

シンポジウム報告

日大理工・益川塾連携 素粒子物理学シンポジウム

日程: 2018年11月3日(土)、4日(日)

場所: 京都産業大学むすびわざ館2階ホール

概要

第8回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウムが、日本大学理工学部素粒子論研究室と京都産業大学益川塾の連携の下、上記の日時・場所において開催された。本シンポジウムは、私立大学が連携して素粒子物理学に関する研究交流を図ることを目的とし、計24件の講演が行われた。

講演は場の量子論から素粒子現象論にわたる理論に関するものが中心であるが、近年のニュートリノと反ニュートリノ振動実験について実験的な観点からの解説や、最新の宇宙線スペクトルに関する招待講演も含め、幅広い内容であった。日本大学と京都産業大学を中心に、京都大学、大阪大学、名古屋大学、北海道大学、奈良女子大学、理化学研究所、京都府立医科大学、近畿大学、摂南大学、九州産業大学、中部大学、三重県立津工業高等学校などから35名が参加し、大変に有意義なシンポジウムとなった。

世話人

益川 敏英 (京都産業大学 益川塾)	九後 汰一郎 (京都産業大学 益川塾)
上村 尚平 (京都産業大学 益川塾)	菊地 健吾 (京都産業大学 益川塾)
出口 真一 (日本大学 理工学部)	二瓶 武史 (日本大学 理工学部)
三輪 光嗣 (日本大学 理工学部)	梅津 光一郎 (日本大学 理工学部)
山中 真人 (九州産業大学 理工学部)	

第8回 日大理工・益川塾連携 素粒子物理学シンポジウム

11月3日(土)

時間	進行	講演者	講演タイトル・内容	座長
12:30	受付開始		場所:むすびわざ館2階ホール前	
13:00-13:10	挨拶 案内	益川 敏英(益川塾) 主催者		
13:10-14:10	講演	Roger Wendell(京都大学)	ニュートリノと反ニュートリノ振動:実験的な観点	九後 太一(益川塾)
14:10-14:30	講演	山津 直樹(北海道大学)	Family Unification in Special Grand Unification	
14:30-14:50	講演	藤川 和男(理化学研究所)	Generalized Pauli-Gursey transformation and Majorana neutrinos	
14:50-15:05	休憩			
15:05-15:25	講演	三輪 光嗣(日本大学)	σ ゲージハミルトニアンにおける弦の振動モードの寄与について	出口 真一(日本大学)
15:25-15:45	講演	太田 信義(近畿大学)	Towards the Determination of the Dimension of Critical Surface	
15:45-16:05	講演	大谷 聡(日本大学)	BPS Monopole in the Space of Boundary Conditions	
16:05-16:25	講演	菊地 健吾(益川塾)	Wess-Zumino模型に対するグラディエントフロー方程式	
16:25-16:40	休憩			
16:40-17:40	講演	山脇 幸一(名古屋大学)	Compositeness within/beyond the Standard Model : A Scale-invariant View, Past and Future	高橋 智彦(奈良女子大学)
17:40-18:00	講演	二瓶 武史(日本大学)	スケール不変な重力模型と宇宙論	
18:00-18:20	講演	九後 太一(益川塾)	真空エネルギーの計算可能性と世界のスケール不変性	
18:30-20:00	懇親会		場所:むすびわざ館1階カフェKSUKSU(事前申込者のみ)	

11月4日(日)

時間	進行	講演者	講演タイトル・内容	座長
9:30-10:30	講演	川中 宣太(京都大学)	最新の宇宙線スペクトルとその宇宙物理学的解釈	原 哲也(京都産業大学)
10:30-10:50	講演	吉岡 興一(京都大学)	TBA	
10:50-11:10	講演	平山 貴之(中部大学)	ホログラフィックQCDによる中性子星核物質の状態方程式の導出	
11:10-11:30	休憩			
11:30-11:50	講演	上村 尚平(益川塾)	Large Volume Scenario と F-term uplifting	三輪 光嗣(日本大学)
11:50-12:10	講演	江成 隆之(日本大学)	Moonshine and string theory	
12:10-12:30	講演	小路田 俊子(奈良女子大学)	Conformal interface in Open string field theory	
12:30-13:50	昼食		場所:むすびわざ館1階カフェKSUKSU(事前申込者のみ)	
13:50-14:50	講演	兼村 晋哉(大阪大学)	ヒッグス物理から新物理へ —LHC, ILCと重力波の相乗効果—	山中 真人(九州産業大学)
14:50-15:10	講演	曾我見 郁夫(京都産業大学)	湯川相互作用の原理を求めて	
15:10-15:30	休憩			
15:30-15:50	講演	仲 滋文(日本大学)	Domain Type of Field Equation in AdS5 Spacetime and Related Problem	上村 尚平(益川塾)
15:50-16:10	講演	酒谷 雄峰(京都府立医科大学)	超弦理論におけるブレーンと変形された超重力理論	
16:10-16:30	講演	木村 哲士(日本大学)	Semi-doubled GLSM for five-branes of codimension two	
16:30-16:50	休憩			
16:50-17:10	講演	梅津 光一郎(日本大学)	Comment on a classical limit of Grover's algorithm	菊地 健吾(益川塾)
17:10-17:30	講演	外山 政文(京都産業大学)	ゲートモデル量子コンピュータ上の弱測定実験	
17:30-17:50	講演	出口 真一(日本大学)	修正されたBateman模型に基づく減衰調和振動子の量子化	
17:50-18:00	閉会	主催者		

目次

序文	i
プログラム	ii
目次	iii
Roger Wendell (京大)	Neutrino and Antineutrino Oscillations: An Experimental Perspective	1
山津 直樹 (北大)	Family Unification in Special Grand Unification	5
藤川 和男 (日大 / 理研)	Generalized Pauli-Gursey transformation and Majorana neutrinos	10
三輪 光嗣 (日大)	σ ゲージハミルトニアンにおける弦の振動モードの寄与について	14
太田 信義 (近大)	Towards the Determination of the Dimension of Critical Surface	18
大谷 聡 (日大)	BPS Solitons and Quantum Mechanics	23
菊地 健吾 (益川塾)	Wess-Zumino 模型に対するグラディエントフロー方程式	26
二瓶 武史 (日大)	スケール不変性な重力模型と宇宙論	28
九後 汰一郎 (京産大 / 益川塾)	真空エネルギーの計算可能性と世界のスケール不変性	31
川中 宣太 (京大)	最新の宇宙線スペクトルとその宇宙物理学的解釈	39
上村 尚平 (益川塾)	Large Volume Scenario と F-term uplifting	43
江成 隆之 (日大)	Moonshine and String Theory	48
小路田 俊子 (奈良女子大)	Conformal Interface in Open String Field Theory	52
曾我見 郁夫 (益川塾)	素粒子の標準模型の改革を目指して	58
仲 滋文 (日大)	Domain Type of Field Equation in AdS ₅ Spacetime and Related Problem	62
酒谷 雄峰 (京都医大)	超弦理論におけるブレーンと変形された超重力理論	66
木村 哲士 (日大)	Semi-doubled GLSM for Five-branes of Codimension Two	69
梅津 光一郎 (日大)	A classical limit of Grover's algorithm	73
外山 政文 (京産大)	Weak-measurement experiments on qubits	78
出口 真一 (日大)	修正された Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の量子化	83

Neutrino and Antineutrino Oscillations: An Experimental Perspective

Kyoto University

Roger Wendell

1 Introduction

The PMNS framework for describing neutrino oscillations is characterized by three mixing angles, two mass squared splittings, and a CP-violating phase, δ_{CP} . With the exception of the latter, these parameters have already been measured to varying degrees of precision and importantly, have been determined to be non-zero (c.f. [1]). This fact makes it possible to study δ_{CP} using oscillations of the form $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, the so-called “appearance” channel, and its antineutrino equivalent. Despite impressive progress in the experimental understanding of the PMNS matrix there remain several open questions, of which neutrino CP violation is perhaps the most sought after. Another, which has implications for the study of δ_{CP} , is the nature of the neutrino mass hierarchy, that is whether the most electron-poor neutrino mass state is heavier (normal hierarchy) or lighter (inverted hierarchy) than the other two.

Interestingly, the study of neutrino and antineutrino oscillations is a useful tool for addressing these questions. This presentation discusses recent results from the T2K (c.f. [2]) long-baseline accelerator neutrino experiment as well as atmospheric neutrino measurements at Super-Kamiokande ([3]) using both neutrinos and antineutrino oscillations to study these topics. In the original oral presentation the NOvA experiment was also discussed, however for brevity the details are omitted here (c.f. [4]).

2 Accelerator Neutrinos

At the most fundamental level the existence of CP violation in neutrinos can be directly tested by comparing the oscillations of neutrinos with their antiparticle counterparts. Accelerator-based experiments offer the unique ability to create beams enriched primarily in either neutrinos or antineutrinos, such that when directed towards a detector a suitable distance from the source, their separate oscillations may be studied. Though there are several experimental complications, such as the inability to produce a purely monoenergetic beam, uncertainties in the neutrino (antineutrino) interaction cross sections, and uncertainties in the flux estimation, this is the technique chosen by the T2K and NOvA experiments.

The neutrino production mechanism is straightforward and relies on the decay of charged mesons produced in the interactions of protons with a nuclear target: $p + A \rightarrow \pi^+ + X \rightarrow$

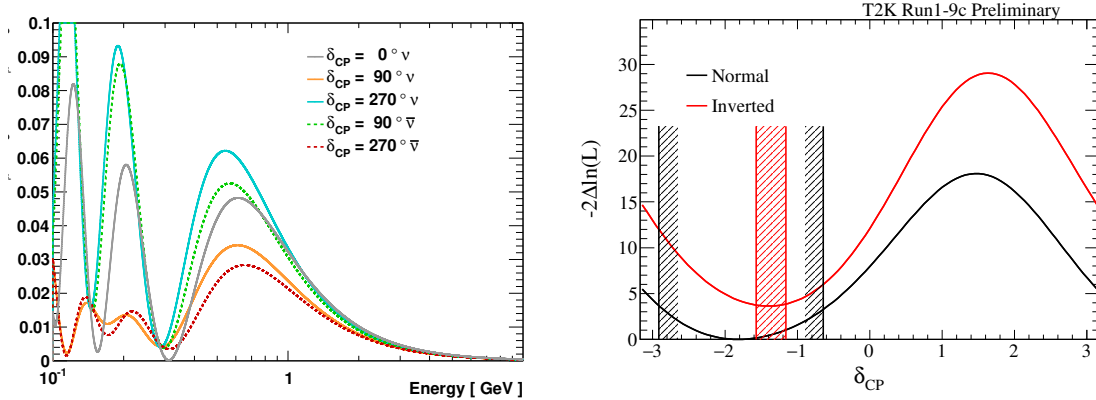


Figure 1: (Left) Oscillation probabilities for both neutrinos (solid) and antineutrinos (dashed) at the T2K experiment. The curves have been drawn assuming a normal mass hierarchy and $\sin^2 \theta_{13} = 0.0219$. (Right) Constraints from T2K on δ_{CP} assuming the normal (black) and inverted mass hierarchy (red) using its first nine run periods. The curves are offset by the hierarchy preference and vertical bars denote the 2σ allowed regions. The CP-conserving values, $\delta_{CP} = \pi, 0$ are excluded at this confidence level.

$\mu^+ + \nu_\mu + X$. In this scheme the resulting beam is nearly pure in muonic neutrinos with a small contamination from electron neutrinos produced by K meson decays. T2K uses 30 GeV/c protons provided by the J-PARC facility and magnetic focusing horns to direct the mesons towards the neutrino (far) detector, Super-Kamiokande (Super-K), prior to their decay. By changing the direction of the horns' magnetic fields either π^+ or π^- are focused resulting in a predominantly neutrino or antineutrino beam. However, the beam itself is directed 2.5° off-axis to produce a sharp neutrino profile peaked at around 600 MeV at Super-K. The detector is located 295 km downstream, which allows for the study of both $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ and $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillations driven predominantly by the atmospheric mass splitting $\Delta m_{31}^2 \approx 2.45 \times 10^{-3} \text{eV}^2$. Appearance oscillations are sensitive to the value of $\sin^2 \theta_{13}$ and δ_{CP} . Figure 1 (left) shows the expected oscillation probability for $\sin^2 \theta_{13} = 0.0219$ and a few values of δ_{CP} for both neutrinos and antineutrinos. The opposing behavior of neutrino and antineutrinos as a function of δ_{CP} provides a strong constraint on this parameter.

Using data from its first nine run periods T2K has accumulated a total of 14.9×10^{20} protons on target (POT) with a neutrino-enriched beam and 11.2×10^{20} POT with an antineutrino-enriched beam. It has observed 90 ν_e candidates and 9 $\bar{\nu}_e$ candidates with an expectation of 80.7 (61.6) and 11.8 (13.4), respectively, assuming $\delta_{CP} = -\pi/2(0)$. While statistical uncertainties are

the largest limiting factor in the measurement, T2K has nonetheless provided tight constraints on this parameter as shown in the right panel of Figure 1. Note that the CP-conserving values $\delta_{CP} = \pi, 0$ are excluded at the 2σ confidence level. T2K has additionally searched for evidence of the antineutrino appearance mode $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ using its 9 observed events in this channel. At present the data are too few to make a definitive conclusion and provide a p-value for rejecting the no-appearance hypothesis of only 0.233. Similarly the posterior probability for the normal hierarchy is 88%, still too weak to be conclusive. In contrast to these though, T2K's disappearance measurements currently provide the most stringent constraints on the atmospheric mixing parameters: $\sin^2 \theta_{23} = 0.536_{-0.046}^{+0.031}$ and $\Delta m_{32}^2 = 2.434 \pm 0.064$ assuming the normal hierarchy.

3 Atmospheric Neutrinos

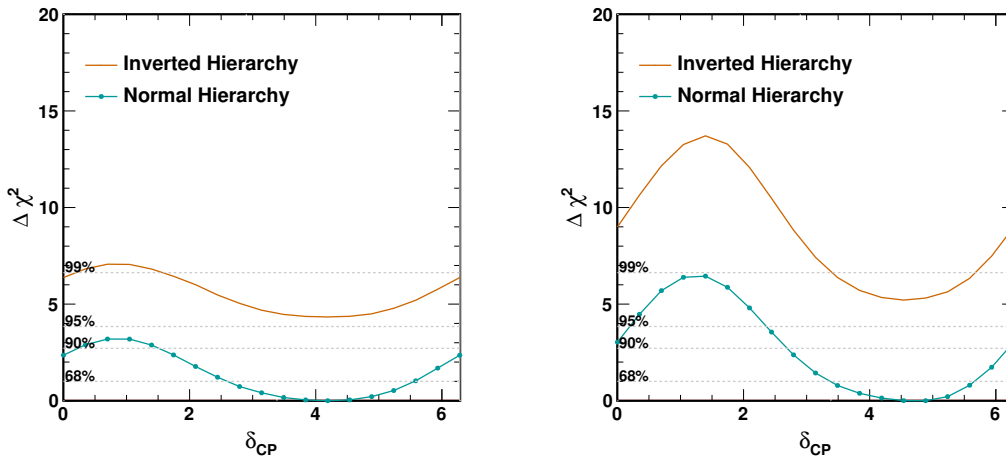


Figure 2: Constraints on δ_{CP} from Super-Kamiokande's atmospheric neutrino data (left) and that data combined with a model of the T2K experiment (right)[3]. In both cases the normal hierarchy is favored with the preference indicated by the separation of the two curves. Here $\sin^2 \theta_{13}$ has been set to 0.0219.

Unlike accelerator neutrinos it is not possible to control the incoming flux of atmospheric neutrinos and in general the latter contains both neutrinos and antineutrinos in roughly equal proportion and both muonic and electronic species in a ratio of 2:1 below 10 GeV. However, it is possible to study both δ_{CP} and the mass hierarchy with atmospheric neutrinos using the same oscillation channels discussed above. The latter is made possible by the asymmetric and

hierarchy-dependent effects of matter on neutrinos and antineutrinos traversing the earth. Indeed, due to the presence of electrons (as opposed to positrons or muons) electron neutrinos experience more forward scattering in the Earth than other neutrino species. This gives rise to an effective potential which enhances only the neutrino (antineutrino) appearance probability if the mass hierarchy is normal (inverted) for trajectories through the core of the Earth at $O(\text{GeV})$ energies. It is possible to determine the mass hierarchy then by measuring the amount of upward-going electron neutrino appearance given knowledge of the relative amount of neutrinos and antineutrinos in the flux or the ability to separate between the two. Similar statements are true for δ_{CP} but at energies below 1 GeV.

Figure 2 shows the result of an atmospheric neutrino oscillation analysis from Super-Kamiokande following a 328 kiloton-year exposure of the detector. The left figure shows the constraint on δ_{CP} for both hierarchy assumptions using atmospheric neutrinos alone. Similarly the right figure shows the constraint when a model of the T2K experiment is fit together with the atmospheric neutrino data. The T2K model is built entirely from publicly available data but uses only 6.57×10^{20} POT of neutrino running, considerably less than the data set described above. In both analyses $\delta_{CP} \approx 3\pi/2$ is favored. The normal mass hierarchy is favored by between 81.9% and 96.7% in the atmospheric neutrino-only analysis and by between 91.9% and 94.5% when the T2K model. The ranges reflect the assumed values of the atmospheric mixing parameters used in the calculation [3].

4 Conclusion

Though much progress has been made in recent years, the questions of neutrino CP violation and the nature of the mass hierarchy remain unresolved. At present world data favor $\delta_{CP} \approx -\pi/2$ and the normal hierarchy. However, more data comparing neutrinos and antineutrinos is needed to reach a definitive conclusion.

References

- [1] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **98**, no. 3, 030001 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001
- [2] K. Abe *et al.* [T2K Collaboration], Phys. Rev. Lett. **121**, no. 17, 171802 (2018) doi:10.1103/PhysRevLett.121.171802 [arXiv:1807.07891 [hep-ex]].
- [3] K. Abe *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **97**, no. 7, 072001 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.072001 [arXiv:1710.09126 [hep-ex]].
- [4] J. Bian, arXiv:1812.09585 [hep-ex].

Family Unification in Special Grand Unification

北海道大学 高等教育推進機構

山津 直樹

Abstract

大統一ゲージ群の特殊部分群への破れに基づく大統一理論『特殊大統一理論』[1, 2]の枠組みで世代の統一可能性について議論する。特殊部分群を用いる場合には二つの世代対称性の入れ方“正則型”と“特殊(積)型”があり, “正則型”ではカイラルな三代や量子異常の相殺など最低限の条件を満たした模型が構築可能なことを説明する。本稿は主に文献 [3] に基づく。

1 はじめに

素粒子物理学に置ける最大の謎の一つが三代のカイラルなクォークとレプトンの存在である。さらに, 標準理論においてクォークとレプトンの質量はヒッグス機構にともない対応する湯川結合を通して生成され, それらの質量は階層構造になっている。これらの事実は自然の隠された性質を示唆しているように見える。カイラルな世代の起源や階層構造を理解するために非可換群や可換群を世代対称性とする試みがなされている [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。素粒子クォークとレプトンを統一する別の試みとして標準理論のゲージ群をより大きな大統一ゲージ群に統一する大統一理論が知られている [11, 12, 13, 14, 15, 16]。さらに, 素粒子クォークとレプトンの世代まで含めた統一理論もこれまでにいくつかの試みがなされている [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]。

これまで良く知られた大統一理論は大統一ゲージ群とその正則部分群という限られた範囲での議論しかなされて来なかった。言うまでもなく, 世代を含めた大統一理論に関しても同様である。例えば, 以下のような部分群は全て正則部分群である。

$$E_8 \supset E_7 \supset E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\text{SM}}(:= SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y). \quad (1)$$

しかし, 特殊部分群 (または非正則部分群) と呼ばれる部分群がある。例えば,

$$SO(248) \supset E_8, \quad USp(56) \supset E_7, \quad SU(27) \supset E_6, \quad SU(16) \supset SO(10). \quad (2)$$

ここでリー群の正則部分群と特殊部分群, 最大部分群についてすこし説明する。正則部分群とは元のリー群のルートをそのまま用いた部分群であり, 特殊部分群とはすくなくとも一つのルートは元のリー群のルートではないものを用いた部分群のことである。部分群 H がリー群 G の最大部分群であるということは, リー群 G の部分群 G' ($G' \neq G, H$) を考え, $H \subset G' \subset G$ を満たす G' が存在しない場合である。具体例として, リー群 $SU(3)$ を考える。 $SU(3)$ は二つの最大部分群 $SU(2) \times U(1)$ と $SO(3) \simeq SU(2)$ を持つ。 $SU(2) \times U(1)$ は正則部分群であり, $SO(3) \simeq SU(2)$ は特殊部分群である。その他に $SU(3)$ は $U(1) \times U(1)$ を部分群として含むがこれは最大部分群ではない。なぜなら, $G = SU(3)$ と $H = U(1) \times U(1)$ とすると, $H \subset G' \subset G$ を満たす $G' = SU(2) \times U(1)$

が存在するためである。(リー群とその部分群についてのさらなる情報は、例えば、文献 [15, 25, 16] とそれらの参考文献に譲る。)

最近 (2017 年) に大統一ゲージ群 $SO(32)$ と $SU(16)$ の特殊部分群 $SO(10)$ への破れを用いた新しいタイプの大統一理論『特殊大統一理論』[1, 2] を提唱した。 $SU(16)$ 特殊大統一理論 [1] の主要な結果は以下の通りである：大統一ゲージ群 $SU(16)$ の特殊部分群 $SO(10)$ へ破れる場合、四次元 $SU(16)$ **16** ワイルフェルミオンを一代分のクォークとレプトンと見なすことができる；四次元理論の枠組みはカイラルな三世代のクォークとレプトンと $SU(16)$ ゲージ対称性の量子異常の相殺条件を満たせないが、六次元の枠組みでは六次元と四次元 $SU(16)$ ゲージ対称性の量子異常の相殺条件を満たし六次元のワイルフェルミオンのゼロモードをカイラルな三世代のクォークとレプトンと見なせる。また、その場合にエキゾチックなカイラルフェルミオンは現れない。 $SO(32)$ 特殊大統一理論 [2] に関しても同様の結果が得られている。

本稿では、特殊大統一理論の枠組みで世代対称性の入れ方には“正則型”(例： $SU(19)$) と“特殊(積)型”(例： $SU(48)$) があることを紹介する。

以下 Sec. 2 で特殊部分群を用いた世代を含む大統一理論を議論し、Sec. 3 で簡単なまとめを行う。

2 特殊大統一理論

特殊大統一理論の枠組みで、世代の統一は大統一ゲージ群とその“正則型”と“特殊(積)型”部分群を用いることにより議論できる。前者の例は $SU(19) \supset SU(16) \times SU(3) \times U(1)$ であり、後者の例は $SU(48) \supset SU(16) \times SU(3)$ である。ただし、 $SU(16)$ は通常の大統一ゲージ群 $SO(10)$ と $SU(3)$ は世代群である。 $(SU(19) \supset SU(16) \times SU(3) \times U(1))$ や $(SU(48) \supset SU(16) \times SU(3))$ などの表現分解は通常射影行列を用いた方法 [26, 27, 16] で計算できる。

まず正則型と特殊(積)型での標準理論クォークとレプトンの埋め込みをどのように実現可能であるかを確認する。正則型の場合について、大統一ゲージ群とその部分群の例は $SU(19) \supset SU(16) \times SU(3) \times U(1) \supset SO(10) \times SU(3) \times U(1)$ である。これは $SU(16)$ の単純な拡張である。 $SU(19)$ 定義表現に対する $SU(19) \supset SU(16) \times SU(3) \times U(1) \supset SO(10) \times SU(3) \times U(1)$ の表現分解は以下で与えられる：

$$\mathbf{19} = (\mathbf{16}, \mathbf{1})(3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})(-16). \quad (3)$$

この場合、 $SU(19)$ 二階反対称テンソル表現の表現分解は以下のように与えられ三世代のクォークとレプトンを含むことがわかる：

$$\mathbf{171} = (\mathbf{16}, \mathbf{3})(-13) \oplus (\mathbf{120}, \mathbf{1})(6) \oplus (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{3}})(-32). \quad (4)$$

$SU(16)$ **120** 表現は複素表現であるが、一方、 $SO(10)$ **120** 表現は実表現である。そのため、 $SO(10)$ **120** 表現の四次元ワイルフェルミオンは四次元のベクターライクフェルミオンである。このことから $SU(19)$ 群の $SO(10)$ への破れを考慮すると、三つの四次元 $SO(10)$ **16** ワイルフェルミ

オンのみがカイラルフェルミオンとして残る. また, $SU(19)$ 二階反対称テンソル表現 $\mathbf{171}$ は $SU(16) \times SU(3)$ ($\mathbf{16}, \mathbf{3}$) 表現を含む. 次に, 特殊 (積) 型の場合について, 大統一ゲージ群とその部分群の例は $SU(48) \supset SU(16) \times SU(3) \supset SO(10) \times SU(3)$ である. $SU(48)$ 定義表現に対する表現分解は次で与えられる:

$$\mathbf{48} = (\mathbf{16}, \mathbf{3}). \quad (5)$$

$SU(48)$ $\mathbf{48}$ 表現の四次元ワイルフェルミオンはカイラルな三世代のクォークとレプトンと見なせる. 上記の議論から $G = SU(19), SU(48)$ は, 群 G が “小さな” 大統一群 $SU(16)$ と世代群 $SU(3)$ を含むこと, 群 G のある既約表現が $SU(16) \times SU(3)$ ($\mathbf{16}, \mathbf{3}$) 表現を含むことがわかる. さらに, 標準理論を越える統一理論としてこれらの特殊大統一理論を見なせるのならばすくなくとも次の追加の条件を満たすはずである: 標準理論での三世代のカイラルフェルミオンが実現される; ゲージの量子異常が相殺される; エキゾチックなカイラルフェルミオンが現れない. これらの場合も $SU(16)$ や $SO(32)$ 特殊大統一理論と同様に四次元理論の枠組みでは量子異常の相殺条件から三世代のカイラルフェルミオンのみは許されない.

詳細は文献 [3] に譲るが, 結果としては $G = SU(19)$ の場合には, $SU(16)$ と $SO(32)$ 特殊大統一理論 [1, 2] と同様の議論を行うことで追加条件を全て同時に満たす模型を構築することが可能であった. 一方, $G = SU(48)$ の場合には, $SU(16)$ と $SO(32)$ 特殊大統一理論 [1, 2] と同様の議論を行ったところ追加条件を全て同時に満たすような模型を構築することはできなかった.

3 まとめ

大統一ゲージ群の特殊部分群への破れに基づく大統一理論の枠組みでの世代の統一可能性についての結果を紹介した. 文献 [3] で得られた重要な結果は次の通りである. 六次元 $SU(19)$ “正則型” 特殊大統一理論では, 標準理論の全てのフェルミオンを $SU(19)$ 二階反対称テンソルに統一できる. 三世代の標準理論フェルミオンは六次元ワイルフェルミオンのゼロモードとして実現できる. 六次元と四次元のゲージの量子異常を相殺できる. 四次元のエキゾチックなカイラルフェルミオンは現れない.

References

- [1] N. Yamatsu *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** no. 6, (2017) 061B01, arXiv:1704.08827 [hep-ph].
- [2] N. Yamatsu *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** no. 10, (2017) 101B01, arXiv:1708.02078 [hep-ph].
- [3] N. Yamatsu *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018** no. 9, (2018) 091B01, arXiv:1807.10855 [hep-ph].

- [4] F. Wilczek and A. Zee *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 421.
- [5] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 277.
- [6] T. Yanagida. In Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, p95 (1979).
- [7] T. Maehara and T. Yanagida *Prog. Theor. Phys.* **61** (1979) 1434.
- [8] K. Inoue *Prog. Theor. Phys.* **93** (1995) 403–416, [arXiv:hep-ph/9410220](#).
- [9] S. F. King and G. G. Ross *Phys. Lett.* **B520** (2001) 243–253, [arXiv:hep-ph/0108112](#).
- [10] N. Maekawa and T. Yamashita *JHEP* **07** (2004) 009, [arXiv:hep-ph/0404020](#).
- [11] H. Georgi and S. L. Glashow *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.
- [12] K. Inoue, A. Kakuto, and Y. Nakano *Prog.Theor.Phys.* **58** (1977) 630.
- [13] H. Fritzsch and P. Minkowski *Ann. Phys.* **93** (1975) 193–266.
- [14] F. Gursey, P. Ramond, and P. Sikivie *Phys. Lett.* **B60** (1976) 177.
- [15] R. Slansky *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.
- [16] N. Yamatsu [arXiv:1511.08771 \[hep-ph\]](#).
- [17] P. Ramond, “The Family Group in Grand Unified Theories,” in *International Symposium on Fundamentals of Quantum Theory and Quantum Field Theory*, pp. 265–280. 1979. [arXiv:hep-ph/9809459 \[hep-ph\]](#).
- [18] Y. Kawamura, T. Kinami, and K.-y. Oda *Phys. Rev.* **D76** (2007) 035001, [arXiv:hep-ph/0703195](#).
- [19] Y. Kawamura and T. Miura *Phys. Rev.* **D81** (2010) 075011, [arXiv:0912.0776 \[hep-ph\]](#).
- [20] Y. Goto, Y. Kawamura, and T. Miura *Phys.Rev.* **D88** no. 5, (2013) 055016, [arXiv:1307.2631](#).
- [21] C. H. Albright, R. P. Feger, and T. W. Kephart *Phys. Rev.* **D93** no. 7, (2016) 075032, [arXiv:1601.07523 \[hep-ph\]](#).
- [22] Y. Goto and Y. Kawamura [arXiv:1712.06444 \[hep-ph\]](#).
- [23] M. Reig, J. W. F. Valle, C. A. Vaquera-Araujo, and F. Wilczek *Phys. Lett.* **B774** (2017) 667–670, [arXiv:1706.03116 \[hep-ph\]](#).

- [24] M. Reig, J. W. F. Valle, and F. Wilczek [arXiv:1805.08048](https://arxiv.org/abs/1805.08048) [hep-ph].
- [25] R. Cahn. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.
- [26] W. McKay, J. Patera, and D. Sankoff. New York Academic Press, 1977. in “Computers in Nonassociative Rings and Algebras” edited by R. E. Beck and B. Kolman.
- [27] W. G. McKay and J. Patera. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

Generalized Pauli-Gursey transformation and Majorana neutrinos

Kazuo Fujikawa

*Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences Program,
RIKEN, Wako 351-0198, Japan*

Abstract

A proposal and application of generalized Pauli-Gursey transformation is discussed.

1 Seesaw model of neutrinos

A general seesaw model of neutrinos is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu}_L(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L(x) + \bar{\nu}_R(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_R(x) \\ &- \bar{\nu}_L(x) m_D \nu_R(x) - (1/2) \nu_L^T(x) C m_L \nu_L(x) \\ &- (1/2) \nu_R^T(x) C m_R \nu_R(x) + h.c. \end{aligned} \quad (1)$$

where m_D is a 3×3 complex Dirac mass matrix, and m_L and m_R are 3×3 symmetric complex Majorana mass matrices. This Lagrangian is left-right asymmetric and thus breaks P and also C if CP is good. We write the mass term as

$$(-2)\mathcal{L}_{mass} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R & \bar{\nu}_R^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix} + h.c., \quad (2)$$

where we defined

$$\nu_L^C \equiv C \bar{\nu}_R^T, \quad \nu_R^C \equiv C \bar{\nu}_L^T. \quad (3)$$

We diagonalize the complex *symmetric* mass matrix using a 6×6 unitary matrix (*Autonne-Takagi factorization*¹)

$$U^T \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

¹One may start with the bi-unitary transformation $V^\dagger \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix}$ which is written as $U^T \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} V^* = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix}$ using the symmetric property of the mass matrix. This implies $V^\dagger = U^T$ which is shown to be the case with a more detailed analysis.

where M_1 and M_2 are 3×3 real diagonal matrices, which can be chosen to be the same as characteristic values.

We thus have

$$(-2)\mathcal{L}_{mass} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R & \bar{\nu}_R^C \\ \bar{\nu}_R^C & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix} + h.c., \quad (5)$$

where we defined

$$\begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix}. \quad (6)$$

The fundamental condition,

$$\tilde{\nu}_L^C = C\bar{\nu}_R^{-T}, \quad \tilde{\nu}_R^C = C\bar{\nu}_L^{-T} \quad (7)$$

which is essential to define a *canonical transformation*, is satisfied. Note that this fundamental condition is not generally satisfied by the usual bi-unitary transformation.

2 Generalized Pauli-Gursey transformation

For *any* $U(6)$ matrix, we define the generalized Pauli-Gursey transformation [2, 3]

$$\begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix} \quad (8)$$

which mixes fermions and antifermions and thus changes the definitions of the vacuum and C and CP. The fundamental condition

$$\tilde{\nu}_L^C = C\bar{\nu}_R^{-T}, \quad \tilde{\nu}_R^C = C\bar{\nu}_L^{-T}, \quad (9)$$

which is essential to define a *canonical transformation*, is satisfied.

Using a suitable U , we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu}_L(x)i \not{\partial}\tilde{\nu}_L(x) + \bar{\nu}_R(x)i \not{\partial}\tilde{\nu}_R(x) \\ &- (1/2)\{\tilde{\nu}_R^T C M_1 \tilde{\nu}_R - \tilde{\nu}_L^T C M_2 \tilde{\nu}_L\} + h.c., \end{aligned} \quad (10)$$

which is written as

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (1/2)\{\bar{\psi}_+(x)i \not{\partial}\psi_+(x) + \bar{\psi}_-(x)i \not{\partial}\psi_-(x)\} \\ &- (1/2)\{\bar{\psi}_+ M_1 \psi_+ + \bar{\psi}_- M_2 \psi_-\} \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\psi_+(x) = \tilde{\nu}_R + \tilde{\nu}_L^C, \quad \psi_-(x) = \tilde{\nu}_L - \tilde{\nu}_R^C. \quad (12)$$

These satisfy the classical Majorana conditions

$$C\overline{\psi_+(x)}^T = \psi_+(x), \quad C\overline{\psi_-(x)}^T = -\psi_-(x). \quad (13)$$

Puzzling aspects:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\tilde{\nu}_L}(x)i \not{\partial}\tilde{\nu}_L(x) + \overline{\tilde{\nu}_R}(x)i \not{\partial}\tilde{\nu}_R(x) \\ &- (1/2)\{\tilde{\nu}_R^T C M_1 \tilde{\nu}_R - \tilde{\nu}_L^T C M_2 \tilde{\nu}_L\} + h.c., \end{aligned} \quad (14)$$

is not invariant under C and P symmetries

$$\begin{aligned} C &: \tilde{\nu}_{L,R}(x) \rightarrow \tilde{\nu}_{L,R}^C(x) = C\overline{\tilde{\nu}_{R,L}}^T(x), \\ P &: \tilde{\nu}_{L,R}(x) \rightarrow i\gamma^0\tilde{\nu}_{R,L}(t, -\vec{x}), \quad \tilde{\nu}_{L,R}^C(x) \rightarrow i\gamma^0\tilde{\nu}_{R,L}^C(t, -\vec{x}), \\ CP &: \tilde{\nu}_{L,R}(x) \rightarrow i\gamma^0 C\overline{\tilde{\nu}_{L,R}}^T(t, -\vec{x}) \end{aligned} \quad (15)$$

but is expressed in terms of Majorana fermions

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (1/2)\{\overline{\psi_+}(x)i \not{\partial}\psi_+(x) + \overline{\psi_-}(x)i \not{\partial}\psi_-(x)\} \\ &- (1/2)\{\overline{\psi_+}M_1\psi_+ + \overline{\psi_-}M_2\psi_-\}. \end{aligned} \quad (16)$$

A resolution:

A further 6×6 real orthogonal generalized Pauli-Gursey transformation O ,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} N_L^C \\ N_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} N_R \\ N_R^C \end{pmatrix}, \quad (17)$$

with

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

We thus have (Bogoliubov quasi-particle)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (1/2)\{\overline{N}(x)i \not{\partial}N(x) + \overline{N^C}(x)i \not{\partial}N^C(x)\} \\ &- (1/4)\{\overline{N}(M_1 + M_2)N + \overline{N^C}(M_1 + M_2)N^C\} \\ &- (1/4)[\overline{N}(M_1 - M_2)N^C + \overline{N^C}(M_1 - M_2)N] \end{aligned} \quad (19)$$

which is invariant under the C, P and CP,

$$\begin{aligned}
C & : N(x) \leftrightarrow N^C(x) = C\bar{N}^T(x), \\
P & : N(x) \rightarrow i\gamma^0 N(t, -\vec{x}), \quad N^C(x) \rightarrow i\gamma^0 N^C(t, -\vec{x}), \\
CP & : N(x) \rightarrow i\gamma^0 N^C(t, -\vec{x}), \quad N^C(x) \rightarrow i\gamma^0 N(t, -\vec{x}).
\end{aligned} \tag{20}$$

By a renaming of variables

$$\begin{aligned}
\psi_+(x) & = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) + N^C(x)), \\
\psi_-(x) & = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) - N^C(x)),
\end{aligned} \tag{21}$$

we obtain the Majorana fermions in a logically consistent manner

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} & = (1/2)\{\bar{\psi}_+(x)i \not{\partial}\psi_+(x) + \bar{\psi}_-(x)i \not{\partial}\psi_-(x)\} \\
& - (1/2)\{\bar{\psi}_+M_1\psi_+ + \bar{\psi}_-M_2\psi_-\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

This is analogous to ‘‘Bogoliubov transformation’’ and the C-breaking term corresponds to the condensation term in the BCS theory.

3 Conclusion

Even though the idea of the seesaw model is very old, but some interesting fundamental issue is still there [3].

References

- [1] L. Autonne, Ann. Univ. Lyon **38**, 1 (1915).
T. Takagi, Japan. J. Math. **1**, 83 (1925).
- [2] W. Pauli, Nuovo Cimento **6**, 204 (1957).
F. Gursey, Nuovo Cimento **7**, 411 (1958).
- [3] K. Fujikawa, Phys. Lett. B**789**, 76 (2019).

σ ゲージハミルトニアンにおける弦の振動モードの寄与について

日本大学理工学部

三輪光嗣

1 導入

ゲージ理論と重力理論の間には様々な対応関係が存在する。こうした対応関係は超弦理論における開弦と閉弦の間の双対性が元となっていると考えられる。例えば弦のシリンダーダイアグラムは閉弦の伝搬と考えることも可能であるが、開弦の 1 ループダイアグラムと解釈することもできる。しかしながら、こうした素朴な意味での開弦と閉弦の双対性だけではゲージ理論と重力理論の間の対応関係を理解できないことは明らかである。実際にこれまでに知られている対応は、例えばゲージ理論の 't Hooft 極限における $1/N$ 展開の主要部と古典重力理論の間の対応等であり、ゲージ場の 1 ループダイアグラムが単独で重力理論側の物理量に対応するというのではない。したがって超弦理論における開弦と閉弦の双対性に基づいてゲージ重力対応を理解するためには、シリンダーダイアグラムだけでなく、開弦の多重ループの寄与を考慮する必要があることが分かる。実際に参考文献 [1, 2] では、多重ループを足し上げることで D3 ブレーン近傍を伝搬する弦に対してある種のスケール不変性が生じることが指摘されており、このスケール不変性に基づいてゲージ重力対応を理解する方向性が提案されている。一方で論文 [3, 4] では、 σ ゲージと名付けられた特殊なゲージ条件の下で、D3 ブレーン上に端点を持つ開弦の多重ループの効果が入ったハミルトニアンを導出する研究がなされた。 σ ゲージとは、光錐ゲージをとる際に世界面の時間座標と空間座標を入れ替えるものである。私はこの手法の正当性に関しては十分に議論をする必要があると考えているが、多重ループの足し上げを行うという野心的な方向性は大変興味深く、ここで得られたハミルトニアンに対する理解を深めたいと考えている。本講演では論文 [3, 4] で提案された σ ゲージに関するレビューと、このゲージに関する研究の報告を行った。この報告書では講演の内容を簡単にまとめる。

2 D3 ブレーン背景時空での弦のハミルトニアン

まず論文 [3] では D3 ブレーン背景時空における弦のハミルトニアンを σ ゲージで議論している。まず、D3 ブレーン背景時空の計量を以下のように書く。

$$ds_{D3}^2 = \frac{1}{\sqrt{H_3}}(dx^+ dx^- + |d\vec{x}|^2) + \sqrt{H_3}|d\vec{y}|^2$$

ただし、 $\alpha' = 2$ として H_3 は以下のようにとる。

$$H_3 = 1 + g_{\text{st}} \frac{16\pi N}{|\vec{y}|^4}$$

ここで通常どおり光錐ゲージ $x^+ = \tau$ の下でハミルトニアン密度を計算すると次式が得られる。

$$\mathcal{H}_{\text{l.c.}} = \frac{1}{2} \left(|\vec{p}_x|^2 + \frac{1}{H_3} |\vec{p}_y|^2 + \frac{1}{H_3} |\vec{x}'|^2 + |\vec{y}'|^2 \right) = \mathcal{H}_{\text{flat}} + g_{\text{st}} (\dots) + g_{\text{st}}^2 (\dots) + \dots \quad (1)$$

ただし、表式の簡単化のためにハミルトニアン密度 $\mathcal{H}_{\text{l.c.}}$ 、 \vec{x} と \vec{y} に対する共役運動量 \vec{p}_x 、 \vec{p}_y は 4π 倍の因子を吸収して書いた。 $\mathcal{H}_{\text{flat}}$ は平坦時空中における弦のハミルトニアン密度である。 H_3 を分母に含むため、 g_{st} に関する展開は無限に続く。一方、論文 [3] で議論された σ ゲージのハミルトニアンは以下のように g_{st} に関する展開が 1 次で止まる。

$$\mathcal{H}_\sigma = \frac{1}{2} \left(H_3 |\vec{p}_x|^2 + |\vec{p}_y|^2 + |\vec{x}'|^2 + H_3 |\vec{y}'|^2 \right) = \mathcal{H}_{\text{flat}} + g_{\text{st}} \frac{8\pi N}{|\vec{y}|^4} \left(|\vec{p}_x|^2 + |\vec{y}'|^2 \right) \quad (2)$$

このことは世界面の時間座標と空間座標を入れ替えたことによる。

3 スリット演算子 \hat{V}

式 (1) や式 (2) のハミルトニアンは、弦に対する D3 ブレーンの影響を超重力理論の古典解を用いて近似的に評価したものであると言える。論文 [3, 4] では D3 ブレーンの影響を弦の境界条件として取り入れる解析が行われている。通常的光錐ゲージでは、開弦が分離したり結合する相互作用は世界面上に直線的なスリットを挿入することで記述される。開弦の多重ループを含むダイアグラムでは世界面上に複数のスリットが挿入される。これらのスリットは D ブレーンに貼り付いた開弦の境界を表しており、D ブレーンに沿った方向の座標と直交する方向の座標に対してそれぞれノイマン境界条件とディリクレ境界条件が課される。光錐ゲージではスリットは世界面の空間方向に局在するが、 σ ゲージでは世界面の空間方向と時間方向が入れ替わるため、論文 [3, 4] ではスリットは時間方向に局在するものとして扱われている。また、光錐ゲージでは（スリットの入った）シリンダーダイアグラムを考えているが、 σ ゲージに移ったあとはこのダイアグラムを閉弦の伝搬として捉える。閉弦はスリットにぶつかるまでは平坦時空のハミルトニアン \hat{H}_{flat} によって伝搬するため、スリットの影響を表す演算子を \hat{V} と書くと、弦の伝搬に対する多重ループの寄与の和は以下のように与えられる。

$$e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{fj}} + g_{\text{st}} \int d\tau_1 e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{f1}} \hat{V} e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{1i}} + g_{\text{st}}^2 \int d\tau_1 d\tau_2 e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{f2}} \hat{V} e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{21}} \hat{V} e^{-\hat{H}_{\text{flat}}\tau_{1i}} + \dots$$

ただし、始状態と終状態における世界面の時間座標 τ を τ_i 、 τ_f とし、 $\tau_{ab} = \tau_a - \tau_b$ と書いた。この和は指数関数の形にまとまるため、D3 ブレーンの影響を受けて伝搬する弦のハミルトニアン \hat{H}_{D3} は以下の形で与えられるというのが論文 [3, 4] の主張である。

$$\hat{H}_{D3} = \hat{H}_{\text{flat}} - g_{\text{st}} \hat{V}$$

この考え方で σ ゲージでのハミルトニアンが g_{st} の一次で止まることが導かれる。

論文 [3, 4] では実際にスリットに対応する演算子 \hat{V} が求められている。 \hat{V} はスリットの中心位置と幅に関する積分の形で与えられる。基本となるのはスリットの中心が世界面の空間座標 σ の原点 ($\sigma = 0$) にあり、 $|\sigma| < \sigma_0$ の領域にスリットが挿入された場合の演算子 \hat{V}_0 であり、以下の形で与えられる。

$$|\hat{V}_0\rangle \propto f(\sigma_0) \exp \left[\sum_{i,r,s,m,n} N_{mn}^{i,rs}(\sigma_0) a_{r,m}^{i\dagger} a_{s,n}^{i\dagger} \right] |0\rangle \quad (3)$$

ただし、 $a_{r,m}^{i\dagger}$ は閉弦の座標 X^i のフーリエモード m の生成演算子である。添え字 $r = 1, 2$ はスリットをはさんだ右側と左側の弦を表し、 $|0\rangle$ は左右の弦の消滅演算子 $a_{r,m}^i$ ($m \neq 0$) で消える状態として定義されている。また、0 モードに関しては運動量表示が取られており、 $a_{r,0}^{i\dagger}$ は運動量の値で置き換えられている。スリット演算子 \hat{V} は \hat{V}_0 の中心位置をずらしたものを足し上げると同時に、パラメータ σ_0 についても積分をすることで得られる。式 (3) の関数 $f(\sigma_0)$ は σ_0 積分の重みであり、論文 [3] ではタキオンの振幅を計算することで $f(\sigma_0) \propto 1/\sin^3 \sigma_0$ と求められている。指数部分の係数 $N_{mn}^{i,rs}(\sigma_0)$ は、領域 $|\sigma| < \sigma_0$ では左右の弦が境界条件（ディリクレ境界条件またはノイマン境界条件）を満たすように、また領域 $|\sigma| > \sigma_0$ では左右の弦が連続的につながるように定められている。具体的な表式は論文 [3, 4] を参照して頂きたい。

4 スリット幅に関する展開

スリット演算子 \hat{V} はスリット幅に関する積分の形で定義されるが、特にスリット幅の小さな領域からの寄与が D3 ブレーンと弦の間を伝搬する無質量の重力モードの寄与を含むと期待できる。このため、論文 [3, 4] では式 (3) の $N_{mn}^{i,rs}(\sigma_0)$ を σ_0 の 2 次まで展開し、得られた結果において生成演算子を弦の座標や運動量に読みかえ、式 (2) で得られた g_{st} の 1 次の項が得られることが議論されている。論文 [3] ではボソンの弦を扱っているため、D3 ブレーンと弦の間を伝搬するタキオンの効果等により余分な項が存在する。一方で論文 [4] では超対称性を持つ弦に対して解析を行い、これらの余分な項が出ないことが議論されている。こうした解析は σ ゲージという扱いが正常に機能することに対する一つの傍証を与えていると考えられる。

今回は、ボソンの弦の場合に式 (3) の $N_{mn}^{i,rs}(\sigma_0)$ を σ_0 に関して 4 次まで展開した。式 (3) の演算子部分 ($f(\sigma_0)$ を除く部分) でノイマン方向のみを含む部分の展開を以下に記す。

$$1 - \frac{\sigma_0^2}{8} |\vec{p}_x|^2 + \frac{\sigma_0^4}{32} \left(-\frac{1}{6} |\vec{p}_x|^2 + \frac{1}{4} |\vec{p}_x|^4 - \vec{p}_x'' \cdot \vec{p}_x - \frac{1}{2} |\vec{p}_x'|^2 \right) + \dots \quad (4)$$

\vec{p}_x は式 (2) と同様にノイマン方向の弦の座標 $\vec{x}(\sigma)$ に対する共役運動量 $\vec{p}_x(\sigma)$ を表し、プライム記号 ($'$) は世界面の空間座標 σ に関する微分を表す。ただし、 $|\hat{V}_0\rangle$ で考えているスリットの中心位置が $\sigma = 0$ であることに対応して、演算子は全て $\sigma = 0$ に挿入されている。これらの項にディリクレ境界条件を満たす方向の寄与や重み関数 $f(\sigma_0)$ をかけて σ_0 積分を実行し、中心位置をずらしたものを足しあげ、さらにディリクレ方向の 0 モードに関しては運動量表示から座標表示に変えるといった解析が必要となる。これらの解析は今後の課題とし、ここでは式 (4) の項について少し考察したい。展開の 0 次と 2 次は論文 [3, 4] で解析されたものであり、基本的にはこれらの項は D ブレーンと弦の間をタキオンと無質量モードが伝搬することで生じる項である。ただし、 \vec{p}_x は論文 [3] の $\vec{p} - k$ と比べて因子 2 だけ定義を変えてある。超対称性も考慮した解析ではこれらの項が式 (2) の g_{st} の一次の項を与える。論文 [3] で指摘されたように式 (4) から、 σ_0^2 の項の \vec{p}_x^2 が式 (2) の \vec{p}_x^2 を与えることは見て取れる。次の σ_0^4 項は D3 ブレーンと弦の間を伝搬する有質量モードの寄与であると期待される。これらの項の一つの特徴として、高階微分を含むことが挙げられる。 σ ゲージの下でスリット演算子が非局所的な性質を待つことや、 σ_0 に関する展開の高次は非局所性をより強く拾うことを考慮すると、これらの高階微分項が現れるのは自然な結果であると考えられる。こうした高階微分の項がターゲット空間の有質量モードの描像からも得られるかどうか考察するのは興味深い方向性であると思う。また、ここでの解析はボソンの弦を扱ったものであるが、論文 [3, 4] の解析によると超対称性を入れた場合には不要項がキャンセルするなどの違った結果が得られることが分かっているため、超弦に基づいた解析を行う必要がある。これらの研究は今後の課題である。

References

- [1] H. Kawai and T. Suyama, “AdS/CFT correspondence as a consequence of scale invariance,” Nucl. Phys. B **789** (2008) 209.
- [2] H. Kawai and T. Suyama, “Some implications of perturbative approach to AdS/CFT correspondence,” Nucl. Phys. B **794** (2008) 1.
- [3] M. Kruczenski, “Planar diagrams in light-cone gauge,” JHEP **0610** (2006) 085.
- [4] M. Kruczenski, “Summing planar diagrams,” JHEP **0810** (2008) 075.

Towards the Determination of the Dimension of Critical Surface

Nobuyoshi Ohta

*Department of Physics, Kindai University, Higashi-Osaka, Osaka 577-8502, Japan and
Maskawa Institute for Science and Culture, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan*

1 Introduction

This talk is based on the work [1].

One of the long-standing problem in theoretical physics is the formulation of quantum gravity. There are several points to be understood.

- If the spacetime metric itself is whole dynamical quantity, there is no notion of spacetime, distance etc. and it is quite difficult how to “quantize” the theory. This most probably requires background field formalism.
- Einstein theory is non-renormalizable. Is it only a low-energy effective theory?
- Higher-order terms always appear in quantum theory, e.g. both quantized Einstein and string theories, so we have to understand how to deal with these.
- In 4D, quadratic (higher derivative) theory is renormalizable [2]! Does this give possible UV completion? But it is non-unitary! Is there no way out?

It seems that the only possible way to make sense of the quantum effects in gravity within the framework of field theory is the asymptotic safety.

2 Asymptotic safety and Wilsonian action

We use effective action describing physical phenomenon at a momentum scale k , which is obtained by integrating out all fluctuations of the fields with momenta larger than k . This is called effective average action Γ_k . Note that Γ_0 is the well-known effective action. Here k may be understood as the lower limit of the functional integration (the infrared cutoff).

The effective average action is divergent itself. The dependence of the effective average action on k gives the Wilsonian RG flow, and the important fact is that it is free from any divergence, giving finite quantum theory.

$$k\partial_k\Gamma_k(\Phi) = \frac{1}{2}\text{tr} \left[\left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\Phi^A\delta\Phi^B} + R_k \right)^{-1} k\partial_k R_k \right], \quad (1)$$

where R_k is the cutoff function. This is called the exact renormalization group equation or functional renormalization group equation (FRGE).

- FRGE gives flow of the effective action in the theory space defined by suitable bases \mathcal{O}_i .

$$\Gamma_k = \sum_i g_i(k) \mathcal{O}_i,$$

$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \sum_i \beta_i \mathcal{O}_i \quad \beta_i = \frac{dg_i}{dt} \quad (1)$$

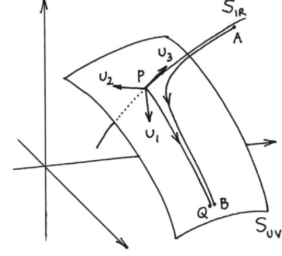


Figure 1: RG flow

- We can set initial conditions at some point and then flow to $k \rightarrow \infty$.

There are two possible behaviors for $k \rightarrow \infty$.

- Couplings go to infinity: This leads to failure as quantum theory (Landau pole in QED).
- Couplings do not go to infinity: Here are further two possibilities.
 - Couplings go to fixed points (FPs): If all couplings go to finite FPs, physical quantities are well defined, giving the UV complete theory. This is called **Asymptotic safety**.
 - The behavior becomes ergotic or limit cycle. This case is rare and is not considered.

Starting from suitable initial condition, we integrate it down to $k \rightarrow 0$, which gives full quantum effective action, from which we can obtain correlation functions! The theories on the same trajectory belong to the same universality class. Namely the trajectories with the same FP make a surface, called critical surface of dimension given by the number of relevant operators.

In the ideal case, we also require that the number of relevant operators (only which are retained) are finite, leading to predictability. Note that in perturbation with Gaussian fixed point, the relevant operators are precisely renormalizable interactions.

We can define quantum theory if we can define nonperturbative RG flow and the couplings approach a fixed point in the ultraviolet energy [3], nonperturbative renormalizability. There is accumulating evidence (up to 34th order in R) that there are always nontrivial fixed points. This means that the asymptotic safety program may be the right direction.

1 Parametrization dependence

There remain important problem of what is the dimension of critical surface? In the context of $f(R)$ gravity, there exist papers which argue that there are THREE relevant operators (Λ, R, R^2) [4] with linear split of the metric:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2)$$

Another result is that there are TWO relevant operators [5] with exponential split defined by

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\rho}(e^h)^\rho{}_\nu \quad (3)$$

We can study the problem with more general parametrization dependence.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + m\bar{g}_{\mu\nu}h + \omega h_{\mu\rho}h^\rho{}_\nu + mhh_{\mu\nu} + m\left(\omega - \frac{1}{2}\right)\bar{g}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\bar{g}_{\mu\nu}h^2. \quad (4)$$

$\omega = 0$ corresponds to linear expansion of metric, $\omega = 1/2$ to exponential expansion and $\omega = 1$ to linear expansion of the inverse metric. We study $f(R)$ gravity with gauge-fixing

$$S = \int d^d x \sqrt{g} f(R) + \frac{Z_N}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (\bar{\nabla}_\alpha h^\alpha{}_\mu - \frac{\bar{\beta} + 1}{d} \bar{\nabla}_\mu h)^2 + \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu \left[\delta_\mu^\nu \bar{\nabla}^2 + \left(1 - 2\frac{1+\beta}{d}\right) \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\nu + \frac{\bar{R}}{d} \delta_\mu^\nu \right] C_\nu \quad (5)$$

2 Results

We find mysterious symmetry which we call duality: In any dimension, for any value of $\tilde{\Lambda}$ and in any gauge, the determinant of the Hessian is invariant under

$$(\omega, m) \rightarrow \left(1 - \omega, -m - \frac{2}{d}\right) \quad (6)$$

We study the fixed points in the theory -2

$$f(R) = \sum_{i=0}^N g_i(k) R^i \quad (7)$$

-2in the gauge $\alpha = 0$ and $\beta = \infty$. (We also considered $\beta = 0$ but the result does not change much.)

$N = 2$: We find ω -dependence of the fixed points for the truncation $N = 2$. We find three relevant directions for $0 \leq \omega < 0.5$ whereas only two relevant directions for $0.5 \leq \omega \leq 1$. It is not possible to continuously deform a fixed point for different values of ω at $N = 2$ order.

$N = 3$: We again find three relevant directions for $0 \leq \omega \leq 0.5$ whereas only two relevant directions for $0.5 < \omega \leq 1$.

We have studied the problem up to $N = 6$ and obtained similar behavior. Thus it is always true that we find three relevant operators for small ω , but only two for larger ω .

It is a serious problem that the number of critical dimension, important physical quantity, changes slightly depending on the choice of parametrization. Which parametrization should we

choose? There is also some scheme dependence on regularization: whether we regularize the determinant from path integral after cancellation of some factors or not. These are still open important questions.

Whether other tensor structures are relevant or not is unsolved. Perturbative renormalizability suggests that $R_{\mu\nu}^2$ is also needed. However a surprise is that Ref. [6] studies this problem on Einstein space, keeping $R_{\mu\nu\rho\lambda}^2$ and concludes that there are only 3 relevant operators, the same as $f(R)$ theory. But definite conclusion can be obtained only on general background! The reason is that in 4D, $R_{\mu\nu\rho\lambda}^2$ can be transformed into $R_{\mu\nu}^2$ and R^2 by GB theorem, and $R_{\mu\nu}^2$ is reduced to R^2 on Einstein space.

3 Conclusions

We have studied a functional renormalization group equation for a general class of parametrizaion of the metric. There are ultraviolet fixed points essential for Asymptotic Safety in all theories studied so far whatever the choice of parametrization. We find that the critical UV surface may be two- or three-dimensional, but the result seems to change depending on the parametrization. Though this casts a doubt on the determination of the critical surface, it is natural to keep relevant operators as many as possible. There exists indication that the gauge-dependence is minimal for the exponential parametrization, so this might be a good choice. Another interesting fact is that there exists a new duality in the general theory.

There are still several important questions like 1) extending the analysis to more general theory (extend the theory space and general backgrounds). 2) what is the physical meaning of the duality.

Acknowledgment: This work was supported in part by the JSPS Grants-in-Aid for Scientific Research (C) No. 16K05331.

References

- [1] G. P. De Brito, N. Ohta, A. D. Pereira, A. A. Tomaz and M. Yamada, Phys. Rev. D **98** (2018) no.2, 026027 [arXiv:1805.09656 [hep-th]].
- [2] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.
- [3] S. Weinberg, in Hawking, S.W., Israel, W.: General Relativity (Cambridge University Press), 790-831.
- [4] K. Falls, D. F. Litim, K. Nikolakopoulos and C. Rahmede, Phys. Rev. D **93** (2016) no.10, 104022 [arXiv:1410.4815 [hep-th]].
- [5] N. Ohta, R. Percacci and G. P. Vacca, Phys. Rev. D **92** (2015) 061501 [arXiv:1507.00968 [hep-th]]; N. Ohta, R. Percacci and G. P. Vacca, Eur. Phys. J. C **76** (2016) 46 [arXiv:1511.09393 [hep-th]].

- [6] D. Benedetti, P. F. Machado and F. Saueressig, Nucl. Phys. B **824** (2010) 168 [arXiv:0902.4630 [hep-th]].

BPS Solitons and Quantum Mechanics

Institute of Quantum Science, Nihon University
Kanda-Surugadai 1-8-14, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan

Satoshi Ohya

The purpose of this article is to report a simple model of one-dimensional quantum mechanics in which the Berry's connection and the matrix elements of the position operator give the BPS solutions of four-dimensional $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory [1].

To begin with, let us consider a free spinless particle on a circle of circumference 2ℓ . The Schrödinger equation for such a particle is given by

$$-\psi''(x) = E\psi(x), \quad (1)$$

where x ranges from $-\ell/2$ to $3\ell/2$. (Throughout the article we work in the units $\hbar = 2m = 1$.) Since nothing special happens in this system, let us further consider the situation in which the particle is subject to point-like interactions. As is well-known, the point-like interactions are all described by the $U(2)$ family of connection conditions for wavefunction [2]. In this article we shall consider the point-like interactions located at $x = \pm\ell/2$ and focus on the following $SU(2)$ subfamily of connection conditions:

$$(1 + U)\psi' - iv(1 - U)\psi = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad x = \pm\frac{\ell}{2}, \quad (2)$$

where $U \in SU(2)$ and v is an arbitrary reference mass scale. Here ψ stands for the following two-component vector-valued function:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi(\ell - x) \end{pmatrix}, \quad -\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}. \quad (3)$$

Notice that, in terms of this vector-valued function, the Schrödinger equation (1) can be rewritten into the vector equation $-\psi''(x) = E\psi(x)$.

Now it is a straightforward exercise to solve the Schrödinger equation $-\psi'' = E\psi$ under the connection conditions (2). By solving this problem, one can easily show that the ground state of this model is doubly degenerate. Indeed, under the parameterization $U = e^{i\alpha}e_+e_+^\dagger + e^{-i\alpha}e_-e_-^\dagger$, where $\{e_+, e_-\}$ is a set of orthonormal two-component vectors, the normalized ground-state energy eigenfunctions $\{\psi_+, \psi_-\}$ turn out to be of the following forms:

$$\psi_\pm(x) = \sqrt{\frac{v(\alpha)}{\sinh(v(\alpha)\ell)}} \exp(\pm v(\alpha)x) e_\pm, \quad (4)$$

where $v(\alpha) = v \tan(\alpha/2)$. Note that the ground-state energy is $E_0 = -v(\alpha)^2$.

Now, quite interestingly, the ground-state sector of this simple model knows the BPS solutions of four-dimensional $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory:

- **Berry's connection = BPS monopole**

Let us first consider the Berry's connection in the ground-state sector:

$$A_{ab} := \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx \psi_a^\dagger(x) d\psi_b(x), \quad a, b \in \{+, -\}, \quad (5)$$

where d stands for the exterior derivative in the parameter space $SU(2) \cong S^3$. It should be noted that, under the unitary change of the basis $\psi_a \mapsto \tilde{\psi}_a = \psi_b g_{ba}$, where $g = (g_{ab}) \in SU(2)$, the Berry's connection (5) indeed transforms as a connection:

$$A \mapsto \tilde{A} = g^\dagger A g + i g^\dagger dg. \quad (6)$$

By choosing $g = \begin{pmatrix} e_+^\dagger \\ e_-^\dagger \end{pmatrix}$, one can show that the Berry's connection \tilde{A} takes the following form [1]:

$$\tilde{A} = \epsilon_{ijk} \frac{x_j \sigma_k}{r^2} \left(1 - \frac{vr}{\sinh(vr)} \right) dx_i, \quad (7)$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ and r are certain local coordinates of the parameter space. Eq. (6) is nothing but the BPS 't Hooft-Polyakov monopole solution of $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory [3].

- **Matrix elements of position operator = adjoint Higgs field**

Let us next consider the following matrix elements of the position operator in the ground-state sector:

$$\Phi_{ab} := \frac{v}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx \psi_a^\dagger(x) x \psi_b(x), \quad a, b \in \{+, -\}, \quad (8)$$

which, under the unitary change of the basis $\psi_a \mapsto \tilde{\psi}_a = \psi_b g_{ba}$, transforms as an adjoint Higgs field

$$\Phi \mapsto \tilde{\Phi} = g^\dagger \Phi g. \quad (9)$$

Again by choosing $g = \begin{pmatrix} e_+^\dagger \\ e_-^\dagger \end{pmatrix}$, one can show that $\tilde{\Phi}$ takes the following form [1]:

$$\tilde{\Phi} = v \frac{x_i \sigma_i}{r} \left(\coth(vr) - \frac{1}{vr} \right). \quad (10)$$

This is the well-known BPS solution of Higgs field in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory [3].

To summarize, we have constructed a simple quantum-mechanical model where the Berry's connection becomes the 't Hooft-Polyakov monopole and the matrix elements of the position operator becomes the adjoint Higgs field, both of which saturate the BPS bound and give the classical solutions of $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory. It would be interesting to investigate other quantum-mechanical models which enjoy spectral degeneracy and realize BPS solutions. Generalizations to other gauge groups would also be interesting.

References

- [1] S. Ohya, J. Phys. **A48** (2015) 505401, [arXiv:1506.04738 \[hep-th\]](#).
- [2] T. Fülöp and I. Tsutsui, Phys. Lett. **A264** (2000) 366, [arXiv:quant-ph/9910062 \[quant-ph\]](#).
- [3] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.

Wess-Zumino 模型に対するグラディエントフロー方程式

京都産業大学益川塾

菊地健吾²

kikuchi@cc.kyoto-su.ac.jp

1 グラディエントフロー方程式と超対称性理論

グラディエントフローの方法とは、2010年、Martin Luscher [1] によって提唱された、ゲージ場の量子論の発散を抑える新たな機構である。グラディエントフロー方程式とは一種の拡散方程式であり、その解で与えられるフロー場の相関関数は、余計な繰り込み無しに有限になる。より具体的には、フロー方程式の初期条件を与える境界の理論の繰り込みを一度行っておけば、フロー場の相関関数はそれ以上の Z factor 繰り込みや複合演算子繰り込み無しに、自動的に連続極限が定義できる。Luscher はこれを 4 次元 SU(N) Yang-Mills 理論において 1 ループのオーダーで示し、後に Weisz と共に摂動論のオールオーダーで成り立つことを証明した [2]。

私はグラディエントフローを超対称性理論に適用する研究を行ってきた。グラディエントフロー方程式をより一般的な系にも適用できるように、一般化されたグラディエントフロー方程式を提唱し [3]、この式を 4 次元, $\mathcal{N} = 1$, SU(N) 超対称 Yang-Mills 理論に適用することで、超対称性と超ゲージ対称性を保つフロー方程式を構成した。また、フロー方程式が作用の単純なグラディエントで与えられない場合に関してもその構成方法を提唱し、 $d = 2$, 超対称 O(N) 非線形シグマ模型に対するフロー方程式を得た [4]。

本講演では、超対称性理論の中でも特に 4 次元, $\mathcal{N} = 1$, Wess-Zumino 模型のグラディエントフローに着目した。この模型は、スカラー場とフェルミオン場が相互作用する最も単純な超対称模型であり、また、スーパーポテンシャルが量子補正を受けないという非繰り込み定理が成り立つ。

グラディエントフローの方法において、 ϕ^4 理論を考えると、相互作用の入ったグラディエントフロー方程式を適用しても、発散は取り除けないことが知られている [5]。一方で、Wess-Zumino 模型で補助場を積分したものは ϕ^4 理論の相互作用と同じ形の項を持ち、その有限性を調べることは ϕ^4 理論系のフロー方程式の問題を理解し、その解決を図る上で重要である。また、Luscher-Weisz の証明において、ゲージ対称性は重要な役割を果たすことが知られているが [2]、グラディエントフローのもつ有限性の性質は、ゲージ対称性がない系で非線形なフロー方程式を考えた場合にも成り立つかどうかを考えることは興味深い。以上のような理由から、本研究では 4 次元, $\mathcal{N} = 1$, Wess-Zumino 模型のフロー理論を解析し、特にそのフロー方程式の構成方法、及びそこから導かれる解についての研究結果を報告した。

²この講演は加堂大輔氏 (Chula Univ., 慶應大), 浮田尚哉氏 (筑波大) との共同研究に基づく。

2 Wess-Zumino グラディエントフロー方程式

4次元, $\mathcal{N} = 1$, Wess-Zumino 模型に対するグラディエントフロー方程式の構成論と、構成された方程式から導かれる解の性質に関して論じた。この模型では次元勘定からもわかる通り、フロー方程式は作用の単純なグラディエントでは与えられない。そこで、Wess-Zumino 模型を成分場で書いたときのスカラー場に対するフロー方程式が、作用のグラディエントで与えられることを利用して、その超対称変換として他の成分場に対するフロー方程式を定義した。一方で、超場形式による議論では、カイラル条件を満たし、超対称性変換と無矛盾で、次元勘定が正しいことからフロー方程式を構成した。いずれの方法で構成したフロー方程式でも、結果は同じものになる。得られたフロー方程式は、適切な座標系のもとで摂動的な解を求めることができる。その解の振る舞いは、通常、グラディエントフローで多く見られるような単なる減衰型ではなく、減衰振動型となる点が特徴的である。

3 今後の展望

これらの結果を用いて、Wess-Zumino グラディエントフローの紫外有限性の性質に関して検証中である。さらに今後の発展として、オールオーダーの証明を議論したい。 ϕ^4 理論のグラディエントフローとの対応をみること、非繰り込み定理がどのように効いてくるか考察することは興味深い。超対称性理論はグラディエントフローの性質を調べる良いラボラトリーであり、SUSY グラディエントフローの研究は今後も発展が期待される。

References

- [1] M. Luscher, “Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD,” *JHEP* **1008** (2010) 071, [arXiv:1006.4518 \[hep-lat\]](#).
- [2] M. Luscher and P. Weisz, “Perturbative analysis of the gradient flow in non-abelian gauge theories,” *JHEP* **1102** (2011) 051, [arXiv:1101.0963 \[hep-th\]](#).
- [3] K. Kikuchi and T. Onogi, “Generalized Gradient Flow Equation and Its Application to Super Yang-Mills Theory,” *JHEP* **1411** (2014) 094, [arXiv:1408.2185 \[hep-th\]](#).
- [4] S. Aoki, K. Kikuchi, and T. Onogi, “Flow Equation of $\mathcal{N}=1$ Supersymmetric $O(N)$ Nonlinear Sigma Model in Two Dimensions,” [arXiv:1704.03717 \[hep-th\]](#).
- [5] F. Capponi, A. Rago, L. Del Debbio, S. Ehret, and R. Pellegrini, “Renormalisation of the energy-momentum tensor in scalar field theory using the Wilson flow,” *PoS LATTICE2015* (2016) 306, [arXiv:1512.02851 \[hep-lat\]](#).

スケール不変性な重力模型と宇宙論

日本大学理工学部

二瓶 武史

Higgs 質量 m_H が大きな輻射補正 $\Delta m_H^2 \sim M_X^2$ を受けない様にして実験値 $m_H \sim 125$ GeV 程度の値を自然に実現しようとする問題は, naturalness 問題と言われる。 m_H が Planck 質量や GUT 質量に比べて階層的に小さいことは, Higgs 質量を抑制する対称性の存在を示唆している。そのような対称性に超対称性があるが, それ以外の可能性の一つとしてスケール不変性が挙げられる [1]。 $m_H = 0$ とすると標準模型は古典的にはスケール不変になることから, 逆にスケール不変性が m_H を抑制しているのではないかと考えてみよう。

Higgs 質量に加えて, Planck 質量も基本的な質量スケールである。始めに, スケール不変な模型の一つとして, 次のような重力場とスカラー場の作用 (“Jordan frame”) を考える [2, 3]。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \right)$$

ここで, λ, ξ は無次元の結合定数で, $\lambda > 0$ とする。この作用は, 大局的な Weyl 不変性を持つ。

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}, \quad \phi \rightarrow e^\sigma \phi \quad (\sigma : \text{const.})$$

スカラー場がゼロでない真空期待値 $\langle \phi \rangle \neq 0$ を持つことにより大局的 Weyl 不変性が自発的に破れ, Planck 質量と宇宙項が生成される [4]。もし $\xi = \frac{1}{6}$ ならば, 作用は局所的な Weyl 不変性を持つが, その場合は $\langle \phi \rangle$ によって生じる Einstein–Hilbert 項 ($M_{\text{P}}^2 R$) の符号が逆になる。そのため, 以下では $\xi < 0$ の場合を考える [3]。

Einstein 方程式は次のように変分 $\delta R_{\mu\nu}$ の寄与も含む。

$$-\xi \phi^2 G_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\xi=0} + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \phi^2$$

これとスカラー場の運動方程式 $\square \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} + \xi R \phi$ を連立して解く。大局的な Weyl 対称性のため, Weyl カレント $K_\mu = \frac{\delta S}{\delta(\partial^\mu \sigma)} = (1 - 6\xi) \phi \partial_\mu \phi$ が保存する: $\nabla^\mu K_\mu = 0$ 。カーネル K を $K_\mu = \partial_\mu K$ と定義すると, K は次のように書ける [3]。

$$K = \frac{1}{2} (1 - 6\xi) \phi^2$$

計量を $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\mathbf{x}^2$ とし, インフレーション解を考える。場が時間 t のみに依存するとし, カーネルの保存則 $\dot{K} + 3H\dot{K} = 0$ を積分すると, K は次のように得られる [3]。

$$K(t) = c_1 + c_2 \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a^3(t')}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき, 宇宙膨張によりスケール因子 a が増大し K は一定値 (K_0) になる。このときの ϕ の値を ϕ_0 とすると, Einstein 方程式の (00) 成分は $H^2 = -\frac{\lambda\phi_0^2}{12\xi}$ となり, $\xi < 0$ のときインフレーション解が存在する (eternal inflation)。

大局的 Weyl 対称性の破れに伴う Nambu-Goldstone ボソン (dilaton) を σ とする。 $f = \sqrt{2K_0}$ とおくと, ϕ から σ への変数変換は

$$\phi(x) = \phi_0 e^{\sigma(x)/f} \quad (\phi_0 : \text{const.})$$

で与えられる。同時に計量の変換 $g_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)/f} \tilde{g}_{\mu\nu}$ も行うと, 次の作用 (“Einstein frame”) が得られる。

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - M_{\text{P}}^2 \Lambda - \frac{1}{2} M_{\text{P}}^2 \tilde{R} \right)$$

このようにして, Planck 質量 $M_{\text{P}}^2 = -\xi\phi_0^2$ および宇宙項 $\Lambda = \frac{\lambda}{4}\phi_0^4/M_{\text{P}}^2$ が生成される [3]。また, triviality によって宇宙項を小さく出来るとする議論もある [5]。ただし, この frame では線素 $ds^2 = e^{-2\sigma/f} \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ が dilaton 場 σ を含むことに注意する必要がある。

スカラー場を複数個導入することにより, eternal inflation を避けることが出来る。次のような 2 つのスカラー場 ϕ, χ の作用を考える。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - V(\phi, \chi) + \frac{1}{2} R (\xi_1 \phi^2 + \xi_2 \chi^2) \right]$$

ポテンシャルとして $V(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\eta}{4}\chi^4 + \frac{\delta}{2}\phi^2\chi^2$ といったものを仮定すると, Planck 質量は $M_{\text{P}}^2 = -(\xi_1\phi^2 + \xi_2\chi^2)$ となり, カーネルは次のようになる。

$$K = \frac{1}{2} [(1 - 6\xi_1)\phi^2 + (1 - 6\xi_2)\chi^2]$$

スカラー場の時間発展は楕円上に拘束される [3]。このため, はじめに ϕ の方向に動く間に宇宙初期のインフレーションが実現され, 最後に残った V の値が現在の宇宙項による加速膨張を与える可能性がある。ただし, $\Lambda \sim 10^{-120} M_{\text{P}}^2$ という大きな階層性を自然に実現することは難しいと思われる。

一般に, 量子効果によりスケール不変性は破れると考えられる。スカラー場が 1 個の場合は, スケール不変性が破れてカーネルが保存しなくなると, 最終的に $\phi_0 = 0$ となり, Planck 質量がゼロとなってしまふ。スケール不変性からの帰結である保存則 $\nabla^\mu K_\mu = 0$ を量子論的にも成り立たせるために, スカラー場が 2 個の場合に Coleman-Weinberg 機構をスケール不変な形に拡張することにより $\phi^4 \log \frac{\phi^2}{\chi^2}$ という形のポテンシャルを導出する議論がある [6]。

スケール不変性を持つ重力模型の拡張として, 次のような R^2 重力とスカラー場の作用も考えられる。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{1}{2} \xi R \phi^2 + \frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{2} b R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right)$$

ここで Gauss-Bonnet 項 $R_{\text{GB}}^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ の寄与が全微分で書けることから, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ は加えていない。文献 [3] では R^2 の寄与は小さいだろうと書かれているが, 本来に R^2 の効果は小さいか調べてみる必要がある³。

References

- [1] W.A. Bardeen, Fermilab-Conf-95-391-T (1995).
- [2] M. Shaposhnikov, D. Zenhäusern, Phys. Lett. **B671** (2009) [arXiv:0809.3406].
- [3] P.G. Ferreira, C.T. Hill, G.G. Ross, Phys. Rev. **D95** (2017) [arXiv:1610.09243].
- [4] C. Brans, R.H. Dicke, Phys. Rev. 124 (1961) 925; Y. Fujii, Phys. Rev. D9 (1974) 874; P. Minkowski, Phys. Lett. 71B (1977) 419; A. Zee, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 417.
- [5] R. Jackiw, C. Núñez, S.-Y. Pi, Phys. Lett. A347 (2005) 47.
- [6] P.G. Ferreira, C.T. Hill, G.G. Ross, arXiv:1801.07676.
- [7] A. Karam, T. Pappas, K. Tamvakis, arXiv:1810.12884.

³最近, R^2 の効果を考慮した解析が行われた [7]。

真空エネルギーの計算可能性と世界のスケール不変性

京都産業大学 理学部 / 益川塾

九後 汰一郎

1 はじめに：宇宙定数問題の本質

前2回の日大理工・益川塾連携シンポジウム(第5回および第7回)でも既に指摘したことは、宇宙定数(CC)問題の本質的な点は、場の理論におけるボソン場のゼロ点振動エネルギーやフェルミオン場のDiracの海の粒子の負エネルギーの総和が発散することなどではなく、この世界にいくつもの対称性の自発的破れが幅広い階層的なスケールにまたがって存在していて、各々のスケールでの自発的破れ毎に、付随する真空凝縮エネルギーがほぼ完璧にキャンセルしている、という奇跡的事実だ、ということである。

この奇跡的事実をもう一度生々しく、くり返しておこう。たぶんこの世界にはプランクエネルギー以下でもたくさんの対称性の破れがあると思うが、十分に確立した標準模型においてだけでも、少なくとも二つの対称性の自発的破れ、すなわち、Higgs凝縮による電弱対称性の破れと、クォーク対凝縮によるカイラル対称性の破れ、がある。その凝縮エネルギーのスケールは、

$$\begin{aligned} \text{Higgs 凝縮} : V_{\text{Higgs}} &\sim -(200 \text{ GeV})^4 \sim -10^{56} \Lambda_0 \\ \text{QCD カイラル凝縮} : V_{\text{QCD}} &\sim -(200 \text{ MeV})^4 \sim -10^{44} \Lambda_0 \end{aligned} \quad (1)$$

であり、現在観測されている(Dark Energyと呼ばれる)CCの値

$$\Lambda_0 \sim 10^{-29} \text{ gr/cm}^3 \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4 \quad (2)$$

に比べてそれぞれ56桁、44桁大きい。我々のこの平坦で静かな宇宙が存在しているという事実は、間違いなく存在するはずのこれらの凝縮エネルギーが全く宇宙定数に効いていない!ことを意味する。すなわち、Einstein重力は、これらの凝縮エネルギーを全く感知していないのである。もしこれらの凝縮エネルギーが、初めに用意された「裸の宇宙定数」 c で相殺しているとすると、この二つの自発的破れだけでも、実に56桁もの厳密な相殺が起こっていないなければならないことを意味する。すなわち、最初に用意した「裸の宇宙定数」の値が何か具体的な数字で

$$\begin{aligned} c \text{ (最初に用意した CC)} \\ = \underbrace{654321, 098765}_{12 \text{ digits}} 4321, 0987654321, 0987654321, 0987654321, 0987654321, 0987654321 \times \Lambda_0 \sim 10^{56} \Lambda_0 \end{aligned}$$

だとすれば、Higgs凝縮が起きた段階で、その最初の12桁が厳密に相殺されて

$$c + V_{\text{Higgs}} = \underbrace{4321, 0987654321, 0987654321, 0987654321, 0987654321}_{44 \text{ digits}} \times \Lambda_0 \sim 10^{44} \Lambda_0$$

さらに次のカイラル凝縮が起きた後、その次の44桁がまた厳密に相殺されて

$$c + V_{\text{Higgs}} + V_{\text{QCD}} = \text{現在の暗黒エネルギー} \quad 1 \times \Lambda_0 \sim \Lambda_0$$

現在の暗黒エネルギー Λ_0 が残されたということである。それぞれ負の Higgs 凝縮のエネルギー V_{Higgs} とカイラル凝縮エネルギー V_{QCD} が、各破れの段階で 12 桁、44 桁の数字が厳密に相殺されている、ということである。

このトークでは、

1. 真空エネルギーに対する簡単な Observation と、それに基づき
2. 真空エネルギーが説明できるためには スケール不変性は必要条件であることを示したい。

2 (古典的) ポテンシャルエネルギー \simeq (量子論的) 真空エネルギー

前節ではすでに、宇宙定数問題の本質は、Planck エネルギー以下で、エネルギーのスケールの異なるいくつもの対称性の自発的破れが存在し、付随する真空凝縮エネルギーは、それぞれの破れのエネルギースケールでほぼ完璧に相殺されている、という事実だ、ということを強調した。しかし、ここで問題にされている真空エネルギーというのは、対称性の自発的破れに伴うスカラー場 ϕ の凝縮、 $\langle \phi \rangle = \phi_0$ 、に伴う真空凝縮エネルギー、すなわち、言わば古典的なポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ の停留点での値 $V(\phi_0)$ である。

ところが、一方、我々は真空エネルギーと言うと、むしろ、場の理論 (量子論) を習って最初にぶつかる無限大の「真空エネルギー (Vacuum Energy)」の方を思い浮かべる。すなわち、ボソン場のゼロ点振動エネルギーとフェルミオン場の負エネルギー準位を埋める粒子のエネルギー、のあらゆる波数にわたる総和、の方である。この真空エネルギーは、本質的に量子論的な、量子論的真空エネルギーであって、無限大に発散している制御できない量であり、通常は単に捨て去られる。この量子論的真空エネルギーは、Feynman グラフの言葉で言えば、より一般にはあらゆる真空泡グラフ (bubble diagrams) の寄与であり、ゼロ点振動や Dirac の海の真空エネルギーは、そのうちボソン場やフェルミオン場の 1-ループ・グラフの寄与に対応する。

宇宙定数問題を議論する際に、宇宙定数に効く相異なる二つの起源として別々に考慮されることも多いこの二つ

$$\text{(古典的) ポテンシャルエネルギー } V(\phi_0) : \text{真空凝縮エネルギー、有限量} \quad (3)$$

$$\updownarrow$$

$$\text{(量子論的) 真空エネルギー} : \text{真空泡グラフ、無限大} \quad (4)$$

が、実はほとんど同じ量であって、別々に考えるべき量ではないことを、ここでは先ず示したい。特に我々の標準模型においては、

$$\text{Higgs Potential Energy} = \text{quantum Vacuum Energy} \quad (5)$$

真空凝縮エネルギー 真空エネルギー

これをあからさまに見るべく、次の標準理論の簡約版 (toy model) を考えよう:

$$\mathcal{L}_r = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - y\phi(x))\psi(x) + \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi(x)\partial_\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x)) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) - hm^4 \quad (6)$$

これはくりこまれた Lagrangian の表式で、 ϕ は Higgs 場を、 ψ は quarks/leptons の物質場を代表する場、である。Higgs 場の真空凝縮により質量を得る場の真空エネルギーを考える上では、ゲージ場も基本的に同じなので、統計は異なるがこのフェルミオン場 ψ で代表していると考えられることができる。標準模型のもっとも基本的な性質は、クォークもレプトンもゲージ場もゲージ対称性から全て質量項を持ってない、ということ、そして唯一質量次元を持つパラメータは、Higgs 場の質量項のみである、ということである。この toy model (6) は、標準模型のそういう性格を最も簡潔に表したものである。最後の定数項 $-hm^4$ は下で詳しく議論するが、くりこまれた真空エネルギー項で、次元から唯一の次元を持つパラメータ m の 4 乗に比例する。

有効ポテンシャル $V(\phi)$ は (有効作用 $\Gamma[\phi]$ も)、真空を選ぶ前に計算出来ることに注意したい。有効ポテンシャルは、良く知られた公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi + \phi) &= \mathcal{L}(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial \phi} \Phi + \frac{1}{2} \Phi (iD_F^{-1}(\phi)) \Phi + \mathcal{L}_{\text{int.}}(\Phi; \phi) \\ V[\phi] &= V_0(\phi) + \frac{1}{2} \hbar \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \ln \det [iD_F^{-1}(k; \phi)] + i\hbar \left\langle \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int.}}(\Phi; \phi) \right) \right\rangle_{\text{1PI}} \end{aligned} \quad (7)$$

で計算出来る。

3 簡約標準模型における 1-loop 有効ポテンシャル

次元正則化にもとづく質量に依らないくり込み法を採用して、1-loop の有効ポテンシャルを計算しよう。Lagrangian (6) に対応する裸の Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_0(i\gamma^\mu \partial_\mu - y_0 \phi_0)\psi_0 + \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi_0)^2 - (m_0^2 + \delta m_0^2)\phi_0^2) \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 - (h_0 m_0^4 + h_2 m_0^2 + h_4), \end{aligned} \quad (8)$$

を、いつものように、くりこまれた \mathcal{L}_r と相殺項 $\delta\mathcal{L}$ に分離する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L}_r + \delta\mathcal{L} \\ \delta\mathcal{L} &= A\bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{B}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - C y\bar{\psi}\phi\psi - \frac{D}{4!}\lambda\phi^4 \\ &\quad - \frac{1}{2}(E m^2 + \delta m^2)\phi^2 - (F m^4 + G m^2 + H) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= Z_\psi \psi, \quad \phi_0 = Z_\phi \phi, \quad y_0 = Z_y y, \quad \lambda_0 = Z_\lambda \lambda, \\
m_0^2 &= Z_m m^2, \quad \delta m_0^2 = Z_\phi^{-1} \delta m^2, \quad h_0 = Z_h h, \\
1 + A &= Z_\psi^{1/2}, \quad 1 + B = Z_\phi, \quad 1 + C = Z_y Z_\psi Z_\phi^{1/2}, \quad 1 + D = Z_\lambda Z_\phi^2, \\
1 + E &= Z_m Z_\phi, \quad 1 + F = Z_h Z_m^2, \quad G = h_2 Z_m, \quad H = h_4
\end{aligned} \tag{10}$$

質量に依らないくり込みでは、例えば、2次発散する ϕ の2点 vertex $\Gamma_{\phi\phi}^{(2,0)}(k^2, m^2)$ に対し、

$$\Gamma_{\phi\phi}^{(2,0)}(k^2, m^2) \Big|_{k^2=0, m^2=0} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_{\phi\phi}^{(2,0)}(k^2, m^2) \Big|_{k^2=-\mu^2, m^2=0} = 1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma_{\phi\phi}^{(2,0)}(k^2, m^2) \Big|_{k^2=0, m^2=\mu^2} = -1, \tag{13}$$

のくり込み条件をおいてくり込む。(正則化は必ずしも次元正則化でなくて良いが) 次元のあるパラメータを導入しない次元正則化の場合は、2次発散の第1条件 $\Gamma_{\phi\phi}^{(2,0)}(k^2, m^2) \Big|_{k^2=m^2=0} = 0$ は、($k^2 = m^2 = 0$ と置いているので次元2の量を作るパラメータが存在せず) 自動的に満たされる。対数発散量に対する第2式(12), 第3式(13)の条件は、赤外発散を避けるべく k^2 か m^2 のどちらかをゼロでないくり込み点 μ^2 に置いている。このくり込み条件で決まる相殺項は、(変数としての) 質量パラメータ m^2 によらない、ので質量に依らないくり込み、と呼ばれる。次元正則化法の $\overline{\text{MS}}$ と呼ばれるくり込み処方では、第2式(12), 第3式(13)のような具体的なくり込み条件は設定せず、単に

$$\frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi, \quad \left(\varepsilon \equiv 2 - \frac{n}{2} \right) \tag{14}$$

に比例する‘発散部分’だけを引き算するように相殺項を決める。

この簡約標準模型の1-loop有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
V(\phi, m^2) &= \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + h m^4 + V_{1\text{-loop}} + \delta V_{\text{counterterms}}^{(1)} \\
V_{1\text{-loop}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^2) - 2 \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \ln(-p^2 + y^2 \phi^2) \\
\delta V_{\text{counterterms}}^{(1)} &= \frac{D^{(1)}}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} (E^{(1)} m^2 + (\delta m^2)^{(1)}) \phi^2 + (F^{(1)} m^4 + G^{(1)} m^2 + H^{(1)})
\end{aligned} \tag{15}$$

で与えられるが、次元積分公式

$$\begin{aligned}
\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \ln(-k^2 + M^2) &= -\frac{\Gamma(-\eta)}{(4\pi)^\eta} (M^2)^\eta (\mu^2)^{2-\eta} = \frac{M^4}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right). \\
\eta &\equiv \frac{n}{2}, \quad \varepsilon \equiv 2 - \eta, \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi
\end{aligned} \tag{16}$$

を使って、 $\overline{\text{MS}}$ くり込み処方では $1/\bar{\epsilon}$ 比例部分を相殺項で落とせば、相殺項は、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi^4}^{(4,0)} &: D^{(1)}\lambda = \frac{3}{16\pi^2} \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{\bar{\epsilon}} - \frac{4!}{16\pi^2} g^4 \frac{1}{\bar{\epsilon}} \\ \Gamma_{\phi^2}^{(2,0)} &: E^{(1)}m^2 = \frac{\lambda}{32\pi^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}} m^2, \quad (\delta m^2)^{(1)} = 0 \\ \Gamma^{(0,0)} &: F^{(1)}m^4 = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}} m^4, \quad G^{(1)}m^2 = 0, \quad H^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

と決まる。[次元正則化では、上でも述べたように、次元を持つ相殺項が自動的にゼロになっていることに注意したい:]

$$\delta m^2 = G = H = 0. \quad]$$

最終的に、くり込まれた有限の 1-loop 有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(\phi, m^2) &= \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + h m^4 \\ &+ \frac{(m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^2)^2}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) - 4 \frac{(y\phi)^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{y^2 \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

と求まる。

ここで、一般の場の 1-loop グラフの有効ポテンシャルへの寄与は

$$V_{1\text{-loop}}(\phi) = \sum_i \pm n_i F_{\ln}(M_i^2(\phi)), \quad F_{\ln}(M^2) \equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \ln(-k^2 + M^2) \quad (19)$$

で与えられることに注意しておこう。ここで n_i は (実スカラー場を 1 と数える) 場の自由度で、 \pm の符号は、ボソン場が $+$ で、フェルミオン場が $-$ である。 $M_i^2(\phi)$ は、Higgs 場が ϕ の期待値を持つ背景でこの粒子が持つ質量の 2 乗である。しかし、これは上述の量子論的真空エネルギー、すなわち、ボソン場のゼロ点振動エネルギー、フェルミオン場の Dirac の海の負エネルギー、そのものである。この事は、教科書にあるように、この積分

$$F_{\ln}(M^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \ln(-k^2 + M^2) = \frac{M^4}{64\pi^2} \left(-\frac{1}{\bar{\epsilon}} + \underbrace{\ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2}}_{\text{Coleman-Weinberg potential}} \right). \quad (20)$$

の2乗質量依存性を次の様に評価すれば明らかになる：

$$\begin{aligned}
 F_{\ln}(M^2) - F_{\ln}(0) &= \frac{1}{2} \int_0^{M^2} dm^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2 - i\varepsilon) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{M^2} dm^2 \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{-k^2 + m^2 - i\varepsilon} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{M^2} dm^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \\
 &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\hbar}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} - \frac{\hbar}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2} \right)
 \end{aligned}$$

ここで最初に引いた質量ゼロの場合の量 $F_{\ln}(0)$ は、次元正則化積分公式では（参照する次元を持つ量が無いので）ゼロであることに注意したい。また最後の $\frac{\hbar}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2}$ 部分の3次元積分 $\int d^3 k$ も、同じ理由で次元正則化では0である。すなわち、次元正則化積分では、

$$F_{\ln}(M^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\hbar}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} \right)$$

の等式が成り立つ、ということであり、これはまさに、 $F_{\ln}(M^2)$ がボソン場のゼロ点振動エネルギー（フェルミオン場だと Dirac の海の負エネルギー）（のあらゆる波数にわたる総和）だということを示している。（この右辺の3次元積分に対し直接次元正則化積分公式を適用して評価しても上の(20)式の右辺の結果が得られる。）

4 これらの簡単な観察から得られる重要な結論

前節では簡略標準模型で $\overline{\text{MS}}$ くり込みでくり込まれた1-loop有効ポテンシャルをあらわに計算した。得られたポテンシャルは、有限であり、しかも、1-loopポテンシャルの有限補正部分（Coleman-Weinbergポテンシャル）は、 $M(\phi)$ の大きさがくり込み点 μ 程度の時にはごく小さな量であり、大きな寄与は、すでに tree レベルのポテンシャルに取り込まれている。すなわち、量子補正の（無限大を含む）大きな部分は結合定数（や質量パラメータ）にくり込まれているので、量子論的な寄与の主な部分はすでに、くり込まれた結合定数（や質量パラメータ）で書かれた tree レベルポテンシャルに含まれていると言える。tree レベルポテンシャルは文字通り、古典論のポテンシャル・エネルギーである。また、一方、1-loopポテンシャルの寄与は、ボソン場のゼロ点振動エネルギーなどの量子論的真空エネルギーと同じである事も示した。したがって、前節のあらわなポテンシャルの計算は前々節での主張

$$(\text{古典的}) \text{ Higgs ポテンシャル} \cdot \text{エネルギー} = (\text{量子論的}) \text{ 真空エネルギー}$$

を示したものとすることが出来る。

この簡単な観察から、我々は大変興味ある、かつ重要な結論を得ることが出来る。

1. 物質場やゲージ場に関する限り、それらの質量は全て Higgs 場の凝縮（ゼロでない真空期待値） $\langle\phi\rangle$ から来ているので、

物質場やゲージ場の真空エネルギーは、計算出来る量であり、くり込まれた結合定数 λ で有限に表される。

何故なら、それらの場の真空エネルギーは、場の質量の 2 乗 $M^2(\phi)$ の関数として与えられ、特に発散部分は $M^4(\phi)$ に比例したが、物質場やゲージ場の質量 $M(\phi)$ は Higgs 場の真空期待値 ϕ の湯川結合定数（やゲージ結合定数）倍で与えられたので、発散部分は ϕ^4 に比例し、したがって Higgs 場の 4 点結合定数 λ にくり込むことができ、観測可能量 λ を使えば、有限に計算出来るのである。

2. しかしながら、**Higgs 場自身は例外である！**前節の計算の示すように、真空期待値 ϕ がある時の Higgs 場自身の質量 $M(\phi)$ の 4 乗は

$$M^4(\phi) = \left(m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^2\right)^2 = m^4 + \lambda m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (21)$$

となるので、Higgs 場の 1-loop グラフからの真空エネルギーの発散は、質量パラメータにくり込める $m^2\phi^2$ 比例項や、4 点結合定数にくり込める ϕ^4 比例項だけではなく、 m^4 に比例する純正の真空エネルギー（0 点関数）の発散項が生ずる。この最後の m^4 に比例する発散項を相殺するためには、真空エネルギー相殺項

$$\begin{aligned} h_0 m_0^4 &= Z_h Z_m^2 h m^4 = (1 + F) h m^4 \\ F^{(1)} h &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (22)$$

を用意しておかねばならない。 $F^{(1)}$ は、Higgs 場の 1-loop グラフからの寄与に対する前節の結果 (17) である。そうすると、くり込まれた宇宙定数 $h m^4$ は **Free Parameter** となる。すなわち、宇宙定数を他の観測可能量で表したり、計算したりすることが出来なくなる。

この発散は、0 点 vertex の発散なので必ず次元を持つパラメータの 4 次で書かれるが、今の標準模型では唯一の次元を持つパラメータである Higgs 質量パラメータ m の 4 乗に比例して現れた訳である。したがって、理論に次元を持つパラメータが無ければ、こういう純正の真空エネルギーの発散は現れず、その相殺項を用意する必要は無いのである。逆に、質量次元を持つパラメータがあれば、必ずそのパラメータの 4 乗に比例する純正の真空エネルギーの発散があらわれ、その相殺項が必要となり、宇宙定数が計算出来ない完全な free parameter になるのである。

3. かくして、宇宙定数が計算可能であるためには、 $m^2 = 0$ が必要である。すなわち、理論は

次元を持つパラメータを含まない \Rightarrow (古典的) スケール不変性を持つ

ことが、少なくとも宇宙定数が計算・説明可能であるための必要条件である、とすることができる。

謝辞

最後に、貴重な議論をして頂いた益川塾研究員の上村尚平氏と菊地健吾氏に感謝したいと思います。また本研究（の一部）は、文科省/日本学術振興会 科学研究費補助金（Grant No.JP18K03659）の助成を受けたものです。

最新の宇宙線スペクトルとその宇宙物理学的解釈

京都大学白眉センター / 理学研究科宇宙物理学教室

川中 宣太

1 宇宙線の基礎と標準的なモデル

宇宙線 (Cosmic Ray) とは、宇宙空間を飛び交う陽子、原子核、電子、およびそれらの反粒子といった高エネルギーの粒子の総称である。宇宙線のエネルギーは $10^9 - 10^{20}$ eV まで 11 桁以上にわたり、そのエネルギースペクトルはしばしば折れ曲がりを含む冪関数 (broken power-law) で近似される。特に顕著な折れ曲がりである $\simeq 3 \times 10^{15}$ eV ($dN/d\varepsilon \sim \varepsilon^{-2.7} \rightarrow \varepsilon^{-3.0}$)、 $\simeq 4 \times 10^{19}$ eV ($dN/d\varepsilon \sim \varepsilon^{-3.0} \rightarrow \varepsilon^{-2.7}$) は人間の脚になぞらえてそれぞれ knee (膝)、ankle (くるぶし) と呼ばれている。本稿では特に knee 以下のエネルギーをもつ宇宙線に着目する。

現在の標準的な理解では、knee 以下の宇宙線は銀河系内の超新星残骸が起源であるとされている。太陽の 20 倍以上の質量をもつ重い星は、その一生を終える際に超新星と呼ばれる大爆発を引き起こすが、超新星残骸とはその爆発によって星間空間に吹き飛ばされた星の構成ガスのことである。超新星残骸は超音速で星間空間に広がり、周囲のガスと衝突することによって衝撃波を形成する。陽子や原子核などの荷電粒子は磁場により進行方向を曲げられこの衝撃波面の前後を往復すると、大幅にエネルギーを獲得し、そのスペクトルは冪的になることが理論的に知られている (一次フェルミ加速)。仮に超新星爆発の全エネルギーのうち 10% がこの粒子加速に費やされているとすると、銀河系内の宇宙線のエネルギー密度 (~ 1 eV cm^{-3}) を説明することができる。事実、超新星残骸の X 線観測 [1] とガンマ線観測 [2] により、衝撃波においてそれぞれ電子加速、陽子加速が起こっていることが確かめられている。

このようにして作られた宇宙線粒子は、星間空間の乱流磁場によりその方向をランダムに曲げられながら飛行する。この伝搬はしばしば拡散過程で近似される。また、宇宙線粒子は磁場や光子場、星間ガスと相互作用することにより、エネルギーを失う。したがって地球で観測される宇宙線の分布関数 $f(t, \mathbf{r}, \varepsilon)$ は以下の拡散方程式で求められることになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{r}, \varepsilon) = D(\varepsilon) \nabla^2 f + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [P(\varepsilon) f] + Q(t, \mathbf{r}, \varepsilon). \quad (1)$$

ここで $D(\varepsilon)$ は空間拡散係数で一般に粒子のエネルギーの関数である。また、 $P(\varepsilon)$ は伝搬中の粒子のエネルギー変化率、 $Q(t, \mathbf{r}, \varepsilon)$ は宇宙線源から単位時間あたりに注入される粒子のエネルギースペクトルである。拡散係数 $D(\varepsilon)$ を第一原理から導出するのは困難だが、宇宙線の銀河系内滞在時間は拡散係数に反比例すること、あるエネルギーの宇宙線炭素 (元素記号 C) がその破碎によって作る宇宙線ホウ素 (元素記号 B) の数は宇宙線炭素の銀河系内滞在時間に比例することに注意すれば、拡散係数の関数形は宇宙線中のホウ素と炭素の存在比 (B-to-C ratio) のエネルギー依存性から推定できることが分かる。また、エネルギー変化率 $P(\varepsilon)$ は星間磁場、光子場、ガス密度が観測的に分かれば決められる。特に陽子・原子核の伝搬中のエネルギー損失はほぼ無視できるが、電

子・陽電子は陽子などに比べて磁場・光子との相互作用によるエネルギー損失率が大きいいため、正しくこれらの分布関数を求めるためには、 $P(\varepsilon)$ の項を考慮に入れた解析が不可欠となる。

2 宇宙線観測の進展と電子・陽電子スペクトルの異常

前節で述べた銀河系内宇宙線の生成過程とその伝搬に関する標準モデルは長く受け入れられてきた。しかし、その状況を変える観測結果が2007年以降、いくつかの宇宙線実験によって報告された。まず人工衛星 PAMELA [3] が宇宙線中の陽電子・電子比を $\sim 1 - 100$ GeV の範囲で測定し、特に ~ 10 GeV 以上でこの比がエネルギーとともに増大していることを示した。これは標準的な宇宙線モデルからはありえない傾向である。まず宇宙線電子の大半は超新星残骸において加速されたと考えられる。一方、宇宙線陽電子は超新星残骸ではほとんど作られず、標準的には専ら宇宙線陽子が伝搬中に星間物質とハドロン相互作用することによって作る π^+ の崩壊が由来と考えられている。したがって陽電子・電子比はホウ素・炭素比と同様、宇宙線の銀河系内滞在時間のエネルギー依存性を反映していると考えられる。エネルギーの高い宇宙線粒子ほど磁場によって方向を曲げられにくく早く銀河系を脱出するので、標準的には陽電子・電子比はエネルギーとともに減少するはずである。ところが既に述べたように PAMELA が報告したのはそれと正反対の結果であった。この結果は陽電子が上に述べたような過程で二次的に生成されるだけでなく、何か別の源から“一次的に”生成されていることを強く示唆している。また、ほぼ同時期に宇宙線電子・陽電子を合計したフラックスの測定もいくつかの実験によって報告され [4, 5, 6, 7, 8]、標準的なモデルの予測を超過していることが示された。これらのことから、宇宙線電子・陽電子を大量に放出する、超新星残骸以外の未知の宇宙線源の存在が囁かれるようになった。

これらの傾向は国際宇宙ステーションに搭載された宇宙線検出器 AMS-02 による最近の観測でさらに精度良く確かめられている。まず陽電子・電子比については、PAMELA と矛盾のないデータが報告され、さらに高エネルギーまでのデータを見ると ~ 300 GeV を境に増大傾向が弱まっているように見える [9]。また、電子のスペクトルと陽電子のスペクトルもそれぞれ独立に測定されており、 $\sim 20 - 200$ GeV の範囲では陽電子は電子に比べて明らかにフラットな冪を示していることが分かった [10]。以上の観測的事実により、銀河系内宇宙線の起源や伝搬に関する標準モデルは根本的な変更を迫られることになった。

3 観測結果の宇宙物理学的解釈

PAMELA の報告以降、陽電子比の増大や電子・陽電子フラックス超過を作るような新しい電子・陽電子源のモデルが数多く提唱された。これらは大きく分けてダークマター起源説と天体起源説に分類される。前者はダークマターが未知の素粒子であり、それらの対消滅や崩壊からフラットな冪をもつ高エネルギー電子・陽電子が生成されるというシナリオである。ダークマター粒子のモデルは非常に多いため、このシナリオに基づいた論文もまた非常に多いが、概ね共通しているのはこのようにして放出された宇宙線電子・陽電子のエネルギースペクトルはダークマター粒子の質量に対応するエネルギーでカットオフを示す、という点である。したがって考えるダーク

マター粒子が1種類である限り、このシナリオは単一の鋭いカットオフの存在を预言する。これに対し、後者ではパルサー、超新星残骸、ブラックホールなどの銀河系内の高密度天体を起源と考える。本稿では特にこの天体起源説について詳しく述べる。

1節で述べたように、電子・陽電子は伝搬中のエネルギー損失が無視できない。このとき、放出されてから長い時間が経過した電子・陽電子のスペクトルは、最近放出されたものに比べて、より低いエネルギーでカットオフ構造を示す。言い換えると、年老いた天体が起源の電子・陽電子は、若い天体が起源のものに比べて、スペクトルのカットオフエネルギーの位置が低くなる。これがダークマター説と大きく異なる点である [11]。筆者らは2010年から2012年にかけて、これまでにパルサーのような地球近傍に十分多く存在するコンパクト天体からの電子・陽電子フラックスの重ね合わせによって、PAMELAの陽電子比データやFermiやHESSで得られた電子・陽電子スペクトルを自然に説明するモデルをいくつか提唱した [12, 13, 14]。また、天体起源説は \gtrsim TeV以上の高エネルギー範囲の測定に対する重要な预言を与える。上に述べたように、年老いた天体からの電子・陽電子スペクトルは低いエネルギーカットオフを持つため高エネルギー範囲には寄与せず、特に \gtrsim TeV以上には典型的には $\lesssim 10^4$ yearより若い天体からの電子・陽電子のみが寄与する。さらに宇宙線が拡散過程により天体から地球に届くまでにかかる時間は距離の2乗に比例することを考えると、十分高いエネルギー範囲のフラックスに寄与できる天体は、地球のごく近傍に存在する十分若いもののみに限られることが分かる。一般的なパルサーの誕生頻度（ \sim 超新星爆発の頻度）を考えると、この条件に当てはまるパルサーはせいぜい数個程度である。したがって、もしパルサーがPAMELAなどで見られた宇宙線電子・陽電子超過を作っている天体だとすれば、 \gtrsim TeV以上の電子・陽電子スペクトルはごく少数のパルサーからの寄与の重ね合わせからなる、ジグザグした形状になることが期待できる [12, 15]。このような特徴はダークマター説では（複数種類のダークマター粒子を想定しない限り）再現できないため、もし見つければ天体起源説の強力な証拠となるであろうと筆者らは考えていた。

4 最新の観測

2017年、中国産の宇宙線観測衛星DAMPEが ~ 4.6 TeVまでの宇宙線電子・陽電子の計測結果を報告した [16]。これによると、電子・陽電子スペクトルは \sim TeV付近のエネルギーでkneeのような折れ曲がりを示し、それ以上のエネルギーでは冪的に落ちていることが示唆された。ほぼ同時期にCALET [17], HESS [18] によっても同様の結果が報告された。

こうした結果は業界に衝撃を与えた。実は \sim TeV以上でフラックスが落ちていることは過去にHESSの観測 [7] により示唆されていたのだが、これはエネルギー損失（あるいはダークマター粒子の質量）の効果による指数関数的（階段関数的）なカットオフと考えても矛盾のないものであった。しかし、今回DAMPEによって示されたのは冪的なカットオフという、いずれのシナリオでも予期できなかった特徴であった。さらに ~ 1 TeVから ~ 4.6 TeVという短い範囲ではあるがスペクトルに前節で述べたようなジグザグな形状は見受けられず、むしろ滑らかに \lesssim TeV以下のスペクトルと接続して見えることも我々を困惑させた。ごく少数の天体からの寄与で滑らかなスペクトルを再現するには、不自然なfine-tuningをすることが避けられない。パルサーよりも桁

で多く地球近傍に存在するような天体（たとえば白色矮星など）を新たに考えれば滑らかさは再現できるが、 \sim TeV で接続できるかどうかは自明ではなく、自然に理解できるとは言えない。いずれにせよ、高エネルギーの宇宙線電子・陽電子観測によってその起源は明らかになったところか、むしろより混沌としてきたと言って良いだろう。

今後も宇宙線電子・陽電子の観測は詳細に調べられる予定である。例えば AMS-02 は陽電子スペクトルを \sim TeV 程度まで測定することになっている。また、電子・陽電子スペクトルは DAMPE, CALET, HESS で引き続き詳しく調べられるだけでなく、本来の目的は宇宙からのガンマ線観測である現在建設中のチェレンコフ望遠鏡群 CTA によってもより高エネルギーまで観測が可能である。さらに本稿では詳しく述べなかったが、宇宙線電子・陽電子の到来方向の非等方性や、パルサーなど天体の詳細な電磁波観測も、起源を探る上で重要な情報となる。これらも AMS-02 や CTA をはじめとした現在・将来の観測によって明らかになることが期待されている。

宇宙線電子・陽電子超過を作り出したのはダークマターか、それとも天体か。かつて素粒子・宇宙物理業界を席卷した大論争は、発端となった観測から 10 年以上が経過した現在でも決着していない。しかし、観測技術の進展により、真実が明らかになる日はもうすぐそこまで来ている。

References

- [1] Koyama, K. et al. 1995, *Nature*, 378, 255
- [2] Ackermann, M. et al. 2013, *Science*, 339, 807
- [3] Adriani, O et al. *Nature*, 458, 607
- [4] Chang, J. et al. 2008, *Nature*, 456, 362
- [5] Torii, S. et al. 2008, arXiv:0809.0760
- [6] Abdo, A. A. et al. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 181101
- [7] Aharonian, F. et al. 2008, *Phys. Rev. Lett.* 101, 261104
- [8] Aharonian, F. et al. 2009, *A&A*, 508, 561
- [9] Accardo, L. et al. 2014, *Phys. Rev. Lett.*, 113, 121101
- [10] Aguilar, M. et al. 2013, *Phys. Rev. Lett.*, 113, 121102
- [11] Atoyan, A. M., Aharonian, F. A., & Völk, H. J. 1995, *Phys. Rev. D*, 52, 3265
- [12] Kawanaka, N., Ioka, K. & Nojiri, M. M. 2010, *ApJ*, 710, 958
- [13] Kashiyama, K., Ioka, K. & Kawanaka, N. 2011, *Phys. Rev. D*, 83, 023002
- [14] Kisaka, S. & Kawanaka, N. 2012, *MNRAS*, 421, 3543
- [15] Kawanaka, N., Ioka, K., Ohira, Y. & Kashiyama, K. 2011, *ApJ*, 729, 93
- [16] DAMPE Collaboration 2017, *Nature*, 552, 63
- [17] Adriani, O. et al. 2017, *Phys. Rev. Lett.* 119, 181101
- [18] Kerszberg, D. et al. 2017, ICRC

Large Volume Scenario と F-term uplifting

京都産業大学益川塾

上村 尚平

1 Introduction

超弦理論が量子重力理論の候補と言われている。しかし、超弦理論は 10 次元の時空上で定義されているため、そこからどのようにして我々の住む 4 次元 de Sitter 空間が導出されるのかという問題は長年議論されている。カラビ・ヤウ空間を用いて余剰 6 次元空間を orientifold コンパクト化すると、理論のゼロモードとして、余剰次元の変形の自由度が含まれる。この自由度をモジュライと呼ぶ。モジュライの伝搬による長距離力は現在観測されていないため、我々の宇宙ではモジュライは存在しないか、十分重くなっているはずである。この問題をモジュライ固定の問題と呼ぶ。モジュライ固定は宇宙項問題にもかかわっている。ポテンシャルの最小値を議論するためにはスカラーポテンシャルを解析する必要があるが、真空ではモジュライは固定されているからである。モジュライ固定は IIB 型超弦理論で最も精密に議論されている。超弦理論のコンパクト化で現れるモジュライはディラトン・複素構造・Kähler モジュライの三つに分けられる。このうちディラトンと複素構造は背景 3-form flux によってツリーレベルで質量が与えられる [1]。一方で Kähler モジュライはツリーレベルではポテンシャルが生成されない。またこの時の真空は超対称性を保つため、ポテンシャルの底が負になる。de Sitter な真空を得るためにはポテンシャルを底上げする必要があり uplifting の問題として知られている。Large Volume Scenario (LVS) [2] と KKLT 模型 [3] は上記の二つの問題を解決する代表的な模型として知られている。この二つの模型では Kähler モジュライは非摂動効果によってポテンシャルが生成され、uplifting するためにアンチ D ブレーンが導入される。本講演では別の方法での uplifting の可能性を議論する。具体的にはコンパクト空間の体積と結合するカイラル超場が存在し、他の超対称性を破る場と結合していれば、モジュライ固定を邪魔することなく uplifting を行うことができることを示した [4]。

2 Large Volume Scenario

ここでは Large Volume Scenario (LVS) について簡単に復習する。次のようなスイスチーズタイプのコンパクト空間を考える。

$$\mathcal{V} = (T_1 + \bar{T}_1)^{3/2} - \sum_{i>1} \gamma_i (T_i + \bar{T}_i)^{3/2}, \quad (1)$$

\mathcal{V} はストリングスケール l_s を用いて無次元化されたコンパクト空間の体積であり、 T_i はコンパクト空間の i 番目の 3 サイクルの無次元化された体積である。LVS では次のような形の Kähler ポテ

ンシヤルとスーパーポテンシヤルを仮定する。

$$K = -2 \log \left[\mathcal{V} + \frac{\xi}{2} \right], \quad W = W_0 + \sum_{i>1} A_i e^{-a_i T_i}, \quad (2)$$

ξ はコンパクト空間のオイラー数で決まる定数であり、 α' 補正によって生成される補正項である： $\xi = -\zeta(3)\chi(M)/2(2\pi)^3$ 。 W_0 は背景 3-form flux とディラトン・複素構造の期待値で決まる定数であり、 $A_i e^{a_i T_i}$ は非摂動効果によって生成されるスーパーポテンシヤルである。非摂動効果としては gaugino condensation や D ブレーンインスタントンなどが考えられる。この時の F-term ポテンシヤルは次のようになる：

$$V_{LVS} = \frac{A}{\mathcal{V}^3} - \sum_{i>1} \frac{B_i a_i \tau_i e^{-a_i \tau_i}}{\mathcal{V}^2} + \sum_{i>1} \frac{C_i \sqrt{a_i \tau_i} e^{-2a_i \tau_i}}{\mathcal{V}} + \mathcal{O}(\mathcal{V}^{-4}), \quad (3)$$

ただしここで、 A, B_i, C_i は次のように書ける：

$$A = \frac{3\xi|W_0|^2}{4}, \quad B_i = 4A_i|W_0|, \quad C_i = \frac{2\sqrt{2}a_i^{3/2}A_i^2}{3\gamma_2}. \quad (4)$$

またここでは簡単のため reduce Planck mass $M_P = 1$ の単位系を取った。このポテンシヤルの最小値は次の方程式の解で与えられる。

$$A = \sum_{i>1} \frac{B_i^2 (a_i \tau_i)^{3/2}}{4C_i} \frac{a_i \tau_i (a_i \tau_i - 1)}{(a_i \tau_i - 1/4)^2}, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{B_i}{C_i} \sqrt{a_i \tau_i} e^{a_i \tau_i} \frac{a_i \tau_i - 1}{a_i \tau_i - 1/4}. \quad (5)$$

$a_i \tau_i$ が 1 より十分大きいとき、この方程式は次のように近似的に解くことができる：

$$\tau_i \sim \frac{1}{a_i} \left(\frac{4A}{\sum_{i>1} \frac{B_i^2}{C_i}} \right)^{2/3}, \quad \mathcal{V} \sim \frac{1}{2} \frac{B_i}{C_i} \sqrt{a_i \tau_i} e^{a_i \tau_i}. \quad (6)$$

確かに Kähler モジュライの実部が固定されることが分かる。コンパクト空間全体の体積は τ_i と比較して幾何的に大きなサイズに固定されることから、この機構は Large Volume Scenario と呼ばれている。この真空は SUSY を破る。Kähler モジュライの補助場の期待値はゼロでない。しかし、そのエネルギー密度は負になる：

$$V_{\text{minimum}} \sim -\frac{A}{2a_i \langle \tau_i \rangle \langle \mathcal{V} \rangle^3} + \mathcal{O}(\mathcal{V}^{-4}), \quad (7)$$

何らかの uplifting 機構が必要になる。以下では新しいカイラル超場 X を導入し、その F 項による uplifting の可能性について議論する。

3 LVS and F-term uplifting

次のような模型を考える。簡単のため Kähler モジュライが二つの多様体について考える。Kähler ポテンシャルが次のような実関数であるとする⁴:

$$K = -2 \log \left[\mathcal{V} + \frac{\xi}{2} \right] + (T_2 + \bar{T}_2)^{-m} (T_1 + \bar{T}_1)^{-n} |X|^2, \quad (8)$$

$$\mathcal{V} = (T_1 + \bar{T}_1)^{3/2} - \gamma_2 (T_2 + \bar{T}_2)^{3/2}. \quad (9)$$

X は超対称性を破る質量項を持つと仮定する [5]。 X の質量項を \tilde{m}_X とする。この時、次のような二つのスーパーポテンシャルを考え、モジュライ固定と uplifting が行えるかを調べた [4]⁵。

$$W_I = W_0 - fX + A_2 e^{-a_2 T_2}, \quad (10)$$

$$W_{II} = W_0 - A e^{-b T_2} X, \quad (11)$$

その結果、次の結果を得た：

- スーパーポテンシャルが W_{II} のように書かれるとき、LVS の極小値の周りにタキオンが現れ、LVS の真空が不安定化する。
- スーパーポテンシャルが W_I のように書かれるとき、モジュライの真空期待値は摂動を受けるのみであり、 f が十分小さければ LVS 真空は安定である。また、その小さい f でエネルギー密度の期待値を正にすることが可能である。

ポテンシャルの典型的な概形は Figure 1 のようになる。 X の F-term によりポテンシャルはほとんど uplift されているが、ポテンシャルの極小は残っている。

このシナリオが無矛盾であるためには X の質量が他のモジュライに比べて十分重たくなる必要があるが、その無矛盾性条件は X の質量生成機構のスケール Λ とコンパクト空間の大きさ \mathcal{V}_0 の関係式としてえられる。 X の質量は次のように与えられる。

$$m_X^2 \sim 4 \frac{f^2}{\Lambda^2} \mathcal{V}_0^{\frac{2}{3}n-2} \sim 3\xi(\tau_{2,0})^{-m-1} \frac{W_0^2}{2a_2\Lambda^2} \mathcal{V}_0^{-3}. \quad (12)$$

一方でもっとも重たいモジュライは small cycle τ_2 であり、質量は次のようになる。

$$m_{\tau_2}^2 \sim \left(\frac{W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_0} \right)^2. \quad (13)$$

ただしここでは reduced Planck 質量 $M_P = 1$ としている。 $\Lambda^{-2} > \mathcal{V}_0$ の時、この uplifting 機構によって uplifting が可能である。

⁴ X の起源については [6] など。

⁵ 近い模型は例えば [7] などでも議論されている。

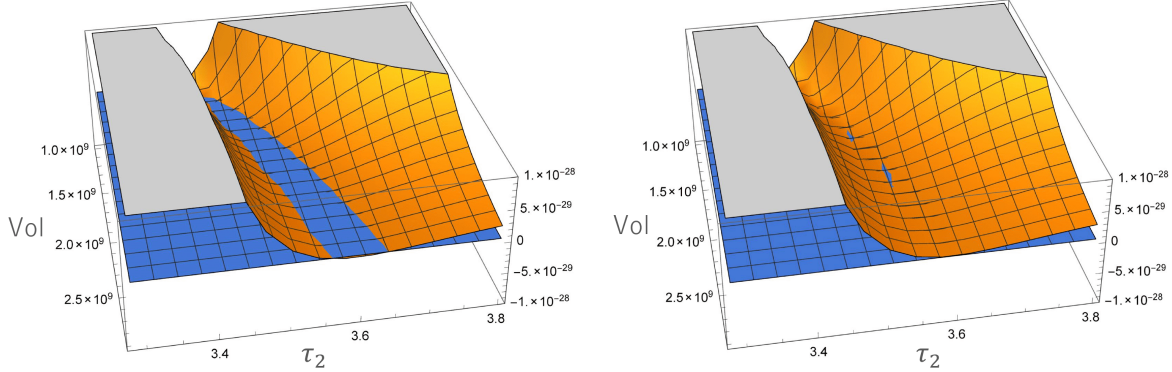


Figure 1: LVS のモジュライポテンシャル (左) とカイラル超場 X によって uplift されたモジュライポテンシャル。模型のパラメータは次のように設定した: $A = 1$, $B = 0.2$, $C = 1$, $a_2 = 2\pi$, $n = 1$, $m = 2$, $f'^2 = 1.00742 \times 10^{-9}$ / 青い面は $V = 0$ 平面。LVS のままでは極小値でのポテンシャルの値が負になっているが、uplift された方ではほとんど正になっていることが分かる。

4 Summary

我々は LVS の uplifting 機構としてカイラル超場による F-term uplifting の可能性を調べた。その結果、スーパーポテンシャルがある特定の形をしていれば真空を不安定化させることなくポテンシャルの底を持ち上げることができることを示した。また、そのために必要なパラメータへの制限を示した。

References

- [1] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **584**, 69 (2000) Erratum: [Nucl. Phys. B **608**, 477 (2001)] [hep-th/9906070].
- [2] V. Balasubramanian, P. Berglund, J. P. Conlon and F. Quevedo, JHEP **0503**, 007 (2005) [hep-th/0502058]; J. P. Conlon, F. Quevedo and K. Suruliz, JHEP **0508**, 007 (2005) [hep-th/0505076].
- [3] S. Kachru, R. Kallosh, A. D. Linde and S. P. Trivedi, Phys. Rev. D **68**, 046005 (2003) [hep-th/0301240].
- [4] T. Kobayashi, O. Seto, S. Takada, T. H. Tatsuishi, S. Uemura and J. Yamamoto, PTEP **2019**, no. 9, 093B04 (2019) doi:10.1093/ptep/ptz094 [arXiv:1812.02376 [hep-th]].
- [5] R. Kallosh and A. D. Linde, JHEP **0702**, 002 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/02/002 [hep-th/0611183].

- [6] M. Grana, T. W. Grimm, H. Jockers and J. Louis, Nucl. Phys. B **690**, 21 (2004) [hep-th/0312232]; J. P. Conlon, D. Cremades and F. Quevedo, JHEP **0701**, 022 (2007) [hep-th/0609180]; H. Jockers and J. Louis, Nucl. Phys. B **705**, 167 (2005) [hep-th/0409098].
- [7] S. Krippendorff and F. Quevedo, JHEP **0911**, 039 (2009) [arXiv:0901.0683 [hep-th]]; H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi and Y. Omura, Phys. Rev. D **75**, 025019 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.025019 [hep-th/0611024].

Moonshine and String Theory

日本大学理工学部 一般教育教室

江成隆之

1 はじめに

有限群とモジュラー形式（またはモック・モジュラー形式）という、一見すると関連のない2つの数学的対象を結び付ける関係をムーンシャインとよぶ。最初に発見されたモンストラス・ムーンシャインの研究過程において、2次元共形場理論が必要となることが示された。以来、共形場理論あるいはその応用である弦理論を通じて、新たなムーンシャインの発見やムーンシャインそのものに対する理解を深める試みが続けられている。本講演ではモンストラス・ムーンシャインと最近活発に研究されているマッシューおよびウンブラル・ムーンシャインについて紹介した。

2 モンストラス・ムーンシャイン

モンストラス・ムーンシャインは最初に発見されたムーンシャインであり、モンスター群 M とモジュラー形式を結びつけている。また、他のムーンシャインの基礎といえるものである。

発見の契機となったのは McKay による観察である。すなわち、楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の q -展開

$$J(\tau) = \sum_{m=-1}^{\infty} c_m q^m = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots \quad (\text{Im } \tau > 0, q := e^{2\pi i \tau}) \quad (1)$$

の展開係数 196884 が、モンスター群 M の既約表現の次元を用いて $196884 = 1 + 196883$ のように分解される、という事実である。そこで Thompson は、無限次元の次数付き加群

$$V = \bigoplus_{m=-1}^{\infty} V_m \quad (2)$$

の存在を仮定し、各 $g \in M$ に対して定義された McKay-Thompson 級数

$$T_g(\tau) := \sum_{m=-1}^{\infty} \text{Tr}_{V_m}(g) q^m \quad (3)$$

を調べることを提案した [1]。ただし、この級数は次のような性質をもっている：(i) $g = e$ (単位元) のとき $J(\tau)$ に帰着する。(ii) 任意の $g, h \in M$ に対し $T_g = T_{hgh^{-1}}$ を満たす。

Conway と Norton によって提出された次の予想をモンストラス・ムーンシャインとよぶ [2]。

各 $g \in \mathbb{M}$ に対し $SL(2, \mathbb{R})$ のある離散部分群 Γ_g が存在して, McKay-Thompson 級数 $T_g(\tau)$ は Γ_g の主モジュラーとなる.

これは各 $T_g(\tau)$ が Γ_g 不変な上半平面上の正則関数であり, $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ において

$$T_g(\tau) = q^{-1} + O(q)$$

のように振る舞うことを意味する. この性質は本来 $J(\tau)$ がもっているものだが, それがすべての $T_g(\tau)$ に対して成り立つというのである. この予想を証明するためにはまず加群 V を具体的に構成する必要があるが, ここで2次元共形場理論が登場する. すなわち, 実24次元トーラスの座標に対応するカイラルボソン場の系の, モジュラー不変な分配関数から V を構成することができる. こうして得られた V をモンスター加群とよび V^\natural で表す. この系はモンスター群 \mathbb{M} が対称性として作用しており, McKay-Thompson 級数 (3) は

$$T_g(\tau) = \text{Tr}_{V^\natural} gq^{L_0 - c/24} \quad (4)$$

となる⁶. 各 $g \in \mathbb{M}$ に対し (4) によって定義された $T_g(\tau)$ が Γ_g の主モジュラーとなることの証明は, Borcherds によって与えられた [4].

3 マシューおよびウンブラル・ムーンシャイン

マシュー・ムーンシャインは Mathieu 群 M_{24} とモック・モジュラー形式を結びつける関係であり, K3 曲面の楕円種数が介在している [5], [6].

超対称性をもつ系において, Witten 指数は超対称な真空を数え上げる. 楕円種数とは Witten 指数を拡張した概念で, 物理学的には BPS 状態の縮退度を数え上げ, 幾何学的にはターゲット空間の位相不変量を与える. K3 曲面の楕円種数は

$$Z_{K3}(\tau; z) = 8 \left[\left(\frac{\theta_2(\tau; z)}{\theta_2(\tau; 0)} \right)^2 + \left(\frac{\theta_3(\tau; z)}{\theta_3(\tau; 0)} \right)^2 + \left(\frac{\theta_4(\tau; z)}{\theta_4(\tau; 0)} \right)^2 \right]$$

のように計算され, モジュラー不変性を示す. ここに $\theta_i(\tau; z)$ ($i = 1, \dots, 4$) と $\eta(\tau)$ はそれぞれ Jacobi のテータ関数, Dedekind のエータ関数である. さらに $Z_{K3}(\tau; z)$ は $\mathcal{N} = 4$ 超共形代数の指標の和として

$$Z_{K3}(\tau; z) = \frac{[\theta_1(\tau; z)]^2}{[\eta(\tau)]^3} (24\mu(\tau; z) + H(\tau)) \quad (5)$$

のように分解される. (5) の各項はモジュラー変換に対して余分な項が現れ, モジュラー不変性を示さない. ところがこれらは相殺して $Z_{K3}(\tau; z)$ が本来もっているモジュラー不変性は保たれてい

⁶2次元共形場理論は, 数学において頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) とよばれる分野の一角を占める. VOA とモンスター加群の構成は [3] で解説されている.

る。それ自身ではモジュラー不変性をもたないが、影 (shadow) とよばれる特定の項を加えることでそれが回復するものを、モック・モジュラー形式とよぶ。ここでは $H(\tau)$ がモック・モジュラー形式であり、その影は $\mu(\tau; z)$ である⁷。そして $H(\tau)$ の q -展開

$$H(\tau) = 2q^{-1/8}(-1 + 45q + 231q^2 + 770q^3 + \dots) \quad (6)$$

における展開係数と Mathieu 群 M_{24} の既約表現の次元 45, 231, 770, ... が一致している。これがマシュー・ムーンシャインである。

この事実とモンスター・ムーンシャインの類推から直ちに、無限次元の次数付き加群である M_{24} -加群

$$K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_{n-1/8}, \quad (7)$$

および各 $g \in M_{24}$ に対する McKay-Thompson 級数

$$H_g(\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}_{K_{n-1/8}}(g) q^{n-1/8} \quad (8)$$

の存在が考えられ、実際、(8) を与える K の存在が証明されている [7]。しかしながら V^{\natural} のような具体的な構成法は知られていない。

ウンブラル (umbral)・ムーンシャインは、マシュー・ムーンシャインを包含するより広いクラスのムーンシャインである [8], [9]。現在知られているウンブラル・ムーンシャインは全部で 23 個あるが、これらは Niemeier 格子を用いて与えることができる。

24 次元の正定値な自己双対偶格子で等価でないものは全部で 24 個ある。そのうちの 1 つはルート系をもたず、Leech 格子とよばれる。実は、モンスター加群 V^{\natural} を構成する際に用いた実 24 次元トーラスは、 \mathbb{R}^{24} に Leech 格子を導入したものである。一方、残りの 23 個は全てルート系 X をもち、これらを Niemeier 格子とよぶ。任意の Niemeier 格子を N^X で表す。いま、ウンブラル群 G^X を

$$G^X := \text{Aut}(N^X)/\text{Weyl}(X)$$

によって定義する。ここに $\text{Aut}(N^X)$ は N^X の自己同型群であり、 $\text{Weyl}(X)$ は X に付随する Weyl 群である。 G^X は 23 個あり、すべて有限群である。詳細をここで述べることはできないが、このようにして構成された G^X に対応するモック・モジュラー形式 H_g^X は、モジュラー性や解析性から決定することができる。また、他のムーンシャインと同様、 H_g^X を生成する加群の存在が証明されているが [7]、それ以上のことは分かっていない。

ウンブラル・ムーンシャインはマシュー・ムーンシャインを含むことから、K3 曲面の楕円種数と関連があると考えられる。しかしながら実際にそれを示しているのは一部に限られている。また、本節のはじめに述べたように楕円種数は BPS 状態に関する情報を与えるので、K3 曲面でコンパクト化された弦理論との関連も研究されている⁸。

⁷ $\mu(\tau; z)$ は Appell-Lerch 和とよばれる無限級数である。

⁸[10] に最近の進展が述べられている。

4 今後の課題

今のところ最もよく理解されているムーンシャインはモンスター・ムーンシャインのみである。マシューおよびウンブラル・ムーンシャインについては数学的にも物理学的にも未解決の問題が多く残されている。

このような状況から、ムーンシャインを（特に物理学の観点から）研究する1つの道筋は、既知のムーンシャインに弦理論による明確な解釈を与える、あるいは弦理論を用いて新たなムーンシャインを探すことであると考えられる。何故なら弦理論自身のもつ豊富な双対性によって、個々のムーンシャインの理解を深めるばかりでなく、異なるムーンシャインどうしの関連性を発見できる可能性があるからである。またこのような研究を通して弦理論自身が進展することも期待される。

最後に、有限群や（モック）モジュラー形式といったムーンシャインの背景知識、ここで言及できなかった事項および文献の一覧として [10] を挙げておく。

References

- [1] J. G. Thompson, “Finite groups and modular functions,” *Bull. London Math. Soc.* **11** no. 3, (1979) 347–351.
- [2] J. H. Conway and S. P. Norton, “Monstrous Moonshine,” *Bull. London Math. Soc.* **11** no.3 (1979), 308.
- [3] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, “Vertex Operator Algebras And The Monster,” vol. 134 of ‘Pure and Applied Mathematics’ **134**, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [4] R. Borcherds, “Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras,” *Invent. Math.* **109**, No.2 (1992), 405–444.
- [5] T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa, “Notes on the K3 Surface and the Mathieu group M_{24} ,” *Exper. Math.* **20** (2011) 91 [arXiv:1004.0956 [hep-th]].
- [6] 江口徹, 菅原祐二, 共形場理論, 岩波書店, 2015.
- [7] T. Gannon, “Much ado about Mathieu,” *Adv. Math.* **301** (2016) 322 [arXiv:1211.5531 [math.RT]].
- [8] M. C. N. Cheng, J. F. R. Duncan and J. A. Harvey, “Umbral Moonshine,” *Commun. Num. Theor. Phys.* **08** (2014) 101 [arXiv:1204.2779 [math.RT]].
- [9] M. C. N. Cheng, J. F. R. Duncan and J. A. Harvey, “Umbral Moonshine and the Niemeier Lattices,” *Res. Math. Sci.* **1** (2014) 3 [arXiv:1307.5793 [math.RT]].
- [10] V. Anagiannis and M. C. N. Cheng, “TASI Lectures on Moonshine,” *PoS TASI 2017* (2018) 010 [arXiv:1807.00723 [hep-th]].

Conformal Interface in Open String Field Theory

奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構

小路田 俊子

1 はじめに

本研究では conformal interface と呼ばれるオブジェクトを、ボゾニックな開弦理論の弦の場の理論である Cubic String Field Theory (CSFT) に導入する方法を検討し、Conformal interface によつて場の古典解の生成を行うことを目的としている。Conformal interface は共形場理論 (Conformal Field Theory:CFT) で解析されるもので、SFT において議論されたのは最近になってからである [1]。しかし [1] で議論された方法はフリーボゾン系などには適用できない方法であり、さらに interface も topological と呼ばれる範囲に限定している。今回検討する方法は一般的な conformal interface を対象としており、また [1] と異なる方法で SFT に interface を導入した。研究会では U(1) 対称性を持つ conformal interface についての研究結果を報告した。

以下では 2 章で conformal interface を紹介し、3 章で interface を SFT に導入する方法とその結果を述べる。4 章ではまとめと今後の展望を述べる。

2 Conformal Interface

Conformal interface とは conformal boundary (D brane) を自然に拡張した概念である。Conformal boundary condition はエネルギー運動量テンソル $T(z), \tilde{T}(\bar{z})$ が実軸で完全に反射するという条件で与えられる⁹。

$$T(z) - \bar{T}(\bar{z}) = 0, \quad (z = \bar{z}) \quad (1)$$

この条件を緩めて実軸でエネルギー運動量テンソルを部分的に反射し部分的に透過する場合を考えることにする。境界を通した流出入を考えるということなので、境界を挟んで向こう側にも CFT(conformal field theory) が存在する。その CFT は上半面とは異なる理論でも構わない。今複素上半面と下半面に異なる CFT が定義されているとし、それぞれを CFT_1 と CFT_2 と呼ぶことにする。複素平面全体で共形不変性が成り立つよう要請すると CFT_1 と CFT_2 のエネルギー運動量テンソル $T^1(z), T^2(z)$ に実軸上で以下の条件が課される。

$$T^1(z) - \tilde{T}^1(\bar{z}) = T^2(z) - \tilde{T}^2(\bar{z}) \quad (2)$$

この条件が実軸上でエネルギー運動量テンソルが部分的に反射し部分的に透過する状況を表している。この実軸のように共形不変性を保ったまま異なる理論を貼り合わせる一次元のオブジェク

⁹以後複素平面上の二次元の共形場理論を考える。境界のある場合は複素上半面 ($\text{Im}(z) \geq 0$) 上の共形場理論を考え境界は実軸とする。

トを Conformal Interface と呼ぶ。以後、 CFT_1 と CFT_2 を貼り合わせる conformal interface を演算子として I_{12} と書く。条件式 (2) は virasoro を使って $(L_n^1 - \tilde{L}_{-n}^1)I_{12} = I_{12}(L_n^2 - \tilde{L}_{-n}^2)$ と書くことができる。尚、量子化した際には (2) は $Q^1 I_{12} = I_{12} Q^2$ という条件になる (こうなるように interface のゴースト部分を構成する)。(2) の特殊な場合として、完全反射型 : $T^1 = \tilde{T}^1, T^2 = \tilde{T}^2$ と、左右モード分離型 : $T^1 = T^2, \tilde{T}^1 = \tilde{T}^2$ の二つの virasoro が保存する解がある。完全反射型は CFT_1 と CFT_2 が分離する条件で実軸は conformal boundary になる。もう一つの Left mover と right mover が分離する interface を topological interface と呼ぶ。名前の由来は、topological interface は場や他の interface にぶつからない限りその位置を自由に動かしても相関関数の値を変えないという性質を持つためである。

Conformal interface は virasoro の保存条件 (2) に加えて、更に対称性を課すことができる。例えば $U(1)$ 電流対 J に対して $J^1 I_{12} = \pm I_{12} J^2$ を満たすものを $U(1)$ preserving interface と呼ぶ。Conformal interface の分類は conformal boundary の分類より進んでいないのだが、対称性を課すことで具体形を求めることができる場合もあり、[6] では $c = 1$ のフリーボゾン系の $U(1)$ preserving interface について調べている。

$$I_{12} = \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{n} (S_{11}^{IJ} \alpha_{-n}^{1I} \tilde{\alpha}_{-n}^{1J} - S_{12}^{IJ} \alpha_{-n}^{1I} \alpha_n^{2J} - S_{21}^{IJ} \tilde{\alpha}_n^{2I} \tilde{\alpha}_{-n}^{1J} + S_{22}^{IJ} \tilde{\alpha}_n^{2I} \alpha_n^{2J}) \right] I_0 \quad (3)$$

$$I_0 = \sum_{\tilde{p}^{1J}, \tilde{p}^{2J}} \langle S_{1B}^{IK} \tilde{p}^{BK} \rangle_{1R} \langle \tilde{p}^{1J} \rangle_{1L} \cdot 2L \langle -S_{2B}^{IK} \tilde{p}^{BK} \rangle_{2R} \langle -\tilde{p}^{2J} \rangle$$

ここで α_n^{aI} は $\text{CFT}_a (a = 1, 2)$ のフリーボゾンの振動子で、 I は時空の足を表す。行列 S_{ab} が $\sum_{a,I} S_{ab}^{IJ} S_{ac}^{IK} = \delta_{bc} \delta^{JK}$ を満たすとき、(3) は接続条件 (2) を満たすことが確かめられる。 $S_{11} = S_{22} = 0$ のとき I_{12} は topological interface になる。

$I_{12}(3)$ を boundary state に作用させて新たな boundary state を作ることができる。ただし topological でない場合には一般的に interface を boundary state に作用させたり位置を動かすと発散が生じるため正則化が必要になる。[6] では $U(1)$ preserving interface (3) に対して boundary state への作用を正則化も含めて具体的に求めている。

また [6] では $U(1)$ preserving interface 同士を融合 (fusion) させて新たな conformal interface を作り出す規則も導いている。

Conformal interface が異なる boundary state の間を写像する、つまり異なる BCFT を結びつけることや、interface 同士の fusion 代数などは、 $c = 1$ フリーボゾン系の $U(1)$ preserving interface に限った性質ではない。また、conformal interface の fusion 規則は CFT の対称性や双対性を体現していることが知られている [2, 3]。Conformal interface は特殊なオブジェクトではなく、(B)CFT を深く理解する鍵となるものである。

3 Conformal Interface in OSFT

ボゾニックな開弦理論の弦の場の理論である Cubic String Field Theory(CSFT) の運動方程式は

$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0 \quad (4)$$

で与えられる。ここで Ψ は弦の場と呼ばれ第一量子化された弦 $X[\sigma]$ を引数に持つ汎関数であり、 Q は世界面の理論の BRST 電荷、スター積 $*$ は二つの弦の場から新たな弦の場を作る演算である。運動方程 (4) の解は開弦の振動スペクトルに現れる無限種類の場の真空期待値を与える。

さて、もし BRST 電荷および任意の弦の場 A, B に対して

$$QI^\circ = I^\circ Q \quad (5)$$

$$I^\circ(A * B) = (I^\circ A) * (I^\circ B) \quad (6)$$

を満たす演算子 I° を具体的に構成することが出来れば、運動方程 (4) の解を次々に生成する術が得られたことになる。我々はこの I° こそ (open string-) interface であると推測している。その理由は第 2 章で interface はある BCFT から異なる BCFT へ移す働きがあると述べたが、まさに開弦の古典解を生成するということがそれに対応しているからである。また条件 (5) は open string と closed string の違いを除けば Conformal interface の満たす条件になっているからである。

残念ながら I° は第 2 章で述べた interface そのものではないことを断っておく。第 2 章で述べた Interface は閉弦のヒルベルト空間に作用するものであり、 I° は開弦のヒルベルト空間に作用するものだからだ。開弦の場に作用させるためには Interface を境界近くへ移動させ、境界上の場への作用を求めなくてはならない。その意味で第 2 章の interface を closed string interface と呼び、開弦に作用するものを open string interface として区別することにする。closed string interface と open string interface が異なることは、例えばバルク CFT を保ったまま境界条件を変える topological interface を扱えば分かるように、前者はヒルベルト空間を変えないが、後者はヒルベルト空間を変えなければいけないということから分かるだろう。

従って我々の問題は既知の closed string interface からどのように open string interface を導入(定義)するかということになる。そして導入した open string interface が果たして (5) および (6) を満たしているのかを確認する。

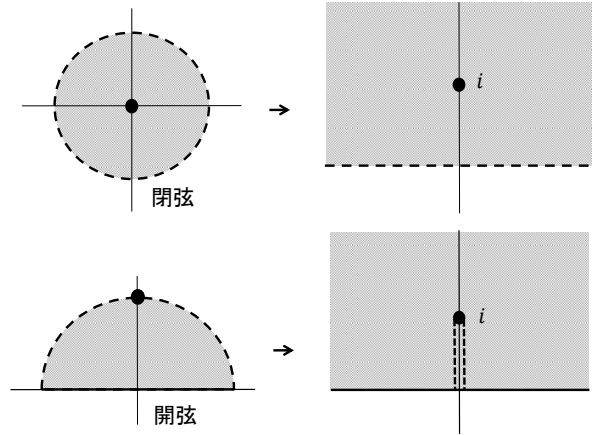


Figure 1: Shapiro-Thorn vertex が与える写像 $h_1(w) = -i(w-1)/(w+1)$ および $h_2(w) = (w-1/w)/2$ の様子。Closed string state ϕ_c と open string state ψ と Shapiro-Thorn vertex の内積は $\langle \gamma(1_c, 2_o) | \phi_c \rangle_{1_c} \psi_2 = \langle h_1[\phi_c(0,0)] h_2[\psi[0]] \rangle$ で与えられる。

ところで開弦の場の古典解は元々理論を書くために用意した BCFT(BCFT₀) の演算子で書かれているが、無限個の成分場が凝縮した全く異なる BCFT の情報を内包している。開弦の場の古典解 Ψ が内包している BCFT の情報を抜き出すには [4] に従って

$$\frac{1}{2\pi} \langle c_0^- \rangle B = \mathcal{P}_c \langle \Psi \rangle \gamma \quad (7)$$

を計算してみればよい。ここで c_0 はゴーストゼロモード、 \mathcal{P}_c は閉弦のレベルマッチ射影演算子である。 Ψ が全うな解ならば状態 $\rangle B$ は Ψ に対応する conformal boundary state になっている。式中に現れる γ は Shapiro-Thorn vertex [5] と呼ばれ、開弦と閉弦の特殊な貼りあわせ方を与える演算子である (図.1)。さて関係式 (7) より open string interface を次のように定義することにしよう。

$$\langle \gamma(1_c, 2_o) I^c(1_c, 2_c) = \langle \gamma(2_c, 1_o) I^o(1_o, 2_o) \quad (8)$$

ラベル 1_c や 2_o などは 1 番目の closed string や 2 番目の open string を指し、同じラベルは和を取る約束とする。このように I^o を定義すると closed string interface I^c が BRST 電荷と交換すること及び Shapiro-Thorn vertex の性質 $\langle \gamma(Q_1^{\text{closed}} + Q_2^{\text{open}}) = 0$ から

$$\langle \gamma'(2_c, 1_o) I_{12}^o Q_2^o = \langle \gamma'(2_c, 1_o) Q_1^o I_{12}^o$$

が言える。これは任意の closed/open string state が右側から作用しても成り立つ式である。また Shapiro-Thorn vertex が open string と closed string の off-shell 変換を引き起こすので、上の式は (5) を表していると理解してよいと思われる。

[4] によれば Shapiro-Thorn vertex で開弦の古典解 Ψ と graviton vertex state を貼り合わせたものは D brane と graviton の結合を与えると考えられており、すなわち D brane の張力エネルギーを与える ($E \sim \langle \gamma | \Psi \rangle \partial X \bar{\partial} \bar{X}$)。

したがって Shapiro-Thorn vertex を通して (8) のように I^o を定義しておけば、 $\Psi' = I^o \Psi$ のエネルギーは I^c が移した先の新しい BCFT のエネルギー正しくなっているのである。

I^o は具体的に構成することが出来て、例えば第 2 章で挙げた $c = 1$ フリーボゾン系の conformal interface (3) からは

$$I^o = I^{\text{top}} \frac{e^K}{\sqrt{1 + S_{11}^t}}, \quad I^{\text{top}} = \det S_{21} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \alpha_{-n}^{(1)} M \alpha_n^{(2)} \right] I_0$$

$$M = -S_{12}^t (1 + S_{11}^t)^{-1}, \quad I_0 = \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \langle M k_{1o2o} \rangle \langle k, \quad K = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_n^2 K_{mn} \alpha_m^2 \quad (9)$$

が得られる。 K_{mn} は S_{ab} および Shapiro-Thorn vertex に含まれる定数に依存する。 I^{top} が topological な部分で $L_n^1 I_{12}^{\text{top}} = I_{12}^{\text{top}} L_n^2$ を満たし (5) も満足する。更に I^{top} は (6) を満たすことも確かめられる。従って I^{top} は古典解を生成する演算子になっている。

ところが K を含む部分は virasoro 接続条件も満足せず、従って (5) を満たさない。また (6) も成り立っていないことが分かった。実は K_{mn} はそのままでは発散しており、(9) は形式的でしかないことが分かった。問題の原因は non-topological の場合に interface を Shapiro-Thorn vertex に単純に作用させたところにあると考えられる。Shapiro-Thorn に作用させることは interface を境界へ作用させることになると理解できるので、closed string interface を boundary state に作用させる際に正則化が必要だったように、この場合も適切な正則化が必要と考えられる。

4 まとめと今後の展望

今回は CFT のオブジェクトである conformal interface を開弦の場の理論である CSFT の古典解生成に使えるというアイデアを紹介した。また具体的に $c = 1$ フリーボゾン系の $U(1)$ preserving interface においてそのアイデアがどのように機能するのかを調べた。その結果 topological の場合には予想通り古典解を生成する演算子を構成できたが、non-topological な項が発散し、正則化が必要ながわかった。この発散の原因は conformal interface を境界へどうもって行くかを理解することで解決されると期待している。

今後、Topological の場合に I° が生成する解が、本当に物理的に正しい解か検討する必要がある。特に (3) において $S_{11} = S_{22} = 0, S_{12} = 1, S_{21} = -(1 - F)/(1 + F)$ の場合を考えると、この interface は Neumann 境界条件から境界に一定磁場が入った BCFT への変換を与える interface になる。境界に一定磁場の入った開弦の場の古典解は [7] によって boundary condition changing operator を使って既に構成されている。また同じ著者らによって [8] において古典解のタキオンプロファイルも調べられている。この結果を再現できるかどうかを今後調べていきたい。

$c = 1$ フリーボゾン系の $U(1)$ preserving の場合の non-topological な時に起こる発散の正則化が解決すれば、次に $SU(2)$ preserving な interface の場合の I° を求めたい。これで $c = 1$ フリーボゾン系は大方理解できるからである。

ここでは Shapiro-Thorn vertex を使った I° の定義を行った。これは演算子表現で議論しているわけだが、相関関数としての定義も確立したい。Non-topological の場合の正則化の問題は、相関関数としてどう定義するかを決めることに関係している。

References

- [1] T. Kojita, C. Maccaferri, T. Masuda and M. Schnabl, JHEP **1804**, 057 (2018) [arXiv:1612.01997 [hep-th]].
- [2] J. Frohlich, J. Fuchs, I. Runkel and C. Schweigert, Phys. Rev. Lett. **93**, 070601 (2004) [cond-mat/0404051].
- [3] J. Frohlich, J. Fuchs, I. Runkel and C. Schweigert, Nucl. Phys. B **763**, 354 (2007) [hep-th/0607247].
- [4] I. Ellwood, JHEP **0808**, 063 (2008) [arXiv:0804.1131 [hep-th]].
- [5] J. A. Shapiro and C. B. Thorn, Phys. Lett. B **194**, 43 (1987).

- [6] C. Bachas and I. Brunner, *JHEP* **0802**, 085 (2008) [arXiv:0712.0076 [hep-th]].
- [7] N. Ishibashi, I. Kishimoto and T. Takahashi, *PTEP* **2017**, no. 1, 013B06 (2017) doi:10.1093/ptep/ptw185 [arXiv:1610.05911 [hep-th]].
- [8] N. Ishibashi, I. Kishimoto, T. Masuda and T. Takahashi, *JHEP* **1805**, 144 (2018) doi:10.1007/JHEP05(2018)144 [arXiv:1804.01284 [hep-th]].

素粒子の標準模型の改革を目指して

京都産業大学益川塾、* 立命館大学理工学部

曾我見郁夫、* 小泉耕蔵

素粒子の標準模型 (SM) は、地上実験のほとんどすべての観測結果を高い精度で記述し説明することが出来る。それにも係わらず、SM を素粒子物理学の完全な理論体系と位置付けることは出来ない。その主たる理由は、現存する SM の体系が湯川相互作用を定式化するための原理を持たないことにある。湯川相互作用が含む結合係数は、すべて未知量であり、その値は実験によって定める他ない。この論文の目的は、湯川相互作用が罹患している未知定数過多症 (**plethola**) の治療を目指して、SM を再定式することである。

SM を構成するクォーク族とレプトン族は、外部対称ローレンツ群 G_L と内部対称ゲージ群 $G_{SM} = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ の既約表現に属するカイラル場で記述される。それらのフェルミオン族のスペクトルが持つ注目すべき特徴は、同じ外部および内部量子数をもつカイラル場が三重の重複自由度 (**redundancy**) を持っていることである。それらの重複したカイラル場は、電弱対称性 $G_{EW} = SU_L(2) \times U_Y(1)$ の分類で、 ψ_α^j ($\alpha = q, u, d, \ell, \nu, e$) ($j = 1, 2, 3$) と表すことが出来る。クォーク族の場合は、左手電弱二重項 $\psi_q^j = \psi_L^{(q)j} = \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}_L$ 、右手のアップー重項 $\psi_u^j = \psi_R^{(u)j} = (u_j)_R$ およびダウンー重項 $\psi_d^j = \psi_R^{(d)j} = (d_j)_R$ で構成される。またレプトン族の場合は、左手電弱二重項 $\psi_\ell^j = \psi_L^{(\ell)j} = \begin{pmatrix} \nu_j \\ e_j \end{pmatrix}_L$ 、右手のアップー重項 $\psi_\nu^j = \psi_R^{(\nu)j} = (\nu_j)_R$ およびダウンー重項 $\psi_e^j = \psi_R^{(e)j} = (e_j)_R$ と表されるのである。

フェルミオン場の運動部分とゲージ相互作用部分のラグランジュ密度は、カイラル場 $\bar{\psi}_\alpha^j(x)$ とそれらの共役場 $\bar{\psi}_\alpha^j(x) = \psi_\alpha^{j\dagger}(x)\gamma^0$ およびゲージ対称群 G_{SM} に関する共変微分 \mathcal{D}_μ によって

$$\mathcal{L}_{\text{kg}} = \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha=q,u,d,\ell,\nu,e} \bar{\psi}_\alpha^j(x) \gamma^\mu i \mathcal{D}_\mu \psi_\alpha^j(x) \quad (1)$$

と与えられる。ここで、ディラック代数 $A_\gamma = \langle \gamma^\mu \rangle = \{I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5\}$ の生成元 γ^μ は、反交換関係 $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ を満たし、すべてのカイラル場 $\psi_\alpha^j(x)$ に対し普遍的に作用する。

湯川相互作用のラグランジュ密度は、ヒッグス場 ϕ と、その共役場 $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$ を用いて

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{i,j=1}^3 [a_{ij}^{(u)} \bar{\psi}_L^{(q)i} \tilde{\phi} \psi_R^{(u)j} + a_{ij}^{(d)} \bar{\psi}_L^{(q)i} \phi \psi_R^{(d)j} + a_{ij}^{(\nu)} \bar{\psi}_L^{(\ell)i} \tilde{\phi} \psi_R^{(\nu)j} + a_{ij}^{(e)} \bar{\psi}_L^{(\ell)i} \tilde{\phi} \psi_R^{(e)j}] + \text{h.c.} \quad (2)$$

と与えられる。定数 $a_{ij}^{(\alpha)}$ は、 α にも、また i と j にも複雑に依存する未知量である。これが湯川相互作用が罹患している未知定数過多症 (**plethola**) である。

ここで、元 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ によって生成されるローレンツ変換行列によって、すべてのカイラル場が変換されることに注意しなければならない。これは、Coleman-Mandula (CM) 定理の一部分であり、以下の理論構築の鍵となる。

我々は、未知定数過多症の原因は「SMが重複するカイラル場を個々独立な場として取り扱う手法にある」と解釈し、この病の原因を取り除くために、三重に重複するカイラル場を一つにまとめ上げて新しい物理単位を導入する。すなわち、電弱対称性で分類された $\alpha = q, u, d, l, \nu$ および e の三重複カイラル成分場 $\psi_\alpha^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) から、以下のように縦ベクトル

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^1 \\ \psi_\alpha^2 \\ \psi_\alpha^3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

を構成し、これを α -トライアッド (α -**triad**) と名付ける。6種のトライアッド Ψ_α ($\alpha = q, u, d, l, \nu, e$) が存在する。

(1) 式 および (2) 式で確認されるように、ゲージ場とヒッグス場は、重複するカイラル成分場 $\psi_\alpha^{(j)}$ と個々別々に相互作用する。ここで我々は SM を再定式化するために

ゲージ場とヒッグス場は、カイラル場の対ではなく、トライアッドの対とローレンツ対称性およびゲージ対称性に関し不変な形で相互作用する。

という **要請 (Ansatz)** を置く。

(3 × 4)-次元のベクトル空間を張るトライアッド Ψ_α には、それに作用するクリフォード・ディラック (CD) 代数 $A_\alpha = \langle \Gamma_\alpha^\mu \rangle = \{I_{3\otimes 4}, \Gamma_\alpha^\mu, \Sigma_\alpha^{\mu\nu}, \Gamma_\alpha^5 \Gamma_\alpha^\mu, \Gamma_\alpha^5 = i\Gamma_\alpha^0 \Gamma_\alpha^1 \Gamma_\alpha^2 \Gamma_\alpha^3\}$ が存在する。生成元 Γ_α^μ はオリジナルのディラック代数 A_γ の生成元 γ^μ と同様に、反交換関係

$$\Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu + \Gamma_\alpha^\nu \Gamma_\alpha^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_{3\otimes 4}, \quad (I_{3\otimes 4} = I_3 \otimes I_4) \quad (4)$$

を満たす。トライアッド $\Psi_\alpha(x)$ に作用するローレンツ変換行列の生成子は

$$\Sigma_\alpha^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu - \Gamma_\alpha^\nu \Gamma_\alpha^\mu) \quad (5)$$

と定義される。

先に述べた CM 定理によれば、トライアッド $\Psi_\alpha(x)$ を構成するカイラル成分場はすべて、元 $\sigma^{\mu\nu}$ によって生成される変換を受けるから、 $\Sigma_\alpha^{\mu\nu} = I_3 \otimes \sigma^{\mu\nu}$ でなければならない。故に、CD 代数の生成元 Γ_α^μ は関係式

$$\Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu - \Gamma_\alpha^\nu \Gamma_\alpha^\mu = I_3 \otimes (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (6)$$

を満たす。反交換関係 (4) と交換関係 (6) から、CD 代数の生成元 Γ_α^μ が満たす強い条件式

$$\Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu = I_3 \otimes \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (7)$$

を求めることが出来る。この式により Γ_α^μ の偶数個の積は同じ数の γ^μ の積で表される。例えば、 $\Gamma_\alpha^5 = i\Gamma_\alpha^0\Gamma_\alpha^1\Gamma_\alpha^2\Gamma_\alpha^3 = I_3 \otimes i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = I_3 \otimes \gamma_5$ が成り立ち、代数 A_α のキラリティー演算子はディラック代数のキラリティー演算子によって表される。以下で見るように、条件式 (7) は、CD 代数 A_α の生成元がもつ外部属性のみならず内部属性を決定する上で、重要な役割を演じる。

代数 A_α の生成子 Γ_α^μ は、以下のような表現を持つと仮定する：

$$\Gamma_\alpha^\mu = \begin{cases} I_3 \otimes \gamma^\mu & \text{for } \alpha = q, \ell \\ Y_\alpha L_\alpha \gamma^\mu + Z_\alpha R_\alpha \gamma^\mu & \text{for } \alpha = u, d, \nu, e \end{cases} \quad (8)$$

ここで Y_α と Z_α は、トライアッド Ψ_α の三次元内部空間に作用する 3×3 行列である。この右手トライアッド Γ_α^μ ($\alpha = u, d, \nu, e$) の表現は、キラリティー演算子 L_α と R_α を含みエンタングルした形式になっている。これは、基本場の外部と内部属性は直積で表されると主張する CM 定理に反するように見える。しかし、以下の (10) と (11) で確認されるように、生成元 Γ_α^μ はトライアッドが造る環境の中で特定のキラリティーのみが許されるため (8) の表現は CM 定理に反しない。条件式 (7) を満たす生成子 Γ_α^μ 中の行列 Y_α は

$$Y_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_\alpha & 1 & 0 \\ b_\alpha & c_\alpha & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

と定められる。ここで a_α, b_α および c_α は任意の複素数である。 Z_α も類似の下三角行列である。

このように造られた CD 代数上で SM が再構成される。トライアッドの運動項部分とヒッグス場およびゲージ場との相互作用部分に対するラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}_{\text{kg}} = \sum_{\alpha=l,\nu,e,q,u,d} \bar{\Psi}_\alpha(x) \Gamma_\alpha^\mu i \mathcal{D}_\mu \Psi_\alpha(x) \quad (10)$$

と与えられる。この密度の各項は、 $\Gamma_\alpha^0\Gamma_\alpha^\mu$ 、 L_α および R_α によって、偶数個の生成元 Γ_α^μ を含む。故に、条件式 (7) により、(1) 式と (10) 式の二つの密度は等価である。

ヒッグス場とトライアッドの相互作用を設定するために、(2) 式の密度の $\bar{\psi}_L^{(q)i} \tilde{\phi}_R^{(u)j}$ に注目しよう。この項を含みトライアッド Ψ_q^\dagger と Ψ_u から構成されるローレンツ不変量は、 $\bar{\Psi}_q \tilde{\phi} \Psi_u \equiv \Psi_q^\dagger \Gamma_q^0 \tilde{\phi} \Psi_u$ および $\Psi_q^\dagger \tilde{\phi} \Gamma_u^0 \Psi_u$ の二種類が存在する。前者は、観測で確認されている湯川相互作用の多様性を記述するには簡単すぎる。この理論では、後者のタイプを採用し、ヒッグス場とトライアッドの相互作用のラグランジュ密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{HT}} (\equiv \mathcal{L}_Y) &= g_u \Psi_q^\dagger \tilde{\phi} \Gamma_u^0 \Psi_u + g_d \Psi_q^\dagger \tilde{\phi} \Gamma_d^0 \Psi_d + g_\nu \Psi_\ell^\dagger \tilde{\phi} \Gamma_\nu^0 \Psi_\nu + g_e \Psi_\ell^\dagger \tilde{\phi} \Gamma_e^0 \Psi_e + \text{h.c.} \\ &= g_u \bar{\Psi}_q \tilde{\phi} Y_u \Psi_u + g_d \bar{\Psi}_q \tilde{\phi} Y_d \Psi_d + g_\nu \bar{\Psi}_\ell \tilde{\phi} Y_\nu \Psi_\nu + g_e \bar{\Psi}_\ell \tilde{\phi} Y_e \Psi_e + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられると仮定する。ここで、 g_α はヒッグス場と α -トライアッドの相互作用係数であり、また Y_α は (9) 式の相互作用核である。この式の最後の行で、アジョイントトライアッドに対する標識 $\bar{\Psi}_\alpha = \Psi_\alpha^\dagger \Gamma_\alpha^0$ を用いた。この相互作用密度のすべての項は奇数個の生成元 Γ_α^μ を含む。

このトライアッド形式の場の理論でも、通常の SM と同様にヒッグス機構の引き金として、ヒッグス場が真空期待値 $\langle\phi^0\rangle = v$ を獲得するとする。ツリーレベルの近似で、密度 (11) から α -セクター ($\alpha = u, d, \nu, e$) の質量行列

$$M_\alpha = \bar{m}_\alpha Y_\alpha, \quad \bar{m}_\alpha = g_\alpha v \quad (12)$$

が得られる。ここで、 \bar{m}_α は α -セクターの質量スケールを決定する。二乗質量と電弱カレントの混合行列を決定するためには $M_\alpha M_\alpha^\dagger$ に対する固有値問題を解かなければならない。

無次元量 $\lambda_j = \frac{m_j^2}{\bar{m}^2}$ と $\lambda = \frac{m^2}{\bar{m}^2}$ を導入し、 $Y_\alpha Y_\alpha^\dagger$ に対する固有値問題を解く。固有多項式は

$$f(\lambda) = \left| \lambda I - Y_\alpha Y_\alpha^\dagger \right| = \lambda^3 - (q+3)\lambda^2 + (q+3-p)\lambda - 1 \quad (13)$$

であり、係数 p と q は (9) 式の行列に含まれるパラメーターで決まる。この式の定数項に注目し、根と係数の関係から $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ を得る。故に、 α -セクターの質量スケールが

$$\bar{m}_\alpha = \sqrt[3]{m_{\alpha 1} m_{\alpha 2} m_{\alpha 3}} \quad (14)$$

と定められる。繰り込み群方程式を用いて Z ボソンの質量スケール ($m_Z = 91.2 \text{ GeV}$) に調整した質量値を代入すると、この式から荷電粒子の平均質量スケールとして

$$\bar{m}_u = 513 \text{ MeV}, \quad \bar{m}_d = 77.3 \text{ MeV}, \quad \bar{m}_e = 44.4 \text{ MeV} \quad (15)$$

を得る。これらの値を関係式 $\bar{m}_\alpha = g_\alpha v$ ($v = 246 \text{ GeV}$) に代入すると、ヒッグス場とトライアッド Ψ_α ($\alpha = u, d$) の相互作用定数 g_α の大きさを

$$|g_u| = 2.09 \times 10^{-3}, \quad |g_d| = 3.14 \times 10^{-4}, \quad |g_e| = 1.80 \times 10^{-4} \quad (16)$$

と決定することが出来る。これらの値が小さいことは、質量行列をツリーレベルで求める手法が近似として妥当であることを示している。高次の補正は摂動近似で求められる。

質量行列 (12) の有効性を調べるために、 $|p/q|$ が小さいとして固有多項式 (13) を考察する。 $|p/q|$ の三次以上を無視する近似で得る関係式 $\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_2^2 = 3(1 - \lambda_2)$ から、近似的な質量公式

$$m_3^2 m_1^2 + 3(m_1 m_2 m_3)^{\frac{2}{3}} m_2^2 = m_2^4 + 3(m_1 m_2 m_3)^{\frac{4}{3}} \quad (17)$$

を導出することが出来る。Z ボソンの質量スケールに調整した質量値を代入すると

$$\frac{m_t^2 m_u^2 + 3m_c^2 (m_t m_c m_u)^{\frac{2}{3}}}{m_c^4 + 3(m_t m_c m_u)^{\frac{4}{3}}} \approx 0.987, \quad \frac{m_b^2 m_d^2 + 3m_s^2 (m_b m_s m_d)^{\frac{2}{3}}}{m_s^4 + 3(m_b m_s m_d)^{\frac{4}{3}}} \approx 1.07 \quad (18)$$

となり、アップおよびダウンクォーク族に対して質量公式が良く合うことが判明した。

我々は、3重に重複するカイラル場から新しい単位であるトライアッドを構成し、それらがゲージ場とヒッグス場と相互作用すると要請して、SM を再定式化した。この新しい形式では、(2) 式と (11) 式の対比から分かるように、湯川相互作用の結合定数が $4/9$ に減少する。ヒッグス場とトライアッド相互作用の核である (9) 式の行列要素を決定するには、クォーク族の電弱混合行列を考察しなければならない。続いて、レプトン族に対して同様の考察をする必要がある。高次の摂動計算は今後の課題である。

Domain Type of Field Equation in AdS₅ Spacetime and Related Problem

College of Science and Technology, Nihon University

*Junior College, Funabashi Campus, Nihon University

*K.Aouda, N.Kanda, S.Naka, and *H.Toyoda*

1 Introduction

The non-local field theories proposed by H. Yukawa[1] are on two tracks; the bi-local field theories and the theory of elementary domain. The former is known to be reduced to a theory of relativistic two-body systems[2], which can be said to have a simplified structure of the string model. The latter stands on a more drastic framework, in which the field equation for an extended object has a form of difference equation instead of differential equation such that

$$e^{\lambda^\mu \partial_\mu} \Psi = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{S}} \Psi, \quad (1)$$

where (λ^μ) and \hat{S} are respectively a timelike vector and a scalar operator constructed out of the dynamical variables of the object. Although Yukawa's domain theory was aimed at overcoming the problems inherent in local field theories, there were less positive results in this direction. This is due to the reason that the field equation (1) allows the ghost states; those conflicting with the causality, unphysical energy states, and so on. It is difficult to regard the fields characterized by Eq.(1) as elementary fields; however, such a type of higher derivative field equation sometimes appears as effective one in elementary field theories. The purpose of this work is, thus, to investigate the domain type of fields obtained as such effective fields out of some elementary fields in IR brane, which shows a new viewpoint of the strong force in IR brane.

In the next section, we review the previous paper[5] to provide the setting for this work. In this paper, the key was the introduction of (0,5), time and extra dimension, mixing in the coordinates of a particle under consideration. The (0,5) mixing can be understood by two ways: one is to introduce time-dependent extra dimensions, and another is to consider a self-interaction of a particle in a fixed background spacetime. In section 3, we discuss the latter approach to (0,5) mixing through the interaction between a particle and a massive vector fields in the AdS₅ spacetime. Finally, in section 4, we study the role of the domain type of field equation relating correlated fields in IR boundary with strongly interacting fields.

2 Domain type of fields in IR brane

To describe the particle in AdS₅ spacetime, we use the local coordinates $(x^{\hat{\mu}}) = (x^\mu, x^5)$ characterized by the warp metric $(g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) = (e^{-2ky} \eta_{\mu\nu}, 1)$, $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3; x^5 = y)$, in which the extra

dimension is assumed to be the orbifold with $y = -y = y + L$. Then in terms of the particle's proper time τ and $Dx^{\hat{\mu}} = \dot{x}^{\hat{\mu}} (= \frac{dx^{\hat{\mu}}}{d\tau})$, the action of the particle can be written as

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d\tau \left\{ \frac{1}{e} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} Dx^{\hat{\mu}} Dx^{\hat{\nu}} - (m_0 c)^2 e \right\}, \quad (2)$$

where e is the einbein in τ space. Varying the action with respect to e , we obtain the constraint $\frac{\delta S_0}{\delta e} = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} p_{\hat{\mu}} p_{\hat{\nu}} + (m_0 c)^2 = 0$ with the momenta $\{p_{\hat{\mu}}\}$ conjugate to $\{x^{\hat{\mu}}\}$. In the first place, for the sake of simplicity, we consider the case $k = 0$ corresponding to the spacetime $M_4 \otimes S^1/Z_2$. Then in q-number theory, the Green function $G_{ba} = \langle x_b | (\hat{p}_{\mu} \hat{p}^{\mu} + \hat{p}_y^2 + (m_0 c)^2)^{-1} | x_a \rangle$ in the functional space $\Psi(x, y)|_{y=0, L} = 0$ can be shown to have the structure[5]

$$G_{ba} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} [K((\bar{x}_{ba})^2 + (2rL + 2\check{y}_{ba})^2) - K((\bar{x}_{ba})^2 + (2rL - \bar{y}_{ba})^2)], \quad (3)$$

from which one can verify the periodic properties

$$G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba}, \check{y}_{ba}) = G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba} \pm 2L, \check{y}_{ba}) = G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba}, \check{y}_{ba} \pm L). \quad (4)$$

Here, we have used the notation $\bar{f}_{ba} = f_b - f_a$, $\check{f}_{ba} = \frac{1}{2}(f_b + f_a)$ for (x^{μ}, y) . In this stage, the propagations toward x^0 and $x^5(=y)$ directions are independent. However, if there arises (0,5) mixing such as the rotation of the S^1 circle that causes the modification $(Dx^{\hat{\mu}}) \rightarrow (\dot{x}^{\mu}, \dot{y} - \beta \dot{x}^0)$, then the arguments of the Green function will be mixed so that $(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba}, \check{y}_{ba}) \rightarrow (\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba} - \beta \bar{x}_{ba}^0, \check{y}_{ba} - \beta \check{x}_{ba}^0)$. Then, because of $\bar{y}_{ba} = 0$ and $\check{y}_{ba} = L$ for $y_a = y_b = L$, the restricted Green function on IR brane $\mathcal{G}_{ba} = G_{ba}|_{y_a=y_b=L}$ becomes a function of $(\bar{x}_{ba}, \check{x}_{ba}^0)$, which satisfies $\mathcal{G}(\bar{x}, \check{x}_{ba}^0) = \mathcal{G}(\bar{x}_{ba}, \check{x}_{ba}^0 + L_{\beta})$, ($L_{\beta} = L/\beta$). In terms of \mathcal{G}_{ba} , one can define the effective field in IR brane

$$\mathcal{F}[\Phi_a, x_b] = \int d^4 x_a \mathcal{G}_{ba}(\bar{x}_{ba}, \check{x}_{ba}^0) \Phi_a(x_a). \quad (5)$$

Here, for example for $\Phi_a(x) = \theta(\hat{p}^0) \delta(\hat{p}^2 + (m_0 c)^2) \phi_a(x)$, one can verify

$$e^{L_{\beta}(\partial_0)_b} \mathcal{F}[\Phi_a, x_b] = \int d^4 x_a \mathcal{G}_{ba}(\bar{x}_{ba}, \check{x}_{ba}^0) e^{L_{\beta}(\partial_0)_a} \Phi_a(x_a) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{S}_b} \mathcal{F}[\Phi_a, x_b], \quad (6)$$

where $\hat{S} = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + (m_0 c)^2}$. The $\mathcal{F}[\Phi_a, x_b]$ is a function of x_b^{μ} and a functional of Φ_a , which satisfies the domain type of equation (6) under an appropriate choice of the initial source Φ_a .

Next, for $k \neq 0$, we have to understand $(Dx^{\hat{\mu}}) = (\dot{x}^{\mu}, \dot{y} - e^{-ky} \beta \dot{x}^0)$; and then, the wave equation, the q-number counterpart of $\frac{\delta S_0}{\delta e} = 0$, can be represented in the form

$$\left\{ \hat{p}^{\mu} \hat{p}_{\mu} + \hat{p}_z^2 - (\hbar k)^2 \frac{\Delta}{z^2} \right\} \tilde{\Psi} = 0 \quad \left(1 \leq z = e^{ky} \leq e^{kL}, \Delta = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_0 c}{\hbar k} \right)^2 \right). \quad (7)$$

This means that for the m_0 satisfying $\Delta = 0$, Eq.(7) becomes a massless Klein-Gordon equation in (x^μ, z) space, in which the Green function \mathcal{G}_{ba} can be constructed in a similar manner in the case of $k = 0$; and, the domain type of equation (6) again holds. We note that $\Delta/z^2 \simeq 0$ in the almost all region of z for $\Delta \ll 1$; that is, $\Delta = 0$ is a good approximation of Eq.(7).

Finally, we note that the Lorentz non-covariant form of \mathcal{G}_{ba} is not so serious; indeed, this problem can be removed for a particle having dynamical degrees of freedom other than position variables. For example for the spinning particles, one can construct a timelike vector V^μ out of spin's degrees of freedom; then, the $Dx^{\hat{\mu}}$ in Eq.(2) is modified so that $(Dx^{\hat{\mu}}) \rightarrow (\dot{x}^\mu, \dot{y} - e^{-ky}\beta\dot{x}^\mu V_\mu)$. Then the time-difference $e^{L_\beta(\partial_0)_b}$ in the left-hand side of Eq.(6) is replaced by the timelike directional difference $e^{L_\beta(\hat{V}\cdot\partial)_b}$, ($\hat{V} = V/\sqrt{-V^2}$); the resultant equation gets closer to Yukawa's domain equation (1).

3 Massive vector fields and (0,5) mixing

Until now, the (0,5) mixing inducing the domain type of equation (6) is attributed to a moving extra dimension. However, it is possible to make reduce the (0,5) mixing to a result of the interaction between a particle and a massive vector field. In order to see this, let us consider the action of the particle interacting with a massive vector field:

$$S_G = \int d^5x \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} g^{\hat{\mu}\hat{\rho}} g^{\hat{\nu}\hat{\sigma}} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F_{\hat{\rho}\hat{\sigma}} - \frac{1}{2} A_{\hat{\mu}} M^{\hat{\mu}\hat{\nu}} A_{\hat{\nu}} - A_{\hat{\mu}} J^{\hat{\mu}} \right), \quad (8)$$

where $J^{\hat{\mu}}(x) = \frac{g_0}{\sqrt{|g|}} \int d\bar{\tau} \delta^{(5)}(x - x(\bar{\tau})) \dot{x}^{\hat{\mu}}(\bar{\tau})$ is the current of the particle. Here, we assume that the mass scale m is very large so that the kinetic term of the vector fields can be disregarded. Further, the mass matrix is assumed to be

$$[M_{\hat{\mu}\hat{\nu}}] = m^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & a \\ a^T & b \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}, \quad (a^2 < 0). \quad (9)$$

Then one can solve $\{A_{\hat{\mu}}\}$ by $\{J_{\hat{\mu}}\}$ through field equations $\frac{\delta S_G}{\delta A_{\hat{\mu}}} = 0$; and, substituting the result for S_G , we obtain the expression

$$S_G = \frac{1}{2} \int d\tau \frac{e^{4ky}}{e} \left\{ \frac{b\lambda}{m^2 a^2} \dot{x}_{\parallel}^2 + 2 \frac{\lambda}{m^2 \sqrt{-a^2}} \dot{x}_{\parallel} \dot{y} \right\}, \quad (10)$$

where we have put $ed\tau = dx^0$, $\dot{x}_{\parallel} = -(\dot{x} \cdot a)/\sqrt{-a^2}$, and $\lambda = \frac{g_0^2}{m_0 c^2} \delta^{(4)}(0)$. Then adding S_G to S_0 in Eq.(2), the resultant action becomes S_0 with $Dx^5 = \dot{y} + e^{-ky}\beta\dot{x}_{\parallel}$ with $\beta e^{-ky} = -b/\sqrt{-a^2}$. Therefore, the (0,5) mixing is reduced to a result of interaction between the massive vector field and the particle in a static background spacetime.

4 Correlated initial states

The property of the functional $\mathcal{F}[\Phi, x]$, which reflects the structure of the extra dimension, is determined depending on the initial state $\Phi(x)$. As discussed in section 2, the on-shell initial state $\Phi(x) = \theta(\hat{p}^0)\delta(\hat{p}^2 + (m_0c)^2)\phi(x)$ could lead to the domain type of field equation (6). In the case of off-shell plane wave $e_k^{(a)}(x) = e^{ik \cdot (x-a)}/\sqrt{(2\pi)^4}$, the momentum representation of $\delta^{(4)}(x-a)$, the functional $\mathcal{F}[e_k^{(a)}, x]$ does not satisfy the domain type of field equation.

The definition of the functional can be extended to a bi-local initial state $\Phi(x, x')$ by

$$\mathcal{F}[\Phi; x, x'] = \int d^4\xi \int d^4\xi' \mathcal{G}(x, \xi) \mathcal{G}(x', \xi') \Phi(\xi, \xi'), \quad (11)$$

which is reduced to the direct product $\mathcal{F}[\phi_1, x] \mathcal{F}[\phi_2, x']$ for $\Phi(x, x') = \phi_1(x) \phi_2(x')$. When $\Phi(x, x')$ is a correlated function of $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x')$ in some way, the situation is fairly changed. For example, for the Gaussian wave packet $e_k^{(\sigma, a)}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{p}^2} e_k^{(a)}(x)$, ($\tau = \sigma/2\hbar$), let us define the correlated wave packets by

$$e^{(-\sigma, \frac{d}{2})} * e^{(\sigma, -\frac{d}{2})}(x, x') = \int \frac{d^4k}{\sqrt{(2\pi)^4}} \int \frac{d^4k'}{\sqrt{(2\pi)^4}} e_k^{(-\sigma, \frac{d}{2})}(x) e_{k'}^{(\sigma, -\frac{d}{2})}(x') C(k, k'), \quad (12)$$

where $C(k, k') = 2\theta(\check{k}^0)\theta(\bar{k}^0)\delta(\bar{k}^2)$ with $(\check{k}, \bar{k}) = (k + k', \frac{1}{2}(k - k'))$; i.e., the correlation constrains the relative momentum \bar{k} so as to be light-like one. Then after a calculation, the momentum-representation functional $\tilde{\mathcal{F}}_{\check{\mathbf{k}}}(\check{x}^0, \bar{\mathbf{x}}) = \int d^3\check{\mathbf{x}} e^{-i\check{\mathbf{k}} \cdot \check{\mathbf{x}}} \mathcal{F}[e^{(-\sigma, \frac{d}{2})} * e^{(\sigma, -\frac{d}{2})}; x, x']$ with $\bar{x}^0 = d^0 = 0$ can be shown to satisfy

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{0}}(\check{x}^0 + L_\beta, \bar{\mathbf{x}}) = e^{-\frac{i}{\sigma} R L_\beta} \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{0}}(\check{x}^0, \bar{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{L_\beta}{\sigma}\right) \quad (R = |\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{d}|). \quad (13)$$

This is a domain type of field equation; the area law in the phase factor implies the appearance of a binding force between the correlated particles. The result contains an insight for the strong force in IR brane due to an effect of the extra dimension and the correlation. Though it is necessary to make clear the meaning of the correlation, the further analysis will be interesting and important.

References

- [1] H. Yukawa, Prog. Theor. Phys. **3**, L205 (1948). H. Yukawa, Phys. Rev. **77**, 219 (1950).
- [2] T. Gotō, S. Naka and K. Kamimura, Prog. Theor. Phys. Suppl. **67**, 69 (1979).
- [3] Y. Katayama and H. Yukawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41**,1 (1968).
- [4] Y. Katayama, I. Umemura and H. Yukawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41**,22 (1968).
- [5] K. Aouda, N. Kanda, S. Naka and H. Toyoda, arXiv:1710.09677.

超弦理論におけるブレーンと変形された超重力理論

京都府立医科大学 物理学教室

酒谷 雄峰

1 はじめに

よく知られている 10 次元の超重力理論は、超弦理論の低エネルギー有効理論として導き出せる。そして、これらの超重力理論の運動方程式を満たす時空中では、共形変換の下で不変な超弦理論が定式化できる。近年、Green–Schwarz 型の IIB 型超弦理論の定式化において、超弦理論が持つ κ 対称性と呼ばれる対称性が背景時空にどのような条件を要請するかが調べられた [1]。その結果、 κ 不変性を実現するためには、背景時空は必ずしも通常の超重力理論の運動方程式を満たす必要はなく、それを少し変形した一般化超重力理論と呼ばれる理論 [2, 1] の運動方程式さえ満たせばよいことが分かった。ただし、一般化超重力理論の運動方程式を満たす時空中で超弦理論を定式化しようとする、通常は局所的なスケール不変性を破るアノマリーが生じ、整合的な超弦理論は定式化できないと考えられていた。

最近の我々の研究 [3, 4] から、一般化超重力理論の運動方程式を満たす時空 (一般化された背景) 上でも、実は Weyl アノマリーを相殺できることが分かった。一般化された背景上で本当に超弦理論を整合的に定式化できるかについては、さらに詳しく研究する必要があるが、少なくとも Weyl アノマリーが相殺できたことは、背景時空は必ずしも通常の超重力理論の運動方程式を満たす必要がないことを示唆しており、さらに多くの変形された超重力理論を探すことは重要である。

実は、[5, 6, 3] で明らかにされたように、上述の一般化された超重力理論は、超弦理論が持つ双対性を明白にした超重力理論の定式化である、**Double Field Theory (DFT)** あるいはその一般化である **Exceptional Field Theory (EFT)** から、ある種の断面を切り出すことで導出できる。本講演では、EFT における別の断面を切り出すことで、新たな変形された超重力理論を数多く導出できることを示した研究 [7] について紹介する。

2 DFT における D8 ブレーン解

超弦理論には Dp ブレーンと呼ばれる超対称性を半分保つ物体が存在する。この物体が存在することで一般に時空は曲げられ、 $p \leq 7$ の場合、その曲がった時空は超重力理論の運動方程式を満たす。超弦理論には、 T 双対性と呼ばれる対称性があり、 T 双対性変換により、 Dp ブレーンを $D(p+1)$ ブレーンに変換することが出来る。従って、 Dp ブレーンの超重力解が与えられれば $D(p+1)$ ブレーンに対応する超重力解も生成できる。ただし、 T 双対性変換を作用させるためには並進対称性が必要なため、まずは Dp ブレーンをそれに直交する 1 方向に均し、その方向に並進対称性を作ってから T 双対性変換を作用させることで $D(p+1)$ ブレーン解を生成できる。ただし、この処方を用いて $D7$ ブレーン解から $D8$ ブレーン解を作り出そうとすると問題が生じる。 $D7$ ブレーンは

余次元 (co-dimension) 2 の物体であり、その超重力解は 2 つの座標依存性を持つ。これを 1 方向に均せば、1 つの座標依存性を持つ配位が得られると期待されるが、実際に超重力理論の運動方程式を満たそうとすると、どうしても座標依存性が 2 つ残ってしまうことが分かる。従って、並進対称性がないため素朴には T 双対性変換が行えず、D8 ブレーン解が作れない。しかし、実は超重力理論を一度 DFT へと拡張すれば、実は並進対称性が無くても T 双対性変換を作用させられる。従って、DFT の解としては D8 ブレーン解を構成できる [8]。

DFT における D8 ブレーン解は、通常の IIA 型超重力理論で導入される 10 次元時空の座標 x^m 以外に、双対座標 \tilde{x}_m と呼ばれる余分な座標に依存するため、通常の 10 次元 IIA 型超重力理論の解としては理解できない。ただし、その依存性は Ramond–Ramond (RR) 場の中に $C_1 = m \tilde{x}_8 dx^8$ のように線形に入っているだけである。従って、運動方程式の中では、RR 場に微分が作用することで双対座標への露わな依存性は消え、定数 m のみが残る。こうして、パラメータ m により変形された超重力理論の運動方程式が得られ、10 次元時空の立場では、D8 ブレーンは **mass** 変形された IIA 型超重力理論の解として解釈できる。

3 ブレーンと U 双対性

超弦理論には、 T 双対性を一般化した U 双対性と呼ばれる対称性があり、 $(n-1)$ 次元トーラスでコンパクト化された超弦理論の場合、 U 双対性は例外群 $E_{n(n)}$ をなす。 T 双対性変換が Dp ブレーンを $D(p+1)$ ブレーンに変換したのと同様、 U 双対性変換を行うと、 D ブレーンは様々な張力を持つ物体へと写像される。実際に、例えば 7 次元トーラスでコンパクト化された IIA 型超弦理論に存在する以下の物体が、 U 双対性変換の下で互いに関係づることが確認できる [7]:

F1, P, D0, D2, D4, D6, D8, NS5, KKM, $5_2^2, 5_2^3, 5_2^4, 6_3^1, 4_3^3, 2_3^5, 0_3^7, 7_3^{(1,0)}, 5_3^{(1,2)}, 3_3^{(1,4)}, 1_3^{(1,6)}, 6_3^{(2,1)}, 4_3^{(2,3)}, 2_3^{(2,5)}, 1_4^{(1,6)}, 1_4^{(1,0,6)}, 5_4^3, 4_4^{(1,3)}, 3_4^{(2,3)}, 2_4^{(3,3)}, 1_4^{(4,3)}, 5_4^{(1,0,3)}, 4_4^{(1,1,3)}, 3_4^{(1,2,3)}, 2_4^{(1,3,3)}, 8_4^{(1,0)}, 6_4^{(3,0)}, 4_4^{(5,0)}, 2_4^{(7,0)}, 2_5^6, 2_5^{(2,4)}, 2_5^{(4,2)}, 2_5^{(6,0)}, 1_5^{(1,1,5)}, 1_5^{(1,3,3)}, 1_5^{(1,5,1)}, 2_5^{(1,0,1,5)}, 2_5^{(1,0,3,3)}, 2_5^{(1,0,5,1)}, 5_5^{(1,3)}, 5_5^{(3,1)}, 4_5^{(1,0,4)}, 4_5^{(1,2,2)}, 4_5^{(1,4,0)}, 3_5^{(2,1,3)}, 3_5^{(2,3,1)}, 2_5^{(3,0,4)}, 2_5^{(3,2,2)}, 2_5^{(3,4,0)}, 1_6^{(4,3)}, 1_6^{(1,4,2)}, 1_6^{(2,4,1)}, 1_6^{(3,4,0)}, 3_6^{(2,4)}, 3_6^{(1,2,3)}, 3_6^{(2,2,2)}, 3_6^{(3,2,1)}, 3_6^{(4,2,0)}, 2_6^{(1,0,2,4)}, 2_6^{(1,1,2,3)}, 2_6^{(1,2,2,2)}, 2_6^{(1,3,2,1)}, 2_6^{(1,4,2,0)}, 1_7^{(7,0)}, 1_7^{(2,5,0)}, 1_7^{(4,3,0)}, 1_7^{(6,1,0)}, 3_7^{(1,5,0)}, 3_7^{(3,3,0)}, 3_7^{(5,1,0)}, 2_7^{(1,0,0,6,0)}, 2_7^{(1,0,2,4,0)}, 2_7^{(1,0,4,2,0)}, 2_7^{(1,0,6,0,0)}, 2_7^{(4,3)}, 2_7^{(2,2,3)}, 2_7^{(4,0,3)}, 2_7^{(1,1,3,2)}, 2_7^{(1,3,1,2)}, 2_7^{(2,0,4,1)}, 2_7^{(2,2,2,1)}, 2_7^{(2,4,0,1)}, 2_7^{(3,1,3,0)}, 2_7^{(3,3,1,0)}, 1_8^{(7,0,0)}, 2_8^{(7,0)}, 2_8^{(2,0,5,0)}, 2_8^{(4,0,3,0)}, 2_8^{(6,0,1,0)}, 2_8^{(3,3,1)}, 2_8^{(1,3,2,1)}, 2_8^{(2,3,1,1)}, 2_8^{(3,3,0,1)}, 2_8^{(1,0,3,3,0)}, 2_8^{(1,1,3,3,2,0)}, 2_8^{(1,2,3,3,1,0)}, 2_8^{(1,3,3,3,0,0)}, 2_9^{(5,2,0)}, 2_9^{(2,3,2,0)}, 2_9^{(4,1,2,0)}, 2_9^{(1,1,4,1,0)}, 2_9^{(1,3,2,1,0)}, 2_9^{(1,5,0,1,0)}, 2_9^{(2,0,5,0,0)}, 2_9^{(2,2,3,0,0)}, 2_9^{(2,4,1,0,0)}, 2_9^{(3,4,0,0)}, 2_9^{(1,3,3,0,0)}, 2_9^{(2,3,2,0,0)}, 2_9^{(3,3,1,0,0)}, 2_9^{(4,3,0,0,0)}, 2_{11}^{(1,6,0,0,0)}, 2_{11}^{(3,4,0,0,0)}, 2_{11}^{(5,2,0,0,0)}, 2_{11}^{(7,0,0,0,0)}.$

ここで、それぞれの整数はブレーンの張力を特徴づけている。[7] では、具体的に、どの方向に T 双対性変換を作用させると、どのブレーンがどのブレーンに写像されるか、という duality web を書き下した。

4 EFTにおけるブレーン解と変形された超重力理論

超重力理論を DFT へと拡張すれば、DFT における T 双対性を用いて D7 ブレーン解から D8 ブレーン解が構成できたのと同様、EFT における U 双対性変換を用いれば、上に挙げたすべてのブレーンに対応する重力解が構成できる。EFT における U 双対性変換の下でどのように超重力理論の場が変換されるかは [9] で与えられていたため、本研究 [7] では、この変換を用いて上に挙げたブレーンに対応する EFT 解を構成した。また、IIB 型理論や M 理論に含まれるブレーンについても、同様に EFT における解を構成した。結果としては、D8 ブレーンのような、余次元が 1 の物体 (ドメインウォール) の解は全ていづれかの双対座標への線形な依存性を含んでいることがわかった。このことは、EFT におけるドメインウォール解が、全て何らかの変形された超重力理論の解として解釈できることを示唆している。実際に、[7] では幾つかのドメインウォールに着目し、DFT から質量変形された IIA 型超重力理論を導出したのと同様の手順で、DFT や EFT の運動方程式から変形された運動方程式が導出できることを示した。そして、それぞれのドメインウォールが、その変形された超重力理論の真空解とみなせることを議論した。

本研究から、数多くの変形された超重力理論が導出できることがわかったが、一般化された背景のように、それらの変形された超重力理論の解が、実際に超弦理論を定義する背景時空として用いることができるのかを調べることは今後の興味深い課題である。

References

- [1] A. A. Tseytlin and L. Wulff, JHEP **1606**, 174 (2016) [arXiv:1605.04884 [hep-th]].
- [2] G. Arutyunov, S. Frolov, B. Hoare, R. Roiban and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **903**, 262 (2016) [arXiv:1511.05795 [hep-th]].
- [3] J. Sakamoto, Y. Sakatani and K. Yoshida, PTEP **2017**, no. 5, 053B07 (2017) [arXiv:1703.09213 [hep-th]].
- [4] J. J. Fernández-Melgarejo, J. Sakamoto, Y. Sakatani and K. Yoshida, arXiv:1811.10600 [hep-th].
- [5] Y. Sakatani, S. Uehara and K. Yoshida, JHEP **1704**, 123 (2017) [arXiv:1611.05856 [hep-th]].
- [6] A. Baguet, M. Magro and H. Samtleben, JHEP **1703**, 100 (2017) [arXiv:1612.07210 [hep-th]].
- [7] J. J. Fernández-Melgarejo, T. Kimura and Y. Sakatani, JHEP **1809**, 072 (2018) [arXiv:1805.12117 [hep-th]].
- [8] O. Hohm and S. K. Kwak, JHEP **1111**, 086 (2011) [arXiv:1108.4937 [hep-th]].
- [9] Y. Sakatani and S. Uehara, PTEP **2017**, no. 4, 043B05 (2017) [arXiv:1701.07819 [hep-th]].

Semi-doubled GLSM for Five-branes of Codimension Two

日本大学理工学部 理工学研究所

木村 哲士

1 動機と目標

超弦理論には、基本弦の他にも D ブレーンや NS5 ブレーンなど空間的に広がった様々な物体 (ブレーン) が存在する。多くのブレーンは時空次元と物体の次元の差 (余次元) が 3 以上であり物理量の性質が良いため、非常に多くの配位が研究され、ゲージ理論の発展に寄与している。余次元が 2 以下のブレーンは余次元 3 以上のブレーンにはない奇妙な振る舞いをするが、やはり重要な役割を担ってきた。例えば、10 次元時空において余次元 2 である 7 ブレーンは IIB 型超弦理論の摂動論を超える物理 (F 理論) を提供し、余次元 1 である D8 ブレーンは宇宙項を導入して理論そのものを変形する (Romans massive IIA 型超弦理論)。余次元 0 である D9 ブレーンは時空全体にゲージ理論を導入して対称性を制限する (I 型超弦理論)。このような余次元 2 以下のブレーンをエキゾチックブレーンと呼ぶ [1]。

10 次元超弦理論をトーラスコンパクト化すると、さらに多くのエキゾチックブレーンが発現する。本講演では余次元が 4 である NS5 ブレーンに対して時空のコンパクト化や超弦理論の双対性を施す。NS5 に垂直な方向を 1 次元コンパクト化すると余次元 3 ブレーンとなる。さらにコンパクト化すると余次元 2 ブレーンとなる (Figure 1)。

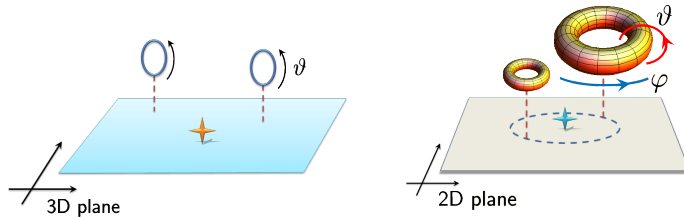


Figure 1: 余次元 3 ブレーン (左図星印) と余次元 2 ブレーン (右図星印) が広がっていない方向の空間構造。コンパクト化された方向がファイバーされている。

それぞれの背景時空は次で与えられる (表示の簡略化のためコンパクト化の半径などは省略):

$$ds_{\text{codim}3}^2 = ds_{012345}^2 + H [ds_{3D}^2 + (d\vartheta)^2], \quad H = 1 + \frac{1}{r}, \quad (1)$$

$$ds_{\text{codim}2}^2 = ds_{012345}^2 + H [ds_{2D}^2 + (d\vartheta)^2 + (d\varphi)^2], \quad H = 1 + \log \frac{\Lambda}{r}. \quad (2)$$

ここで H は r で与えられる調和関数であり、 r は 3D plane, 2D plane それぞれの原点からの距離を示す。 Λ は遠方からの発散に対する cutoff である。これらの解にコンパクト化された ϑ -方向を T-双対すると、NS5 は KK monopole となり、 (ϑ, φ) -方向を T-双対すると 5_2^2 ブレーンとなる。

コンパクト化された方向に対する量子補正を評価すれば、単なる重力解ではなく超弦理論特有の性質を読み取ることができる。余次元 3 の場合、NS5 についての補正は ϑ -方向における KK モードの追加である [2] 一方で、 ϑ を T-双対した KK monopole 配位では弦の巻き付き量子数であることが検証された [3]。これを延長して、余次元 2 プレーンの物理的性質を探究する。これまで超重重力理論 [1]、double field theory (DFT) [4]、弦の世界面理論の高エネルギー極限としてのゲージ理論 (gauged linear sigma model: GLSM) [5] がある。2018 年には、DFT を用いることで世界面から時空の T^2 への写像を与える世界面インスタントン補正が評価された [6] (Figure 2)。

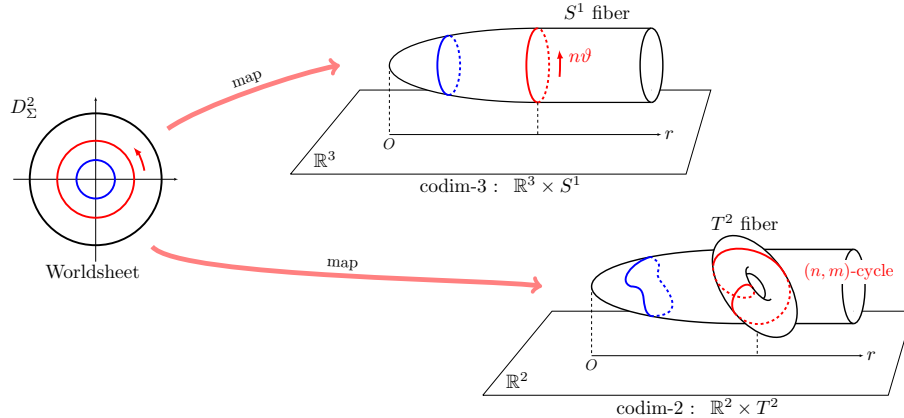


Figure 2: 世界面インスタントン補正。弦の世界面 (左) から時空の余次元 3 空間 (右上) あるいは余次元 2 空間 (右下) への写像。

この世界面インスタントン補正により、背景時空 (2) の調和関数 H は次のようになる:

$$H = 1 + \log \frac{\Lambda}{r} \rightarrow 1 + \log \frac{\Lambda}{r} + \sum_{n,m \neq 0} e^{in\vartheta} e^{im\varphi} K_0(r\sqrt{n^2 + m^2}). \quad (3)$$

ここで K_0 は第 2 種変形 Bessel 関数であり、 (n, m) は (ϑ, φ) -方向への KK モード。T-双対すればこれらのモードは巻き付き量子数となる。

上記補正の導出を実現した DFT は超弦理論の双対性を幾何学的に記述する有益な理論である。同様の結果を、弦の世界面上の理論と GLSM で再現すれば、DFT の有益性がさらに向上する。よってこの講演では、GLSM を基礎として余次元 2 プレーンとその T-双対、そして世界面インスタントン補正を評価できる理論の構築を実現した研究成果 [7] を端的に紹介する。

2 構成: twisted F-term · 双対変換 · 可約な超場

弦の世界面理論とそのゲージ理論 (GLSM) において、世界面インスタントン配位は、ゲージ理論における dynamical theta angle が経路積分に与える寄与である:

$$Z_{\text{instantons}} \sim \exp \left(\int \vartheta F_2 \right). \quad (4)$$

ここで F_2 は 2次元ゲージ場の field strength である。この項は [2] によって超場形式を用いて自然な導入がされている。 F_2 が与える位相不変量 (1st Chern class) がそのまま KK モードとして背景時空に寄与する。我々は、余次元 2 プレーンの背景時空とその補正を、同様の超場形式で与える処方箋を考察する。具体的には Figure 3 にある T^2 の座標 (ϑ, φ) への KK モード補正を与える項を用意すれば良い:

$$\exp\left(\int \vartheta F_2 + \int \varphi \widehat{F}_2\right). \quad (5)$$

\widehat{F}_2 は新たなゲージ場である。超場形式では、field strength は twisted chiral 超場 $\Sigma \sim \overline{D}_+ D_- V$ で与えられる。これらに結合する (ϑ, φ) も、超場の性質により twisted chiral 超場 $\Theta = \varphi + i\vartheta + \dots$ で与えられる。[2] からの最小限の拡張として、(5) は次の twisted F-term の追加で実現される:

$$\int d^2\tilde{\theta} \Theta(\Sigma + i\widehat{\Sigma}), \quad \varphi + i\vartheta \in \Theta, \quad F_2 \in \Sigma, \quad \widehat{F}_2 \in \widehat{\Sigma}. \quad (6)$$

この追加は、余次元 2 になった NS5 に対して正しく KK モードの補正を与える。我々はさらに、T-双対された配位 (KK monopole や 5_2^2 プレーン) をも正しく記述する処方箋を確立したい。通常ならば、T-双対は twisted chiral 超場 Θ を既約な chiral 超場に Legendre 変換することで実現される [8]。具体的には Θ の虚部である ϑ について parity 変換する。twisted F-term (6) を持つ理論において ϑ だけでなく φ も正しく変換するには、「可約な」超場を用いた Legendre 変換 [9] が適用される。つまり twisted chiral 超場 Θ を twisted linear 超場 L に変換する (L は $0 = \overline{D}_+ D_- L$ で定義される)。処方箋は、まず母関数 \mathcal{L}_0 を用意する:

$$\mathcal{L}_0 := \int d^4\theta \left(-\frac{1}{g^2} |R|^2 - 2(R + \overline{R})V - 2i(R - \overline{R})\widehat{V} - RL - \overline{R}\overline{L} \right). \quad (7)$$

ここで R は任意の複素超場。この母関数に対して L を積分すれば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2} \int d^4\theta |\Theta|^2 - \left\{ \int d^2\tilde{\theta} \Theta(\Sigma + i\widehat{\Sigma}) + \text{h.c.} \right\}, \quad (8)$$

が得られる一方、 R を積分すれば

$$\tilde{\mathcal{L}} = +g^2 \int d^4\theta |L + 2(V + i\widehat{V})|^2, \quad (9)$$

が得られる。これらは結合定数 g の冪が反転するので互いに双対であることがわかる。ただし L は可約な超場であるため余分な自由度を持つ。具体的には $L = X + \overline{W} + Y$ のように、chiral 超場 X, W と twisted chiral 超場 Y の線形和で与えられる。 Y は負の計量を持つために即座に積分される。残りの X と \overline{W} について適切な順序で運動方程式を課すと、KK monopole 配位もしくは 5_2^2 プレーン配位が正しく再現できる [7]。 X と W を同時に内在する模型のため (そして半分の自由度のみが運動項を保持するため)、我々はこの拡張に従うゲージ理論を semi-doubled GLSM と名付ける。

3 世界面インスタントン補正の評価

[2] の模型に対する最小拡張 (6) を行うと余次元 2 ブレーンの背景時空を記述できることが分かった。最後にこの拡張模型のゲージ理論を用いて世界面インスタントン補正を再導出する方法を述べる。上述のように、ゲージ場 F_2, \widehat{F}_2 の 1st Chern class がインスタントン補正につながるが、これが発現する配位は、2次元ゲージ理論における Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) vortex 方程式で実現される (場の種類など詳細は [7] 参照):

$$\begin{cases} 0 = F_{12} \mp e^2(|q|^2 - t), \\ 0 = (D_1 \pm iD_2)q, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \widehat{F}_{12} \mp \widehat{e}^2(|p|^2 - \widehat{t}), \\ 0 = (\widehat{D}_1 \pm i\widehat{D}_2)p. \end{cases} \quad (10)$$

これらは BPS 方程式である。この方程式は双対変換前の理論 (8) や変換後の理論 (9) にそれぞれ独立に適用可能である。したがってこの ANO vortex 配位はそれぞれの余次元 2 ブレーン背景時空に対して、(3) 同様に第 2 種変形 Bessel 関数 K_0 を通じて次の補正を与えることが確認できた:

$$\begin{aligned} \text{NS5} &: T^2 \text{ 上に KK モード補正} \\ \text{KK monopole} &: T^2 \text{ の一方の } S^1 \text{ には KK モード補正、他方の } S^1 \text{ には巻き付き数補正} \\ 5_2^2 \text{ ブレーン} &: T^2 \text{ 上に巻き付き数補正} \end{aligned}$$

謝辞

私のこの研究活動は岩波風樹会からの援助によって支えられています。

References

- [1] J. de Boer and M. Shigemori, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 251603 [arXiv:1004.2521 [hep-th]]; Phys. Rept. **532** (2013) 65 [arXiv:1209.6056 [hep-th]].
- [2] D. Tong, JHEP **0207** (2002) 013 [hep-th/0204186].
- [3] J. A. Harvey and S. Jensen, JHEP **0510** (2005) 028 [hep-th/0507204].
- [4] T. Kikuchi, T. Okada and Y. Sakatani, Phys. Rev. D **86** (2012) 046001 [arXiv:1205.5549 [hep-th]].
- [5] T. Kimura and S. Sasaki, Nucl. Phys. B **876** (2013) 493 [arXiv:1304.4061 [hep-th]]; JHEP **1308** (2013) 126 [arXiv:1305.4439 [hep-th]].
- [6] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, JHEP **1807** (2018) 001 [arXiv:1803.11087 [hep-th]].
- [7] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, arXiv:1810.02169 [hep-th].
- [8] K. Hori and C. Vafa, hep-th/0002222.
- [9] M. T. Grisaru, M. Massar, A. Sevrin and J. Troost, Fortsch. Phys. **47** (1999) 301 [hep-th/9801080].

A classical limit of Grover's algorithm

梅津光一郎

日本大学理工学部

Abstract

本研究は、Grover アルゴリズムの古典極限を議論する新しい方法を提案する。この解析は量子計算の高速化には量子的な干渉効果が本質的であるという主張を支持する。

1 Introduction

Grover アルゴリズム [1] は古典的なコンピューターに比べて、量子コンピューターの高速化のメカニズムの研究において重要となる。まず Grover のアルゴリズムの議論に入る前に、量子検索問題 [2] について簡単に説明したい。今、 N 個の要素 $\{1, 2, \dots, N\}$ の中から決められた 1 つの要素 a を選び出す問題を考える。ここで、 N 個の基底からなる量子系を $\mathbb{C}^N : \{|i\rangle\}_{i=1}^N$ と検索結果の読み出しに用いる量子系を $\mathbb{C}^2 : \{|0\rangle, |1\rangle\}$ とする。初期状態としては正しい検索結果 a を知らないなので、どの基底も同じ確率振幅を持つ状態

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle \otimes |0\rangle \quad (1)$$

を考える。この初期状態 (1) に検索操作を与えるユニタリー演算子

$$\tilde{U} = \sum_{i \neq a} |i\rangle \langle i| \otimes I + |a\rangle \langle a| \otimes X \quad (2)$$

を作用させることにより、その終状態として、

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i \neq a} |i\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |a\rangle \otimes |1\rangle \quad (3)$$

となる。ここで、 I は単位演算子、 X はビット反転演算子

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle \quad (4)$$

とする。この終状態に対して 2 つの量子系 \mathbb{C}^N と \mathbb{C}^2 を同時に基底 $\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ と $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で測定する。その結果として、補助状態の測定において、もし我々が $|1\rangle$ の結果を得るならば、欲しい状態 $|a\rangle$ を得ることができる。しかしながら、この場合 $1/N$ の確率でしか、我々の欲しい状態 $|a\rangle$ が得られないことになる。これでは、量子的な重ね合わせ状態から出発しているにもかかわらず、 $|a\rangle$

を得る確率が $1/N$ であれば、この量子計算の効率は古典論と同じ効率であり、重ね合わせ状態を測定しただけでは量子計算を行う上で得にならないことを意味する。したがって、我々はより高い確率で正しい検索結果 a を引き出すことが重要となる。

量子計算で効率を上げるためには、重ね合わせ状態を考えると同時に「増幅」という操作が必要となり、これを与えるのが Grover アルゴリズムである。

2 Grover's algorithm

Grover アルゴリズムは量子干渉効果により、正しい状態 $|a\rangle$ の確率を増幅させる方法である。これから、この Grover アルゴリズムについて 3つのステップに分けて簡単な説明を行う。

2.1 初期状態の準備

初期状態としては、どの基底も同じ確率振幅を持つ状態

$$\begin{aligned} |+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle \\ &= \sqrt{\frac{N-1}{N}} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{i \neq a} |i\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |a\rangle \\ &= \sqrt{\frac{N-1}{N}} |b\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |a\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

$$|-\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}} |b\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}} |a\rangle \quad (6)$$

を考える。ここで、 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は互いに直交しており、同様に $|+\rangle$ と $|-\rangle$ も互いに直交する。 $|+\rangle$, $|-\rangle$ は $|a\rangle$, $|b\rangle$ の線形結合で書けるため、これらは同じ 2次元空間上の基底となる。初期状態 (5) は重ね合わせの原理を用いて、極端にアンバランスな存在確率を持つ 2次元空間上の基底 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ を考えることを意味する。

2.2 状態 $|a\rangle$ の確率増幅

状態 $|a\rangle$ を増幅するため、Grover のユニタリー演算子

$$U = |b\rangle\langle b| - |a\rangle\langle a|, \quad V = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|, \quad (7)$$

を初期状態 (5) に作用させる。ここで、我々は初期状態 (5) を

$$|+\rangle = \cos \theta |b\rangle + \sin \theta |a\rangle \quad (8)$$

と書き換える．ここで， $\cos \theta = \sqrt{(N-1)/N}$ ， $\sin \theta = 1/\sqrt{N}$ となる．(8)に VU を作用させると，

$$VU|+\rangle = \cos 3\theta|b\rangle + \sin 3\theta|a\rangle \quad (9)$$

となることから，状態 $|a\rangle$ の振幅が増幅されていることが分かる．これをさらに k 回繰り返すと，

$$(VU)^k|+\rangle = \cos(2k+1)\theta|b\rangle + \sin(2k+1)\theta|a\rangle \quad (10)$$

を得る．こうして， k を一定の範囲で増やすにつれ，状態 $|a\rangle$ の確率振幅が増幅され，代わりに状態 $|b\rangle$ の確率振幅が縮小されていることが分かる．

2.3 基底 $\{|i\rangle\}_{i=1}$ の測定

最後に我々は終状態 (10) を基底 $\{|i\rangle\}_{i=1}$ で測定する．正しい検索結果 a を出力するためには $(2k+1)\theta = \pi/2$ となる k を選ばばよい．ここで，我々は N が十分に大きく， $\theta \simeq \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$ を仮定することによって，この条件を満たす k を

$$k \simeq \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \quad (11)$$

のように求めることができる．オラクルと呼ばれるブラックボックスの関数が与えられる計算の場合，オラクルへの質問回数がどれだけ効率の良い計算であるかを表す計算量の指標を与えると考えられており，この結果はオラクルへの質問回数が $O(\sqrt{N})$ 回で正しい検索結果 a を出力できることを示している．

3 A classical limit of Grover's algorithm

本研究の目的は非常に素早い decoherence または dephasing の方法によって，Grover アルゴリズムの古典的な極限を定義することができるのか．もし定義できるならば，どのぐらいのオラクルへの質問回数が必要なのかを明らかにすることにある．

ここで，我々の用いる decoherence または dephasing の方法 [3] について簡単に説明したい．ある2つの異なる状態 $|a\rangle, |b\rangle$ に対して，干渉項を

$$\overline{|a\rangle\langle b|} = 0, \quad \overline{|b\rangle\langle a|} = 0, \quad (12)$$

とする操作を decoherence と定義する．また，dephasing においては，状態にはそれぞれ制御できない位相因子が現れるが，異なる状態の干渉項は

$$|a\rangle\langle b| \rightarrow (e^{i\alpha}|a\rangle)(e^{i\beta}|b\rangle)^\dagger = e^{i(\alpha-\beta)}|a\rangle\langle b| \quad (13)$$

のように，位相因子 α, β が消えない．外部からの熱運動などの影響により，位相因子がバラバラになるため，ノイズの多い環境では，この位相因子を平均化すると位相が残る項は全て 0 となつて，干渉項を無視できるという近似が成立し，これを dephasing と呼ぶことにする．

我々はこの decoherence または dephasing の方法で, Grover アルゴリズムの古典的な確率増幅を解析するため, 初期状態 (8) によって与えられる密度行列

$$\rho_0 = \cos^2 \theta |b\rangle\langle b| + \sin \theta \cos \theta |a\rangle\langle b| + \cos \theta \sin \theta |b\rangle\langle a| + \sin^2 \theta |a\rangle\langle a| \quad (14)$$

を考える. この密度行列 ρ_0 に対して decoherence (12) を用いると,

$$\bar{\rho}_0 = \cos^2 \theta |b\rangle\langle b| + \sin^2 \theta |a\rangle\langle a| \quad (15)$$

を得る. この decoherence の操作の後でも, $\text{Tr } \bar{\rho}_0 = 1$ を保つことが確認できる. ρ_0 に Grover ユニタリー演算子 (7) を作用させると,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \overline{VU\bar{\rho}_0(VU)^\dagger} \\ &= (\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta) |a\rangle\langle a| + (\sin^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \theta) |b\rangle\langle b| \end{aligned} \quad (16)$$

のようになる. Grover アルゴリズムと同じく, この操作を k 回繰り返すことにより,

$$\bar{\rho}_k = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta \right) \cos^k 4\theta \right] |a\rangle\langle a| - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta \right) \cos^k 4\theta \right] |b\rangle\langle b| \quad (17)$$

とする厳密解を得る. また $\theta \simeq \theta$ とする近似を用いることにより,

$$\bar{\rho}_k \simeq [\theta^2 + k(2\theta)^2] |a\rangle\langle a| + [1 - (\theta^2 + k(2\theta)^2)] |b\rangle\langle b| \quad (18)$$

とする近似解を得る. ここで, 我々は k/N を固定し, 十分大きい N に対して, $[1 - 8(1 - 1/N)^k / N] \simeq \exp[-8(k/N)]$ を用いた. 厳密解と近似解のどちらにおいても

$$\text{Tr } \bar{\rho}_k = 1 \quad (19)$$

となる. したがって, 我々は Grover's algorithm の古典極限において増幅された確率振幅 p_i

$$p_i = \text{Tr} (|i\rangle\langle i| \bar{\rho}_k) \simeq (1 + 4k)N \quad (20)$$

を得ることができる. 実際の厳密解の場合は, その確率は $1/2$ 程度になることが示される. したがって, この方法による Grover's algorithm の古典的な増幅は, 通常の古典的な質問計算量 $k \sim N$ というものを変えるものではないことがわかる.

4 まとめ

我々は非常に素早い decoherence または dephasing の方法を用いて, Grover アルゴリズムの古典極限について議論し, 質問計算量について評価した. 質問計算量 $k \sim \sqrt{N} \rightarrow k \sim N$ の増加は coherence を失ったことによる影響であり, entanglement がこの議論では本質的な役割を果たし

ていないことが示される。本研究において提案された Grover アルゴリズムの古典的な増幅は、 a を特定するために必要とされる質問計算量 $O(N)$ を変えるものではない。したがって、我々の解析によって、Grover アルゴリズムによる $O(\sqrt{N})$ の現れは量子的な干渉効果による確率振幅の増幅が本質的であることが明確になった。もちろん、量子計算においてエンタングルメントはある量子状態を特定するため重要な役割を果たすが、実際の量子計算の高速化は量子干渉効果が本質的であるということが出来る。またこの解析は、外部の熱運動のような非常にノイズの多い環境下における Grover アルゴリズムのシミュレーション結果を与えると考えられる。

References

- [1] L. K. Grover, quant-ph/9605043.
- [2] 林正人, 数理科学, No. 657, 49 (2018).
- [3] K. Fujikawa and K. Umetsu, arXiv:1804.10082 [quant-ph].

Weak-measurement experiments on qubits

F.M. Toyama

*Department of Information Science and Engineering, Kyoto Sangyo University, Kyoto
603-8555, Japan*

Abstract

Weak-measurement experiments on qubits are done by means of a gate-model quantum computer IBM Cloud-Q. The experiments are based on our understanding that the dynamics of spin 1/2 in a magnetic field should be physically simulated by a gate operation on the superconducting qubits of the *transmon* type. The experimental results suggest that the experiments can be useful to verify the performance of the qubits.

1 Introduction

The weak measurement is a way to determine experimentally the weak-values of observables of quantum systems. The weak value is a quantity predetermined in the background of a quantum superposition-state, before a strong measurement is made on the state. The weak-value is defined in terms of the two state-vectors that represent the time-normal evolution of a pre-selected state determined in the past and the time-reversal evolution of a post-selected state assumed to be determined in the future [1]. In this report we discuss weak-measurement experiments done on the *transmon* qubits of IBM Cloud-Q that is a universal quantum computer [2]. The *transmon* is a superconducting charge qubit that was engineeringly devised to be less sensitive to charge noise. Quantum-entanglement generation is the most important requirement for such qubits. In addition to such a requirement, in the weak-measurement experiments time-reversal evolutions are assumed for the qubits.

We examine the weak values of the observable $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ of the two qubits. This choice of the observable is based on our understanding that the gate-operation representing a weak magnetic field applied to the qubits is mathematically equivalent to the dynamics of spin-1/2 in the magnetic field. We construct time-evolution models of the qubits by using the search operators of the original Grover algorithm [3].

2 Weak-measurement on qubits

2.1 Basic scheme of the present experiment

Figure 1 shows the basic scheme of weak-measurements on two qubits. The gate \hat{G}_4 is Grover's search operator [3] for the two qubits and H is the Hadamard gate. The pre- and post-selected states are denoted by $|\phi(-1)\rangle$ and $|\psi(0)\rangle$, respectively. In the present experiments we take them

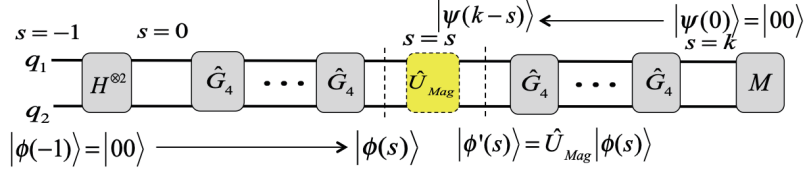


Figure 1: (Colour online) Basic scheme of weak-measurements on qubits.

to be $|00\rangle$. The time-normal evolution of $|\phi(-1)\rangle$ and the time-reversal evolution of $|\psi(0)\rangle$ are respectively denoted by $|\phi(s)\rangle$ and $|\psi(k-s)\rangle$, where s and k are respectively the iteration step and the total number of the steps. In this setting the weak value of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ at the step s is defined as

$$\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)} = \frac{\langle \psi(k-s) | \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z | \phi(s) \rangle}{\langle \psi(k-s) | \phi(s) \rangle}, \quad (1)$$

where $|\phi(s)\rangle$ and $|\psi(k-s)\rangle$ are

$$\begin{aligned} |\phi(s)\rangle &= \hat{G}_4^s H^{\otimes 2} |\phi(-1)\rangle = \hat{G}_4^s H^{\otimes 2} |00\rangle \quad (s \geq 0), \\ |\psi(k-s)\rangle &= \hat{G}_4^{\dagger k-s} |\psi(0)\rangle = \hat{G}_4^{\dagger k-s} |00\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

We define two intensities $I_{REF}^{(s)}$ and $I_{MAG}^{(s)}$ at the step s as

$$I_{REF}^{(s)} = |\langle \psi(k-s) | \phi(s) \rangle|^2 \quad \text{and} \quad I_{MAG}^{(s)} = |\langle \psi(k-s) | \phi'(s) \rangle|^2, \quad (3)$$

where

$$|\phi'(s)\rangle = \hat{U}_{MAG} |\phi(s)\rangle = \left[\exp\left(i \frac{\alpha_z}{2} \hat{\sigma}_z\right) \right]^{\otimes 2} |\phi(s)\rangle. \quad (4)$$

In Eq. (4), $\hat{U}_{MAG} = \left[\exp\left(i \frac{\alpha_z}{2} \hat{\sigma}_z\right) \right]^{\otimes 2}$ represents the time-evolution operator by a magnetic field applied, in z direction, to the two qubits, where α_z is the strength parameter of the applied magnetic field. Since the time evolutions from step s to the final step $s = k$ is unitary, $I_{REF}^{(s)} = P_{REF}^{(00)}$ and $I_{MAG}^{(s)} = P_{MAG}^{(00)}$, where $P_{REF}^{(00)}$ and $P_{MAG}^{(00)}$ are respectively the finding probabilities of the post-selected state $|00\rangle$ at $s = k$ when a magnetic field is not applied and when it is applied.

Using Eqs. (3) and (4), we obtain

$$\frac{I_{MAG}^{(s)}}{I_{REF}^{(s)}} = 1 - \frac{\alpha_z^2}{2} + \frac{\alpha_z^2}{4} |\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(s)}|^2 - \frac{\alpha_z^2}{2} \langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)} + \mathcal{O}(\alpha_z^3). \quad (5)$$

In order to experimentally obtain $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)}$ on the basis of Eq. (5), we need to determine $|\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(s)}|^2 = |\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)} + \langle \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(s)}|^2$. However, the signs of $\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)}$

and $\langle \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(s)}$ cannot be determined experimentally in the present scheme. Therefore, for the present experiments we use the theoretical values for $\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)}$ and $\langle \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(s)}$. With this prescription, by using measured $P_{MAG}^{(00)}/P_{REF}^{(00)}$ for $I_{MAG}^{(s)}/I_{REF}^{(s)}$, we determine the weak value $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)}$ experimentally.

2.2 Models

Model-1: The time-evolution model of the qubits is constructed by means of Grover's operator $\hat{G}_4 = [-I_4 + 2|\phi(0)\rangle\langle\phi(0)|][I_4 - 2(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|)]$. In \hat{G}_4 the fraction of targets is $\lambda = 1/2$. In this case, no entanglement is generated between the two qubits in the time-normal evolution.

We are interested in the situation where $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(s)}$ is equal to the eigenvalue of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$, although neither $|\phi(s)\rangle$ nor $|\psi(k-s)\rangle$ is the eigenstate of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$. At $s = 2$, since $|\phi(2)\rangle = -(|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes 2}/2$ and $|\psi(1)\rangle = (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$, $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(2)} = 1$, which is equal to one of eigenvalues of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$. Note that $|\phi(2)\rangle$ is separable, but $|\psi(1)\rangle$ is entangled. As $|\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(2)}|^2 = 0$, from Eq.(5) we have, ignoring the higher order term $\mathcal{O}(\alpha_z^3)$,

$$\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(2)} \simeq \frac{1}{\alpha_z^2} \left(2 - \alpha_z^2 - 2 \frac{I_{MAG}^{(2)}}{I_{REF}^{(2)}} \right) \rightarrow 1 \quad (\text{for } \alpha_z \rightarrow 0) \quad (6)$$

where $I_{MAG}^{(2)}/I_{REF}^{(2)} = |1 + e^{-2i\alpha_z}|^2/4 \simeq 1 - \alpha_z^2 + \mathcal{O}(\alpha_z^3)$.

Model-2: In this Model-2, we take \hat{G}_4 to be $\hat{G}_4 = [-I_4 + 2|\phi(0)\rangle\langle\phi(0)|][I_4 - 2|00\rangle\langle 00|]$. In this case, an entangled state is generated at $s = 2$ in the time-normal evolution. Since $|\phi(2)\rangle = (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)/2$ and $|\psi(1)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes 2}/2$, $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(2)} = -1$, which is equal to another eigenvalue of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$, although neither $|\phi(2)\rangle$ nor $|\psi(1)\rangle$ is the eigenstate of $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$. This situation is the same as that of Model-1. Note that $|\phi(2)\rangle$ is an entangled state. In this Model-2, $|\langle I_2 \otimes \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \otimes I_2 \rangle_{WV}^{(2)}|^2 = 4$. Hence, from Eq.(5) we have, ignoring the higher order term $\mathcal{O}(\alpha_z^3)$,

$$\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle_{WV}^{(2)} \simeq \frac{1}{\alpha_z^2} \left(2 + \alpha_z^2 - 2 \frac{I_{MAG}^{(2)}}{I_{REF}^{(2)}} \right) \rightarrow -1 \quad (\text{for } \alpha_z \rightarrow 0) \quad (7)$$

where $I_{MAG}^{(2)}/I_{REF}^{(2)} = |1 - 2e^{-i\alpha_z} - e^{-2i\alpha_z}|^2/4 \simeq 1 + \alpha_z^2 + \mathcal{O}(\alpha_z^2)$.

3 Experimental results

Figure 2 shows the results of the experiments. The red curves show the theoretical predictions of Eqs. (6) and (7). In order to test the models described in Sec. 2, first we did experiments

by means of a virtual machine provided by IBM [2]. The black diamonds indicate the results obtained by averaging over twelve experiments with the shots 8192. The results are in good agreement with the theoretical predictions. The experimental results on the virtual machine seem to justify the present weak-measurement models.

The experiments on the real qubits were done on the two qubits q_3 and q_4 of the IBM Cloud Q *ibmqx4* [2], which is a five-qubits machine. The red solid-diamonds show the results obtained with $P_{MAG}^{(2)}/P_{REF}^{(2)}$ averaged over twelve experiments done with the shots 8192. As seen in the figure, the experimental errors in $P_{MAG}^{(2)}/P_{REF}^{(2)}$ are too large.

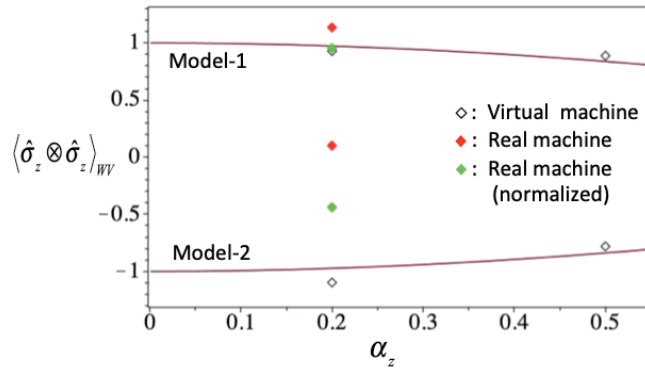


Figure 2: (Colour online) Experimental results.

The errors should be accumulative errors caused by the gating and the measuring processes. It is hard to estimate the accumulative errors in a systematic way on the basis of the quantum circuits. Therefore, we adopted an ad-hoc prescription that normalizes experimental $P_{REF}^{(2)}$ to theoretical $I_{REF}^{(2)}$. The green solid-diamonds show the results where experimental $P_{MAG}^{(2)}/P_{REF}^{(2)}$ is normalized such as $(P_{MAG}^{(2)} - D)/I_{REF}^{(2)}$, where $D = P_{REF}^{(2)} - I_{REF}^{(2)}$. In Model-1, the agreement is much improved by this normalization prescription. On the other hand, Model-2 lacks agreement.

As we discussed in Sec. 2.2, in Model-1 no entangled state is generated between the two qubits in the time-normal evolution. On the other hand, in Model-2, at $s = 2$ an entangled state is generated between the two qubits in the time-normal evolution. The difference between the experimental results of Model-1 and Model-2 seems to be related to the entanglement-generation problem between the two qubits q_3 and q_4 . It should be, however, noted that this remark is based on the two prescriptions used in the models and analysis of this experiment. One is the prescription on experimental weak-values of a single qubit in Sec. 2.1 and the other is the procedure based on normalization from the experimental $P_{REF}^{(2)}$ to theoretical $I_{REF}^{(2)}$. These prescriptions are subjects to be reconsidered in future experiments.

References

- [1] Y. Aharonov and L. Vaidman., "Properties of a quantum system during the time interval between two measurements", Phys. Rev. A **41**, 11 (1990).
- [2] <https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx/experience>.
- [3] L. K. Grover, "Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query", Phys. Rev. Lett. **79**, 4709 (1997).
- [4] Tobias Denkmayr et al., "Observation of a quantum Cheshire Cat in a matter-wave interferometer experiment", NATURE COMMUNS., 5:4492 (2014).

修正された Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の量子化

出口 真一¹⁰

日本大学理工学部 量子科学研究所

藤原 侑樹

日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻

1 導入

調和振動子は古典論と量子論の両方において完全に理解されており、特に量子論においては波動性から粒子性につながる道筋を与える重要な模型として知られている。一方、調和振動子に速度に比例する抵抗力を加味した減衰調和振動子については、その古典論的振る舞いは完全にわかっているものの、量子論的振る舞いは理解されているとは言い難い。

減衰調和振動子の量子化の方法として、減衰調和振動子の運動方程式 ($m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$) を与えるラグランジアンやハミルトニアンを設定し、通常量子化の手法（正準量子化や経路積分量子化）に従い量子化を実行する方法がある。この方法の利点として、減衰を引き起こす環境の自由度を直接扱う必要がないことが挙げられる。本研究では、この方法について議論を進める。

これまでに、減衰調和振動子の運動方程式を与える代表的なラグランジアンとして、Caldirola-Kanai ラグランジアンと Bateman ラグランジアンが知られている。Caldirola-Kanai ラグランジアンはあらわに時間に依存するラグランジアンであり、次式で与えられる [1]：

$$L_{CK} = e^{(\gamma/m)t} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right). \quad (1)$$

このラグランジアンで定められる模型の量子化は既に論じられており、その際に問題が生じることも指摘されている [2, 3]。一方、1931年に提案された Bateman ラグランジアンはあらわに時間に依存しないラグランジアンであり、次式で与えられる [4]：

$$L_B = m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(xy - \dot{x}y) - kxy. \quad (2)$$

このラグランジアンは、減衰調和振動子の運動方程式に加えて、増幅調和振動子の運動方程式 ($m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0$) を与える。すなわち、Bateman ラグランジアンが記述する力学系は互いに独立な減衰調和振動子と増幅調和振動子から成り、力学的自由度が2倍になっている。Bateman ラグランジアンで定められる模型（Bateman 模型）の量子化は、1977年に Feshbach と Tikochinsky により初めて論じられ [5]、1990年代から現在に至るまで様々な視点から研究されてきた [6]。し

¹⁰ E-mail: deguchi@phys.cst.nihon-u.ac.jp

かし、Bateman 模型の量子化では、 x と y ではなく $(x+y)/\sqrt{2}$ と $(x-y)/\sqrt{2}$ を基本的な正準座標とするため、状態の崩壊や成長を表す波動関数が得られるものの、純粹に減衰調和振動子の量子化を行っているのか不明である。以上のことから、Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の量子化は問題を含んでいると言える。本研究では、この問題を解決するために Bateman ラグランジアンを修正し、実質的に $\sqrt{2}x$ のみを正準座標とする定式化を試みる。

2 修正された Bateman 模型

本研究で我々は、Bateman ラグランジアン L_B に新たな項を加えて定義される修正された Bateman ラグランジアン

$$L_{MB} = m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy - \frac{1}{2}(\rho\dot{\sigma} - \dot{\rho}\sigma) - \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma + \lambda(\rho x - \sigma y) \quad (3)$$

を提案し、このラグランジアンで定められる“修正された Bateman 模型”を考察する。ここで ρ , σ , λ は新たな実の力学変数であり、これらを含む項が新たな項である。ラグランジアン L_{MB} から上に述べた減衰調和振動子と増幅調和振動子の運動方程式が得られるが、さらに λ に関する Euler-Lagrange 方程式として拘束条件 $\rho x = \sigma y$ が得られる。この式は x と y が独立ではないことを意味しており、実際に運動方程式の解を代入すると、 x の初期位相と y の初期位相が一致するという条件を与える。これより、独立な振動項は一つであることがわかる。

いま、ラグランジアン L_{MB} に基づく正準形式を考える。正準座標は $(x, y, \rho, \sigma, \lambda)$ の 5 つであり、 L_{MB} からこれらに共役な 5 つの正準運動量 $(p_x, p_y, p_\rho, p_\sigma, p_\lambda)$ が決まる。実際には、これら計 10 個の正準変数の間に成立する 6 つの(第二種)拘束条件があるため、独立な正準変数は 4 つである。独立な正準変数を選ぶ際には幾つかの選択肢があるが、本研究では (x, p_x, ρ, σ) を正準変数に選ぶ。このとき、拘束系に対する Dirac の処方に従うと、 L_{MB} から次のような全ハミルトニアンが求まる：

$$H = \frac{\sigma}{m\rho}p_x^2 + m\omega_-^2 \frac{\rho}{\sigma}x^2 + \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma. \quad (4)$$

ここで ω_- は $\omega_- := \sqrt{(k/m) - (\gamma^2/4m^2)}$ と定義される。今後、 H が正定値になるように条件 $\rho\sigma > 0$ を課す。新たな独立変数 $X := \sqrt{2}x$, $P := \sqrt{2}p_x$, $\theta := (1/2)\ln(\rho/\sigma)$, $N := \rho\sigma$ を用いると、 H は

$$H = \frac{1}{2m}e^{-2\theta}P^2 + \frac{1}{2}m\omega_-^2 e^{2\theta}X^2 + \frac{\gamma}{2m}N \quad (5)$$

のように書ける。ここで、 $\rho\sigma > 0$ であるから、 θ は実であり N は正であることに注意する。Dirac の処方に従うと、次の Dirac 括弧が導かれる：

$$\{X, P\}_D = 1, \{X, N\}_D = -X, \{P, N\}_D = P, \{\theta, N\}_D = 1, \text{その他} = 0. \quad (6)$$

ハミルトニアン H は L_{CK} から求まる Caldirola-Kanai ハミルトニアン [7, 8] に似ているが、これとは異なり N を含む。また Caldirola-Kanai ハミルトニアンと違って、 H はあらわに時間に依存せず、従って正準方程式 $dH/dt = \{H, H\}_D = 0$ から H は保存量であることがわかる。

減衰調和振動子の力学的エネルギーは $E := (1/2)m\dot{X}^2 + (1/2)m\omega^2 X^2$ ($\omega := \sqrt{k/m}$) であるが、正準方程式 $\dot{X} = \{X, H\}_D$ を用いることで、これを

$$E = \frac{1}{2m} \left(e^{-2\theta} P - \frac{\gamma}{2} X \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \quad (7)$$

と表すことができる。ハミルトニアン H は保存量であり、その形から力学的エネルギー E と減衰振動に伴って生じる熱エネルギー Q の和であると考えられる。すなわち $H = E + Q$ 。¹¹

3 正準量子化

ハミルトニアン H で記述される系を量子化するため、 H や E に含まれる正準変数 X, P, θ, N を対応する Hermite 演算子 $\hat{X}, \hat{P}, \hat{\theta}, \hat{N}$ に置き換え、式 (6) の Dirac 括弧から定まる次の同時刻交換関係を設定する：

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1}, \quad [\hat{X}, \hat{N}] = -i\hbar \hat{X}, \quad [\hat{P}, \hat{N}] = i\hbar \hat{P}, \quad [\hat{\theta}, \hat{N}] = i\hbar \mathbb{1}, \quad \text{その他} = 0. \quad (8)$$

ここで $\mathbb{1}$ は恒等演算子を表す。式 (5) と式 (7) からハミルトニアン演算子と力学的エネルギー演算子がそれぞれ

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} e^{-2\hat{\theta}} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 e^{2\hat{\theta}} \hat{X}^2 + \frac{\gamma}{2m} \hat{N}, \quad (9)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2m} \left(e^{-2\hat{\theta}} \hat{P} - \frac{\gamma}{2} \hat{X} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}^2 \quad (10)$$

のように決まる。ただし、これらを得る際には Weyl 順序を採用し、式 (8) にある交換関係を用いた。すぐにわかるように、 \hat{H} と \hat{E} は Hermite 演算子である。Heisenberg 方程式 $d\hat{\theta}/dt = (i\hbar)^{-1} [\hat{\theta}, \hat{H}]$ と $d\hat{N}/dt = (i\hbar)^{-1} [\hat{N}, \hat{H}]$ の解はそれぞれ次のように求まる：

$$\hat{\theta}(t) = \frac{\gamma}{2m} t \mathbb{1} + \hat{\theta}_0, \quad (11a)$$

$$\hat{N}(t) = \hat{N}_0 \quad (11b)$$

¹¹ 変数 $X := \sqrt{2}x$ を用いて上述の減衰調和振動子の運動方程式は $m\ddot{X} + \gamma\dot{X} + kX = 0$ と書ける。この式のエネルギー積分は

$$\frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 + \gamma \int \dot{X}^2 dt = \text{const.}$$

のように求まり、丁度 $\gamma \int \dot{X}^2 dt$ が減衰振動で生じる熱エネルギーを表すことがわかる。実際に運動方程式の解を代入すると、 $Q(= H - E) = \gamma \int \dot{X}^2 dt$ であることが確認できる。

ここで、 $\hat{\theta}_0$ と \hat{N}_0 は時間に依らない演算子であり $[\hat{\theta}_0, \hat{N}_0] = i\hbar\mathbb{1}$ を満たす.

演算子 \hat{a} とその Hermite 共役 \hat{a}^\dagger を次式で定義する：

$$\hat{a}(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Lambda^* e^{\hat{\theta}(t)} \hat{X}(t) + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}} \Lambda e^{-\hat{\theta}(t)} \hat{P}(t), \quad (12a)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Lambda e^{\hat{\theta}(t)} \hat{X}(t) - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}} \Lambda^* e^{-\hat{\theta}(t)} \hat{P}(t). \quad (12b)$$

ここで、 Λ は

$$\Lambda := \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_+}{\omega}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\omega_+}{\omega}\right)} \quad (13)$$

と定義され、 ω_+ は $\omega_+ := \sqrt{(k/m) + (\gamma^2/4m^2)}$ と定義される. 式 (8) にある交換関係を用いると

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = \mathbb{1}, \quad (14a)$$

$$[\hat{a}(t), \hat{\theta}_0] = [\hat{a}^\dagger(t), \hat{\theta}_0] = 0 \quad (14b)$$

を示すことができる. 演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger , そして式 (11a) を用いると、力学的エネルギー演算子 \hat{E} は

$$\hat{E}(t) = \hbar\omega e^{(-\gamma t\mathbb{1}/m - 2\hat{\theta}_0)} \left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\mathbb{1} \right) \quad (15)$$

と書ける. いま、ケットベクトル $|0, t\rangle$ を次の2つの条件で定める：

$$\hat{a}(t)|0, t\rangle = 0, \quad (16a)$$

$$\hat{\theta}_0|0, t\rangle = 0. \quad (16b)$$

加えて、 $|0, t\rangle$ に共役なブラベクトル $\langle 0, t|$ との間に規格化条件 $\langle 0, t|0, t\rangle = 1$ を置く. (ブラベクトル $\langle 0, t|$ は、式 (16) に対応する条件式 $\langle 0, t|\hat{a}^\dagger(t) = 0$ と $\langle 0, t|\hat{\theta}_0 = 0$ を満たす.) 式 (16b) は、 $\gamma = 0$ のときに通常の調和振動子の量子論を再現するために必要な条件である. 交換関係 (14a) と式 (16a) から、 \hat{a} は消滅演算子であり \hat{a}^\dagger は生成演算子であることがわかる. 従って、Fock 基底ベクトルは

$$|n, t\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger(t) \right)^n |0, t\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

のように構成できる. 式 (8), (11a), (12b) からわかるように $[\hat{a}^\dagger(t), \hat{\theta}_0] = 0$ であるから、明らかに $\hat{\theta}_0|n, t\rangle = 0$ が成り立つ. 従って、フォック空間

$$\mathcal{F} := \left\{ |\Psi\rangle \left| |\Psi\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n, t\rangle, \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, c_n \in \mathbb{C} \right. \right\} \quad (18)$$

の任意の元 $|\Psi\rangle$ は $\hat{\theta}_0|\Psi\rangle = 0$ を満たす。特に $\gamma = 0$ と置くと、 \mathcal{F} 上で演算子 \hat{H} と \hat{E} は一致し、どちらも通常の調和振動子のハミルトニアンに帰着する。

式 (14a) と式 (16a) を用いると $\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|n, t\rangle = n|n, t\rangle$ を示すことができ、さらに $\hat{\theta}_0|0, t\rangle = 0$ に注意すると、エネルギー固有値方程式が次のように得られる：

$$\hat{E}(t)|n, t\rangle = E_n(t)|n, t\rangle. \quad (19)$$

このとき、エネルギー固有値 $E_n(t)$ は

$$E_n(t) = \hbar\omega e^{-\gamma t/m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (20)$$

と決まる。

時間発展のユニタリー演算子は $\hat{U}(t) := \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ で与えられる。これを用いて Schrödinger 描像における Fock 基底ベクトルは $|n, t\rangle_S := \hat{U}(t)|n, t\rangle$ と定義される。これよりエネルギー固有関数が次のように求まる：

$$\begin{aligned} \phi_n(X, t) &:= \langle X | n, t \rangle_S \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{\omega - i\gamma/2m}{\omega + i\gamma/2m} \right)^{n/4} \\ &\quad \times H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{\gamma t/2m} X \right) \exp \left[\frac{\gamma}{4m} t - \frac{m}{2\hbar} \left(\omega - \frac{i\gamma}{2m} \right) e^{\gamma t/m} X^2 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 H_n はエルミート多項式を表す。期待通り、 $\gamma = 0$ のとき $E_n(t)$ と $\phi_n(X, t)$ はそれぞれ通常の調和振動子のエネルギー固有値と固有関数になる。エネルギー固有関数は正規直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^*(X, t) \phi_n(X, t) dX = \delta_{mn} \quad (22)$$

を満たす。式 (21) から、 $n = 0$ のとき

$$|\phi_0(X, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left[\frac{\gamma}{2m} t - \frac{m\omega}{\hbar} e^{\gamma t/m} X^2 \right] \quad (23)$$

のような X に関する Gauss 関数が得られるが、その拡がりは時間経過と共に減少し、 $t \rightarrow \infty$ のとき $|\phi_0(X, t)|^2$ はデルタ関数 $\delta(X)$ になる。古典論において、減衰調和振動子の振幅は時間経過と共に減少し、振動子の位置は次第に原点付近に限られていく。このことに照らし合わせると、上述の $|\phi_0(X, t)|^2$ の振る舞いは自然であると言える。

4 まとめと考察

本研究では，減衰調和振動子の模型として長年に渡り研究されてきた Bateman 模型とその量子化に関する問題点を指摘し，それを解決するために修正された Bateman 模型を提案した．この模型の正準形式は Dirac の処方に従って構成され，結果として減衰調和振動子のみを記述するあらわに時間に依存しないハミルトニアンが得られた．このハミルトニアンは保存量であり，減衰調和振動子の力学的エネルギーと減衰振動に伴って生じる熱エネルギーの和になっている．次に，得られた正準形式に基づいて減衰調和振動子の量子化を行った．そこでは，保存量であるハミルトニアン演算子と保存量ではない力学的エネルギー演算子を明確に区別した．通常の保存系に対してはこのような区別は必要ないが，減衰調和振動子のような散逸系に対しては一般に系のハミルトニアンと部分系のエネルギーは異なるものとして区別する必要がある．

本研究においては，式 (20) のようなエネルギー固有値が導かれた．この固有値は通常の調和振動子のエネルギー固有値に減衰項 $e^{-\gamma t/m}$ を掛けた形をしており，減衰調和振動子のエネルギー固有値としてはもっともらしい形をしている．しかし驚くべきことに，このエネルギーの表式は他の文献には見当たらない.¹²

現時点において，ハミルトニアン演算子 \hat{H} で記述される量子系の Schrödinger 方程式は完全に解かれていない．しかし，断熱近似のもとで n が異なるエネルギー準位の間遷移が起こらないと仮定した場合，Schrödinger 方程式の特殊解は

$$\psi_n(X, t) = \phi_n(X, t)e^{-i\omega(n+1/2)t} \quad (24)$$

のように得られる．従って，確率密度は $|\psi_n(X, t)| = |\phi_n(X, t)|$ となる．これより $t \rightarrow \infty$ のとき，振動子の存在確率は原点の無限小近傍で無限に増加し，それ以外の定義域では 0 になることがわかる．これは古典論との比較においても期待通りの結果と言える．今後の課題は，断熱近似をせずに Schrödinger 方程式を解くことで異なるエネルギー準位の間遷移確率を導き，それを基に減衰調和振動子の量子論的振る舞いを正しく理解することである．

References

- [1] M. Razavy, Classical and Quantum Dissipative Systems, 2nd Edition, World Scientific, Singapore, 2017.
- [2] W. E. Brittin, A note on the quantization of dissipative systems, Phys. Rev. 77 (1950) 396.
- [3] D. M. Greenberger, A critique of the major approaches to damping in quantum theory, J. Math. Phys. 20 (1979) 762.
- [4] H. Bateman, On dissipative systems and related variational principles, Phys. Rev. 38 (1931) 815.

¹² 文献 [9] において，式 (20) に類似した表式 $\hbar(\omega^2/\omega_-)e^{-\gamma t/m}(n+1/2)$ がエネルギーの期待値として得られている．しかし，この式は臨界減衰に近づく極限 $\omega_- \rightarrow 0$ で発散するという奇妙な振る舞いをする．

- [5] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Quantization of the damped harmonic oscillator, *Transact. N.Y. Acad. Sci.* 38, Ser. II (1977) 44.
- [6] S. Deguchi, Y. Fujiwara, K. Nakano, Two quantization approaches to the Bateman oscillator model, [arXiv:1807.04403](https://arxiv.org/abs/1807.04403) [quant-ph]. See also references therein.
- [7] P. Caldirola, Forze non conservative nella meccanica quantistica, *Nuovo Cim.* 18 (1941) 393.
- [8] E. Kanai, On the quantization of the dissipative systems, *Prog. Theor. Phys.* 3 (1948) 440.
- [9] E. H. Kerner, *Can. J. Phys.* 36 (1958) 371.