( R_{ikjl}^{(3)} + K_{kl} K_{ij} - K_{jk} K_{il} \right) - 2h^{ij} \frac{1}{N} \left( K_{ij,0} + \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(3)} N + NK_{jk} K_i^k - \text{Lie}_{\bar{N}} K_{ij} \right) \\
&= R^{(3)} + K_a^a K_b^b - 3K_{ab} K^{ab} - 2h^{ij} \frac{K_{ij,0}}{N} - 2 \frac{\Delta^{(3)} N}{N} + \frac{4}{N} K_k^i \nabla_i^{(3)} N^k + 2 \frac{1}{N} N^k \nabla_k^{(3)} K_i^i \tag{661}
\end{aligned}$$

ここに更に  $h^{ij}\dot{K}_{ij} = \dot{K}_i^i + h_{ij,0}K^{ij} = \dot{K}_i^i + K^{ij} \left( \nabla_i^{(3)} N_j + \nabla_j^{(3)} N_i - 2NK_{ij} \right)$  を課してまとめると

$$R = R^{(3)} + K_a^a K_b^b + K_{ab}K^{ab} - 2\frac{\dot{K}_i^i}{N} - 2\frac{\Delta^{(3)}N}{N} + 2\frac{1}{N}N^k \nabla_k^{(3)} K_i^i \quad (662)$$

となる。

### C.1.3 $R^{(3)}$ の高次展開

Mathematica を併用して計算した結果をまとめる。メトリック Eq(475) に基づいて  $R^{(3)}$  を計算すると

$$\begin{aligned} R^{(3)} = & -4a^{-2}\Delta\zeta + a^{-2} \left[ 8\zeta\Delta\zeta - 2\zeta_{,i}^2 + 4\zeta_{,ij}\gamma_{ij} - \frac{1}{4}\gamma_{ij,k}^2 \right] \\ & + a^{-2} \left[ -8\zeta^2\Delta\zeta + 4\zeta\zeta_{,i}^2 + 2\zeta_{,i}\zeta_{,j}\gamma_{ij} - 8\zeta\zeta_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\zeta\gamma_{ij,k}^2 - 2\zeta_{,i}\gamma_{ij,k}\gamma_{jk} - 2\zeta_{,ij}\gamma_{ik}\gamma_{jk} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6}\gamma_{ij}\gamma_{jk,l}\gamma_{kl,i} + \frac{1}{4}\gamma_{ij}\gamma_{kl,i}\gamma_{kl,j} + \frac{1}{6}\gamma_{ij,kl}\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \frac{1}{6}\gamma_{ij}\gamma_{ik,l}\gamma_{kl,j} \right] + \mathcal{O}(\zeta^4) \end{aligned} \quad (663)$$

となる。

## C.2 アインシュタイン作用の安定性

Hawking と Horowitz が重力の作用を評価する際、アインシュタイン方程式の安定性を保証するために表面項を課している。[26] 今回、Chapter.(17.3) で現れた不安定性は同様な表面項で補償されることを示す。

表面項を含めた作用として

$$S = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2}R + \mathcal{L}_m(g, \phi) \right) d^4x + \oint_{\partial\mathcal{M}} K d^3\Sigma \quad (664)$$

を用いる。ただし、 $d^3\Sigma$  は境界の体積要素であり、 $K$  は extrinsic curvature のトレースである。 $K$  の表式は、境界多様体  $\mathcal{M}$  のメトリック  $h^{st}$  と  $\mathcal{M}$  上での法線ベクトル  $n$  を用いて、

$$K := h^{st}K_{st} := h^{st}\Delta_s n_t = -h^{st}\Gamma_{st}^\mu n_\mu \quad (665)$$

と書ける。(符号は [7] に準拠した。 $s, t, \dots$  は境界  $\partial\mathcal{M}$  の座標を動くとする。 $\Delta$  は  $\mathcal{M}$  上の共変微分) 微分項がない理由は、法線ベクトルは  $\partial\mathcal{M}$  の座標  $s, t, \dots$  の方向に値を持っていないから。

特に Chapter.(17.3) で考慮すべき境界条件は  $N_{,i}^i$  に起因しており空間方向の境界に原因がある。ADM 分解で考えている多様体は時間方向  $\mathbb{R}$  方向に空間的立方体  $L^3$  が積み重なった  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times L^3$  であり、境界は空間方向の境界面  $\partial\mathcal{M} = \mathbb{R} \times L^2$  である。簡単のため、Eq(462) において境界面を  $x^3 = L$  において  $(x^0, x^1, x^2)$  が張る空間に取る。 $\partial\mathcal{M}$  の法線は

$$\tilde{n}_\mu := \left( 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{h^{33} - \frac{N^3 N^3}{N^2}}} \right) \quad (666)$$

となる。これは次のように法線であること、単位長さであることが確かめられる。

$$\begin{aligned} \tilde{n} \cdot dx^0 &= \tilde{n} \cdot dx^1 = \tilde{n} \cdot dx^2 = 0 \quad , \\ \tilde{n}_\mu \tilde{n}_\nu g^{\mu\nu} &= 1 \end{aligned} \quad (667)$$



これから、表面項を計算していくが、厳密に計算する必要ない。微小量の一次のみで近似し、また表面において特異性を持つ  $\chi$  のみ扱う。つまり、 $N^i$  以外は微小量の0次で良い。そこで、先の法線は

$$\tilde{n}_\mu \approx (0, 0, 0, a) \quad (668)$$

と近似される。

次に  $\partial\mathcal{M}$  の体積要素は

$$d^3\Sigma = \sqrt{-\det \begin{pmatrix} -N^2 + h_{ij}N^iN^j & h_{1j}N^i & h_{2j}N^i \\ h_{1j}N^i & h_{11} & h_{12} \\ h_{2j}N^i & h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}} \approx a^2 \quad (669)$$

となる。

次に Eq(665) を計算する上で必要な  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  は

$$\begin{aligned} K_{00} &\approx a(N_{,0}^3 + 2HN^3) \quad , \quad K_{11} \approx K_{22} \approx -N^3aH \quad , \\ K_{01}, K_{02} &\approx \mathcal{O}(N^3) \end{aligned} \quad (670)$$

となる。 $(h^{01}, h^{02} \approx \mathcal{O}(N^3))$  なので、 $K_{01}, K_{02}$  はこのオーダーで十分  
よって

$$K = K_{00} - a^{-2}(K_{11} + K_{22}) = aN_{,0}^3 + 4aHN^3 \quad (671)$$

となる。そこから、 $x^3 = \infty$  の表面項として

$$+ \int_{\partial\mathcal{M}; z^3=\infty} K d^3\Sigma = \int_{\partial\mathcal{M}} (aN_{,0}^3 + 4aHN^3) a^2 dt dx^1 dx^2 = \int_{\partial\mathcal{M}} a^3 HN^3 dt dx^1 dx^2 \quad (672)$$

となる。

ここで Chapter.(17.3) の項は

$$\int dx^4 (-a^3 HN_{,i}^i) = \sum_i \int_{\partial\mathcal{M}; z^3=\pm\infty} \frac{dx^4}{dx^i} (-a^3 HN^i) \quad (673)$$

でありちょうど表面項と打ち消す。 $(\frac{dx^4}{dx^i}$  は積分を一つ落とすということの意味する。) よって、 $\chi$  の一次の項は表面項により補償されるということがわかった。

### C.3 in-in formalism のプロパゲーターについて

in-in formalism で必要になる

$$\langle \zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle \quad , \quad \langle T\zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle \quad , \quad \langle \bar{T}\zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle \quad (674)$$

を計算しておく。

以降はシュバルツ [13] を参考にする。time-ordered の計算において

$$\begin{aligned} \langle T\zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle &= \theta_{t_1-t_2} \langle \zeta(x_1)\zeta(x_2) \rangle + \theta_{-t_1+t_2} \langle \zeta(x_2)\zeta(x_1) \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} (\theta_{t_1-t_2} \zeta_k(t_1)^{c*} \zeta_k(t_2)^c + \theta_{-t_1+t_2} \zeta_k^{s*}(t_2) \zeta_k^s(t_1)) \end{aligned} \quad (675)$$

となる。ただし BD 真空における Eq(498) に基づく自由場の展開

$$\zeta(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \zeta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}x} \quad , \quad \zeta_{\mathbf{k}}(t) = \zeta_{\mathbf{k}}^s(t) a_{\mathbf{k}}^\dagger + \zeta_{\mathbf{k}}^{c*}(t) a_{-\mathbf{k}} \quad , \quad \zeta_{\mathbf{k}}^s(t) = \frac{\dot{\rho}}{\phi} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (1 - ik\eta) e^{ik\eta} \quad (676)$$

(等方性より  $\zeta_{\mathbf{k}}^s(t) = \zeta_{-\mathbf{k}}^s(t)$ ) および二点関数

$$\begin{aligned} \langle \zeta(x_2) \zeta(x_1) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}x_2 + i\mathbf{k}'x_1} \langle (\zeta_{\mathbf{k}}^s(t_2) a_{\mathbf{k}}^\dagger + \zeta_{\mathbf{k}}^{s*}(t_2) a_{-\mathbf{k}}) (\zeta_{\mathbf{k}'}^s(t_1) a_{\mathbf{k}'}^\dagger + \zeta_{\mathbf{k}'}^{s*}(t_1) a_{-\mathbf{k}'}) \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(x_2 - x_1)} \zeta_{\mathbf{k}}^{s*}(t_2) \zeta_{\mathbf{k}}^s(t_1) \end{aligned} \quad (677)$$

を用いた。ただしスローロール近似により高次の項は無視している。

次に anti-time-ordered では

$$\begin{aligned} \langle \bar{T} \zeta(x_1) \zeta(x_2) \rangle &= \theta(t_1 - t_2) \langle \zeta(x_2) \zeta(x_1) \rangle + \theta(-t_1 + t_2) \langle \zeta(x_1) \zeta(x_2) \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(x_2 - x_1)} (\theta(t_1 - t_2) \zeta_{\mathbf{k}}^{s*}(t_2) \zeta_{\mathbf{k}}^s(t_1) + \theta(-t_1 + t_2) \zeta_{\mathbf{k}}^{s*}(t_1) \zeta_{\mathbf{k}}^s(t_2)) \end{aligned} \quad (678)$$

さらに今,  $k\eta \ll 1$  の極限で近似的に

$$\langle T \zeta(x_1) \zeta(x_2) \rangle \sim \langle \bar{T} \zeta(x_1) \zeta(x_2) \rangle \sim \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\dot{\rho}^2 H^2}{\phi^2 2k^3} e^{i\mathbf{k}(x_2 - x_1)} \quad (679)$$

となる。

#### C.4 スローロールパラメーターの関係式

$$\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad , \quad \epsilon_V := \frac{1}{2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \ll 1 \quad , \quad \eta_V := \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \ll 1 \quad (680)$$

を基底の関係式

$$3\dot{\rho}^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad \ddot{\rho} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad , \quad 0 = \ddot{\phi} + 3\dot{\rho}\dot{\phi} + V'(\phi) \quad (681)$$

を用いて変形していく。基本的に  $V$  や  $\phi$ ,  $H$  に微分が掛かれば掛かるほどオーダーが上がる。

まず  $\epsilon$  の定義から

$$\frac{\dot{\phi}^2}{V} = \frac{2\epsilon}{3} \frac{1}{1 - \epsilon/3} \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \quad , \quad \frac{\dot{\phi}}{H} = -\sqrt{2\epsilon} \quad (682)$$

となる。(場は時間とともに減少していくことに注意) 次に  $\eta_V$  を変形して次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_V &= -\frac{\ddot{\phi} + 3\dot{H}\dot{\phi} + 3G\ddot{\phi}}{V\dot{\phi}} \sim -3\frac{H^2}{V} \frac{\dot{H}}{H^2} - 3\frac{H^2}{V} \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \\ &= \epsilon - \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (683)$$

スローロール近似で  $\epsilon_V \sim \epsilon$  を言うためには次の関係を用いる。

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} = \frac{3H\dot{\phi} + V'}{\dot{\phi}H} = 3 + \sqrt{2\epsilon_V} \frac{V}{H\dot{\phi}} = 3 + \sqrt{2\epsilon_V} 3 \frac{H}{\dot{\phi}} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}}{H} \sim 3 - 3\sqrt{\frac{\epsilon_V}{\epsilon}} \sim 0 \quad (684)$$

また

$$\frac{\dot{\epsilon}}{H} = -\frac{\ddot{H}}{\dot{H}H} \frac{\dot{H}}{H^2} + 2\epsilon^2 = \epsilon \frac{-\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} \frac{H^2}{\dot{H}} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} + 2\epsilon^2 = 2\epsilon \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} + 2\epsilon^2 = 2\epsilon(\epsilon - \eta_V) + 2\epsilon^2 \quad (685)$$

である。

### C.5 3次の相互作用項

Eq(492) で展開された項を簡単化していく。

#### C.5.1 作用の $\zeta^3$ 項

Eq(492) で展開した作用の中から  $\zeta^3$  を持つ項をまとめてくると

$$\begin{aligned} S_{\zeta^3} &= \int dt d^3x \left[ +18a^3 H \zeta_{,i} \psi_{,i} - 2a^3 \Delta \psi \zeta_{,i} \psi_{,i} - \frac{a^3 \dot{\zeta}_{,ij} \psi_{,ij}}{4H} + \frac{3}{4} a^3 \zeta \psi_{,ij} \psi_{,ij} \right. \\ &\quad - \frac{a^3 \dot{\zeta}_{,ij}^2}{4H} + \frac{3}{4} a^3 \zeta \psi_{,ij}^2 - \frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - a \zeta_{,a}^2 + \frac{a^3 \dot{H} \zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3 \dot{H} \zeta \zeta^2}{H^2} - 9a^3 \dot{H} \zeta^3 - 27a^3 H^2 \zeta^3 \\ &\quad \left. + \frac{a^3 \Delta \psi^2 \dot{\zeta}}{2H} - 27a^3 H \zeta^2 \dot{\zeta} + 9a^3 H \zeta^2 \Delta \psi - \frac{3}{2} a^3 \zeta \Delta \psi^2 - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - a \zeta^2 \Delta \zeta \right] \\ &= \int dt d^3x \left[ -\frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - a \zeta_{,a}^2 - 27a^3 H^2 \zeta^3 - 27a^3 H \zeta^2 \dot{\zeta} - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - a \zeta^2 \Delta \zeta \right] \\ &\quad + \left[ +18a^3 H \zeta_{,i} \psi_{,i} + \frac{a^3 \dot{H} \zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3 \dot{H} \zeta \zeta^2}{H^2} + 9a^3 H \zeta^2 \Delta \psi - 9a^3 \dot{H} \zeta^3 \right] \\ &\quad + \left[ -2a^3 \Delta \psi \zeta_{,i} \psi_{,i} + \frac{3}{2} a^3 \zeta \psi_{,ij}^2 - \frac{a^3 \dot{\zeta}_{,ij}^2}{2H} + \frac{a^3 \Delta \psi^2 \dot{\zeta}}{2H} - \frac{3}{2} a^3 \zeta \Delta \psi^2 \right] \end{aligned} \quad (686)$$

となる。これらを Chapter.(17.4) で説明した手順に沿って簡単化していく。ここで項を分けた意図はスローロールパラメーターの次数ごとに分けて書くため。  $\chi$  は  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  として扱う。

一つ目の  $\square$  は部分積分により

$$\begin{aligned} & -\frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - a \zeta_{,a}^2 - 27a^3 H^2 \zeta^3 - 27a^3 H \zeta^2 \dot{\zeta} - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - a \zeta^2 \Delta \zeta \\ \rightarrow & -\frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - a \zeta_{,a}^2 - 27a^3 H^2 \zeta^3 - 18a^3 H \zeta^2 \dot{\zeta} + 9 \left( 3a^3 H^2 \zeta^3 + a^3 \dot{H} \zeta^3 + 2a^3 H \zeta^2 \dot{\zeta} \right) - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - a \zeta^2 \Delta \zeta \\ \rightarrow & -\frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) + \frac{\dot{H}}{H^2} a \right) \zeta_{,a}^2 + 9a^3 \dot{H} \zeta^3 - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) + \frac{\dot{H}}{H^2} a \right) \zeta^2 \Delta \zeta \\ \rightarrow & -\frac{a \dot{\zeta}_{,a}^2}{H} - \frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta_{,a}^2 + \frac{a}{H} \left( \dot{\zeta}_{,i}^2 + 2\zeta_{,i} \dot{\zeta}_{,i} \right) + 9a^3 \dot{H} \zeta^3 - \frac{2a \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta}}{H} - \frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta^2 \Delta \zeta + \frac{a}{H} \left( 2\dot{\zeta} \zeta \Delta \zeta + \zeta^2 \Delta \dot{\zeta} \right) \\ \rightarrow & -\frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta_{,a}^2 + \frac{a}{H} \left( 2\zeta_{,i} \dot{\zeta}_{,i} \right) + 9a^3 \dot{H} \zeta^3 - \frac{\dot{H}}{H^2} a \left( -2\zeta \zeta_{,i}^2 \right) + \frac{a}{H} \left( -2\zeta \zeta_{,i} \dot{\zeta}_{,i} \right) \\ \rightarrow & +\frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta_{,a}^2 + 9a^3 \dot{H} \zeta^3 \end{aligned} \quad (687)$$

となる。ただし、 $a = \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) + \frac{\dot{H}}{H^2} a = \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) - \epsilon a$  を用いた。

次に一つ目の [] の残り (スローロールパラメーターについてのオーダーが上がったことに注意) と二つ目の [] を合わせて、

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta \zeta_{,a}^2 + 9a^3 \dot{H} \zeta^3 + 18a^3 H \zeta \zeta_{,i} \psi_{,i} + \frac{a^3 \dot{H} \zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3 \dot{H} \zeta \dot{\zeta}^2}{H^2} + 9a^3 H \zeta^2 \Delta \psi - 9a^3 \dot{H} \zeta^3 \\
\rightarrow & + \frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta \zeta_{,a}^2 + 9a^3 H \zeta \zeta_{,i} \psi_{,i} - 9a^3 H (\zeta \zeta_{,i} \psi_{,i} + \Delta \psi \zeta^2) + \frac{a^3 \dot{H} \zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3 \dot{H} \zeta \dot{\zeta}^2}{H^2} + 9a^3 H \zeta^2 \Delta \psi \\
\rightarrow & + \frac{\dot{H}}{H^2} a \zeta \zeta_{,a}^2 + \frac{a^3 \dot{H} \zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3 \dot{H} \zeta \dot{\zeta}^2}{H^2} \tag{688}
\end{aligned}$$

となる。

次に3つ目の [] は

$$\begin{aligned}
& - 2a^3 \Delta \psi \zeta_{,i} \psi_{,i} + \frac{3}{2} a^3 \zeta \psi_{,ij}^2 - \frac{a^3 \dot{\zeta} \psi_{,ij}^2}{2H} + \frac{a^3 \Delta \psi^2 \dot{\zeta}}{2H} - \frac{3}{2} a^3 \zeta \Delta \psi^2 \\
\rightarrow & - 2a^3 \left( -\frac{1}{a^2 H} \Delta \zeta + \epsilon \dot{\zeta} \right) \zeta_{,i} \left( -\frac{1}{a^2 H} \zeta_{,i} + \epsilon \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \right) \\
& + \frac{3}{2} a^3 \zeta \left( \frac{1}{a^4 H^2} \zeta_{,ij}^2 - \frac{2\epsilon}{a^2 H} \zeta_{,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} + \epsilon^2 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 - \frac{1}{a^4 H^2} \Delta \zeta^2 + \frac{2\epsilon}{a^2 H} \Delta \zeta \dot{\zeta} - \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \right) \\
& - \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} \left( \frac{1}{a^4 H^2} \zeta_{,ij}^2 - \frac{2\epsilon}{a^2 H} \zeta_{,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} + \epsilon^2 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 - \frac{1}{a^4 H^2} \Delta \zeta^2 + \frac{2\epsilon}{a^2 H} \Delta \zeta \dot{\zeta} - \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \right) \\
\rightarrow & \left[ -2 \frac{1}{aH^2} \Delta \zeta \zeta_{,i} \zeta_{,i} + \frac{3}{2aH^2} \zeta \zeta_{,ij}^2 - \frac{3}{2aH^2} \zeta \Delta \zeta^2 - \frac{1}{2aH^3} \dot{\zeta} \zeta_{,ij}^2 + \frac{1}{2aH^3} \dot{\zeta} \Delta \zeta^2 \right] \\
& + \left[ + 2a \frac{\epsilon}{H} \Delta \zeta \zeta_{,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} + 2a \frac{\epsilon \dot{\zeta}}{H} \zeta_{,i} \zeta_{,i} - \frac{3a\epsilon}{H} \zeta \zeta_{,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a\epsilon}{H} \zeta \Delta \zeta \dot{\zeta} + \frac{a\epsilon}{H^2} \dot{\zeta} \zeta_{,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a\epsilon}{H^2} \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} \right] \\
& + \left[ - 2a^3 \epsilon^2 \dot{\zeta} \zeta_{,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} + \frac{3}{2} a^3 \zeta \epsilon^2 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 - \frac{3}{2} a^3 \zeta \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 - \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} \epsilon^2 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 + \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \right] \tag{689}
\end{aligned}$$

ただし

$$\psi_{,ij}^2 - \Delta \psi^2 = \frac{1}{a^4 H^2} \zeta_{,ij}^2 - \frac{2\epsilon}{a^2 H} \zeta_{,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} + \epsilon^2 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 - \frac{1}{a^4 H^2} \Delta \zeta^2 + \frac{2\epsilon}{a^2 H} \Delta \zeta \dot{\zeta} - \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \tag{690}$$

を用いた。<sup>54</sup>

<sup>54</sup>  $\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2}$  は厳密に成立することに注意

まず Eq(689) の一行目について、

$$\begin{aligned}
& -2\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_i\zeta_i + \frac{3}{2aH^2}\zeta\zeta_{,ij}^2 - \frac{3}{2aH^2}\zeta\Delta\zeta^2 - \frac{1}{2aH^3}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 + \frac{1}{2aH^3}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 \\
\rightarrow & 6\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 - \frac{2}{aH^3}\left(\Delta\dot{\zeta}\zeta_i^2 + 2\Delta\zeta\dot{\zeta}_i\zeta_i\right) - \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta\zeta_{,ij}^2 + \frac{3}{2aH^3}\left(\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 + 2\zeta\dot{\zeta}_{,ij}\zeta_{,ij}\right) \\
& + \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta\Delta\zeta^2 - \frac{3}{2aH^3}\left(\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 + 2\zeta\Delta\dot{\zeta}\Delta\zeta\right) - \frac{1}{2aH^3}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 + \frac{1}{2aH^3}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 \\
\rightarrow & 6\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 + \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta\Delta\zeta^2 - \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta\zeta_{,ij}^2 \\
& + \frac{1}{aH^3}\left[-2\Delta\dot{\zeta}\zeta_i^2 - 4\Delta\zeta\dot{\zeta}_i\zeta_i + \frac{3}{2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 + 3\zeta\dot{\zeta}_{,ij}\zeta_{,ij} - \frac{3}{2}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - 3\zeta\Delta\dot{\zeta}\Delta\zeta - \frac{1}{2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 + \frac{1}{2}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2\right] \\
\rightarrow & 6\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 + \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta\Delta\zeta^2 - \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\left(-\zeta_i\zeta_j\zeta_{,ij} + \Delta\zeta^2\zeta + \Delta\zeta\zeta_i^2\right) \\
& + \frac{1}{aH^3}\zeta\left[-2\left(2\zeta_{,ij}^2 + 2\zeta_i\Delta\zeta_i\right) + 4\left(\zeta_i\Delta\zeta_i + \Delta\zeta^2\right) + \frac{3}{2}\zeta_{,ij}^2 + 3\left(\zeta_{,ij}^2 + 2\zeta_i\Delta\zeta_i + \Delta^2\zeta\zeta\right)\right. \\
& \left. - \frac{3}{2}\Delta\zeta^2 - 3\left(\Delta\zeta^2 + 2\zeta_i\Delta\zeta_i + \zeta\Delta^2\zeta\right) - \frac{1}{2}\zeta_{,ij}^2 + \frac{1}{2}\Delta\zeta^2\right] \\
\rightarrow & \frac{3}{2}\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 + \frac{9\dot{H}}{2aH^4}\zeta_i\zeta_j\zeta_{,ij} \\
\rightarrow & \frac{3}{2}\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 + \frac{9\dot{H}}{4aH^4}\zeta_i\zeta_j\zeta_{,ij} - \frac{9\dot{H}}{4aH^4}\zeta_i\left(\zeta_{,ij}\zeta_{,j} + \Delta\zeta\zeta_i\right) \\
= & -\frac{3}{4}\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 \tag{691}
\end{aligned}$$

となる。ただし  $\frac{1}{a} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{aH}\right) - \frac{\dot{H}}{aH^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{aH}\right) + \epsilon\frac{1}{a}$  を用いた。

次に Eq(688) の結果、Eq(689) の 1 行目の結果、および Eq(689) の 2 行目を組み合わせる。

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{H}}{H^2}a\zeta\zeta_{,a}^2 + \frac{a^3\dot{H}\zeta^3}{H^3} - \frac{3a^3\dot{H}\zeta\zeta^2}{H^2} \\
& - \frac{3}{4}\frac{\dot{H}}{aH^4}\Delta\zeta\zeta_i^2 \\
& + 2a\frac{\epsilon}{H}\Delta\zeta\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + 2a\frac{\epsilon\dot{\zeta}}{H}\zeta_i\zeta_i - \frac{3a\epsilon}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a\epsilon}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + \frac{a\epsilon}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a\epsilon}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} \\
= & \epsilon\left[-a\zeta\zeta_{,a}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\zeta^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_i^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2\right. \\
& \left. - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta}\right] \tag{692}
\end{aligned}$$

以上の結果 Eq(689),Eq(692) を組み合わせて、

$$\begin{aligned}
S_{\zeta^3} = & \epsilon\left[-a\zeta\zeta_{,a}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\zeta^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_i^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2\right. \\
& \left. - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta}\right] \\
& + \epsilon^2\left[-2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{3}{2}a^3\zeta\zeta^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 + \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\zeta^2\right] \tag{693}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f_{\alpha}(\zeta) = -\frac{1}{H}\dot{\zeta}\zeta + \frac{1}{4a^2H^2}\zeta_{,i}^2 - \frac{1}{4a^2H^2}\Delta^{-1}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \quad (694)$$

と Eq(498) から得られる運動方程式

$$\frac{\delta L_2}{\delta \zeta} = -\frac{d}{dt} \left( a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \dot{\zeta} \right) + \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} a \Delta \zeta = -2 \frac{d}{dt} (a^3 \epsilon \dot{\zeta}) + 2\epsilon a \Delta \zeta = -2 \frac{d}{dt} (a^3 \epsilon \dot{\zeta}) + 2\epsilon a \Delta \zeta \quad (695)$$

の積

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} &= \left( -\frac{1}{H}\dot{\zeta}\zeta + \frac{1}{4a^2H^2}\zeta_{,i}^2 - \frac{1}{4a^2H^2}\Delta^{-1}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right) \left( -2 \frac{d}{dt} (a^3 \epsilon \dot{\zeta}) + 2\epsilon a \Delta \zeta \right) \\ &= (2\epsilon a \Delta \zeta) \left( -\frac{1}{H}\dot{\zeta}\zeta + \frac{1}{4a^2H^2}\zeta_{,i}^2 - \frac{1}{4a^2H^2}\Delta^{-1}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right) \\ &\quad + 2(a^3 \epsilon \dot{\zeta}) \left[ -\epsilon \dot{\zeta}\zeta - \frac{1}{H}\ddot{\zeta}\zeta - \frac{1}{H}\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2a^2H}(\zeta_{,i}^2 - \Delta^{-1}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon}{2a^2H}(\zeta_{,i}^2 - \Delta^{-1}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i})) + \frac{1}{4a^2H^2} \left( 2\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} - \Delta^{-1} \frac{d}{dt} (\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right) \right] \\ &\rightarrow \epsilon \left[ -2a \frac{1}{H} \Delta \zeta \dot{\zeta} \zeta + \frac{1}{2aH^2} \Delta \zeta \zeta_{,i}^2 - \frac{1}{2aH^2} \zeta (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) \right. \\ &\quad - 2a^3 \frac{1}{H} \dot{\zeta} \ddot{\zeta} \zeta - 2a^3 \frac{1}{H} \dot{\zeta} \dot{\zeta}^2 - \frac{a}{H} \dot{\zeta} \zeta_{,i}^2 + \frac{a}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta} (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) \\ &\quad \left. + a \dot{\zeta} \frac{1}{H^2} \zeta_{,i} \dot{\zeta}_{,i} - a \frac{1}{2H^2} \Delta^{-1} \dot{\zeta} \frac{d}{dt} (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) \right] \\ &\quad + \epsilon^2 \left[ -2a^3 \dot{\zeta} \dot{\zeta} \zeta + \frac{a}{H} \dot{\zeta} \zeta_{,i}^2 - \frac{a}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta} (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) \right] \\ &=: \left( f_{\alpha}(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right) \Big|_{(1)} + \left( f_{\alpha}(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right) \Big|_{(2)} \quad (696) \end{aligned}$$

の一次項を用いて、Eq(693) の一つ目の [] に対して次を考える。

$$\begin{aligned}
& \epsilon \left[ -a\zeta\zeta_{,a}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_{,i}^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} \right] \\
& \quad - \left( f_0(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right) \Big|_{(1)} \\
= & \epsilon \left[ -a\zeta\zeta_{,a}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_{,i}^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} \right] \\
& \quad - \epsilon \left[ -2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\dot{\zeta}\zeta + \frac{1}{2aH^2}\Delta\zeta\zeta_{,i}^2 - \frac{1}{2aH^2}\zeta(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right. \\
& \quad \left. - 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\ddot{\zeta}\zeta - 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}^2 - \frac{a}{H}\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right. \\
& \quad \left. + a\dot{\zeta}\frac{1}{H^2}\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} - a\frac{1}{2H^2}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\frac{d}{dt}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right] \\
= & \epsilon \left[ -\frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\ddot{\zeta}\zeta + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}^2 \right. \\
& \quad \left. - a\zeta\zeta_{,a}^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2 - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\dot{\zeta}\zeta \right. \\
& \quad \left. + \frac{a}{H}\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) - a\dot{\zeta}\frac{1}{H^2}\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} + a\frac{1}{2H^2}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\frac{d}{dt}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{4}\frac{1}{aH^2}\Delta\zeta\zeta_{,i}^2 - \frac{1}{2aH^2}\Delta\zeta\zeta_{,i}^2 + \frac{1}{2aH^2}\zeta(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \right] \tag{697}
\end{aligned}$$

ここで [] の中身を計算していく。まず空間微分を含まない項について

$$\begin{aligned}
& \epsilon \left[ -\frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 3a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\ddot{\zeta}\zeta + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}^2 \right] \\
= & \epsilon \left[ \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\ddot{\zeta}\zeta \right] + 2\epsilon a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H} \right) - a\epsilon \right) \epsilon a^2\zeta\dot{\zeta}^2 \\
= & \epsilon \left[ \frac{a^3\dot{\zeta}^3}{H} + 2a^3\frac{1}{H}\dot{\zeta}\ddot{\zeta}\zeta \right] + 2\epsilon a^3\zeta\dot{\zeta}^2 - \frac{a}{H} \left( \dot{\epsilon} a^2\zeta\dot{\zeta}^2 + 2\epsilon H a^2\zeta\dot{\zeta}^2 + \epsilon a^2\dot{\zeta}^3 + 2\epsilon a^2\zeta\dot{\zeta}\ddot{\zeta} \right) - \epsilon \epsilon^2 a^2\zeta\dot{\zeta}^2 \\
= & -\frac{a}{H}\dot{\epsilon} a^2\zeta\dot{\zeta}^2 - \epsilon \epsilon^2 a^2\zeta\dot{\zeta}^2 \tag{698}
\end{aligned}$$

次に Eq(697) の空間微分が実質二つ含まれる項について

$$\begin{aligned}
& -a\zeta\zeta_{,a}^2 + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2a\frac{\dot{\zeta}}{H}\zeta_{,i}^2 - \frac{3a}{H}\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + \frac{3a}{H}\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \\
& + \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \frac{a}{H^2}\dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} + 2a\frac{1}{H}\Delta\zeta\dot{\zeta}\zeta + \frac{a}{H}\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \\
& - a\dot{\zeta}\frac{1}{H^2}\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} + a\frac{1}{2H^2}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\frac{d}{dt}(\Delta\zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}) \\
= & -a\zeta\zeta_{,a}^2 + \frac{a}{H}\left[ +2\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - 3\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + 3\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \right. \\
& \left. + 2\Delta\zeta\dot{\zeta}\zeta + \dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
& + \frac{a}{H^2}\left[ \dot{\zeta}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \dot{\zeta}\Delta\zeta\dot{\zeta} - \dot{\zeta}\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta\Delta\dot{\zeta} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}\dot{\zeta}_{,ij} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\dot{\zeta}_{,i} \right] \tag{699}
\end{aligned}$$

ここで時間微分により

$$\epsilon(-a\zeta\zeta_{,i}^2) = -\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{H}\right) - a\epsilon\right)(\epsilon\zeta\zeta_{,i}^2) = a\epsilon^2\zeta\zeta_{,i}^2 + \frac{a}{H}\dot{\epsilon}\zeta\zeta_{,i}^2 + \frac{a}{H}\epsilon(+\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + 2\zeta\dot{\zeta}_{,i}\zeta_{,i}) \tag{700}$$

となる。これの  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  と Eq(699) の  $\frac{a}{H}$  項を組み合わせると

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{H}\left[ +2\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 2\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - 3\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} + 3\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \right. \\
& \left. + 2\Delta\zeta\dot{\zeta}\zeta + \dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} + \dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + 2\zeta\dot{\zeta}_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ +4\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + 5\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} + 2\zeta\dot{\zeta}_{,i}\zeta_{,i} \right. \\
& \left. + 2\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} - 3\zeta\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ 2\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + 3\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \right. \\
& \left. + 2\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 3\zeta\Delta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} + 3\zeta_{,j}\zeta_{,ij}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ 2\dot{\zeta}\zeta_{,i}^2 + 3\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} \right. \\
& \left. + 2\Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} - 3\zeta\Delta\zeta\dot{\zeta} - 3\zeta_{,i}\Delta\zeta\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} - \frac{3}{2}\zeta_{,j}^2\dot{\zeta} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ \frac{1}{2}\zeta_{,j}^2\dot{\zeta} - \Delta\zeta\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,ij}^2 - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ \frac{1}{2}\zeta_{,j}^2\dot{\zeta} + \Delta\zeta\Delta\zeta\Delta^{-1}\dot{\zeta} + \Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i}\Delta^{-1}\dot{\zeta} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta^2 + \Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i}\zeta_{,j}\zeta_{,ji} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,j}\Delta\zeta_{,j} - 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] \\
= & \frac{a}{H}\left[ \frac{1}{2}\zeta_{,j}^2\dot{\zeta} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,i}\zeta_{,j}\zeta_{,ji} + \Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta_{,j}\Delta\zeta_{,j} - \Delta^{-1}\dot{\zeta}\Delta\zeta_{,i}\zeta_{,i} \right] = 0 \tag{701}
\end{aligned}$$



となる。

次に Eq(699) の  $\frac{a}{H^2}$  項は

$$\begin{aligned}
& \dot{\zeta}_{\zeta,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,ij} - \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,ij} \dot{\zeta}_{\zeta,ij} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \dot{\zeta}_{\zeta,i} \zeta_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \\
&= -\dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} - \dot{\zeta}_{\zeta,j} \zeta_{\zeta,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} - \frac{1}{2} \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} \\
&\quad - \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,j} \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,ij} - \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \Delta \zeta_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \dot{\zeta}_{\zeta,i} \zeta_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \\
&= \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} + \dot{\zeta}_{\zeta,i} \Delta \zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} - \dot{\zeta}_{\zeta,j} \zeta_{\zeta,ij} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} - \frac{1}{2} \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,j} \zeta_{\zeta,ij} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \dot{\zeta}_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} + \dot{\zeta}_{\zeta,i} \Delta \zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} + \dot{\zeta}_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \\
&= -\Delta \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_{\zeta,i} \Delta \zeta_{\zeta,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \Delta \dot{\zeta} + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta_{\zeta,i} \dot{\zeta}_{\zeta,i} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{702}$$

となる。

また Eq(697) の空間微分が4つ含まれる項について

$$\begin{aligned}
& 3\Delta \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 - 2\Delta \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 + 2\zeta (\Delta \zeta^2 + \zeta_{\zeta,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{\zeta,i} \zeta_{\zeta,i}) \\
&= \Delta \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 + 2\zeta (\Delta \zeta^2 + \Delta \zeta_{\zeta,i} \zeta_{\zeta,i}) + \Delta \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 = 0
\end{aligned} \tag{703}$$

となる。

以上から  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  項はすべて消える。残りは Eq(693), Eq(698), Eq(700), Eq(696) の残った項をまとめることにより

$$\begin{aligned}
S_{\zeta 3} &= a\epsilon^2 \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 + \frac{a}{H} \dot{\zeta} \zeta \zeta_{\zeta,i}^2 - \frac{a}{H} \dot{\zeta} a^2 \zeta \zeta^2 - a\epsilon^2 a^2 \zeta \zeta^2 \\
&\quad + \epsilon^2 \left[ -2a^3 \dot{\zeta}_{\zeta,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,i} + \frac{3}{2} a^3 \zeta (\Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,ij})^2 - \frac{3}{2} a^3 \zeta \zeta^2 - \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} (\Delta^{-1} \dot{\zeta}_{\zeta,ij})^2 + \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} \zeta^2 \right] \\
&\quad - \left( f_0(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right) \Big|_{(2)} + f_0(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta}
\end{aligned} \tag{704}$$

となる。ここで更に次の  $f_{1(\zeta)}$  を考える。

$$f_{1(\zeta)} = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} H} \zeta^2 - \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) \tag{705}$$

先と同じく次の組み合わせを考える。

$$\begin{aligned}
& f_{1(\zeta)} \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \\
&= 2 \left( a^3 \epsilon \dot{\zeta} \right) \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} H} \zeta^2 - \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) \right) + 2\epsilon a \Delta \zeta \left( -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi} H} \zeta^2 - \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) \right) \\
&= 2 \left( a^3 \epsilon \dot{\zeta} \right) \frac{d}{dt} \left( -\frac{\dot{\zeta}}{4\epsilon H} \zeta^2 + \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) \right) + 2\epsilon a \Delta \zeta \left( -\frac{\dot{\zeta}}{4\epsilon H} \zeta^2 + \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) \right) \\
&= \epsilon^2 \left[ -a^3 \dot{\zeta} \frac{\dot{\zeta}}{\epsilon^2 H} \zeta \dot{\zeta} + a^3 \dot{\zeta} \zeta \dot{\zeta} - a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} (\dot{\zeta} \Delta \zeta + \zeta \Delta \dot{\zeta}) - \frac{\dot{\zeta}}{2\epsilon^2 H} a \Delta \zeta \zeta^2 + \frac{1}{2} a \Delta \zeta \zeta^2 - a \zeta (\zeta \Delta \zeta) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= \left( f_{1(\zeta)} \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right) \Big|_{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{706}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}
S_{\zeta 3} = & \epsilon^2 \left[ a\zeta\dot{\zeta}_i^2 + a\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2 H}\zeta\dot{\zeta}_i^2 - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2 H}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 \right. \\
& - 2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{5}{2}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 + \frac{a^3}{2H}\dot{\zeta}^3 \left. \right] \\
& - \left( f_0(\zeta)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta} \right) \Big|_{(2)} - \left( f_1(\zeta)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta} \right) \Big|_{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) + (f_0 + f_1)(\zeta)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta}
\end{aligned} \tag{707}$$

を考えていく。

スローロールの二次までを見ると

$$\begin{aligned}
& S_{\zeta 3} - (f_0 + f_1)\frac{\delta L_2}{\delta\zeta} \\
= & \epsilon^2 \left[ a\zeta\dot{\zeta}_i^2 + a\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2 H}\zeta\dot{\zeta}_i^2 - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2 H}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 \right. \\
& - 2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{5}{2}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 + \frac{a^3}{2H}\dot{\zeta}^3 \left. \right] \\
& - \epsilon^2 \left[ -2a^3\dot{\zeta}\zeta\dot{\zeta} + \frac{a}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}_i^2 - \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\left(\Delta\dot{\zeta}^2 + \dot{\zeta}_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_i\zeta_{,i}\right) \right] \\
& - \epsilon^2 \left[ -a^3\dot{\zeta}\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2 H}\zeta\dot{\zeta} + a^3\dot{\zeta}\zeta\dot{\zeta} - a^3\Delta^{-1}\dot{\zeta}\left(\dot{\zeta}\Delta\zeta + \zeta\Delta\dot{\zeta}\right) - \frac{\dot{\epsilon}}{2\epsilon^2 H}a\Delta\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2}a\Delta\zeta\dot{\zeta}^2 - a\zeta\left(\zeta\Delta\dot{\zeta}\right) \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
= & \epsilon^2 \left[ -\frac{5}{2}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{a^3}{2H}\dot{\zeta}^3 - a^3\dot{\zeta}\zeta\dot{\zeta} + 2a^3\dot{\zeta}\zeta\dot{\zeta} + a^3\Delta^{-1}\dot{\zeta}\left(\dot{\zeta}\Delta\zeta + \zeta\Delta\dot{\zeta}\right) + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 \right. \\
& - 2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + a\zeta\dot{\zeta}_i^2 - \frac{a}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}_i^2 + \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}\left(\Delta\dot{\zeta}^2 + \dot{\zeta}_{,ij}^2 + 2\Delta\zeta_i\zeta_{,i}\right) - \frac{1}{2}a\Delta\zeta\dot{\zeta}^2 + a\zeta\left(\zeta\Delta\dot{\zeta}\right) \left. \right] \\
& + \frac{\dot{\epsilon}}{H}\left[ a\zeta\dot{\zeta}_i^2 - a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + a^3\dot{\zeta}\zeta\dot{\zeta} + \frac{1}{2}a\Delta\zeta\dot{\zeta}^2 \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
= & \epsilon^2 \left[ -\frac{3}{2}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{a^3}{2H}\dot{\zeta}^3 + a^3\zeta\left(\dot{\zeta}^2 + \Delta\dot{\zeta}\Delta^{-1}\dot{\zeta} + 2\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_{,i}\right) + a^3\Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta\Delta\dot{\zeta} \right. \\
& + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - 2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i + a\zeta\dot{\zeta}_i^2 - \frac{a}{H}\dot{\zeta}\dot{\zeta}_i^2 \\
& + \frac{a}{H}\left(-\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i\Delta\zeta - \zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,j}\zeta_{,ij}\right) - \frac{1}{2}a\Delta\zeta\dot{\zeta}^2 + a\zeta\left(\zeta\Delta\dot{\zeta}\right) \left. \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
= & \epsilon^2 \left[ -\frac{1}{2}a^3\zeta\dot{\zeta}^2 + \frac{a^3}{2H}\dot{\zeta}^3 + 2a^3\Delta^{-1}\dot{\zeta}\zeta\Delta\dot{\zeta} + \frac{3}{2}a^3\zeta\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - \frac{a^3\dot{\zeta}}{2H}\left(\Delta^{-1}\dot{\zeta}_{,ij}\right)^2 - 2a^3\dot{\zeta}\zeta_i\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i \right. \\
& - \frac{a}{H}\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i\zeta_{,i}\Delta\zeta + 2a^3\Delta^{-1}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_{,i}\zeta - \frac{1}{2}\dot{\zeta}\dot{\zeta}_i^2\frac{a}{H} \left. \right] + \mathcal{O}(\zeta^3)
\end{aligned} \tag{708}$$

となる。

ここで次の変形を考える。

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \left[ + \frac{3}{2} a^3 \zeta \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 - \frac{a^3 \dot{\zeta}}{2H} \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
& = \epsilon^2 \left[ + \frac{3}{2} a^3 \zeta \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 + \frac{3a^3 \zeta}{2} \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)^2 + \frac{a^3 \zeta}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \Delta^{-1} \ddot{\zeta}_{,ij} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
& = \epsilon^2 \left[ + \frac{a^3 \zeta}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} a^{-2} \zeta_{,ij} - \frac{a^3}{H} \Delta^{-1} \left( \zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)_{,ij} \frac{1}{2\epsilon a^3} \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
& =: \epsilon^2 \left[ + \frac{a^3 \zeta}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} a^{-2} \zeta_{,ij} \right] + f_2 \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} + \mathcal{O}(\zeta^3) \tag{709}
\end{aligned}$$

ただし

$$\ddot{\zeta} = a^{-2} \Delta \zeta - 3H \dot{\zeta} - \frac{1}{2\epsilon a^3} \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \tag{710}$$

を用いた。これを Eq(708) に戻して  $f_2$  を左辺に持っていくと、

$$\begin{aligned}
& S_{\zeta^3} - (f_0 + f_1 + f_2) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \\
& = \epsilon^2 \left[ - \frac{1}{2} a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \zeta \Delta \dot{\zeta} - 2a^3 \dot{\zeta} \zeta_{,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} + \frac{a^3}{2H} \dot{\zeta}^3 + \frac{a\zeta}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \zeta_{,ij} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \zeta_{,i} \Delta \zeta + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \zeta_{,i} \zeta - \frac{1}{2} \dot{\zeta} \zeta_{,i}^2 \frac{a}{H} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
& = \epsilon^2 \left[ - \frac{1}{2} a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^2 \left( \zeta \dot{\zeta}^2 + \Delta^{-1} \dot{\zeta} \Delta \zeta \dot{\zeta} + 2\Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \zeta_{,i} \dot{\zeta} \right) - 2a^3 \dot{\zeta} \zeta_{,i} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} - 2a^3 \left( \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \dot{\zeta} \zeta_{,i} + \zeta \dot{\zeta}^2 \right) + \frac{a^3}{2H} \dot{\zeta}^3 \right. \\
& \quad \left. + \frac{a\zeta}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \zeta_{,ij} - \frac{a}{H} \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,i} \zeta_{,i} \Delta \zeta - \frac{1}{2} \dot{\zeta} \zeta_{,i}^2 \frac{a}{H} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
& = \epsilon^2 \left[ - \frac{1}{2} a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \zeta \Delta \zeta + \frac{a^3}{2H} \dot{\zeta}^3 + \frac{a}{H} \zeta \dot{\zeta} \Delta \zeta \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \tag{711}
\end{aligned}$$

となる。ここで運動量微分に関する次数を同じにするために次の変形を用いる。

$$\zeta \dot{\zeta} \Delta \zeta \rightarrow \zeta \dot{\zeta} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} + \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \right) = \zeta \dot{\zeta} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} \right) + \zeta \dot{\zeta} \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \tag{712}$$

ただし

$$\zeta = \Delta^{-1} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} + \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \right) \tag{713}$$

を使った。

代入して再び運動量のオーダーを落とすために  $\zeta, \Delta\zeta$  の塊を集め、再び Eq(713) を代入して、

$$\begin{aligned}
& S_{\zeta^3} - (f_0 + f_1 + f_2) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \\
&= \epsilon^2 \left[ -\frac{1}{2} a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \Delta \zeta + \frac{a^3}{2H} \dot{\zeta}^3 + \frac{a}{H} \zeta \dot{\zeta} (a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta}) \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
&= \epsilon^2 \left[ -\frac{1}{2} a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \Delta \zeta + \frac{a^3}{2H} \dot{\zeta}^3 + \frac{a^3}{2H} \zeta \frac{d}{dt} (\dot{\zeta}^2) + 3a^3 \zeta \dot{\zeta} \dot{\zeta} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
&= \epsilon^2 \left[ a^3 \zeta \dot{\zeta}^2 + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \Delta \zeta \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
&= \epsilon^2 \left[ a^3 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} + \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \right) + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \left( a^2 \ddot{\zeta} + 3a^2 H \dot{\zeta} + \frac{1}{2\epsilon a} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \zeta} \right) \right] + \mathcal{O}(\zeta^3)
\end{aligned} \tag{714}$$

まず  $H^0$  項について

$$a^5 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \ddot{\zeta} + 2a^5 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \ddot{\zeta} = -5a^5 H \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} - 2a^5 \dot{\zeta} \ddot{\zeta} \Delta^{-1} \dot{\zeta} + 2a^5 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} \ddot{\zeta} = -5a^5 H \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \tag{715}$$

となる。この余りと  $H^1$  項を合わせて

$$\begin{aligned}
& S_{\zeta^3} - \left( f_0 + f_1 + f_2 + a^3 \Delta^{-1} (\dot{\zeta}^2) \frac{1}{2\epsilon a} + 2a^3 \dot{\zeta} \Delta^{-1} \dot{\zeta} \frac{1}{2\epsilon a} \right) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} \\
&= \epsilon^2 \left[ a^3 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} 3a^2 H \dot{\zeta} + 2a^3 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \dot{\zeta} 3a^2 H \dot{\zeta} - 5a^5 H \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} \right] + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
&= 4a^5 H \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} + \mathcal{O}(\zeta^3)
\end{aligned} \tag{716}$$

以上より

$$\begin{aligned}
S_{\zeta^3} &= 4a^5 H \epsilon^2 \dot{\zeta}^2 \Delta^{-1} \dot{\zeta} + f(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} + \mathcal{O}(\zeta^3) \quad , \\
f(\zeta) &= -\frac{1}{H} \dot{\zeta} \dot{\zeta} + \frac{1}{4a^2 H^2} \zeta_{,i}^2 - \frac{1}{4a^2 H^2} \Delta^{-1} (\Delta \zeta^2 + \zeta_{,ij}^2 + 2\Delta \zeta_{,i} \zeta_{,i}) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\phi}}{\phi H} \zeta^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} \epsilon \zeta^2 - \frac{1}{2} \epsilon \Delta^{-1} (\zeta \Delta \zeta) - \frac{\epsilon}{2H} \Delta^{-1} \left( \zeta \Delta^{-1} \dot{\zeta}_{,ij} \right)_{,ij} + a^3 \Delta^{-1} (\dot{\zeta}^2) \frac{1}{2\epsilon a} + 2a^3 \dot{\zeta} \Delta^{-1} \dot{\zeta} \frac{1}{2\epsilon a}
\end{aligned} \tag{717}$$

と変形できる。

### C.5.2 作用の $\gamma \zeta^2$ 項

単純化はしないが、表式だけ書いておく。

$$S_{\zeta^2 \gamma} = \frac{1}{2} a^3 \psi_{,i} \psi_{,jk} \gamma_{jk,i} + \frac{a^3 \dot{\zeta} \psi_{,ij} \dot{\gamma}_{ij}}{2H} - \frac{3}{2} a^3 \zeta \psi_{,ij} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{2a \dot{\zeta} \gamma_{ij} \zeta_{,ij}}{H} + a \zeta_{,i} \zeta_{,j} \gamma_{ij} + 2a \zeta \gamma_{ij} \zeta_{,ij} \tag{718}$$

### C.5.3 作用の $\gamma^2\zeta$ 項

単純化はしないが、表式だけ書いておく。

$$S_{\gamma^2\zeta} = -\frac{1}{2}a^3\psi_{,ij}\gamma_{ik}\dot{\gamma}_{jk} - \frac{1}{4}a^3\psi_{,i}\gamma_{jk,i}\dot{\gamma}_{jk} - \frac{a^3\dot{\zeta}\dot{\gamma}_{jk}^2}{8H} + \frac{1}{2}a^3\psi_{ij}\gamma_{ki}\dot{\gamma}_{kj} + \frac{3}{8}a^3\zeta\dot{\gamma}_{ij}^2 - \frac{a\dot{\zeta}\dot{\gamma}_{ij,k}^2}{8H} - \frac{1}{8}a\zeta\dot{\gamma}_{ij,k}^2 - a\zeta_{,ij}\gamma_{ik}\dot{\gamma}_{jk} - a\zeta_{,i}\dot{\gamma}_{jk}\dot{\gamma}_{ij,k} \quad (719)$$

### C.5.4 作用の $\gamma^3$ 項

単純化はしないが、表式だけ書いておく。

$$S_{\gamma^3} = +\frac{1}{8}a\gamma_{ij}\gamma_{kl,i}\dot{\gamma}_{kl,j} - \frac{1}{24}a\gamma_{ij,k}\dot{\gamma}_{li}\dot{\gamma}_{lj,k} + \frac{1}{12}a\gamma_{ij}\dot{\gamma}_{li,jk}\dot{\gamma}_{kl} + \frac{1}{8}a\gamma_{ij,k}\dot{\gamma}_{il}\dot{\gamma}_{kl,j} - \frac{1}{12}a\gamma_{ij,k}\dot{\gamma}_{lj,i}\dot{\gamma}_{lk} \quad (720)$$

## 謝辞

B4 ゼミで議論を交わしていただいた同期の皆様、ご指導いただいた大野木哲也先生、窪田高弘先生にこの場を借りて感謝を述べたいと思います。特に大野木先生からは観測データの解釈などのアドバイスを頂き、窪田先生からは論文の紹介や計算手法などアドバイスを頂きました。また non-Gaussianity の計算では M2 の岡部廉平先輩、船越元気先輩にも相談に乗って頂きました。

これらの方の助けにより本卒論を書き上げることが出来ました。ありがとうございます。

## References

- [1] 辻川信二, 別冊数理科学 現代宇宙論講義 2013年 07月号. サイエンス社, 2013.
- [2] S. Weinberg, *Cosmology*. Cosmology. OUP Oxford, 2008.  
<https://books.google.co.jp/books?id=nqQZdg020fsC>.
- [3] S. Weinberg, “Quantum contributions to cosmological correlations,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 043514, arXiv:hep-th/0506236 [hep-th].
- [4] J. M. Maldacena, “Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models,” *JHEP* **05** (2003) 013, arXiv:astro-ph/0210603 [astro-ph].
- [5] M. Maggiore, “Gravitational wave experiments and early universe cosmology,” *Phys. Rept.* **331** (2000) 283–367, arXiv:gr-qc/9909001 [gr-qc].
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY, 1972.  
<https://cds.cern.ch/record/100595>.
- [7] 磯, “福間将文, 酒谷雄峰, 重力とエントロピー; 重力の熱力学的性質を理解するために,” サイエンス社, 東京, 2014, vi+211p, 26 × 18cm, 本体 2,546 円, (sgc ライブラリ-112), [専門・大学院向], issn4910054701043,” *日本物理學會誌* **70** no. 7, (Jul, 2015) 563–564.  
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009970922/>.

- [8] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A20, [arXiv:1502.02114](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [9] **Planck** Collaboration, D. Paoletti, “Planck 2015 Cosmological Results,” in *Proceedings, Magellan Workshop: Connecting Neutrino Physics and Astronomy: Hamburg, Germany, March 17-18, 2016*, pp. 71–86. 2016. <http://inspirehep.net/record/1501317/files/fulltext.pdf>. [,71(2016)].
- [10] M. J. Mortonson and U. Seljak, “A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization uncertainty,” *JCAP* **1410** (2014) 035, [arXiv:1405.5857](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [11] **POLARBEAR** Collaboration, Y. Inoue *et al.*, “POLARBEAR-2: an instrument for CMB polarization measurements,” *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* **9914** (2016) 99141I, [arXiv:1608.03025](#) [[astro-ph.IM](#)].
- [12] A. Golovnev, “ADM analysis and massive gravity,” in *Modern Mathematical Physics. Proceedings, 7th Summer School: Belgrade, Serbia, September 9-19, 2012*, pp. 171–179. 2013. [arXiv:1302.0687](#) [[gr-qc](#)]. <http://inspirehep.net/record/1217542/files/arXiv:1302.0687.pdf>.
- [13] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,”.
- [14] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW150914: Implications for the stochastic gravitational wave background from binary black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no. 13, (2016) 131102, [arXiv:1602.03847](#) [[gr-qc](#)].
- [15] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Directional limits on persistent gravitational waves from Advanced LIGO’s first observing run,” [arXiv:1612.02030](#) [[gr-qc](#)].
- [16] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [arXiv:1502.01589](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [17] T. L. Smith, M. Kamionkowski, and A. Cooray, “Direct detection of the inflationary gravitational wave background,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 023504, [arXiv:astro-ph/0506422](#) [[astro-ph](#)].
- [18] M. S. Turner, M. J. White, and J. E. Lidsey, “Tensor perturbations in inflationary models as a probe of cosmology,” *Phys. Rev.* **D48** (1993) 4613–4622, [arXiv:astro-ph/9306029](#) [[astro-ph](#)].
- [19] **VIRGO, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “An Upper Limit on the Stochastic Gravitational-Wave Background of Cosmological Origin,” *Nature* **460** (2009) 990, [arXiv:0910.5772](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [20] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO’s First Observing Run,” [arXiv:1612.02029](#) [[gr-qc](#)].

- [21] B. Allen and A. C. Ottewill, “Detection of anisotropies in the gravitational-wave stochastic background,” *Phys. Rev. D* **56** (Jul, 1997) 545–563.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.545>.
- [22] C. Caprini *et al.*, “Science with the space-based interferometer eLISA. II: Gravitational waves from cosmological phase transitions,” *JCAP* **1604** no. 04, (2016) 001,  
[arXiv:1512.06239](https://arxiv.org/abs/1512.06239) [astro-ph.CO].
- [23] V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.  
<http://www.cambridge.org/us/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521868343>.
- [24] B. Allen, “The Stochastic gravity wave background: Sources and detection,” in *Relativistic gravitation and gravitational radiation. Proceedings, School of Physics, Les Houches, France, September 26-October 6, 1995*, pp. 373–417. 1996.  
[arXiv:gr-qc/9604033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9604033) [gr-qc].  
<http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0223102>.
- [25] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994. <https://cds.cern.ch/record/278400>.
- [26] S. W. Hawking and G. T. Horowitz, “The Gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms,” *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 1487–1498, [arXiv:gr-qc/9501014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9501014) [gr-qc].