

令和2年度修士課程修了論文
超弦理論のトーラスコンパクト化モデルによる素粒子標準模型の
フレーバー構造の再現

北海道大学大学院理学院 宇宙理学専攻 素粒子・宇宙論研究室
菊地 渉太

2021年2月20日

概要

近年、Higgs 粒子の発見によって素粒子の標準模型が確立された。しかしながら、標準模型は重力の記述ができないことや、フレーバー構造の起源を説明できないことなどの問題を抱えている。そのため、標準模型を超える物理が必要とされている。

超弦理論はそのような標準模型を超える物理の候補の 1 つである。それは 10 次元の理論であり、余剰な 6 次元は現在の技術では観測できないほど小さなコンパクト空間になっていると考えられる。本研究では特にトーラスコンパクト化に焦点を当てた。我々はトーラスの持つモジュラー対称性がフレーバー構造の起源になっていると考え、超弦理論のトーラスコンパクト化に基づくフレーバー構造の再現を研究した。特に、 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold、 $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(per)}$ permutation orbifold、 $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(per)})$ permutation orbifold に注目し、その上の波動関数の持つ世代とモジュラー対称性を調べた。また、そのような波動関数を用いて可能な 3 世代フレーバーモデルを分類した。さらに、1 つのモデルに基づいて quarks の質量と混合角の再現を試みた。

目次

第1章 導入	3
第2章 標準模型	6
2.1 概要	6
2.2 問題点	11
第3章 超弦理論	14
3.1 ボソン弦理論	14
3.1.1 弦の古典論	14
3.1.2 弦の量子論	21
3.2 超弦理論	27
3.2.1 スピノル場の理論と超対称性	27
3.2.2 コンパクト化と T 双対性	38
3.2.3 D-ブレーン	43
3.3 モデル構築	45
3.3.1 Type IIA intersecting D6-ブレーンモデル	45
3.3.2 Type IIB magnetized D9-ブレーンモデル	49
第4章 フラックスコンパクト化モデルとモジュラー対称性	52
4.1 $T^2 \times T^2 \times T^2$ 上の $U(N)$ ゲージ理論	53
4.2 トーラス上のモジュラー対称性とモジュラー形式	55
4.3 Magnetized T^2 モデル	59
4.3.1 トーラス上のゼロモード波動関数	59
4.3.2 ゼロモード波動関数のモジュラー対称性	69
4.3.3 3世代モデルの構築例	73
4.4 Magnetized $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold モデル	75
4.4.1 Without SS phase	75
4.4.2 With SS phase	77
4.5 Magnetized $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_N$ orbifold モデル	79
4.5.1 $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold	80

4.5.2	$(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold	81
第 5 章	3 世代モデル	84
5.1	3 世代モデルの分類	84
5.2	湯川結合	90
5.2.1	湯川相互作用	90
5.2.2	湯川結合のモジュラー対称性	92
5.2.3	再現例: 2-2-4 モデル on $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold	96
第 6 章	総括	102
付 録 A	Clifford 代数	104
付 録 B	超対称性 (SUSY)	114
B.1	超対称性の表現	114
B.2	超対称な理論	119
付 録 C	Wilson line と Scherk-Schwarz phase	127

第1章 導入

物質を構成する最小単位は何だろうか。科学技術が発達した今日、我々は常識として物質が原子から構成されていることを知っている。さらに、その原子もまた素粒子と呼ばれる小さな要素から構成されていることが実験によって確かめられている。しかしながら、現在発見されている素粒子が物質の最小単位であるという根拠はどこにもない。実際、素粒子を最小単位と考える者は少ないだろう。素粒子の標準模型 (Standard Model, SM) には Gauge Bosons, Quarks, Leptons, Higgs 粒子という多くの素粒子が現れるが、それらを物質の最小単位とみなすにはあまりにも複雑で多様である。そのため、素粒子もまた何らかの小さな要素によって構成されていると考えるのが自然である。

人類の科学技術の発展は常に1つの疑問を伴ってきた。すなわち、「物質を構成する最小単位は何だろうか」である。最初にその問いに向かい合ったのが紀元前の哲学者デモクリトスである。デモクリトスは「それ以上分割できない最小のもの」を「原子」として定義し、あらゆるものが原子から構成されていると考えた。しかし、これはあくまで哲学上の考えであって科学的な意味合いを持つものではなかった。「物質の最小単位」の概念が科学的な発展を遂げはじめたのは16世紀に入ってからである。この頃の化学の発展に伴い、ラボアジエ、ドルトンなどによって物質の基本要素「元素」の概念が提唱された。ところが、元素を物質の最小単位とみなすことはできなかった。それどころか、当時相次いだ新たな元素の発見に対し「一体元素の種類はどこまで増えるのか」、「これらの元素の間に何らかの法則性があるのか」という疑問が上がり、自然と追及は元素の構成要素へと繋がっていった。

今日でいうところの「元素を構成する最小構成要素」としての「原子」の概念が確立されたのは19世紀前半から20世紀前半にかけてである。トムソン、長岡、ラザフォードらによって原子の内部構造に関するいくつかのモデルが提案された。特にラザフォードの原子モデルは量子論的には正しい描像とは言えないものの、正電荷を持つ原子核の周りを電子が回るといった惑星型によく知られた構造を提案している (図 1.1)。

ラザフォードの提案後、原子核もさらに小さな構成要素、中性子と陽子から構成されることが分かった。そのため、当初、原子を構成する中性子・陽子・電子の3つが物質の最小単位と考えられたが、中性子と陽子が quarks と呼ばれるより小さな粒子から構成されていることが分かった。結果として、現在では gauge bosons, quarks, leptons, Higgs 粒子という物質の構成要素が見つかっており、これらは「素粒子」と呼ばれている。そして、その素粒子に関する物理を記述するのが標準模型である。

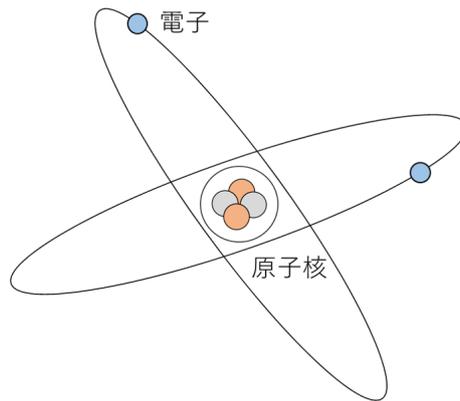


図 1.1: ラザフォードの原子モデルに基づいた ${}^4\text{He}$ の原子構造。原子核の周りを電子 (青) が回っている。後に原子核が中性子 (グレー) と陽子 (赤) から成ることが分かった。

では、標準模型は自然界を完璧に記述する理論なのだろうか。残念ながらそうではない。標準模型は自然界に存在する 3 つの基本的な力、電磁気力・強い力・弱い力を記述しているが、それらと比べて桁違いに弱いことから重力の存在を考慮していない。さらに標準模型に現れる対称性や粒子の世代・質量などが「どうしてそう選ばれるのか」という起源の問いに対して、標準模型は「そう仮定すると実験と整合するから」としか答えられない。よって標準模型を超える物理理論 (the Physics Beyond the Standard Model) が求められている。

近年、点粒子の代わりに弦と呼ばれる 1 次元体を基にした理論、超弦理論が研究されている。この理論では物質の最小単位を粒子ではなく弦と考えるのである。実際、弦理論において弦の振動状態がボソンの粒子やフェルミオンの粒子に対応することが示せる。また、超弦理論はボソン場とフェルミオン場の間の対応関係、超対称性 (Supersymmetry, SUSY) を持つ理論であり、10 次元にて無矛盾な理論となることが知られている。宇宙は 4 次元 Minkowski 空間であるように見えるため、余剰な 6 次元は観測できないほど小さなコンパクト空間であると考えなければならないだろう。コンパクト空間は様々な幾何が想定されるが、本研究では最もシンプルな幾何であるトーラスに焦点を当てる。具体的に、我々は 6 次元コンパクト空間を 3 つの 2 次元トーラスの積 $T^2 \times T^2 \times T^2$ と想定する。

コンパクト空間のトーラスに背景磁場を入れることで 4 次元 chiral な理論が得られることが示されている [1]。標準模型は left と right-handed fermions が異なるゲージ対称性を持つ chiral な理論であるため、背景磁場のあるトーラスコンパクト化は低エネルギースケールにて標準模型を再現できる可能性を持つ。また、一般的な幾何で波動関数の形を決める運動方程式を解析的に解くことが困難であるのに対して、トーラスではそれが可能なため、実験的に観測可能な量を理論から定量的に評価することができる。さらに、背景磁場を入れたトーラス上の波動関数は背景磁場の大きさに対応する世代を持ち、これは標準模型における 3 世代 fermions の存在

の起源を説明できるかもしれない。これらが我々がトーラスコンパクト化に注目する理由である。このとき、トーラスの orbifolding は realistic なモデル構築において重要な役割を果たすほか、さらなるモデル構築の可能性も与えてくれる。本研究の大まかな目的として、トーラスまたはその orbifolds を出発点とし、超弦理論に基づいた標準模型の再現を目指す。

前述した標準模型では答えられない問いの1つに quark・lepton の3世代(フレーバー)構造の起源がある。Quark・lepton は弱い相互作用をする fermion 粒子で、世代と呼ばれる3つのほぼ完全なコピーが存在する。実験より、これらは特定の混合行列(CKM 行列・PMNS 行列)に従って世代を超えた相互作用をすることが分かっているが、標準模型ではこの現象の起源を説明できない。我々は2次元トーラス T^2 の幾何学的対称性であるモジュラー対称性が世代混合の起源であると推測し、超弦理論のトーラスコンパクト化に基づいた3世代フレーバー構造の再現を試みる。

本紙は次のような構成になっている。まず第2章では標準模型とその問題点についてまとめる。第3章では超弦理論と簡単なモデル構築をまとめる。第4章ではトーラスコンパクト化モデルに注目し、トーラス T^2 、 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold、 $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(per)}$ permutation orbifold、 $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(per)})$ permutation orbifold 上の波動関数の世代とモジュラー対称性を考察する。それらを踏まえて、第5章では可能な3世代モデルを分類し、quarks 質量比と CKM 行列というフレーバー構造の再現例を示す。最後に第6章で総括を行う。付録Aでは Clifford 代数をまとめ、2つのスピノルの直積から得られるテンソル表現を見る。付録Bでは超対称性についてまとめ、超対称ラグランジアン構成方法を見る。付録Cでは Wilson line と Scherk-Schwarz phase の等価性を見る。

第2章 標準模型

2.1 概要

標準模型は現在存在が確認されている素粒子に関する物理モデルである。標準模型には相互作用を媒介するスピン1の粒子 gauge bosons、物質を構成するスピン1/2の粒子 quarks および leptons、そして対称性を破り粒子に質量を与えるスピン0の Higgs 粒子が現れる (図 2.1)。それらの素粒子は次の4つの相互作用を持つ。

1. 電磁氣的相互作用
2. 強い相互作用
3. 弱い相互作用
4. 重力相互作用

このうち、重力のみが他の相互作用と比べて桁違いに弱い。そのため、標準模型では近似的に重力の存在を無視し、3つの力、電磁氣力・強い力・弱い力を記述している。これらの力は Lie 群の変換の下での不変性 (ゲージ対称性) によって表される。

強い相互作用

強い相互作用は $SU(3)$ 対称性によって表される力で quarks 間に働く。相互作用を媒介するゲージ粒子は gluon である。 $SU(3)$ 変換の下で quarks q_i は3次元既約表現 $\mathbf{3}$ として変換される。

$$q_i = \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(3)} (\delta_i^j + i\epsilon^\alpha (T^\alpha)_i^j) q_j, \quad T^\alpha \in \mathfrak{su}(3) \quad (2.1)$$

反 quarks \bar{q}^i は $SU(3)$ の下で $\bar{\mathbf{3}}$ として変換される。対して、gluon $G_\mu = G_\mu^\alpha T^\alpha$ は随伴表現に属する場として変換される。

$$G_\mu^\alpha \xrightarrow{SU(3)} G_\mu^\alpha + \frac{1}{g_s} \partial_\mu \epsilon^\alpha + f^{\alpha\beta\gamma} G_\mu^\beta \epsilon^\gamma \quad (2.2)$$

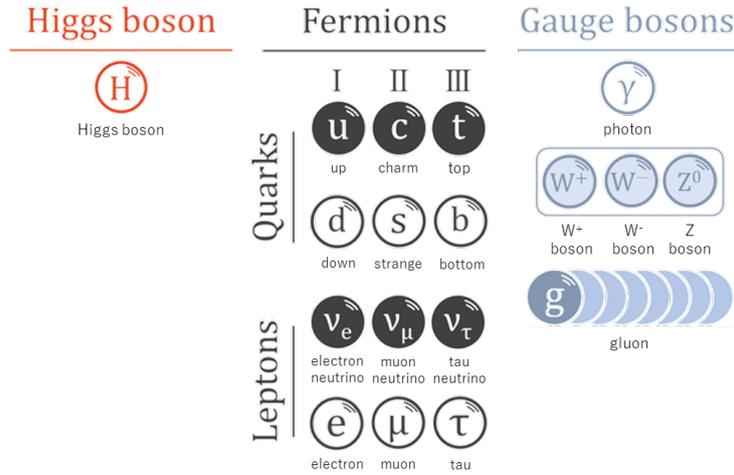


図 2.1: 標準模型に現れる粒子。

ここで g_s は結合定数、 $f^{\alpha\beta\gamma}$ は $SU(3)$ の構造定数、 ϵ_α は変換のパラメーターである。このとき quarks の $SU(3)$ に関する 3 次元成分はカラーと呼ばれ、その自由度は (Red, Green, Blue) と呼ばれる。カラー (色) と名付けられた自由度を持つ粒子の相互作用であることから、 $SU(3)$ 対称性に基づく強い相互作用の量子論は量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) と呼ばれる。

ここで $SU(3)$ 変換の下で不変な状態 (1 重項) を考えてみると、次の 3 つの状態が存在する¹。

$$\bar{q}^i q_i, \quad \epsilon^{ijk} q_i q_j q_k, \quad \epsilon_{ijk} \bar{q}^i \bar{q}^j \bar{q}^k \quad (2.3)$$

これらは順に、中間子 (mesons)、バリオン (baryons)、反バリオン (anti-baryons) と呼ばれる。これらの強い相互作用で結合する複合粒子をまとめてハドロン (hadrons) と呼ぶ。例えば陽子は 2 つの up quarks と 1 つの down quark からなる uud バリオン、中性子は 1 つの up quark と 2 つの down quarks からなる udd バリオンである。 $SU(3)$ 対称性の下で 1 重項であるという意味で、ハドロン状態は白色 (White) と呼ばれる。

標準模型のラグランジアン \mathcal{L} における QCD 項は次で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{\psi \in \text{quarks}} (i\bar{\psi}^j \gamma^\mu (D_\mu \psi)_j - m_\psi \bar{\psi}^j \psi_j) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G^{\alpha\mu\nu} \quad (2.4)$$

ここで D_μ は共変微分、 $G_{\mu\nu}^\alpha$ は gluon 場 G_μ^α の場の強さで、それぞれ

$$(D_\mu \psi)_j = \partial_\mu \psi_j - ig_s G_\mu^\alpha (T^\alpha)_j^k \psi_k \quad (2.5)$$

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha + g_s f^{\alpha\beta\gamma} G_\mu^\beta G_\nu^\gamma \quad (2.6)$$

¹ $\bar{q}^i q_i$ は明らかだろう。変換性を考えると $q_i = \mathbf{3}_i$ に対し $\epsilon^{ijk} q_j q_k = \bar{\mathbf{3}}^i$ である。また、より多くの quarks 状態から構成される 1 重項も存在する。例えば pentaquark は 4 つの quarks と 1 つの反 quark から構成されるバリオンである。

で与えられる。このラグランジアンは対称性と繰り込み可能性 (結合定数の質量次元が0以上) によって決められる。

電弱相互作用

電弱相互作用は $SU(2)_L \times U(1)$ 対称性によって表される力で、fermions や Higgs 粒子間に働く。ただし、低エネルギースケールにて $SU(2) \times U(1)$ 対称性は Higgs 場の真空期待値によって破られ (自発的対称性の破れ)、電弱相互作用は電磁気力と弱い力に分かれる。そのとき、相互作用を媒介するゲージ粒子は W^+ , W^- , Z boson と photon A である。発見者の名から、電弱相互作用を説明するこの理論はグラシヨウ=ワインバーグ=サラム (GSW) 理論と呼ばれる。

$SU(2)_L \times U(1)$ 変換の下で left-handed fermions ψ_L^i および Higgs 粒子 ϕ^i は表現 $\mathbf{2} \times \mathbf{1}$ として変換される。

$$\psi_L^i = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2) \times U(1)} (\delta^i_j + i\epsilon_a(\tau^a)^i_j + i\epsilon' Y_{\psi_L} \delta^i_j) \psi_L^j, \quad \tau^a \in \mathfrak{su}(2) \quad (2.7)$$

$$\phi^i = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2) \times U(1)} (\delta^i_j + i\epsilon_a(\tau^a)^i_j + i\epsilon' \frac{1}{2} \delta^i_j) \phi^j, \quad \tau^a \in \mathfrak{su}(2) \quad (2.8)$$

ここで ϵ_a は $SU(2)$ 変換のパラメーター、 ϵ' は $U(1)$ 変換のパラメーター、 Y は $U(1)$ charge である。対して、right-handed fermions ψ_R^i は $SU(2)$ 変換の下で 1次元表現 $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ である。

$$\psi_R^i = \begin{pmatrix} \psi_R^1 \\ \psi_R^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2) \times U(1)} (1 + i\epsilon' Y_{\psi_R}) \psi_R^i \quad (2.9)$$

$SU(2)$ ゲージ bosons $A_\mu^a \tau^a$ と $U(1)$ ゲージ boson B_μ は随伴表現に属する場として変換される。

$$A_\mu^a \xrightarrow{SU(2)} A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^a + f^{abc} A_\mu^b \epsilon^c \quad (2.10)$$

$$B_\mu \xrightarrow{U(1)} B_\mu + \frac{1}{2g'} \partial_\mu \epsilon' \quad (2.11)$$

ここで g, g' はそれぞれ $SU(2), U(1)$ ゲージ bosons の結合定数、 f^{abc} は $SU(2)$ の構造定数である。この対称性を持つラグランジアンは fermions の運動項は次で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \sum_{\psi \in \text{fermions}} (\bar{\psi}_L(i \not{D}) \psi_L + \bar{\psi}_R(i \not{D}) \psi_R) \quad (2.12)$$

$$= \bar{E}_L(i \not{D}) E_L + \bar{e}_R(i \not{D}) e_R + \bar{Q}_L(i \not{D}) Q_L + \bar{u}_R(i \not{D}) u_R + \bar{d}_R(i \not{D}) d_R \\ + (\text{Other generation terms}) \quad (2.13)$$

ここで

$$D_\mu \psi_L = (\partial_\mu - ig A_\mu^a \tau^a - ig' Y_{\psi_L} B_\mu) \psi_L, \quad \psi_L = \left(E_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \nu_L \end{pmatrix}, Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \dots \right) \quad (2.14)$$

$$D_\mu \psi_R = (\partial_\mu - ig' Y_{\psi_R} B_\mu) \psi_R, \quad \psi_R = (e_R, u_R, d_R, \dots) \quad (2.15)$$

である。また、各粒子の $U(1)$ charge Y は実験より表 2.1 のようになることが確かめられている。注意すると、right-handed neutrino は未だ見つかっておらず、標準模型ではないものとして扱われる。

	E_L	Q_L	e_R	u_R	d_R	ϕ
Y	-1/2	1/6	-1	2/3	-1/3	1/2

表 2.1: 各 fermion 粒子と Higgs 粒子の $U(1)_Y$ charge。世代による charge の違いはない。なお、electric charge については $Q = \tau^3 + Y$ によって与えられることに注意。

今述べた対称性は Higgs 場の真空期待値 $\langle \phi \rangle$ によって破れる。次のような真空期待値を想定しよう。

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

この真空期待値は $SU(2) \times U(1)$ 変換 (2.8) の下で一般に不変でない。ただし、

$$\epsilon^1 = \epsilon^2 = 0, \quad \epsilon^3 = \epsilon' \quad (2.17)$$

であれば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\epsilon^1 = \epsilon^2 = 0, \epsilon^3 = \epsilon'} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\epsilon' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\epsilon' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

となって真空期待値が保たれる。すなわち、この変換の下での不変性が、真空期待値によって $SU(2) \times U(1)$ を破った後に残っている対称性である。

対称性が破れる前のラグランジアンに含まれている Higgs 項は次で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 - \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{v}{2} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{1}{2}g'B_\mu \right) \phi \quad (2.20)$$

このポテンシャルのミニマムとして、Higgs 場の真空期待値が (2.16) で与えられることが分かるだろう。真空期待値に関連する項は

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(igA_\mu^a \tau^a + i\frac{1}{2}g'B_\mu \right) \left(-igA_\mu^a \tau^a - i\frac{1}{2}g'B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} [g^2(A_\mu^1)^2 + g^2(A_\mu^2)^2 + (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2] \quad (2.22)$$

である。これは Higgs 場の真空期待値によって生じたゲージ bosons の質量項である。破れていない対称性 (2.17) に対応するゲージ boson の質量項が現れていないことが分かるだろう。実際、

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \quad (2.23)$$

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu) \quad (2.24)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu) \quad (2.25)$$

というように適切な線形結合をとると、

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} [2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + (g^2 + g'^2)(gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2] \quad (2.26)$$

となって A_μ が massless であることが分かる。この massless のゲージ boson は photon と呼ばれ、破れていない対称性に対応する相互作用、電磁気力を媒介する。残りの massive なゲージ bosons W^\pm, Z は弱い相互作用を媒介する。

Higgs 場の真空期待値は fermions にも質量を与える。Higgs 場と fermions の $SU(2) \times U(1)$ の下での変換性 (2.8), (2.7) および表 2.1 の $U(1)$ charge Y から、次のような相互作用項が考えられる²。

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\lambda_e \bar{E}_L \cdot \phi e_R + \text{h.c.} \quad (2.27)$$

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\lambda_d \bar{Q}_L \cdot \phi d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \phi_b^\dagger u_R + \text{h.c.} \quad (2.28)$$

これらは湯川結合と呼ばれ、Higgs 場の真空期待値を通して次のように fermions に質量を与える。

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e v \bar{e}_L e_R + \text{h.c.} + \dots \quad (2.29)$$

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_d v \bar{d}_L d_R - \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_u v \bar{u}_L u_R + \text{h.c.} + \dots \quad (2.30)$$

このとき、質量は

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e v, \quad m_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_d v, \quad m_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_u v \quad (2.31)$$

である。

ところで、fermions は同じ charge をとる 3 世代 (またはフレーバーと呼ばれる) を持つのであった。上で述べてきた $SU(2) \times U(1)$ の対称性による議論からは、次のような湯川結合項を

² $\Delta\mathcal{L} = -m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$ のような項は $SU(2) \times U(1)$ の下で不変ではないため禁じられる。

除く理由はない。

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{u}_L^i \lambda_u^{ij} u_R^j + -\bar{d}_L^i \lambda_d^{ij} d_R^j + \text{h.c.} + (\text{Lepton terms}) \quad (2.32)$$

$$u_L^i = (u_L, c_L, t_L), \quad u_R^i = (u_R, c_R, t_R), \quad \lambda_u^{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^{uu} & \lambda^{uc} & \lambda^{ut} \\ \lambda^{cu} & \lambda^{cc} & \lambda^{ct} \\ \lambda^{tu} & \lambda^{tc} & \lambda^{tt} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$d_L^i = (d_L, s_L, b_L), \quad d_R^i = (d_R, s_R, b_R), \quad \lambda_d^{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^{dd} & \lambda^{ds} & \lambda^{db} \\ \lambda^{sd} & \lambda^{ss} & \lambda^{sb} \\ \lambda^{bd} & \lambda^{bs} & \lambda^{bb} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

ここで $\lambda_u^{ij}, \lambda_d^{ij}$ は一般的な複素行列である。しかしながら、 $(\lambda^{ij})^* = \lambda^{ij}$ でない限り、これらの項は CP 対称性を破ってしまう。それを回避する手段として、複素行列 λ^{ij} を実対角化するようなユニタリー変換 $u_L^i \rightarrow U_u^{ij} u_L^j$ ($d_L^i \rightarrow U_d^{ij} d_L^j$), $u_R^i \rightarrow W_u^{ij} u_R^j$ ($d_R^i \rightarrow W_d^{ij} d_R^j$) を考えたとしても、今度は W^\pm の fermions との相互作用項が $U_u^\dagger U_d$ という複素非対角行列 (すなわち世代を超えた相互作用) となってしまう³。結果、 CP 対称性はそちらの項で破れてしまう⁴。実際、実験よりこのような世代を超えた相互作用とその混合行列の位相が存在することが確かめられているため、 CP 対称性はラグランジアンを持つ完全な対称性ではない。ただし、leptons に関しては right-handed neutrino が存在しないため neutrino の質量項が存在せず、 e_L と ν_L の基底変換行列を同一のものにできる。つまり、混合行列は $U_e^\dagger U_\nu = U_e^\dagger U_e = 1$ となって、leptons において CP 対称性は破れない⁵。

まとめると、電弱相互作用を記述するラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{\text{GWS}} = \mathcal{L}_{\text{fermions}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad (2.35)$$

で与えられる。なお、このラグランジアンの形は対称性と繰り込み可能性 (結合定数の質量次元が 0 以上) によって決められている。

2.2 問題点

前節にて標準模型の概要を見た。標準模型は現在観測されている実験結果を高い精度で説明することができる理論である。しかしながら、以下に示すように標準模型では説明することのできない問題も存在する。

³このような left と right で異なる変換は chiral 変換と呼ばれる。Fermions の質量項がある理論では left と right-handed fermions が混ざるため chiral 対称性は破れる。

⁴ CP 対称性は弱い相互作用でのみ破れる。一方で、 CPT 対称性はラグランジアンの全ての項を持つ対称性である (CPT 定理)。

⁵ただし neutrino は別の機構で質量を得ることができる。実際 neutrino 振動より neutrino が質量を持つことが確認されている。この場合混合行列は 1 ではなくなる。

1. 重力の量子化

重力は重力子によって媒介される相互作用と考えられる。しかしながら、標準模型は重力を記述できない。これは重力の結合定数の質量次元が負なので繰り込み不可能になってしまうためである。すなわち、重力の量子化を行った際、量子効果による発散が存在してしまうのである。重力の量子論の候補としては、超弦理論やループ量子重力理論などが提案されている。

2. ゲージ群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ の起源

標準模型はゲージ対称性 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を持ち、それはよく実験結果を説明するが、そもそも何故このような対称性を持つのかは分かっていない。また、電磁気力と弱い力が電弱相互作用として統一できたように、強い力も電弱相互作用と統一できるのではないかと考えられている。そのような大統一理論のゲージ対称性の候補として $SU(5)$, $SO(10)$, E_8 などが提案されている。

3. 階層性問題

前節にて電弱相互作用における Higgs 場の真空期待値による自発的対称性の破れを見た。このときゲージ bosons や fermions の質量は真空期待値に比例したが、破れが起こる真空期待値のエネルギースケールは電弱スケール 246 GeV で与えられることが分かっている。問題は、大統一スケール ($\sim 10^{15}$ GeV) との間の大きな隔たり (階層の差) である。言い換えれば、Higgs 粒子の質量 (\propto 真空期待値) が何故電弱スケールほど小さいのか、という問題でもある。Higgs 粒子の質量が電弱スケールに選ばれるためには量子補正を受ける前の裸の質量というパラメーターを非常に精密に選択する必要がある。この不自然な調整は「Fine tuning」と呼ばれる。Fine tuning を避けるための方法としては、超対称性を導入して 2 次発散の量子補正をキャンセルする方法などが提案されている。

4. 強い CP 問題

CP 対称性が弱い相互作用において破れることは前節で触れた。一方で、QCD および量子電磁力学 (Quantum electrodynamics, QED) では CP 対称性は破れていないと考えられている。一般的なラグランジアンでは、次のような CP 対称性を破る項を考えることができる。

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2\theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a, \quad F_{\mu\nu}^a : \text{ゲージ bosons の場の強さ} \quad (2.36)$$

QED の場合、この項は全微分項となって無視できるため CP 対称性を持つ。しかし、QCD ではこの項は全微分項にはならず、 CP 対称性を保つ理由は特に存在しないのである。それにもかかわらず、実験より $|\theta| \leq 10^{-9}$ となることが分かっており、QCD においても CP 対称性が保たれているように見える。この不可解さ (θ の奇妙な調整) を「強い CP 問題」と呼ぶ。この問題に対するアプローチとして Peccei-Quinn 機構が提案されている。これは

理論に chiral $U(1)_{PQ}$ 対称性を導入し、それが自発的に破れることで生じた南部-Goldstone boson (ここでは axion と呼ばれる) によって θ の値を固定しようとする方法である。

5. ニュートリノ振動

標準模型において right-handed neutrino が存在せず、また left-handed neutrino の質量項が生じないことを見た。しかしながら、実験から neutrino 振動と呼ばれる neutrino の世代が変化する現象の証拠が見つかっており、実際は neutrino は小さいながらも質量を持つ。したがって neutrino に質量を与える何らかの機構が存在するはずである。そのような方法としてシーソー機構などが提案されている。

6. 3 世代 (フレーバー) 構造の起源

Quarks において世代を超えた相互作用が存在することを見た。そのときの混合行列 $U_u^\dagger U_d$ は CKM 行列と呼ばれ、実験より 1 にならないことが確かめられている。また、leptons も neutrino が質量を持つことから 1 ではない混合行列を持つ。これは PMNS 行列と呼ばれる。これらの行列が何故実験で観測されているような値を取るのか、3 世代の quark, lepton の質量比の起源は何なのか、そもそもなぜ quark も lepton も 3 世代なのか、といったフレーバー構造と呼ばれる構造の起源を標準模型は説明することができない。これらの問題に対するアプローチとしては、フレーバー対称性と呼ばれる世代間の対称性を導入する方法などが提案されている [2,3]。

7. 暗黒物質

暗黒物質は天文学的現象を説明するために存在が想定された物質である。特徴として、ほとんど物質とは相互作用しないことが挙げられる。暗黒物質の素粒子論的候補としては超対称性粒子や axion などが提案されている。天体物理学からはブラックホールや白色矮星・中性子星などが提案されている。

8. バリオン数の非対称性

Fermions は粒子と反粒子に分類される。これらは対等な存在だと考えられるが、現在の宇宙では反粒子よりも粒子の量が多い。つまり、粒子と反粒子を区別する何らかの非対称な機構が存在することになる。粒子と反粒子の量はバリオン数として勘定されるが、要はこのバリオン数が非対称になる機構がなければ今の宇宙が成立しないのである。標準模型でも CP 対称性の破れを通して粒子と反粒子の非対称性を生み出すことはできるが、現在の状況を作り出すほどのバリオン数の破れは説明することはできない。

このように、標準模型では説明のできない現象がいくつか存在しており、それらに対して様々なアプローチが成されている。すなわち、「標準模型を超えた物理」(the Physics Beyond the Standard Model) が求められているのである。次章ではそのような物理理論の候補の 1 つである超弦理論を見ていく。

第3章 超弦理論

弦理論とは1次元体の弦 (string) によって記述される物理である [4-8]。

3.1 ボソン弦理論

3.1.1 弦の古典論

ボソン弦の作用

弦理論の出発点として、まずボソン弦 (bosonic string) 理論を見ていく。後ほど確認するように、弦は通常の1時間次元+3空間次元より高次元に存在する。そのため、より一般的な舞台設定、時空間の計量として、次のような D 次元平坦時空 (ミンコフスキー時空) を考える。

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - \dots - (dX^{D-1})^2 \quad (3.1)$$

この時空間における弦の運動を (古典的に) 記述するには、弦の作用 (action) を見つけ、最小作用の原理 (principle of least action) を適用すればよい。ここでは0次元体である点粒子の作用とのアナロジーより弦の作用を求めよう。

自由点粒子の運動は D 次元時空に1次元の軌跡、世界線 (world line) を描く。その軌跡に沿ったパラメーター ξ を導入することで、我々は粒子の運動を D 次元座標 $X^\mu(\xi)$ という ξ の関数によって記述することができる。最小作用の原理より、その関数は軌跡の不変距離が最小になるように定まる。つまり、点粒子の作用は次のように不変距離に比例することになる。

$$S = -\alpha \int ds \quad (3.2)$$

$$= -\alpha \int \frac{ds}{d\xi} d\xi \quad (3.3)$$

$$= -\alpha \int \sqrt{(\dot{X}^0)^2 - (\dot{X}^1)^2 - (\dot{X}^2)^2 - \dots - (\dot{X}^{D-1})^2} d\xi \quad (3.4)$$

ここで α は適当な定数である。また notation としてパラメーター ξ の微分はドットで表記することにする。我々はこの作用が時空並進および Lorentz 変換の下での不変性 (Poincaré 不変性) を持つことに注意すべきである。さらに、世界線上のパラメーターの選び方が任意であることから、この作用はパラメーター付け替え $\xi \rightarrow \xi'$ の下での不変性も持っている。例えば

$\xi' = \xi'(\xi) = X^0(\xi) \equiv t$ を選んでみよう。このとき、非相対論的極限 ($\dot{X}^{\mu \neq 0} \ll 1$) にて、作用は次のように与えられる。

$$S = -\alpha \int \sqrt{1 - \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{dX^\mu}{dt}\right)^2} dt \xrightarrow{\dot{X}^{\mu \neq 0} \ll 1} -\alpha \int \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{dX^\mu}{dt}\right)^2 + \dots\right) dt \quad (3.5)$$

これは次の非相対論的な自由粒子のラグランジアンを再現するはずである。

$$\mathcal{L} = m - \frac{1}{2}m \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{dX^\mu}{dt}\right)^2 \quad (3.6)$$

よって、定数が $\alpha = m$ であると分かる。

しかしながら、定数 α が質量 m で与えられるとなると、作用 (3.4) は massless 粒子に対しては適用できない。この問題は補助場 $e(\xi)$ を導入することで解決できる。作用を次のように書き換えてみよう。

$$S = \frac{1}{2} \int d\xi \left(e^{-1} \dot{X}^2 - m^2 e \right) \quad (3.7)$$

補助場の変分 ($e \rightarrow e + \delta e$) をとり、この作用に対する最小作用の方程式 $\delta S / \delta e = 0$ を解くと、 $e = m^{-1} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}$ が得られる。これを新たな作用 3.7 に代入すれば、容易に元の作用 (3.4) に帰着することが確かめられる。こうして (3.4) と古典的に等価で、massless 粒子にも適用可能な作用を得ることができた。

さて、この自由点粒子の作用を自由弦の作用へと拡張しよう。自由弦の運動は D 次元時空 (標的空間) に 2 次元の軌跡、世界面 (world sheet) を描く。1 次元体である弦の運動を記述するには、1 次元体上の座標を指定する新たなパラメーター σ を導入しなければならない。弦上のある点 σ の運動は点粒子同様 1 次元の軌跡を描く。よって、弦の運動の記述には、軌跡に沿ったパラメーターと弦上の位置を指定するパラメーターの 2 つのパラメーター (ξ^0, ξ^1) \equiv (τ, σ) が必要となる (弦座標と呼ばれる)。点粒子から弦への拡張に伴い、 D 次元時空座標 X^μ は弦座標 (τ, σ) の関数 $X^\mu(\tau, \sigma)$ となる (または $X^\mu(\xi^a)$ と表記する)。

弦の作用を書き下すにあたって点粒子の作用が世界線の長さに比例したことを思い出そう。2 次元の軌跡、世界面を描く弦の場合、作用が世界面の面積に比例することが推察される (実際この推察は正しい)。そこで次のような弦の作用を考える。

$$S = -T \int dA \quad (3.8)$$

$$dA = \sqrt{-\det G_{ab}} d^2 \xi, \quad G_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (3.9)$$

この作用は南部・後藤作用と呼ばれる。 T は弦の張力、 dA は世界面の微小要素、 G_{ab} は世界面の誘導計量である。点粒子のときと同様に、補助場 h_{ab} を導入することでこの作用と古典的に

等価な次の作用を導ける。

$$S = \int d^2\xi \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} T \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad h = \det h_{ab} \quad (3.10)$$

この作用は Polyakov 作用と呼ばれる。この場合も補助場の変分 ($h_{ab} \rightarrow h_{ab} + \delta h_{ab}$) をとり、最小作用の方程式を解くことで $\frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} G_{cd} = G_{ab}$ が得られる。さらに簡単な変形から $\sqrt{-h} h^{ab} = \sqrt{-G} G^{ab}$ が導かれ、Polyakov 作用 (3.10) が南部・後藤作用 (3.8) に帰着することが確かめられる。こうして、0次元体である点粒子の作用から1次元体である弦の作用が導けた。

Polyakov 作用の対称性

この作用の対称性を調べておこう。Polyakov 作用は次の3つの変換の下での不変性を持つ。

1. Poincaré 変換

$$X^\mu(\xi^a) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi^a) + a^\mu \quad (3.11)$$

$$h_{ab}(\xi^a) \rightarrow \tilde{h}_{ab}(\xi^a) = h_{ab}(\xi^a) \quad (3.12)$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu : \text{Lorentz 変換}, \quad a^\mu : \text{時空間並進}$$

このとき、Noether の定理より、時空並進 $\delta X^\mu = a^\mu$ と Lorentz 変換 $\delta X^\mu = \omega^\mu_\nu X^\nu$ に関連する保存カレントが存在する。微小変換パラメーター $\epsilon^\mu(\text{const})$ の保存カレントは次式で求められ、保存則 $\partial_a j_\mu^a = 0$ を満たす。

$$\epsilon^\mu j_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \quad (3.13)$$

よって、時空並進の保存カレントは $\epsilon^\mu = a^\mu$ として、

$$j_\mu^a = T \sqrt{-h} h^{ab} \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \equiv P_\mu^a \quad (3.14)$$

と求まる。Lorentz 変換の保存カレントは $\epsilon^\mu j_\mu^a \rightarrow \epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^a = \omega^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^a$ として、

$$j_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} (P_\mu^a X_\nu - P_\nu^a X_\mu) \equiv J_{\mu\nu}^a \quad (3.15)$$

と求まる。ただし $\omega_{\mu\nu}$ が反対称であることを用いた。このように、Poincaré 不変性に対応する保存量を計算できた。後のため、ここで Hamiltonian を求めておこう。それは古典力学と同様に、次式で与えられる。

$$\mathcal{H} = \int d\sigma (P_\mu^\tau \partial_\tau X^\mu - \mathcal{L}) = \frac{T}{2} \int d\sigma ((\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2) \quad (3.16)$$

2. パラメーター付け替え

$$\xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a \quad (3.17)$$

$$X^\mu(\xi^a) \rightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\xi}^a) = X^\mu(\xi^a) \quad (3.18)$$

$$h_{ab}(\xi^a) \rightarrow \tilde{h}_{ab}(\tilde{\xi}^a) = \frac{\partial \xi^a}{\partial \tilde{\xi}^c} \frac{\partial \xi^b}{\partial \tilde{\xi}^d} h_{cd}(\xi^a) \quad (3.19)$$

パラメーター付け替え不変性は、世界面座標の局所並進 ($\xi^a \rightarrow \xi^a + \epsilon^a(\xi^a)$) の下での不変性も意味する。上で見た Poincaré 不変性とは異なり、変換のパラメーターは世界面座標に依存する。そのカレントはエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、

$$\epsilon^b T_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a X^\mu)} (\epsilon^b \partial_b X^\mu) - \epsilon^b \eta_{ab} \mathcal{L} \quad (3.20)$$

$$= \epsilon^b (P_{a\mu} \partial_b X^\mu - \eta_{ab} \mathcal{L}) \quad (3.21)$$

$$= \epsilon^b (T \sqrt{-h} h_{ac} \partial^c X_\mu \partial_b X_\nu \eta^{\mu\nu} - \frac{T}{2} \sqrt{-h} h_{cd} \partial^c X_\mu \partial^d X_\nu \eta^{\mu\nu} \eta_{ab}) \quad (3.22)$$

で与えられる。一般的な性質としてこのカレントは $\text{Tr } T_{ab} = T_a^a = 0$ を満たす。この性質は次に触れる Weyl 不変性からの帰結である。なお、エネルギー運動量テンソルは次の式によっても定義され、これは上で我々が求めたものと一致することが確かめられる。

$$T_{ab} \equiv \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} \quad (3.23)$$

ところが、この定義はエネルギー運動量テンソルのある性質を明らかにする。Polyakov 作用 (3.10) を見ると、 h_{ab} の運動項が含まれていないことが分かる。そのため、 h_{ab} に対する Euler-Lagrange 方程式を考えると、

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ab}} = 0 \quad (3.24)$$

となって消える。このことは、次で定義されるエネルギー運動量テンソルが消えることも意味する。

$$T_{ab} \equiv \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} \quad (3.25)$$

$$= \partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c X \cdot \partial_d X \quad (\because \text{Polyakov 作用を代入}) \quad (3.26)$$

$$= 0 \quad (3.27)$$

3. Weyl 変換

$$X^\mu(\xi^a) \rightarrow \tilde{X}^\mu(\xi^a) = X^\mu(\xi^a) \quad (3.28)$$

$$h_{ab}(\xi^a) \rightarrow \tilde{h}_{ab}(\xi^a) = \exp(2\omega(\xi^a)) h_{ab}(\xi^a) \quad (3.29)$$

$\omega(\xi^a) : \xi^a$ の任意の関数

Weyl 変換によってエネルギー運動量テンソルのトレースが 0 となることを見よう。この変換の下で Polyakov 作用 (3.10) は不変なため、

$$0 = \frac{\delta S(X^\mu, e^{2\omega} h_{ab})}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} = 2h_{ab} \frac{\delta S(X^\mu, h_{ab})}{\delta h_{ab}} = \frac{\sqrt{-h}}{2\pi} T^{ab} h_{ab} \quad (3.30)$$

となる。よって T_{ab} のトレースが 0 となることが Weyl 不変性より示された。

弦の世界面のオイラー標数が 0 のとき、パラメーター付け替えおよび Weyl 不変性によって世界面の誘導計量は平坦計量へ変換することが可能になる。ここではそのような世界面の幾何を想定する。そのとき、平坦計量、

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

を用いることで Polyakov 作用 (3.10) は次のように簡単な形になる。

$$S = \int d^2\xi \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} T \sqrt{-\eta} \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T ((\partial_\tau X^\mu)^2 - (\partial_\sigma X^\mu)^2) \quad (3.32)$$

運動方程式と境界条件

では、実際に最小作用の原理から弦の運動方程式を導き、それを解いていこう。作用 S の変分をとると、

$$0 = \delta S = T \int d\tau d\sigma \delta X_\mu (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) X^\mu - T \int d\tau [\delta X_\mu (\partial_\sigma X^\mu)]_{\sigma=0}^{\sigma=l} \quad (3.33)$$

となる。なお、弦の端点を $\sigma = 0, l$ とした。表面項 (第 2 項) を落とすためには X^μ について適切な境界条件を課さなければならない。そのような条件の詳細については後で見るとして、ここでは表面項が 0 になるとする。そのとき、運動方程式、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X_\mu = (\partial_\tau + \partial_\sigma)(\partial_\tau - \partial_\sigma) X_\mu = 0 \quad (3.34)$$

を導くことができる。この方程式の解は、次の光錐座標

$$\sigma^+ = \tau + \sigma, \quad \sigma^- = \tau - \sigma, \quad (3.35)$$

$$\partial_+ = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma), \quad \partial_- = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma) \quad (3.36)$$

を導入すれば容易に得られる。光錐座標によって運動方程式を書き換えると、

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \quad (3.37)$$

となる。これは $\partial_+ X^\mu$ が反正則、つまり $\partial_+ X^\mu = \partial_+ X^\mu(\sigma^-)$ であることを意味する。同様に、 $\partial_- X^\mu$ は正則、 $\partial_- X^\mu = \partial_- X^\mu(\sigma^+)$ である。このような方程式の一般解は、正則関数 $X_L^\mu(\sigma^+)$ と反正則関数 $X_R^\mu(\sigma^-)$ を用いて以下のように書き下すことができる。

$$X^\mu(\xi^a) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) \quad (3.38)$$

$X_L^\mu(\sigma^+)$ は弦上を伝わる振動の左進波、 $X_R^\mu(\sigma^-)$ は右進波に対応している。

では作用の変分 (3.33) に戻って境界条件について考えよう。関数 X^μ の解を定めるには、表面項を落とせるような適切な境界条件を課す必要がある。そのようなものとして、以下で見ていくように3つの可能性が考えられる。まず弦の種類として開いた弦、開弦 (open string) を考えよう。開弦の左端を $\sigma = 0$ 、右端を $\sigma = \pi$ となるようパラメーター化する。そのとき、開弦の境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0 & (\text{自由端}) \\ X^\mu|_{\sigma=0,\pi} = \text{const} & (\text{固定端}) \end{cases} \quad (3.39)$$

これらが (3.33) を 0 にすることは明らかだろう。上の条件は Neumann 条件と呼ばれ、開弦の両端で弦方向の運動量が 0 となる。下の条件は Dirichlet 条件と呼ばれ、開弦の両端は時空上のある点から動かない。例として自由端の境界条件の下での解 $X^\mu(\tau, \sigma)$ を求めてみよう。まず正則関数 $\partial_- X^\mu(\sigma^+)$ のフーリエモード展開を考える。

$$\partial_- X^\mu(\sigma_+) = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \int dk \alpha_k^\mu e^{-ik\sigma^+} = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \int dk \alpha_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)}, \quad (\alpha_n^\mu)^\dagger = \alpha_{-n}^\mu \quad (3.40)$$

同様に反正則関数 $\partial_+ X^\mu(\sigma^-)$ のフーリエモード展開は

$$\partial_+ X^\mu(\sigma_-) = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \int dk \tilde{\alpha}_k^\mu e^{-ik\sigma^-} = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \int dk \tilde{\alpha}_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)}, \quad (\tilde{\alpha}_k^\mu)^\dagger = \tilde{\alpha}_{-k}^\mu \quad (3.41)$$

で与えられる。ここで (3.39) の Neumann 条件を適用すると、

$$(\partial_+ X^\mu - \partial_- X^\mu)|_{\sigma=0,\pi} = \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,\pi} = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \int dk (\alpha_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)} - \tilde{\alpha}_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)})|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (3.42)$$

となり、 $\sigma = 0$ の条件から $\alpha_k^\mu = \tilde{\alpha}_k^\mu$ が、 $\sigma = \pi$ の条件から $k \in \mathbb{Z}$ が得られる。よって、

$$\partial_\pm X^\mu(\sigma_\mp) = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma_\mp} = \frac{l_s^2}{2} p^\mu + \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma_\mp} \quad (3.43)$$

となる。ただし $\alpha_0^\mu = (l_s/\sqrt{2})p^\mu$ である。それぞれ σ_\mp で積分すると、

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (\text{定数}) + (\text{正則関数}) + \frac{l_s^2}{2} p^\mu \sigma^- + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \quad (3.44)$$

$$= (\text{定数}) + \frac{l_s^2}{2} p^\mu \sigma^+ + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+} + (\text{反正則関数}) \quad (3.45)$$

となる。定数を x^μ として、

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i\sqrt{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (\text{自由端}) \quad (3.46)$$

という解が得られる。ここで l_s は弦のスケールを表し、弦の張力と次のように関係している。

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad l_s^2 = \alpha' \quad (3.47)$$

後のため Regge 勾配パラメーター α' を導入した。また、 x^μ は弦の重心座標、 p^μ は全運動量である。 α_n^μ は弦の振動モードを表している。

同様にして Dirichlet 条件の下で運動方程式 (3.37) を解くと、 $\alpha_k^\mu = -\tilde{\alpha}_k^\mu$ となって、固定端開弦に対して次のような解が得られる。

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \sigma + i\sqrt{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (\text{固定端}) \quad (3.48)$$

次に閉じた弦、閉弦 (closed string) を考えてみる。閉弦のある点を $\sigma = 0$ 、そこから弦を1周した点を $\sigma = 2\pi$ とパラメーター化する。そのとき、閉弦の境界条件は次の周期境界条件で与えられる。

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (3.49)$$

この条件もまた (3.33) を 0 にすることができる。この境界条件の下で運動方程式 (3.37) を解くと、次のような解が得られる。

$$X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{\sqrt{2}}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (3.50)$$

$$X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 \tilde{p}^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{\sqrt{2}}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \quad (3.51)$$

閉弦の場合、開弦と異なって X_L^μ と X_R^μ が独立な振動モード α_n^μ と $\tilde{\alpha}_n^\mu$ を持つことに留意する。これは、閉弦には弦上を伝う振動 (波) を反射する端がないことを考えれば分かりやすい。開弦には端があるため、左 (右) 進波がそこで反射されて右 (左) 進波となる。

ここで周期境界条件 (3.49) の右辺に得られた解を代入すると、

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma) + \pi l_s^2 (p^\mu - \tilde{p}^\mu) \quad (3.52)$$

となることに注意しなければならない。自然に考えれば $p^\mu = \tilde{p}^\mu$ となるが、周囲の時空にコンパクトな余剰次元を想定したとき、別の結果が得られる。簡単な例として、 D 次元 $\mu = \{0, 1, \dots, D-1\}$ を $D-2$ 次元 $\tilde{\mu} = \{0, 1, \dots, D-2\}$ と 1 次元 $m = D-1$ に分け、さらに $m = D-1$ の方向は半

径 R の円にコンパクト化されていると考えよう。このとき、 $m = D - 1$ の方向の境界条件は次のように円周の W (整数) 倍の不定性が許されるよう修正される。

$$\begin{cases} X^{\tilde{\mu}}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{\tilde{\mu}}(\tau, \sigma) \\ X^m(\tau, \sigma + 2\pi) = X^m(\tau, \sigma) + 2\pi RW \end{cases} \quad (3.53)$$

ここで W は巻き数 (winding number) と呼ばれ、コンパクトな次元に弦が巻き付いている回数を表す。(3.52) と比較すれば明らかなように、巻き数 W は弦の左進波と右進波の持つコンパクト化方向の運動量の差 $p^m - \tilde{p}^m$ と次のように対応している。

$$p^m - \tilde{p}^m = \frac{2R}{l_s^2} W \quad (3.54)$$

実は固定端を持つ開弦であれば、同様の巻き付き項を許容できる。自由端を持つ開弦においては巻き付きは許されないが、それはコンパクトな次元に弦が何回巻き付いていたとしても端が自由なため解けてしまうことから理解できる。

こうして X^μ の運動方程式を適切な境界条件の下で解くことで古典解を得ることができた。ところで、我々は h_{ab} の運動方程式を忘れてはならない。それは前述の (3.24) で与えられる。これに平坦計量を代入すると、

$$0 = \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} \Big|_{h=\eta} = \frac{T}{2} T_{ab} = \frac{T}{2} \left(\partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c X \cdot \partial^c X \right) \quad (3.55)$$

となる。ところで、平坦計量のエネルギー運動量テンソル T_{ab} を光錐座標で書き直すと、

$$T_{++} = T_{\tau\tau} + T_{\sigma\sigma} = (\partial_+ X \cdot \partial_+ X) \quad (3.56)$$

$$T_{--} = T_{\tau\tau} - T_{\sigma\sigma} = (\partial_- X \cdot \partial_- X) \quad (3.57)$$

$$T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad (3.58)$$

となる。よって上の方程式は T_{++} と T_{--} が消えることを意味する。この条件は後に見る Virasoro 条件の古典版である。

3.1.2 弦の量子論

ここでは弦を量子化し、弦の持つ離散的な物理的状態を調べる。古典解を量子化するには、正準共役な運動量を求めて正準交換関係を課せばよい。正準運動量は

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} \quad (3.59)$$

で与えられる。特に Polyakov 作用 (3.10) の場合、

$$\pi_\mu = T \partial_\tau X_\mu \quad (3.60)$$

となる。このとき、正準交換関係は次のよう定められる。

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \pi^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.61)$$

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = [\pi^\mu(\tau, \sigma), \pi^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \quad (3.62)$$

開弦と閉弦ではモード展開の形が異なっていたため、場合分けして考えていく。

閉弦の量子化

閉弦のモード展開 (3.50), (3.51) を正準交換関係に代入すると、各交換関係は次のモードの交換関係に書き直される。

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \quad (3.63)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0 \quad (3.64)$$

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (3.65)$$

なお、最後の交換関係は (3.61) を積分すれば得られる。注意すると、 $p^\mu(x^\mu)$ は α_m^μ および $\tilde{\alpha}_m^\mu$ と可換である。よって、これらの交換関係から、弦の状態が $p^\mu, \alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_m^\mu$ に関する3つの固有値でラベルされることが分かる。それを見るため、まず α_m^μ と $\tilde{\alpha}_m^\mu$ に関する次の演算子を導入しよう。

$$\begin{cases} N_m \equiv \alpha_{-m} \cdot \alpha_m = \eta_{\mu\nu} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu, \\ \tilde{N}_m \equiv \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m = \eta_{\mu\nu} \tilde{\alpha}_{-m}^\mu \tilde{\alpha}_m^\nu, \end{cases} \quad m > 0 \quad (3.66)$$

これらは個数演算子と呼ばれる。これらと光錐座標を用いて Polyakov 作用における Hamiltonian(3.16) は次のように書き直される。

$$\mathcal{H} = T \int d\sigma ((\partial_+ X_L^\mu)^2 + (\partial_- X_R^\mu)^2) \quad (3.67)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_m \cdot \alpha_n e^{-i(m+n)(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_n e^{-i(m+n)(\tau-\sigma)}) \quad (3.68)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_m \cdot \alpha_{-m} + \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_{-m}) \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left([\alpha_m^\mu, \alpha_{-m}^\nu] \eta_{\mu\nu} + 2N_m + [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_{-m}^\nu] \eta_{\mu\nu} + 2\tilde{N}_m \right) + \frac{1}{2} (\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\alpha}_0) \quad (3.70)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(mD + N_m + \tilde{N}_m \right) + \frac{\alpha'}{4} (p^2 + \tilde{p}^2) \quad (3.71)$$

ここで素朴に考えれば $\sum_{m=1}^{\infty} m$ は発散してしまう。そこで、次の ζ 関数正則化と呼ばれる操作によって、この和を発散項と有限項に分解しよう。後のためより一般的な級数和を考える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \theta) = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (n - \theta) e^{-a(n-\theta)} \quad (3.72)$$

$$= - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{da} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a(n-\theta)} \quad (3.73)$$

$$= - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{da} \left(\frac{e^{a\theta}}{e^a - 1} \right) \quad (3.74)$$

$a \rightarrow 0$ のとき、被微分関数は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \frac{e^{a\theta}}{e^a - 1} &= \left(1 + a\theta + \frac{1}{2}a^2\theta^2 + \mathcal{O}(a^3) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{a} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a^2 + \mathcal{O}(a^3) \right) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a^2 + \mathcal{O}(a^3) \right)^2 + \mathcal{O}(a^3) \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \left(-\frac{1}{2} + \theta \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right) a + \mathcal{O}(a^2) \right) \quad (3.76)$$

よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \theta) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{12} + \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{2} + \mathcal{O}(a) \right) \quad (3.77)$$

となる。今我々が興味のある $\sum_{m=1}^{\infty} m$ については $\theta = 0$ とすれば求まる。このとき、発散項 $\frac{1}{a^2}$ は繰りこまれて取り除かれる。結果として、Hamiltonian は次のように求まる。

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{m=1}^{\infty} N_m \right) + \left(\frac{\alpha'}{4} \tilde{p}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{N}_m \right) + \frac{D}{12} \quad (3.78)$$

真空状態 $|0\rangle$ が Hamiltonian の固有状態、つまり N_m の固有状態 (固有値 n_m) であるとしよう。 N_m の定義と α_m^μ の交換関係より、

$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m \alpha_n^\rho |0\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{\mu\nu} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu \alpha_n^\rho |0\rangle = \left(-n + \sum_{m=1}^{\infty} n_m \right) \alpha_n^\rho |0\rangle \quad (n \neq 0) \quad (3.79)$$

となる。これは、 $|0\rangle$ に α_n^ρ ($n > 0$) を作用させていくことでいくらかでも Hamiltonian の固有値を低くできることを意味する。よって $n > 0$ に対して、 $\alpha_n^\rho |0\rangle = 0$ が要求される。言い換えれば、基底状態 $|0\rangle$ に α_n^ρ ($n < 0$) を作用させていくことで、より高い Hamiltonian 固有値を持つ弦の状態が作られていくことになるのである。この性質から、 α_{-n} は生成演算子、 α_n は消滅演算子と呼ばれる。同様の議論は $\tilde{\alpha}_m^\mu$ に対しても言える。

では、弦の状態をこれらの個数演算子の固有状態によって表してみよう。可換性から運動量 p^μ との同時固有状態をとることができることに注意する。結果として、 $N_{n_i}, \tilde{N}_{n_j}, p^\mu$ に対して固有値 n_i, n_j, k^μ を持つ弦の状態 $|n_i, n_j, k, \tilde{k}\rangle$ は次で与えられる。

$$|n_i, n_j, k, \tilde{k}\rangle = \prod_{i=1}^I \alpha_{-n_i}^{\mu_i} \prod_{j=1}^J \tilde{\alpha}_{-n_j}^{\nu_j} |0\rangle \otimes |k\rangle \otimes |\tilde{k}\rangle \quad (n > 0) \quad (3.80)$$

この状態の Hamiltonian 固有値は次で与えられる。

$$\mathcal{H}|n_i, n_j, k, \tilde{k}\rangle = \left(\frac{\alpha'}{4}(k^2 + \tilde{k}^2) + \sum_{i=1}^I n_i + \sum_{j=1}^J n_j + \frac{D}{12} \right) |n_i, n_j, k, \tilde{k}\rangle \quad (3.81)$$

開弦の量子化

開弦の量子化の場合は、 $\alpha_m^\mu = \tilde{\alpha}_m^\mu$ (自由端) または $\alpha_m^\mu = -\tilde{\alpha}_m^\mu$ (固定端) であることに注意して、

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \quad (3.82)$$

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (3.83)$$

$$\mathcal{H} = 2L_0 + \frac{D}{12} = \frac{\alpha'}{2} p^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} N_m + \frac{D}{12} \quad (3.84)$$

$$|n_i, k\rangle = \prod_{i=1}^I \alpha_{-n_i}^{\mu_i} |0\rangle \otimes |k\rangle \quad (n > 0) \quad (3.85)$$

というように求まる。

物理的条件

こうして開弦と開弦の状態 (3.80) および (3.85) を見つけることができた。しかし、これらの状態は実は非物理的状態を含んでいる。実際、例えば次の開弦の第1励起状態のノルムは、

$$|\alpha_{-1}^0|0, k\rangle|^2 = \langle 0, k|\alpha_1^0\alpha_{-1}^0|0, k\rangle = \langle 0, k|[\alpha_1^0, \alpha_{-1}^0]|0, k\rangle = \eta^{00} = -1 \quad (3.86)$$

となって負になってしまう。このような非物理的状態を除くためには、次の Virasoro 条件を課す必要がある。

$$\langle \psi'|T(T_{\pm\pm})|\psi\rangle = \langle \psi'|T(\partial_\pm X \cdot \partial_\pm X)|\psi\rangle = 0 \quad (3.87)$$

ここで $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ は物理的状態、 T は時間順序積を表す。これは古典的にエネルギー運動量テンソルが消えるという h_{ab} の運動方程式 (3.55) に対応する。開弦の X^μ を $T_{\pm\pm}$ に代入することで、この条件が上のような非物理的状態を除けるかを見よう。

$$T_{\pm\pm} = \alpha' \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-im(\tau\pm\sigma)}, \quad L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : e^{-i\pi m(\tau\pm\sigma)} \quad (3.88)$$

ここで L_m は Virasoro 演算子と呼ばれる。量子論では演算子の順序を気にしなければならない。そこで、Virasoro 演算子は正規順序積 $::$ を用いて定義した。正規順序積は $::$ の中の演算子に対して、全ての生成演算子を左に、全ての消滅演算子を右に移動させたものである。この定義は Virasoro 演算子の固有値が有限となるよう定められている。

α_n^μ 同様、Virasoro 演算子が $(L_m)^\dagger = L_{-m}$ を満たすことに注意しよう。このとき、Virasoro 条件 (3.87) は

$$\left(L_m - \frac{D}{24} \delta_{m,0} \right) |\psi\rangle = 0 \quad (m \geq 0) \quad (3.89)$$

となる。 $(L_m)^\dagger = L_{-m}$ より、 $m < 0$ の L_m に対する条件は追加で課さずとも (3.89) から得られる。 $m = 0$ のときの追加項 $-D/24$ は、次のように時間順序積と正規順序積の差から生じる項である。

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu\nu} [\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu] \quad (3.90)$$

$$= \frac{\alpha'}{4} p^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_n : + \frac{D}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (3.91)$$

$$= L_0 - \frac{D}{24} \quad (3.92)$$

ここで、第1行の左辺は時間順序積から生じる項で、第3行の右辺の L_0 はそれを正規順序積にしたものである。

しかし、実はこれだけでは負のノルムを持つ状態を除くことはできない。Polyakov 作用に存在する対称性によって、弦の時空座標 X^μ の内、いくつかは独立でなくなるためである。そこで独立な次元が D よりも小さくなると予想して、Virasoro 条件を

$$(L_m - a \delta_{m,0}) |\psi\rangle = 0 \quad (m \geq 0) \quad (3.93)$$

と変更しておこう。以降ではこの変更、 a の値を光錐量子化の手続きに従って調べていく。

光錐量子化

我々はパラメーター付け替えおよび Weyl 不変性を用いることで h_{ab} を平坦計量 η_{ab} にゲージ固定した。ところが、このゲージ固定だけでは対称性を全て固定できていない。実際、平坦計量の Polyakov 作用 (3.32) および運動方程式 (3.34) は次の変換に対して不変である。

$$\begin{aligned} \xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a &= \xi^a + \zeta^a(\xi^a), & \eta^{ab} \rightarrow \tilde{\eta}^{ab} &= \frac{\partial \tilde{\xi}^a}{\partial \xi^c} \frac{\partial \tilde{\xi}^b}{\partial \xi^d} \eta^{cd} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\eta}^{ab} = e^{\Lambda(\xi^a)} \eta^{ab} \\ & \Rightarrow \partial^a \zeta^b + \partial^b \zeta^a = \Lambda \eta^{ab} \text{を満たす変換} \end{aligned} \quad (3.94)$$

よって、 ξ^a と $\tilde{\xi}^a$ は等価な世界面を与えることになり、この自由度を固定しなければこの対称性で結びつく独立でない状態が存在してしまうのである。

(3.94) を世界面の光錐座標で書き直そう。上の変換は次のようになる。

$$\sigma^\pm \rightarrow \tilde{\sigma}^\pm = \sigma^\pm + \zeta^\pm, \quad \zeta^\pm = \zeta^\pm(\sigma^\pm) \quad (3.95)$$

ここで $\tau = (\sigma^+ + \sigma^-)/2$, $\sigma = (\sigma^+ - \sigma^-)/2$ と書き直せるので、 τ と σ は

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = (\tilde{\sigma}^+ + \tilde{\sigma}^-)/2, \quad \sigma \rightarrow \tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}^+ - \tilde{\sigma}^-)/2 \quad (3.96)$$

と変換する。これは $\partial_+ \partial_- \tilde{\tau} = 0$ を意味しており、 X^μ の従う運動方程式 $\partial_+ \partial_- X^\mu = 0$ と一致する。よって、 $\tilde{\tau}$ を X^μ の内1つと同一視できる。

この自由度を固定するため、 D 次元時空の光錐座標

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}), \quad X^i = X^{\mu \neq 0, D-1} \quad (3.97)$$

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1, \quad \eta_{\pm\pm} = 0, \quad \eta_{ij} = \delta_{ij}, \quad X^2 = -2X^+X^- + \sum_{i=1}^{D-2} (X^i)^2 \quad (3.98)$$

を導入しよう。光錐ゲージでは、 $\tilde{\tau} = X^+/(l_s^2 p^+) + \text{const}$ というように $\tilde{\tau}$ が固定される。言い換えれば、 $X^+ = x^+ + l_s^2 p^+ \tilde{\tau}$ であり、 X^+ の振動モード α_n^+ ($n \neq 0$) は全て消えることになる。

このようにして、 D 次元時空の内1方向は世界面座標 τ と同一視されることが分かった。さらに、Virasoro 条件 $\langle \psi' | T_{\pm\pm} | \psi \rangle = \langle \psi' | (\partial_\pm X \cdot \partial_\pm X) | \psi \rangle = 0$ を解くことで X^- の振動モード α_n^- ($n \neq 0$) の自由度も消すことができる。Virasoro 条件を正規順序積定数 a を加えた上で解くと、

$$\alpha_n^- = \frac{\sqrt{2}}{l_s p^+} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^i \alpha_n^i \right) \quad (3.99)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{l_s p^+} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n}^i \alpha_n^i : - a \delta_{m,0} \right), \quad a = \frac{D-2}{24} \quad (3.100)$$

となる。ここで $m=0$ を見ると、

$$\frac{l_s^2}{2} p^+ p^- = \left(\frac{l_s^2}{4} \sum_{i=1}^{D-2} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a \delta_{m,0} \right) \quad (3.101)$$

$$\Rightarrow M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p_i^2 = \frac{(N-a)}{\alpha'}, \quad N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \quad (3.102)$$

が求まる。この式は質量殻条件 (mass shell condition) と呼ばれ、弦の状態 (N の固有値毎の励起モード) に対する質量を与えてくれる。

以上で弦の物理的状態とそのときの質量を示す式が得られた。特に、第1励起状態は

$$\alpha_{-1}^i |0, k\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, D - 2), \quad M^2 = \frac{26 - D}{24\alpha'} \quad (3.103)$$

で与えられ、以前見た非物理的状態 $\alpha_{-1}^0 |0, k\rangle$ が現れないことに注意しよう。これらの状態は $SO(D - 2)$ のベクトル表現に属する。理論が Lorentz 不変性を持つことは Polyakov 作用の対称性より確かめたが、Lorentz 群 $SO(1, D - 1)$ の massless 状態はその部分群 $SO(D - 2)$ の下で既約表現として変換する。よって、理論の Lorentz 不変性を維持するためには第1励起状態 $\alpha_{-1}^i |0, k\rangle$ が massless でなければならず、 $D = 26$ ($a = 1$) が要請される。理論の対称性を保ち、負のノルムを持つ状態を除いた結果、ボソン弦理論は26次元の理論となることが示された。

次元の決定より、ボソン弦の質量スペクトラムが具体的に計算できるようになった。特にボソン弦の開弦スペクトラムを次にまとめておこう。

励起	状態	質量
基底	$ 0\rangle$	$M^2 = -1/\alpha'$ (tachyon)
第1励起	$\alpha_{-1}^i 0\rangle$	$M^2 = 0$ (massless)
第2励起	$\alpha_{-2}^i 0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle$	$M^2 = 1/\alpha'$ (massive)
\vdots	\vdots	\vdots

ここで基底状態が負の質量を持ちタキオン (tachyon) となってしまうことに注意する。また、massless フェルミオンを示すものも存在しない (生成消滅演算子は可換的なのでボソンの状態しか存在しない)。次節で見るように、これらの問題は超対称性を導入することで解決される。

3.2 超弦理論

超弦理論はボソン弦理論を超対称性を持つように拡張した理論である。超対称性 (supersymmetry, SUSY と略される) を取り入れることで、ボソン弦理論で現れたタキオニックな状態が除かれ、さらに時空のフェルミオンが得られることが期待される。超弦の作用は、RNS 形式または GS 形式によって構成が可能である。議論の簡便さから、本節では RNS 形式に焦点を当てる。

3.2.1 スピノル場の理論と超対称性

超空間による超弦作用の構成

ボソン弦では、物理的状態を与える Virasoro 条件 $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$ から時空のボソンの質量殻条件 $p^2 = M^2$ が得られた。質量殻条件は Klein-Gordon 方程式である。よって、時空のフェルミオンを得るには、Dirac 方程式

$$ip_\mu \Gamma^\mu + M = 0 \quad (3.104)$$

を与えてくれるような作用を追加すればよい。そのような作用は次で与えられる。

$$S = S_B + S_F = \frac{T}{2} \int d^2\xi (\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu) \quad (3.105)$$

ここで ρ^a は $\{\rho^a, \rho^b\} = 2\eta^{ab}$ を満たす 2次元の Dirac 行列で、次の表現行列で与えられる。

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

また、 ψ^μ は世界面上の 2成分 Majorana-Weyl スピノルである。

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}, \quad (\psi^\mu)^* = \psi^\mu, \quad \bar{\psi}^\mu = (\psi^\mu)^\dagger \rho^0 \quad (3.107)$$

添え字 \pm はカイラリティ ($\rho^3 = \rho^0 \rho^1$ の固有値) を表す。一般の次元では Majorana 条件 (自己共役、本質的には実であること) と Weyl 条件 (スピノル表現をカイラリティで分解できること) が両立できるとは限らないが、2次元では可能である。

以下で示していくように、この作用は世界面上に超空間 (superspace) を導入することで構成できる。超空間は 2成分 Majorana-Weyl スピノル、

$$\theta_A = \begin{pmatrix} \theta_- \\ \theta_+ \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad \{\theta_A, \theta_B\} = 0 \quad (3.108)$$

と ξ^a によって張られる空間で、世界座標は ($\xi^a = (\tau, \sigma), \theta_A = (\theta_-, \theta_+)$) で与えられることになる。 θ の反可換性から、nonzero な θ のべき乗は $\{1, \theta_\pm, \theta_\pm \theta_\mp\}$ のみとなることに注意しよう。よって、超場 Y^μ は (ξ^a, θ_A) の関数として、

$$Y^\mu(\xi^a, \theta_A) = X^\mu(\xi^a) + \bar{\theta} \psi^\mu(\xi^a) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta B^\mu(\xi^a) \quad (3.109)$$

と展開できる。ここで X^μ は θ の 0 次の展開係数、 ψ^μ は 1 次の展開係数、 B^μ は 2 次の展開係数である (後に X^μ と ψ^μ が超弦作用 (3.105) に現れるものと一致することを見る)。 θ の 1 次項が存在しないのは、Majorana スピノルの実性から $\bar{\psi}^\mu \theta = \bar{\theta} \psi^\mu$ が成り立つためである。

超対称変換は、成分場 (X^μ, ψ^μ, B^μ) を交換する変換で、

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} + i(\rho^a \theta)_A \partial_a, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^A} \equiv (\rho^0)_A^B \frac{\partial}{\partial \theta^B} \quad (3.110)$$

$$\delta Y^\mu(\xi^a, \theta_A) = [\bar{\epsilon} Q, Y^\mu(\xi^a, \theta_A)] = \bar{\epsilon} Q Y^\mu(\xi^a, \theta_A) \quad (3.111)$$

と定義される。 ϵ は変換の微小パラメータスピノルである。このとき、

$$\delta Y^\mu(\xi^a, \theta_A) = \delta X^\mu(\xi^a) + \bar{\theta} \delta \psi^\mu(\xi^a) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \delta B^\mu(\xi^a) \quad (3.112)$$

$$= \bar{\epsilon} Q Y^\mu(\xi^a, \theta_A) \quad (3.113)$$

$$= \bar{\epsilon} \psi^\mu + \bar{\theta} (-i\rho^a \partial_a X^\mu + B^\mu) \epsilon + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta (-i\bar{\epsilon} \rho^a \partial_a \psi^\mu) \quad (3.114)$$

となるので、成分場の超対称変換は次で与えられる。

$$\begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu = (-i\rho^a\partial_a X^\mu + B^\mu)\epsilon \\ \delta B^\mu = -i\bar{\epsilon}\rho^a\partial_a\psi^\mu \end{cases} \quad (3.115)$$

では超対称な作用を構成していこう。任意の超場 Z を用いて次のような作用を考えてみる。

$$S = \int d^2\xi d^2\theta Z(\xi^a, \theta_A) \quad (3.116)$$

ここで、 θ の積分はグラスマン性 (反可換性) より

$$\int d^2\theta (a + \theta_+ b + \theta_- c + \theta_+ \theta_- d) = d \quad (3.117)$$

となって θ の 2 次の項の展開係数のみを残す。この作用の超対称変換を考えると、

$$\delta S = \int d^2\xi d^2\theta \delta Z \quad (3.118)$$

$$= \int d^2\xi d^2\theta \bar{\epsilon} Q Z \quad (3.119)$$

$$= \int d^2\xi d^2\theta \bar{\epsilon}^A \left(\frac{\partial}{\partial \theta^A} + i(\rho^a \theta)_A \partial_a \right) Z \quad (3.120)$$

$$= \int d^2\xi \bar{\epsilon}^A d^2\theta \left[\int d^2\theta \frac{\partial}{\partial \theta^A} Z \right] + \int d^2\theta \bar{\epsilon}^A i(\rho^a \theta)_A \left[\int d^2\xi \partial_a Z \right] \quad (3.121)$$

となって、第 1 項は θ の 1 次の積分、第 2 項は表面積分となるため消える。よって、この作用は超対称不変である。次に超空間における共変微分を導入しよう。

$$D_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} - i(\rho^a \theta)_A \partial_a \quad (3.122)$$

これは $\{D_A, Q_B\} = 0$ を満たすので、 $D_A Z$ も超場となる。さらに、超場同士の積もまた超場である。まとめると、作用が任意の (共変微分を含む) 超場の積分で与えられるとき、それは超対称不変となる。そこで、改めて次の超対称不変な作用を考えてみる。

$$S = -\frac{iT}{4} \int d^2\xi d^2\theta (\bar{D}Y^\mu)(DY_\mu) = -\frac{iT}{4} \int d^2\xi d^2\theta [(\bar{D}Y^\mu)(DY_\mu)]|_{\bar{\theta}\theta} \quad (3.123)$$

共変微分を計算すると、

$$D_A Y^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^A} - i(\rho^a \theta)_A \partial_a \right) \left(X^\mu + \bar{\theta}\psi^\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta B^\mu \right) \quad (3.124)$$

$$= \psi_A^\mu + \theta_A B^\mu - i(\rho^a \theta)_A \partial_a X^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta (\rho^a \partial_a \psi^\mu)_A \quad (3.125)$$

同様に、

$$\bar{D}_A Y^\mu = \bar{\psi}_A^\mu + \bar{\theta}_A B^\mu + i(\bar{\theta} \rho^a)_A \partial_a X^\mu - \frac{i}{2} \bar{\theta} \theta (\partial_a \bar{\psi}^\mu \rho^a)_A \quad (3.126)$$

となる。これらを代入して θ の 2 次のみを残すと、

$$S = \frac{T}{2} \int d^2 \xi (\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu - B^\mu B_\mu) \quad (3.127)$$

となる。 B^μ の運動方程式は $B^\mu = 0$ を示すので、これは補助場である。よって古典的に等価な作用として $B^\mu = 0$ を選べば、超弦作用 (3.105) が再現される。こうしてボソン弦作用を超対称に拡張した作用が得られた。後で見るが、(3.105) が Dirac 方程式 (3.104) を与えてくれる理由は、簡単に言えば Klein-Gordon 方程式を導くボソン弦作用のフェルミオンパートナーを作用に加えたからである。

超弦作用の対称性

超弦作用 (3.105) の持つ対称性を見ておこう。上で見たように、超弦作用は超対称変換

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^A} + i(\rho^a \theta)_A \partial_a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \delta \psi^\mu = -i \rho^a \partial_a X^\mu \epsilon \end{cases} \quad (3.128)$$

の下で不変である ($B^\mu = 0$ としていることに注意)。超対称変換を超空間 (ξ^a, θ_A) に作用させると、

$$\begin{cases} \delta \theta^A = [\bar{\epsilon} Q, \theta^A] = (\bar{\epsilon} Q \theta^A) = \epsilon^A \\ \delta \xi^a = [\bar{\epsilon} Q, \xi^a] = (\bar{\epsilon} Q \xi^a) = i \bar{\epsilon} \rho^a \theta \end{cases} \quad (3.129)$$

となる。これは、超対称変換が超空間における $\epsilon^A(\text{const})$ でパラメーター化された並進操作であることを意味する。対称性に付随するカレントは次で与えられる。

$$J_a = \frac{1}{2} \rho^b \rho_a \psi^\mu (\partial_b X_\mu) \quad (3.130)$$

光錐座標で書けば、

$$J_\pm = \psi_\pm \partial_\pm X_\mu \quad (3.131)$$

となる。この対称性は、世界面を平坦空間から曲がった空間であると考えたとき、局所対称性へと格上げされる。ボソン弦作用 (Polyakov 作用) (3.10) がパラメーター付け替え (世界面の局所並進) ($\xi^a \rightarrow \xi^a + \epsilon^a(\xi^a)$) の下で不変であったことを思い出そう。それは作用に場 h_{ab} を導入することで、つまり曲がった世界面を考えることで成立したのだった。同様に、平坦超空間における大域並進不変性も、フェルミオン場 χ_a (グラヴィティーノ) を導入することで曲がった超空間

における局所並進不変性 (または局所超対称性) へ格上げされる。我々が導いた超弦作用 (3.105) では平坦世界面を考えていたため、重力多重項 (h_{ab}, χ_a) が (ゲージ固定されて) 作用に現れず、大域的対称性を持っていたのである。

ここで我々は、重力多重項 (h_{ab}, χ_a) が作用に現れずともその運動方程式は考慮しなければならないことに注意する。重力多重項 (h_{ab}, χ_a) の運動方程式はそれぞれ、

$$\frac{\delta S}{\delta \chi^a} \propto J_a = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{\pm} = 0 \quad (3.132)$$

$$\frac{\delta S}{\delta h^{ab}} \propto T_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\pm\pm} = 0 \quad (3.133)$$

となる。これは後ほど見る超 Virasoro 条件の古典版である。ただし、超弦作用におけるエネルギー運動量テンソル $T_{\pm\pm}$ は

$$T_{\pm\pm} = \partial_{\pm} X^{\mu} \partial_{\pm} X_{\mu} + \frac{i}{2} \psi_{\pm}^{\mu} \partial_{\pm} \psi_{\pm\mu}, \quad T_{\pm\mp} = 0 \quad (3.134)$$

で与えられる。これらはボソン弦のときと同様の方法で導くことができる。

運動方程式と境界条件

ボソン弦作用のモード展開は前節で見たとおりである。ここではフェルミオンの時空 ψ^{μ} のモード展開を調べていく。簡単化のため、作用のフェルミオンパートを光錐座標で書き直そう。

$$S_F = -iT \int d^2\xi (\psi_-^{\mu} \partial_+ \psi_{-\mu} + \psi_+^{\mu} \partial_- \psi_{+\mu}) \quad (3.135)$$

最小作用の原理より、

$$0 = \delta S_F = -iT \int d^2\xi (-2(\partial_+ \psi_-) \cdot \delta\psi_- + \partial_+(\psi_- \cdot \delta\psi_-)) - iT \int d^2\xi (+ \leftrightarrow -) \quad (3.136)$$

となる。第2項は単に第1項のカイラリティを入れ替えたものである。ボソン弦のときのように、我々は表面項

$$\int d^2\xi (\partial_+(\psi_- \cdot \delta\psi_-) + \partial_-(\psi_+ \cdot \delta\psi_+)) = \frac{1}{2} \int d\tau [\psi_- \cdot \delta\psi_- - \psi_+ \cdot \delta\psi_+] \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} \quad (3.137)$$

を落とす必要がある。一旦この問題を据え置いて、運動方程式を調べよう。(3.136) より、 $\partial_{\pm} \psi_{\mp}^{\mu} = 0$ が分かる。これは、 ψ_+^{μ} が反正則、 ψ_-^{μ} が正則関数となることを意味する。よって、ボソン弦で行ったようなモード展開が可能である。

では表面項 (3.137) を落とせるような弦の境界条件を考えていく。まず開弦を考えよう。その場合、弦の境界は独立なので、

$$\psi_+^{\mu}(\tau, \sigma = 0) = \pm \psi_-^{\mu}(\tau, \sigma = 0) \quad \text{and} \quad \psi_+^{\mu}(\tau, \sigma = \pi) = \pm \psi_-^{\mu}(\tau, \sigma = \pi) \quad (3.138)$$

が境界条件となる。つまり、可能な符号の選択肢としては弦の端点 ($\sigma = 0, \pi$) に対して $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$ の4つが存在する。しかし、弦の両端のどちらを $\sigma = 0, \pi$ とするかは自由であり、 $(+, +)$ と $(-, -)$ は等価である。同様に $(+, -)$ と $(-, +)$ は等価である。よって、次の Ramond 境界条件と Neveu-Schwarz 境界条件の2つが考えられる。

$$\text{R 境界} : \psi_+^\mu(\tau, \sigma = 0) = +\psi_-^\mu(\tau, \sigma = 0) \quad \text{and} \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma = \pi) = +\psi_-^\mu(\tau, \sigma = \pi) \quad (3.139)$$

$$\text{NS 境界} : \psi_+^\mu(\tau, \sigma = 0) = +\psi_-^\mu(\tau, \sigma = 0) \quad \text{and} \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma = \pi) = -\psi_-^\mu(\tau, \sigma = \pi) \quad (3.140)$$

これらの境界条件の下、運動方程式を解くと、

$$\text{R 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau \mp \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau \mp \sigma)}, \quad (d_n^\mu)^\dagger = d_{-n}^\mu \quad (3.141)$$

$$\text{NS 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau \mp \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau \mp \sigma)}, \quad (b_r^\mu)^\dagger = b_{-r}^\mu \quad (3.142)$$

というようにモード展開が求まる。これらはそれぞれ R セクター、NS セクターと呼ばれる。NS セクターが R セクターとは異なり半整数のモードとなっていることに留意しよう。

次に閉弦を考える。閉弦に端点はなく、弦の点 $\sigma = 0$ と $\sigma = 2\pi$ は同一視される。このとき、次の2つ、

$$\text{周期的 (R) 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau, \sigma) = \psi_\pm^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (3.143)$$

$$\text{反周期的 (NS) 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau, \sigma) = -\psi_\pm^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (3.144)$$

が表面項を落とせる境界条件となる。これらの条件は ψ_+ と ψ_- に対して独立に課することができるため、考えられる選択肢としては、 $(\psi_+, \psi_-) = (\text{NS}, \text{NS}), (\text{R}, \text{R}), (\text{NS}, \text{R}), (\text{R}, \text{NS})$ の4つである。これらの境界条件の下、運動方程式を解くと、

$$\text{周期的 (R) 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau \mp \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau \mp \sigma)}, \quad (d_n^\mu)^\dagger = d_{-n}^\mu \quad (3.145)$$

$$\text{反周期的 (NS) 境界} : \psi_\pm^\mu(\tau \mp \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau \mp \sigma)}, \quad (b_r^\mu)^\dagger = b_{-r}^\mu \quad (3.146)$$

というようにモード展開が求まる。

量子化

超弦の量子化を行っていこう。まず開弦を調べる。ボソンの時空 X^μ に関しては見てきた通り

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m, -n} \quad (3.147)$$

が正準交換関係となる。フェルミオンの時空 ψ^μ には次の反交換関係を課す。

$$\{\psi_A^\mu(\tau, \sigma), \psi_B^\nu(\tau, \sigma')\} = \pi\eta^{\mu\nu} \delta_{A,B} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.148)$$

モード展開を代入すると、生成消滅演算子に関する次の反交換関係が得られる。

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n} \quad (\text{R セクター}) \quad (3.149)$$

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s} \quad (\text{NS セクター}) \quad (3.150)$$

真空状態は、各セクターの演算子に対して、

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_R = d_m^\mu |0\rangle_R = 0 \quad m > 0 \quad (3.151)$$

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_{NS} = b_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad m, r > 0 \quad (3.152)$$

を満たす状態として定義される。

物理的状态を定める超 Virasoro 条件は

$$T_{\pm\pm}|\phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (L_m - a_{R/NS}\delta_{m,0})|\phi\rangle = 0 \quad m \geq 0 \quad (3.153)$$

$$J_{\pm}|\phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_m|\phi\rangle = 0 & m \geq 0 \quad (\text{R セクター}) \\ G_r|\phi\rangle = 0 & r \geq 0 \quad (\text{NS セクター}) \end{cases} \quad (3.154)$$

となる。ただし、ここで

$$T_{++} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-i\pi m(\tau+\sigma)}, \quad L_m = L_m^{(b)} + L_m^{(f)} \quad (3.155)$$

$$J_+ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i\pi m(\tau+\sigma)} & (\text{R セクター}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r+1/2=-\infty}^{\infty} G_r e^{-i\pi r(\tau+\sigma)} & (\text{NS セクター}) \end{cases} \quad (3.156)$$

である。 $L_m^{(b)}$, $L_m^{(f)}$ はそれぞれ世界面のボソン場とフェルミオン場からの L_m への寄与である。開弦では $T_{++} = T_{--}$, $J_+ = J_-$ であることにも注意する。モード展開を用いれば、各セクターに対し

$$L_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{m+n} : \quad (\text{R, NS セクター共通}) \quad (3.157)$$

$$\begin{cases} L_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{m}{2}\right) : d_{-n} \cdot d_{m+n} :, & F_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot d_{m+n} \quad (\text{R セクター}) \\ L_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{r+1/2=-\infty}^{\infty} \left(r + \frac{m}{2}\right) : b_{-r} \cdot b_{m+r} :, & G_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot b_{r+n} \quad (\text{NS セクター}) \end{cases} \quad (3.158)$$

が示せる (α_m^μ が d_m^μ および b_r^μ と可換なため F_m, G_r については Virasoro 条件にて正規順序定数が生じないことに注意)。特に、 $m = 0$ の超 Virasoro 条件 (質量スペクトラム) はモード展開で次のように与えられる。

$$\alpha' M^2 = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n} \cdot d_n - a_R & (\text{R セクター}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r - a_{NS} & (\text{NS セクター}) \end{cases} \quad (3.159)$$

今、我々は正規順序定数 $a_{R/NS}$ を各セクターに応じて求めなければならない。 $F_0^2 = L_0$ に注意すると、 $F_0|0\rangle_R = 0$ より、

$$0 = F_0^2|0\rangle_R = L_0|0\rangle_R = a_R|0\rangle_R \Rightarrow a_R = 0 \quad (3.160)$$

となって R セクターに関しては容易に求められる。 NS セクターについては、ボソン弦で見たように、光錐量子化を行って余分なゲージを固定する必要がある。そのとき、第 1 励起状態は

$$b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS} \quad i = 1, \dots, D-2 \quad (3.161)$$

で与えられる。光錐ゲージをとっているため、独立な次元は $D-2$ 個である。これは $SO(D-2)$ の表現である。ボソン弦の議論で見たように、Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ の massless 状態が $SO(D-2)$ の下で既約表現として変換することから、この状態の質量は 0 とならなければならない。質量は (3.159) で与えられるので、

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} - a_{NS} \Rightarrow a_{NS} = \frac{1}{2} \quad (3.162)$$

となる。また、正規順序定数を時間順序積と正規順序積の差から求めると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r+1/2=-\infty}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \sum_{r+1/2=-\infty}^{\infty} r : b_{-r}^i b_r^i : \right) + \frac{D-2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n - \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$= L_0 - \frac{D-2}{16} \quad (3.164)$$

となるので、 $D = 10$ が求まる。よって、Lorentz 不変性を保つため超弦理論は 10 次元でなければならないと分かった。

スペクトラムと GSO 射影

続けて開弦のスペクトラムを調べていこう。まず R セクターのスペクトラムは次で与えられる。

励起	状態	質量
基底	$ 0\rangle_R$	$M^2 = 0$ (massless)
第 1 励起	$\alpha_{-1}^i 0\rangle_R, d_{-1}^i 0\rangle_R$	$M^2 = 1/\alpha'$ (massive)
\vdots	\vdots	\vdots

特に基底状態 $|0\rangle_R$ は超 Virasoro 条件 $F_0|0\rangle_R = 0$ に加えて $\alpha_m^\mu |0\rangle_R = d_m^\mu |0\rangle_R = 0$ ($m > 0$) を満たすのだった。つまり、

$$0 = F_0|0, p\rangle_R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot d_n |0, p\rangle_R = \alpha_0 \cdot d_0 |0, p\rangle_R \propto p \cdot d_0 |0, p\rangle_R \quad (3.165)$$

R セクターの反交換関係 $\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}$ において、 $m = n = 0$ のとき、 $\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ となることに注意しよう。これは Dirac 行列の反交換関係 $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ と同じ形である ($|0\rangle_R$ に作用させたとき、 $m = n = 0$ でないと $|0\rangle_R$ は Dirac 行列の代数の表現とならない)。よって、 $d_0^\mu = \Gamma^\mu / \sqrt{2}$ と書ける。再び上式に戻ってこの結果を代入すると、

$$p_\mu \Gamma^\mu |0, p\rangle_R = 0 \quad \text{or} \quad p_\mu (\Gamma^\mu)^a_b |0, p\rangle_R^b = 0 \quad (3.166)$$

となって、これはまさに massless Dirac 方程式である。このことから、基底状態 $|0, p\rangle_R$ は massless の 10 次元スピノルであるといえる。10 次元の Dirac 行列は $2^5 = 32$ より 32×32 行列なので、この基底状態は 32 成分スピノルである。ただし、Dirac 方程式 (3.166) を考慮すると独立な成分は半分の 16 個となる (元々 Dirac 方程式は超 Virasoro 条件から得られたので、Dirac 方程式を課した結果が物理的状態となる)。今は massless 状態を考えているので、運動量の向きを $p^\mu = (p^0, p^1, \dots, p^{D-1}) = (p, p, 0, \dots, 0)$ と選べる。このとき massless Dirac 方程式は、

$$0 = p_\mu \Gamma^\mu |0, p\rangle_R = p(\Gamma^0 - \Gamma^1) |0, p\rangle_R \quad (3.167)$$

となる。これは 10 次元スピノル表現のうち半分が消えることを意味する。このようにして、我々が欲していた時空のフェルミオンを見つけることができた。

NS セクターのスペクトラムは次で与えられる。

励起	状態	質量
基底	$ 0\rangle_{NS}$	$M^2 = -1/2\alpha'$ (tachyon)
第 1 励起	$b_{-1/2}^i 0\rangle_{NS}$	$M^2 = 0$ (massless)
\vdots	\vdots	\vdots

我々は基底状態に再びタキオニックな状態を見つけてしまった。また、massless 状態のみを見ても、NS セクターでは 8 成分ベクトルであるのに対して R セクターでは 16 成分スピノルで、

明らかに(時空の)SUSYが破れてしまっている。これらの問題はGSO射影と呼ばれる操作を施すことで解消される。

GSO射影はNSセクターにおいて奇数個のフェルミオンの励起を残し、偶数個のフェルミオンの励起を落とす操作である。Rセクターでは奇数個のスピンの励起または偶数個のスピンの励起のどちらかのみを残す。スピンの励起が偶数個の場合、カイラリティは+1、奇数個の場合はカイラリティは-1なので、GSO射影はRセクターにおいてはカイラリティ ± 1 の選択ともいえる。10次元ではMajorana-Weylスピノルを実現できるので、つまり、カイラリティの値で分解される2つのLorentz変換の下での既約表現を考えることができるので、GSO射影はこの2つの既約表現のどちらかを拾うことを意味する。GSO射影の結果、開弦のスペクトラムは時空の超対称性を持つようになる。GSO射影後の基底状態を見ると、

セクター	基底状態	質量	成分数	時空のスピン
R	$ 0\rangle_R^{\pm}$	massless	8	フェルミオン
NS	$b_{-1/2}^i 0\rangle_{NS}$	massless	8	ボソン

となっていて、無事時空のSUSYが保たれていることが分かる。

Type II 超弦理論

では閉弦のスペクトラムを考えよう。基本的には開弦の話を経張していただくだけである。閉弦の場合、セクターの選択肢として(左進, 右進)=(NS,NS), (R,NS), (NS,R), (R,R)の4つが存在した。また、GSO射影の際に、Rセクターに対してカイラリティ ± 1 の選択肢が存在したことも思い出そう。閉弦では左進と右進にどのカイラリティを持ってくるかは独立に決められるので、可能性として

$$\text{IIA} : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_+, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_-), (\text{R}_+, \text{R}_-)$$

$$\text{IIB} : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_+, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_+), (\text{R}_+, \text{R}_+)$$

$$\text{IIA}' : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_-, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_+), (\text{R}_-, \text{R}_+)$$

$$\text{IIB}' : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_-, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_-), (\text{R}_-, \text{R}_-)$$

の4つが存在する。 \pm はカイラリティを示す。NSセクターのカイラリティは+として表記した。Type Aは左進と右進で異なるカイラリティを選んだもの、Type Bは同一カイラリティを選んだものである。ただし、適当な軸の反転の下でIIAとIIA'(IIBとIIB')は同一である(後のT双対性の議論で例を見る)。よって、IIAとIIB理論の2つを見ていこう。

• Type IIA

閉弦のスペクトラムのmassless状態は次で与えられる。ただしRセクターの基底状態はカイラ

リテイと対応して $|\pm\rangle_R$ と表記した。

$$b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS} \otimes b_{-1/2}^j|0\rangle_{NS} \quad (3.168)$$

$$|+\rangle_R \otimes b_{-1/2}^j|0\rangle_{NS} \quad (3.169)$$

$$b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS} \otimes |-\rangle_R \quad (3.170)$$

$$|+\rangle_R \otimes |-\rangle_R \quad (3.171)$$

NS-NS セクターは2つの8成分ベクトルのテンソル積で、トレース0の2階対称テンソル(グラビトン) $G_{\mu\nu}$ 、2階反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ および1重項ディラトン ϕ を与える。

R_+ -NS セクターは8成分 Weyl スピノル(カイラリティ+)と8成分ベクトルのテンソル積で、スピノルの足 a とベクトルの足 i を持つ状態 $|i, a\rangle$ となる。ただし、適当な線形結合をとって $\Gamma_{ab}^i|i, b\rangle$ を作ったとき、それはもはやベクトルの足を持たず8表現スピノルとなる。残りの56表現はスピノルの足 a とベクトルの足 i を持つ状態 $|i, a\rangle$ となる。なお、NS- R_- セクターも同様である。

R_+ - R_- セクターは異なるカイラリティを持つ2つの8成分 Weyl スピノルのテンソル積である。これは、Clifford 代数の議論から、1重項、2階反対称テンソルおよび4階完全反対称テンソルに既約分解することができる。

• Type IIB

閉弦のスペクトラムの massless 状態は次で与えられる。

$$b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS} \otimes b_{-1/2}^j|0\rangle_{NS} \quad (3.172)$$

$$|+\rangle_R \otimes b_{-1/2}^j|0\rangle_{NS} \quad (3.173)$$

$$b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS} \otimes |+\rangle_R \quad (3.174)$$

$$|+\rangle_R \otimes |+\rangle_R \quad (3.175)$$

NS-NS セクター、 R_+ -NS セクターについては Type IIA と同様である。NS- R_+ セクターについても、Type IIA の R_+ -NS セクターのそれと同じになる。

R_+ - R_+ セクターは同じカイラリティを持つ2つの8成分 Weyl スピノルのテンソル積である。これは、Clifford 代数の議論から、ベクトル、3階完全反対称テンソルおよび5階完全反対称テンソルに既約分解することができる。

2つの理論に現れるボソン、フェルミオンは次表に分類したとおりである。 n 階対称テンソルは (n) 、完全反対称テンソルは $[n]$ と表記した。ただし、 n 階の完全反対称テンソルが R - R セクターに現れた場合、それは場の強さに対応し、場としては $n-1$ 階の完全反対称テンソルが現

れる。

	状態	テンソル	次元
ボソン			
(NS ₊ , NS ₊)	$b_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes b_{-1/2}^j 0\rangle_{NS}$	[0] + [2] + (2)	64 = 1 + 28 + 35
(R ₊ , R ₊)	$ +\rangle_R \otimes +\rangle_R$	[0] + [2] + [4]	64 = 1 + 28 + 35
(R ₊ , R ₋)	$ +\rangle_R \otimes -\rangle_R$	[1] + [3]	64 = 8 + 56
フェルミオン			
(R ₊ , NS ₊)	$ +\rangle_R \otimes b_{-1/2}^j 0\rangle_{NS}$		64 = 8 + 56
(NS ₊ , R ₊)	$b_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes +\rangle_R$		64 = 8 + 56
(NS ₊ , R ₋)	$b_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes -\rangle_R$		64 = 8 + 56

これら2つの理論はタキオンを含まず、時空の超対称性を持つ無矛盾な理論として知られており、Type II 超弦理論と呼ばれる。特徴として、

1. 閉弦しか含まない。
2. $N = 2$ 超対称性を持つ。
3. $U(1)$ ゲージ対称性を持つ。

ことが挙げられる。無矛盾な超弦理論は合計で5つ知られており、他に Type I、Heterotic $SO(32)$ 、Heterotic $E_8 \times E_8$ 超弦理論が存在するがここでは触れない。それらの理論は実は双対性と呼ばれる関係で繋がっていて等価であることが示されている。次節ではその双対性のうち、 T 双対性について見ていく。

3.2.2 コンパクト化と T 双対性

我々は超弦理論が10次元時空を持つことを見てきた。しかし、我々の住む世界は4次元 $\mathbb{R}^{1,3}$ で残りの余剰6次元は観測されていない。そのため、余剰次元は現在の技術では観測できないほど小さなコンパクト空間であると考えられる。つまり、

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \mathcal{M}^6 \quad (\mathcal{M}^6 : 6 \text{次元コンパクト空間}) \quad (3.176)$$

の形の背景を考える。この操作はコンパクト化と呼ばれ、高次元の理論を低次元に持っていくために用いられる。以降では、弦理論におけるコンパクト化の影響を見ていく。

ボソン弦理論のコンパクト化

簡単のため、ここでは26次元のボソン弦理論を考える。ボソン弦閉弦のモード展開で、周囲に

コンパクトな次元を想定したときのことを思い出そう。今、我々は26番目の空間次元 X^{25} を半径 R の円にコンパクト化する。そのとき、閉弦の境界条件は次のように修正される。

$$\begin{cases} X^{\tilde{\mu}}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{\tilde{\mu}}(\tau, \sigma), & \tilde{\mu} = \{0, 1, \dots, 24\} \\ X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{25}(\tau, \sigma) + 2\pi RW \end{cases} \quad (3.177)$$

ここで W は弦が25番目のコンパクトな次元に巻き付いている回数を表す。このとき、閉弦のモード展開から左進波 X_L の運動量 p_L と右進波 X_R の運動量 p_R に対して

$$p_L^{25} - p_R^{25} = \frac{2R}{\alpha'} W \quad (3.178)$$

が成り立つ。ところで、この時空間における波動関数(または場) $\phi(X^\mu)$ を考えると、コンパクト化によってそれは

$$\phi(X^{25} + 2\pi RW) = \phi(X^{25}) \quad (3.179)$$

を満たすはずである。フーリエ展開すると、

$$\phi(X^{25}) = \int \frac{dp^{25}}{2\pi} e^{ip^{25}X^{25}} \tilde{\phi}(p^{25}) = \phi(X^{25} + 2\pi RW) = \int \frac{dp^{25}}{2\pi} e^{ip^{25}(X^{25} + 2\pi RW)} \tilde{\phi}(p^{25}) \quad (3.180)$$

となる。したがって、弦の重心運動量の量子化条件

$$p^{25} = \frac{1}{2}(p_L^{25} + p_R^{25}) = \frac{K}{R} \quad (K \in \mathbb{Z}) \quad (3.181)$$

が見つかる。ここで K は Kaluza-Klein 励起数と呼ばれる。(3.178) と (3.181) をまとめると、

$$p_L^{25} = K \left(\frac{1}{R} \right) + W \left(\frac{R}{\alpha'} \right) \quad (3.182)$$

$$p_R^{25} = K \left(\frac{1}{R} \right) - W \left(\frac{R}{\alpha'} \right) \quad (3.183)$$

となる。このように、閉弦のコンパクト化方向の運動量が巻き数 W と KK 励起数 K によって制限されることが分かった。

次にコンパクト化による質量スペクトラムの変化を見る。まず Virasoro 演算子を25次元からの寄与とそれ以外で分けて書く。

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} (p_L^{25})^2 + \frac{\alpha'}{4} \sum_{\tilde{\mu}=0}^{24} p^{\tilde{\mu}} p_{\tilde{\mu}} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (3.184)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} (p_R^{25})^2 + \frac{\alpha'}{4} \sum_{\tilde{\mu}=0}^{24} p^{\tilde{\mu}} p_{\tilde{\mu}} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \quad (3.185)$$

ただし、閉弦のコンパクト化されていない方向の運動量では $p_L^{\tilde{\mu}} = p_R^{\tilde{\mu}} = p^{\tilde{\mu}}$ となることに注意。コンパクト化されていない 25 次元に現れる質量は、25 個の運動量からなるので、

$$M^2 = - \sum_{\tilde{\mu}=0}^{24} p^{\tilde{\mu}} p_{\tilde{\mu}} \quad (3.186)$$

で与えられる。よって、Virasoro 条件 $(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0$ および $(\tilde{L}_0 - 1)|\phi\rangle = 0$ から、

$$M^2 = \frac{1}{2} ((p_L^{25})^2 + (p_R^{25})^2) + \frac{2}{\alpha'} (N_L + N_R - 2) \quad (3.187)$$

$$= \left[\left(\frac{K}{R} \right)^2 + \left(\frac{RW}{\alpha'} \right)^2 \right] + \frac{2}{\alpha'} (N_L + N_R - 2) \quad (3.188)$$

となる。ただし、次の個数演算子を用いた。

$$N_L \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad N_R \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \quad (3.189)$$

同様に、 $(L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle = 2|\phi\rangle$ より、

$$N_R - N_L = WK \quad (3.190)$$

が得られる。

(3.188) より、質量スペクトラムは次で与えられる。ただし、可能なスペクトラムは (3.190) によって制限されている。

励起	$ N_L, N_R\rangle \otimes K, W\rangle$	質量	
基底	$ 0, 0\rangle \otimes 0, 0\rangle$	$-\alpha'/4$	(tachyon)
第 1 励起 ($R > \sqrt{\alpha'}$)	$ 0, 0\rangle \otimes 1, 0\rangle$	$-4/\alpha' + 1/R^2$	(tachyon)
第 1 励起 ($R < \sqrt{\alpha'}$)	$ 0, 0\rangle \otimes 0, 1\rangle$	$-4/\alpha' + (R/\alpha')^2$	(tachyon)
第 2 励起	$ 1, 1\rangle \otimes 0, 0\rangle$	0	(massless)
\vdots	\vdots		\vdots

このことから、コンパクト化空間の半径 R 次第で第 1 励起状態のおよびその質量が変化することが分かる。そこで $R \rightarrow \infty$ の場合を見ておこう。そのとき、弦の重心運動量 p^{25} は (3.181) から 0 になる、つまりコンパクト化されていないときと同じ状況に戻る。これは半径 R が無限大になることで、もはや X^{25} 方向がコンパクトではないことから分かる。

閉弦の T 双対性

T 双対性は異なる大きさを持つ 2 つの理論を結びつけるものである。具体的には

$$R \xleftrightarrow{T} R' = \frac{\alpha'}{R} \quad (3.191)$$

によって定義される。この変換の下で、運動量 p_L^{25} , p_R^{25} および質量 M^2 がどのように変わるかを見てみよう。

$$p_L^{25}(R) \xrightarrow{T} p_L^{25}(R') = K \left(\frac{1}{R'} \right) + W \left(\frac{R'}{\alpha'} \right) \quad (3.192)$$

$$= K \left(\frac{R}{\alpha'} \right) + W \left(\frac{1}{R} \right) \quad (3.193)$$

$$= p_L^{25}(R)|_{K \leftrightarrow W} \quad (3.194)$$

同様に、

$$p_R^{25}(R) \xrightarrow{T} p_R^{25}(R') = -p_R^{25}(R)|_{K \leftrightarrow W} \quad (3.195)$$

$$M^2(R) \xrightarrow{T} M^2(R') = M^2(R)|_{K \leftrightarrow W} \quad (3.196)$$

が示せる。よって、巻き数と KK 励起数の交換 $K \leftrightarrow W$ と T 変換を同時に行った操作の下で、

$$p_L^{25}(R) \xrightarrow{T, K \leftrightarrow W} p_L^{25}(R')|_{K \leftrightarrow W} = p_L^{25}(R) \quad (3.197)$$

$$p_R^{25}(R) \xrightarrow{T, K \leftrightarrow W} p_R^{25}(R')|_{K \leftrightarrow W} = -p_R^{25}(R) \quad (3.198)$$

$$M^2(R) \xrightarrow{T, K \leftrightarrow W} M^2(R')|_{K \leftrightarrow W} = M^2(R) \quad (3.199)$$

となる。また、 $\alpha_n^{25} = \alpha_n^{25}|_{K \leftrightarrow W}^T$ および $\tilde{\alpha}_n^{25} = -\tilde{\alpha}_n^{25}|_{K \leftrightarrow W}^T$ と定義しておけば

$$X_L^{25}(R, K, W) \xrightarrow{T, K \leftrightarrow W} X_L^{25}(R', W, K) = X_L^{25}(R, K, W) \quad (3.200)$$

$$X_R^{25}(R, K, W) \xrightarrow{T, K \leftrightarrow W} X_R^{25}(R', W, K) = -X_R^{25}(R, K, W) \quad (3.201)$$

となる。これらの性質は、コンパクト化半径、巻き数、KK 励起数 (R, W, K) の理論と (R', K, W) の理論が等価であることを意味している。片方の理論における巻き数はもう片方の理論では KK 励起数とみなされる。実際、上で見た Type IIA 理論と Type IIB 理論は次のように T 双対で結ばれる。10次元である超弦理論では9方向を半径 R の円にコンパクト化しよう。そのとき、

$$(X_L^9, X_R^9, \psi_L^9, \psi_R^9) \xrightarrow{T} (X_L^9, -X_R^9, \psi_L^9, -\psi_R^9) \quad (3.202)$$

と変換される。特に、 X^9, ψ^9 共に右進のみ -1 倍されることに注意しよう。このとき、Rセクターの生成消滅演算子もまた $d_n^9 \rightarrow -d_n^9$ となるが、 $d_0^9 = \Gamma^9/\sqrt{2}$ より、 Γ^9 の符号が変わることになる。よってカイラリティ演算子は $\Gamma = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{10} \rightarrow -\Gamma$ と変換される。これは右進波の Rセクターのカイラリティが反転することを意味する。つまり、

$$\text{IIA} : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_+, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_-), (\text{R}_+, \text{R}_-)$$

↓ T 変換

$$\text{IIB} : (\text{NS}_+, \text{NS}_+), (\text{R}_+, \text{NS}_+), (\text{NS}_+, \text{R}_+), (\text{R}_+, \text{R}_+)$$

となる。もし T 変換ではなく軸の反転を考えた場合、つまり

$$(X_L^9, X_R^9, \psi_L^9, \psi_R^9) \rightarrow (-X_L^9, -X_R^9, -\psi_L^9, -\psi_R^9) \quad (3.203)$$

を行った場合、左進・右進両方のカイラリティが反転する。よって軸の反転の下で IIA と IIA' (IIB と IIB') は同一になる。

開弦の T 双対性

ボソン弦の議論で見たように、自由端を持つ開弦は $p_L^\mu = p_R^\mu$ より巻き付くことができないため $R \leftrightarrow R', K \leftrightarrow W$ による T 変換の定義をすることができない (KK 励起数は持てる)。逆に、固定端を持つ開弦は $p_L^\mu = -p_R^\mu$ より巻き付けるが KK 励起数は持てない。そこで、開弦における新たな T 変換を

$$(X_L^{25}, X_R^{25}) \xrightarrow{T} (X_L^{25}, -X_R^{25}) \quad (3.204)$$

で定義しよう。また、自由端開弦におけるモード展開を次のように定義しておこう。

$$X_L^\mu = \frac{x^\mu + x_T^\mu}{2} + \alpha' p^\mu (\tau + \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (3.205)$$

$$X_R^\mu = \frac{x^\mu - x_T^\mu}{2} + \alpha' p^\mu (\tau - \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \quad (3.206)$$

x_T^μ は T 変換後の x^μ を表す。またコンパクト化方向では $p^{25} = K/R$ に注意 ($W = 0$ にも注意)。追加項 x_T^μ が左進と右進を足し合わせたとき消えるため、これは我々が以前得たモード展開 (3.46) と矛盾しない。このとき T 変換は、

$$X_L^{25} \xrightarrow{T} X_L^{25} = \frac{x^{25} + x_T^{25}}{2} + \alpha' p^{25} (\tau + \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (3.207)$$

$$X_R^{25} \xrightarrow{T} -X_R^{25} = -\frac{x^{25} - x_T^{25}}{2} - \alpha' p^{25} (\tau - \sigma) - i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in(\tau - \sigma)} \quad (3.208)$$

となる。よって、

$$X^{25} \xrightarrow{T} x_T^{25} + 2\alpha' p^{25} \sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (3.209)$$

これはまさに固定端開弦におけるモード展開である。すなわち、開弦において T 変換は Neumann(自由端)境界条件と Dirichlet(固定端)境界条件を入れ替える。また、自由端が巻き数 0、KK 励起数 K のとき、 T 変換で写る固定端は巻き数 K 、KK 励起数 0 を持つ。

3.2.3 D-ブレーン

T 双対性の下で開弦の自由端と固定端が入れ替わることを見た。そこで、開弦の端が自由に動くことのできる時空間を考察していこう。この時空間は D-brane と呼ばれる。ボソン弦の開弦が全ての次元で自由端であると考えてみよう。その端は 26 次元時空間を自由に動けるので D25-brane に固定されていると考える。これを 25 次元方向に T 変換すると、弦の端は 25 次元方向に関して固定端となる。よって T 変換後の開弦の端は 25 次元時空間に固定されている、つまり D24-brane に固定されていると考える。一般には 0 から p 次元までが自由端を、 $p+1$ から $D-1$ 次元までが固定端を持つ場合、弦の端は Dp -brane に固定されていることになる。 T 変換は Dp -brane と $D(p-1)$ -brane を結びつける対称性となる。

再びボソン弦の量子化を弦の端が Dp -brane に固定されているとして考えていく。以前量子化したときと同じように光錐ゲージをとっておこう。すなわち、

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1), \quad X^n \quad (n = 2, 3, \dots, p), \quad X^d \quad (d = p+1, p+2, \dots, D-1) \quad (3.210)$$

とする。ここで X^\pm および X^n (NN 座標と呼ばれる) は Neumann 条件

$$\partial_\sigma X|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (3.211)$$

を満たす。 X^d (DD 座標と呼ばれる) は Dirichlet 条件

$$X|_{\sigma=0,\pi} = \bar{x}_{0,\pi} \quad (\text{const}) \quad (3.212)$$

を満たす。このとき、 $\bar{x}_{0,\pi}$ は弦の端点 ($\sigma = 0, \pi$) が固定されている X^d 方向の座標を意味する。弦の両端が同じ D-brane に接続されている場合、 $\bar{x}_0 = \bar{x}_\pi$ である。モード展開は各座標で次のように行われる。

$$X^{\pm,n}(\tau, \sigma) = x^{\pm,n} + 2\alpha' p^{\pm,n} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^{\pm,n} \cos m\sigma \quad (3.213)$$

$$X^d(\tau, \sigma) = \bar{x}_0^d + 2\alpha' p^d \sigma + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^d \sin m\sigma, \quad p^d = \left(\frac{\bar{x}_\pi^d - \bar{x}_0^d}{2\pi\alpha'} \right) \quad (3.214)$$

これらがそれぞれ Neumann 条件、Dirichlet 条件を満たしていることは明らかだろう。 X^d 方向の運動量が弦の両端の座標 (D-brane の位置) によって決まることは留意すべきである。以前の解析で正準交換関係および Virasoro 条件を課せば質量殻条件 (3.102) が得られたが、今、 X^d 方向はコンパクト化されており、質量 M^2 の定義は次のように修正される。

$$M^2 = 2p^+ p^- - \sum_{n=2}^p (p^n)^2, \quad -p^2 = M^2 - \sum_{d=p+1}^{D-1} (p^d)^2 \quad (3.215)$$

よって、質量殻条件 (3.102) も修正を受けて次で与えられることになる。

$$M^2 = \sum_{d=p+1}^{D-1} \left(\frac{\bar{x}_\pi^d - \bar{x}_0^d}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^p m\alpha_{-m}^n \alpha_m^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=p+1}^{D-1} m\alpha_{-m}^d \alpha_m^d - 1 \right) \quad (3.216)$$

質量スペクトラムを考えよう。全ての状態は、弦の両端が接続されている D-branes の位置の差 $(\bar{x}_\pi^d - \bar{x}_0^d)$ だけその質量が増加している。つまり、開弦が D-brane に接続されて伸びているとき、その伸びた距離の分だけ張力が働いて質量を持つことになるのである。特に、基底状態は

$$M^2 = \sum_{d=p+1}^{D-1} \left(\frac{\bar{x}_\pi^d - \bar{x}_0^d}{2\pi\alpha'} \right)^2 - \frac{1}{\alpha'} \quad (3.217)$$

となっている。 $(\bar{x}_\pi^d - \bar{x}_0^d)$ の値次第では tachyonic、massless、massive のどれにもなり得ることが分かるだろう。

では、複数の D-branes が同じ位置に存在する状況を考えてみよう。開弦の片方の端点に、 N 枚の同一 D-branes が重なっているとす。このとき、開弦の端点はどの D-brane に接続されているかによって、 $i = 1, 2, \dots, N$ 個の状態を持てる。これを両端に拡張すれば、開弦の状態は一般的に

$$\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_\pi} \lambda_{ij} |i, j\rangle \quad (3.218)$$

と書ける。ここで端点 $\sigma = 0, \pi$ における D-brane の重なった枚数をそれぞれ N_0, N_π とした。また、 λ_{ij} は Chan-Paton 因子と呼ばれる行列である。 i の足は $U(N_0)$ 群の (反) 基本表現、 j の足は $U(N_\pi)$ 群の (反) 基本表現となる。特に i の足に $U(N)$ 群の基本表現、 j の足に $U(N)$ 群の反基本表現を選べば、開弦は $U(N)$ 群の随伴表現ゲージ場を与える。これは Chan-Paton (C-P) charge と呼ばれ、開弦が運ぶことのできるチャージである。

最後に、D-brane と閉弦の関係を見ておこう。D-brane は Ramond-Ramond (R-R) charge を持つことができる。つまり、D-brane は閉弦の R-R セクターに現れるゲージ場と couple することができるのである。例えば 2 形式のゲージ場 $A_{\mu\nu}$ が存在したと考える。このとき、次のような相互作用項を世界面の作用に含めることができる。

$$S_{int} = e \int A = \frac{1}{2} e \int d\tau d\sigma A_{\mu\nu} (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu) \quad (3.219)$$

これは D1-brane と 2 形式ゲージ場の coupling である。より一般的には Dp -brane は $(p+1)$ 形式ゲージ場と couple する。

$$S_{int} = g \int A = g \epsilon^{n_1 n_2 \dots n_{p+1}} \int d^{p+1} \xi A_{m_1 \dots m_{p+1}} (\partial_{n_1} X^{m_1} \dots \partial_{n_{p+1}} X^{m_{p+1}}) \quad (3.220)$$

これは D-brane がただの時空に固定されたオブジェクトではなく、弦と相互作用する力学的オブジェクトであることを示している。実際、D-brane の力学は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用によって記述される。そのとき、NS-NS セクター (グラビトン、ディラトン) による引力と R-R セクター (ゲージ場) による斥力が釣り合うことが D-brane の安定条件となることが見つかる。言い換えれば、D-brane が安定して存在するには R-R セクターとの coupling が必要となる。これを確かめるには D-brane の力学を調べていく必要があるが、ここではこれ以上立ち入らないことにする。

3.3 モデル構築

前節で触れたように、無矛盾な超弦理論は 5 つあり、我々はそのうち Type IIA および Type IIB 超弦理論について調べた。我々はこれらの超弦理論が標準模型を超える物理理論であると期待する。これらの理論は標準模型のエネルギースケールと比べて高エネルギー (ストリングスケール) の理論である。よって、もし超弦理論が本当に標準模型を超える物理理論であるのなら、標準模型のエネルギースケールにおいてそれらは標準模型を再現するはずである。

超弦理論の低エネルギー有効理論を考えるにあたって、我々は標準模型との次元の違いにも注意しなければならない。標準模型が 4 次元の理論であるのに対して、超弦理論は 10 次元の理論である。つまり我々は余剰 6 次元のコンパクト化を考えなければならない。そこで、本節ではトーラスコンパクト化に焦点を当て、標準模型を再現するようなモデルの例を試みていく。

$$\mathcal{M}^{10} = \mathbb{R}^{1,3} \times T^2 \times T^2 \times T^2 \quad (3.221)$$

我々は余剰 6 次元を 2 次元トーラス T^2 の 3 つの積とみなす。トーラスコンパクト化は可能なコンパクト空間の内、最もシンプルな幾何であり、またその上での波動関数は解析的に解くことができる。すなわち、観測可能量について、実験値との定量的な比較が可能である。さらに、背景磁場を入れることで、4 次元で chiral かつ世代を持つ理論が得られることが知られており、標準模型の再現にあたってトーラスコンパクト化やその orbifolds を出発点とすることが好ましいのである。ここでまとめるモデル構築に関しては [9] 参照。

3.3.1 Type IIA intersecting D6-ブレーンモデル

3.2.3 節で見たように、開弦の両端に D-brane を複数枚重ねることで $U(N)$ 群の随伴表現ゲージ場が得られる。そこで、どのように D-branes を配置すれば標準模型のゲージ群 $U(3)_C \times U(2)_L \times U(1)_Y$ が得られるかを考えていこう。まず、4 次元 Minkowski 時空全体と、各トーラスに 1 次元ずつ跨るような D6-brane を導入する。D6-brane と couple できるのは 7 形式ゲージ場であるが、それは 3 形式ゲージ場の Hodge 双対をとることで得られる。3.2.1 節で見たように、Type

IIA 理論では R-R ゲージ場として 3 形式ゲージ場が現れた。よって、このモデルは Type IIA 理論に基づく。

では、2 つの $D6_{a/b}$ -branes を次の図 3.1 のように各トーラスに配置してみよう。

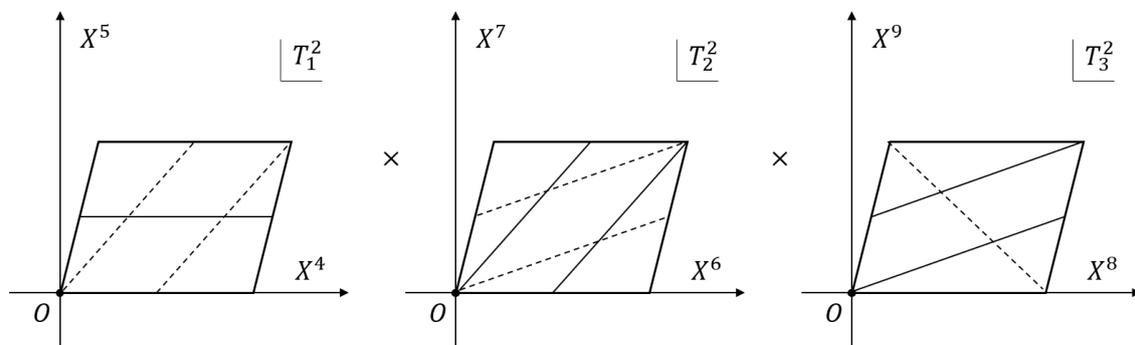


図 3.1: トーラス上に配置された 2 つの D-branes。実線は $D6_a$ -brane、点線は $D6_b$ -brane を表す。

このとき、 $D6_{a/b}$ -branes に接続された開弦を調べていく。図 3.2 に示したように $(2+2i)-(3+2i)$ 平面 ($i = 1, 2, 3$) を考えよう。

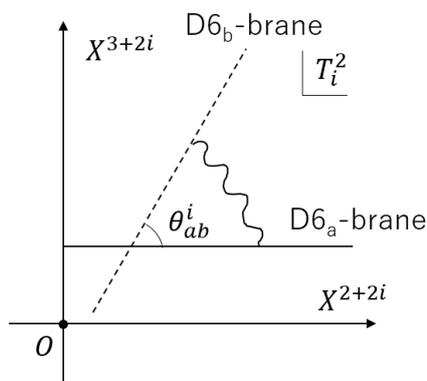


図 3.2: $(2+2i)-(3+2i)$ 平面 ($i = 1, 2, 3$) 上の $D6_{a/b}$ -branes に接続された開弦

$D6_a$ -brane が N_a 枚、 $D6_b$ -brane が N_b 枚重なって存在しているとすれば、この開弦は $U(N_a) \times U(\bar{N}_b)$ ゲージ群の双基本表現となる。このとき、開弦の境界条件が D-branes の交差角 θ_i に依存することに注意しなければならない。

1. $\sigma = 0$ の端点は X^{2+2i} 方向については Neumann、 X^{3+2i} 方向については Dirichlet 境界条件を持つ。

$$\partial_\sigma X^{2+2i}|_{\sigma=0} = 0, \quad \partial_\tau X^{3+2i}|_{\sigma=0} = 0 \quad (3.222)$$

2. $\sigma = \pi$ の端点は Y^{2+2i} 方向については Neumann、 Y^{3+2i} 方向については Dirichlet 境界条件を持つ。

$$\partial_\sigma Y^{2+2i}|_{\sigma=\pi} = 0, \quad \partial_\tau Y^{3+2i}|_{\sigma=\pi} = 0 \quad (3.223)$$

ただし、新たな座標 Y^{2+2i} , Y^{3+2i} は次で定義される。

$$\begin{pmatrix} Y^{2+2i} \\ Y^{3+2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{2+2i} \\ X^{3+2i} \end{pmatrix} \quad (3.224)$$

運動方程式 $\partial_\pm X^m = 0$ の解は一般に次のモード展開 (フーリエ展開) で書くことができる。

$$\partial_\pm X^m(\tau \mp \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \int dk \alpha_{\mp, k}^m e^{-ik(\tau \mp \sigma)} \quad (3.225)$$

これに上記の境界条件を適用していけば、整合条件

$$\alpha_{+, k}^{2+2i} = \alpha_{-, k}^{2+2i} \equiv \alpha_k^{2+2i}, \quad \alpha_{+, k}^{3+2i} = -\alpha_{-, k}^{3+2i} \equiv -\alpha_k^{3+2i}, \quad (3.226)$$

$$\sin(k\pi \mp \theta_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = n \pm \frac{\theta_i}{\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.227)$$

が見つかる。このことから、モード展開が

$$X^{2+2i}(\tau, \sigma) = x^{2+2i} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_{n+\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{-i(n+\theta_i/\pi)\tau} - \alpha_{-n-\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{i(n+\theta_i/\pi)\tau} \right) \frac{\cos(n + \theta_i/\pi)\sigma}{n + \theta_i/\pi} \quad (3.228)$$

$$X^{3+2i}(\tau, \sigma) = x^{3+2i} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_{n+\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{-i(n+\theta_i/\pi)\tau} - \alpha_{-n-\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{i(n+\theta_i/\pi)\tau} \right) \frac{\sin(n + \theta_i/\pi)\sigma}{n + \theta_i/\pi} \quad (3.229)$$

と求まる。ここで、 $\theta_i \rightarrow 0$ とすると、自由端開弦のモード展開 (3.46) と固定端開弦のモード展開 (3.48) が運動量項を除いて再現される。これは $\partial_\pm X$ の積分を行う際、モード展開の指数関数部分が 1 ではないと仮定して積分を行ったためである。

同様にしてスピノル場 $\psi^{2+2i/3+2i}$ のモード展開も得ることができる。境界条件は

$$\psi_+^{2+2i}|_{\sigma=0} = \psi_-^{2+2i}|_{\sigma=0}, \quad \psi_+^{3+2i}|_{\sigma=0} = -\psi_-^{3+2i}|_{\sigma=0} \quad (3.230)$$

$$\phi_+^{2+2i}|_{\sigma=\pi} = \pm \phi_-^{2+2i}|_{\sigma=\pi}, \quad \phi_+^{3+2i}|_{\sigma=\pi} = \mp \phi_-^{3+2i}|_{\sigma=\pi} \quad (3.231)$$

である。ここで符号 \pm は R, NS セクターに対応する。カイラリティの記号は下付き添え字であるので混同に注意。新たな座標 ϕ_\pm^{2+2i} , ϕ_\pm^{3+2i} は次で定義した。

$$\begin{pmatrix} \phi_\pm^{2+2i} \\ \phi_\pm^{3+2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\pm^{2+2i} \\ \psi_\pm^{3+2i} \end{pmatrix} \quad (3.232)$$

$\sigma = 0$ の ψ^{3+2i} 方向の境界条件はボソン座標 X^{3+2i} で課した Dirichlet 条件に対応している。開弦の T 変換の議論にて Neumann 条件と Dirichlet 条件が入れ替わることを見たが、 T 変換は ψ については $(\psi_-, \psi_+) \rightarrow (\psi_-, -\psi_+)$ で与えられるので、Neumann 条件に対応する $\psi^{2+2i}|_{\sigma=0}$ と比べて $\psi^{3+2i}|_{\sigma=0}$ は逆の符号を持つことになるのである。

モード展開は次のように得られる。

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}^{2+2i} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(d_{n+\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{-i(n+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} + d_{-n-\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{i(n+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} \right) \\ \psi_{\pm}^{3+2i} &= \mp \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(d_{n+\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{-i(n+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} + d_{-n-\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{i(n+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} \right)\end{aligned}\quad (\text{R セクター}) \quad (3.233)$$

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}^{2+2i} &= \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \left(b_{r+\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{-i(r+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} + b_{-r-\theta_i/\pi}^{2+2i} e^{i(r+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} \right) \\ \psi_{\pm}^{3+2i} &= \mp \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \left(b_{r+\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{-i(r+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} + b_{-r-\theta_i/\pi}^{3+2i} e^{i(r+\theta_i/\pi)(\tau \mp \sigma)} \right)\end{aligned}\quad (\text{NS セクター}) \quad (3.234)$$

このように、交差した D-branes の間の開弦を考えると、モード展開がその角度 θ_i の分だけずれることが分かった。これは超弦の状態に影響を与える。正規順序定数 a_R, a_{NS} が D-branes の交差によってどのように変化するかを見てみよう。我々は a_R を超 Virasoro 条件 $0 = F_0^2|0\rangle_R = L_0|0\rangle_R = a_R|0\rangle_R$ から求めたのだった。超 Virasoro 条件 (と代数関係 $F_0^2 = L_0$) は超弦作用の持つ世界面座標に関する対称性からの帰結であり、明らかに D-branes の交差角には依存しない。よって現状でも $a_R = 0$ のままである。対して a_{NS} は第 1 励起状態 $b_{-1/2}^i|0\rangle_{NS}$ が massless となるようにして求められたのだった。そして massless 性は理論の 10 次元時空における Lorentz 不変性を保証していた。しかし、低エネルギースケールを考えたとき、つまり標準模型を考えたとき、少なくとも 4 次元での Lorentz 不変性が保たれていればよいので全ての第 1 励起状態が massless である必要はない。そこで、 a_{NS} を時間順序積と正規順序積の差から求めることにしよう。注意として、超弦理論を高エネルギースケールにて無矛盾にするため $D = 10$ が既に要請されている。よって、

$$\begin{aligned}a_{NS} &= -2 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{i=1}^3 \left[2 \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{\theta_i}{\pi} \right) \right] + 2 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) - \sum_{i=1}^3 \left[2 \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} + \frac{\theta_i}{\pi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\end{aligned}\quad (3.235)$$

と求まる。正規順序定数は質量殻条件に含まれているため、その変化は質量の変化を意味する。このことから、時空のフェルミオンである R セクター基底状態の質量は交差角 θ_i に依存しないが、時空のボソンである NS セクター基底状態の質量は θ_i に影響されると分かる。すなわち、明らかにフェルミオンとボソンの間の入れ替えの下での対称性は失われてしまっている。我々が時空の SUSY を少なくとも 4 次元で保つためには、適切な交差角の設定が不可欠である。

また、R セクターの質量が不変でも、生成消滅演算子が満たす交換関係は

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (3.236)$$

$$\{d_{m+\theta_i/\pi}^r, d_{n+\theta_i/\pi}^s\} = \eta^{rs} \delta_{m,-n}, \quad r, s \in \{2+2i, 3+2i\} \quad (3.237)$$

となっていて、 d_0^μ の代数関係は明らかに 4 次元の Clifford 代数である。よって、基底状態は 4 次元のカイラリティを持つことになる。

以上で、D6-branes の交差点における開弦から 4 次元のカイラリティを持つ massless フェルミオンが得られると分かった。また、交差角を調整することで massless のボソンが現れ得ることも分かった。最後にフェルミオンの再現に焦点を当て、次の図 3.3 のような D-branes 配置を考えてみよう。

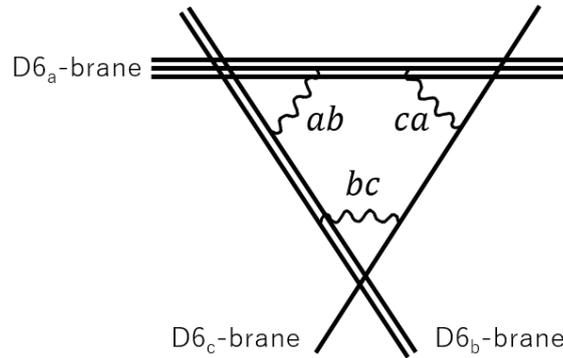


図 3.3: ゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を up to $U(1)$ で再現する D-branes 配置

このとき、 ab セクターの開弦から $U(3) \times U(2)$ で変換するフェルミオン場、 ca セクターの開弦から $U(1) \times U(3)$ で変換するフェルミオン場、 bc セクターの開弦から $U(2) \times U(1)$ で変換するフェルミオン場が見つけれられる。これらは順に left-handed quark、right-handed quark、higgsino とみなされる。また、世代数については、次図 3.4 のように複数の交差点を持つよう D-branes を配置してやればよい。

このようにして、トーラスコンパクト化に基づく intersecting D6-branes モデルでは D-branes の交差数や枚数、角度を調整することで標準模型の世代構造、ゲージ群を再現しうることが分かった。しかし、上で見てきたモデルはあくまで Toy Model であり、標準模型を正確に再現するためにはさらなる考察が必要である。例えば [10] 参照。

3.3.2 Type IIB magnetized D9-ブレンモデル

標準模型を再現するためのもう 1 つのアプローチとして magnetized D9-branes モデルがある。D9-branes と couple するのは 10 形式ゲージ場であるが、それは Type IIA、Type IIB 超弦

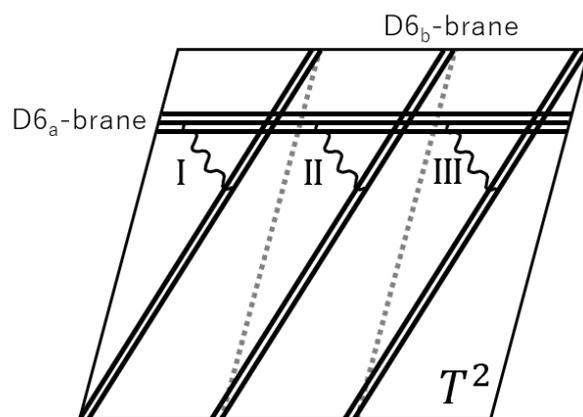


図 3.4: 3 世代を再現する D-branes 配置。D6_b-brane はトーラス上で 3 回巻き付いている。

理論のどちらにも現れていない。しかし、D9-brane は特定の条件の下 Type IIB 超弦理論において安定的に存在できることが知られている。よって、このモデルは Type IIB 理論に基づく。

Intersecting D6-branes モデル同様、6次元コンパクト空間として $T^2 \times T^2 \times T^2$ を考える。その上で N 枚の D9-branes が重なって存在しているとしよう。つまり開弦の端点が $U(N)$ ゲージ群の足を持つ設定である。さらに、constant な $U(1)$ 背景磁場、すなわち $U(1)$ ゲージ場の真空期待値を導入する。後ほど見るようにゲージ場の真空期待値は $U(N)$ ゲージ群をより小さな群構造へと破ることができる。また $U(1)$ ゲージ場が開弦の端点と couple 可能なことから、開弦のモード展開において新たな寄与が現れる。このような状況の下での開弦のモード展開を調べていき、背景磁場による効果を確認していこう。

まずは $(2+2i)$ - $(3+2i)$ 平面 ($i = 1, 2, 3$) に焦点を当てよう。D9_{a/b}-branes が $(2+2i)$ - $(3+2i)$ 平面に存在し、それぞれ背景磁場 F_a, F_b を持つとする。さらに開弦の端点 $\sigma = 0$ は D9_a-brane に、 $\sigma = \pi$ は D9_b-brane に接続されているとする。D9-branes に接続されたこれらの開弦の端点は D9-branes 上では 1次元の世界線を描く。よって開弦の端点は D9-branes に導入した背景磁場 ($U(1)$ ゲージ場) と自然に couple できる。これを踏まえて背景磁場の下での超弦作用を書き下す。

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \partial X \cdot \partial X + \int d\tau (A_a)_\mu \partial_\tau X^\mu |_{\sigma=0} - \int d\tau (A_b)_\mu \partial_\tau X^\mu |_{\sigma=\pi} \quad (3.238)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \partial X \cdot \partial X + \int d\tau \frac{1}{2} (F_a)_{\mu\nu} X^\nu \partial_\tau X^\mu |_{\sigma=0} - \int d\tau \frac{1}{2} (F_b)_{\mu\nu} X^\nu \partial_\tau X^\mu |_{\sigma=\pi} \quad (3.239)$$

ただし $F = dA$ より $A_\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} X^\nu$ が成り立ち、それを用いた。変分をとって境界項を確認め

よう。

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma 2\partial X \cdot \partial\delta X - \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma 2\partial^2 X \cdot \delta X \\ & + \int d\tau \frac{1}{2} 2(F_a)_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \delta X^\nu|_{\sigma=0} - \int d\tau \frac{1}{2} 2(F_b)_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \delta X^\nu|_{\sigma=\pi} \end{aligned} \quad (3.240)$$

これより、境界条件が

$$(\partial_\sigma X^\mu + \pi F_\alpha^{\mu\nu} \partial_\tau X^\nu)|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (3.241)$$

求まる。ただし、

$$F_\alpha^{\mu\nu}|_{\sigma=0} = F_a^{\mu\nu}, \quad F_\alpha^{\mu\nu}|_{\sigma=\pi} = -F_b^{\mu\nu} \quad (3.242)$$

とした。ここで次のような背景磁場を選んでみる。

$$(F_a)_{2+2i,3+2i} = 0, \quad (F_b)_{2+2i,3+2i} = -\frac{\tan\theta_i}{\pi} \quad (3.243)$$

すると、境界条件は、

$$\partial_\sigma X^{2+2i}|_{\sigma=0} = 0, \quad \partial_\sigma X^{3+2i}|_{\sigma=0} = 0 \quad (3.244)$$

$$\partial_\sigma Y^{2+2i}|_{\sigma=\pi} = 0, \quad \partial_\sigma Y^{3+2i}|_{\sigma=\pi} = 0 \quad (3.245)$$

となる。ただし、新たな座標 Y^{2+2i}, Y^{3+2i} は、

$$\begin{pmatrix} Y^{2+2i} \\ Y^{3+2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{2+2i} \\ X^{3+2i} \end{pmatrix} \quad (3.246)$$

で定義される。これらの境界条件は、intersecting D6-branes モデルにおける X の境界条件 (3.222), (3.223) について $\partial_\tau X^{3+2i} \rightarrow \partial_\sigma X^{3+2i}$ としたものと一致する。この変換は $3+2i$ 方向への T 変換であるため、magnetized D9-branes モデルと intersecting D6-branes モデルが T 双対であることが分かる。よって、magnetized D9-branes モデルにおいても massless な 4次元カイラリティを持つフェルミオンが見つかることが可能である。

こうして magnetized D9-branes モデルと intersecting D6-branes モデルが等価であることが分かった。また、magnetized D9-branes モデルにおける背景磁場が intersecting D6-branes モデルにおける D-branes の交差角に対応すると分かった。これらの事実を踏まえて、次章では magnetized D9-branes モデルに基づいた標準模型の再現を試みていく。その際、我々はコンパクト空間であるトーラス T^2 が持つモジュラー対称性に注目する。

第4章 フラックスコンパクト化モデルとモジュラー対称性

本章では magnetized D9-branes モデルにおける $T^2 \times T^2 \times T^2$ コンパクト化に基づいたモデルビルディングを考察する。標準模型の再現にあたり、我々は湯川結合に焦点を当てる。湯川結合は2つのフェルミオンとヒッグス場の結合である。第2章で見たように、標準模型では湯川結合は

$$S_Y = \int d^4x \bar{\psi}_L g H \psi_R \quad (4.1)$$

という相互作用項として現れる。このとき、ヒッグス場 H の真空期待値 $\langle H \rangle$ を考えると、湯川結合からフェルミオンの質量項

$$\int d^4x \bar{\psi}_L g \langle H \rangle \psi_R = \langle H \rangle \begin{pmatrix} \bar{\psi}_i & \bar{\psi}_j & \bar{\psi}_k \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} g_{ii} & g_{ij} & g_{ik} \\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk} \\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{pmatrix}_R \quad (4.2)$$

が得られる。しかし、標準模型においてフェルミオンとゲージボソンの相互作用項の固有状態基底 (interaction eigenbasis)、

$$|\text{Int}\rangle = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

とフェルミオン質量項の固有状態基底 (mass eigenbasis)、

$$|\text{Mass}\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\text{I}} \\ \psi_{\text{II}} \\ \psi_{\text{III}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

は異なる。ここで I, II, III は世代と呼ばれ、表記した通り標準模型では3世代フェルミオンが現れる。2つの基底は基底変換行列 U によって結ばれる。

$$|\text{Int}\rangle = U |\text{Mass}\rangle \quad (4.5)$$

このとき、次で定義される行列

$$V \equiv (U^1)^\dagger U^2 \quad (4.6)$$

はクォークに対しては CKM 行列、レプトンに対しては PMNS 行列と呼ばれ、実験的に観測可能な物理量である。ただし、 $U^{1,2}$ の上付き添え字は $SU(2)$ 2 重項の第 1 成分と第 2 成分を表す。これらの行列はフェルミオンの各世代間の相互作用の強さを表している。質量行列の固有値 (フェルミオンの質量) の比もまた観測可能な物理量である。実験から、フェルミオンの質量が世代によって異なることも分かっている。

例としてクォークの質量比と CKM 行列の実験値を示しておこう。

	実験値
$(m_u, m_c, m_t)/m_t$	$(1.26 \times 10^{-5}, 7.38 \times 10^{-3}, 1)$
$(m_d, m_s, m_b)/m_b$	$(1.12 \times 10^{-3}, 2.22 \times 10^{-2}, 1)$
$ V_{\text{CKM}} \equiv (U_L^u)^\dagger U_L^d $	$\begin{pmatrix} 0.974 & 0.227 & 0.00361 \\ 0.226 & 0.973 & 0.0405 \\ 0.00854 & 0.0398 & 0.999 \end{pmatrix}$

表 4.1: クォークの質量比と CKM 行列の実験値 [11]

これらのフェルミオンの持つ世代間の構造はフレーバー構造と呼ばれている。超弦理論のトーラスコンパクト化を用いて、フレーバー構造、すなわちフェルミオンの質量と CKM/PMNS 行列の実験値を再現するのが本研究の目的である。特に、我々はトーラスの持つモジュラー対称性がフレーバー構造の起源になっていると考え、トーラス上の波動関数が持つモジュラー対称性を考察する。

4.1 $T^2 \times T^2 \times T^2$ 上の $U(N)$ ゲージ理論

最初に超弦理論の低エネルギー有効場理論である 10 次元 $U(N)$ super Yang Mills 理論を考えよう [1]。背景時空は $\mathbb{R}^{1,3} \times T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$ とする。作用は次で書かれる。

$$S = \int_{M^4} d^4x \prod_{i=1,2,3} \int_{T_i^2} dy_{2+2i} dy_{3+2i} \left[-\frac{1}{4g^2} \text{Tr}(F^{MN} F_{MN}) + \frac{i}{2g} \text{Tr}(\bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda) \right] \quad (4.7)$$

ここで $M, N = 0, \dots, 9$ である。また、 λ は 10 次元のゲージノ場、 F_{MN} はベクトル場 A_M の場の強さで、次で与えられる。

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - i[A_M, A_N] \quad (4.8)$$

共変微分 $D_M \lambda$ は

$$D_M \lambda = \partial_M \lambda - i[A_M, \lambda] \quad (4.9)$$

で与えられる。この作用は 10 次元時空の (大域的)SUSY 変換および $U(N)$ ゲージ変換

$$\lambda \rightarrow U \lambda U^{-1} \quad (4.10)$$

$$A_M \rightarrow U A_M U^{-1} - (\partial_M U) U \quad (4.11)$$

の下で不変な作用となっている。ただし、 U は $U(N)$ の随伴表現に属するゲージ変換である。我々はフェルミオンの湯川結合項に興味があるのでフェルミオン項に注目しよう。それは 4 次元の湯川結合項を次のように含んでいる。

$$\frac{i}{2g} \text{Tr}(\bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda) = \frac{i}{2g} \text{Tr}(-i \bar{\lambda} \Gamma^M [A_M, \lambda]) + \dots \quad (4.12)$$

$$= \frac{i}{2g} \text{Tr}(-i \bar{\lambda} \Gamma^\mu [A_\mu, \lambda]) + \frac{i}{2g} \text{Tr}(-i \bar{\lambda} \Gamma^m [A_m, \lambda]) + \dots \quad (4.13)$$

$$(\mu = 0, 1, 2, 3 \quad m = 4, 5, 6, 7, 8, 9) \quad (4.14)$$

ここで 2 行目第 2 項が 4 次元の湯川結合項である。余剰次元方向のベクトル場 A_m は 4 次元においてはスカラー場とみなされることに注意する。

次に場を 4 次元時空 $\mathbb{R}^{1,3}$ と各トーラス T_i^2 ($i = 1, 2, 3$) の関数へと分解する。

$$\lambda(x, y) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1 n_2 n_3}(x) \otimes \prod_{i=1,2,3} \psi_{n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) \quad (4.15)$$

$$A_M(x, y) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \phi_{M, n_1 n_2 n_3}(x) \otimes \prod_{i=1,2,3} \phi_{M, n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) \quad (4.16)$$

これは Kaluza-Klein(KK) 分解と呼ばれる操作である。また展開モード n_1, n_2, n_3 は Kaluza-Klein indices と呼ばれる。今、我々はこの展開モードを、トーラス上の Dirac 方程式または Klein-Gordon 方程式

$$i \not{D}_2 \psi_{n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) = m_{n_i} \psi_{n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) \quad (4.17)$$

$$\Delta_2 \phi_{M, n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) = M_{M, n_i}^2 \phi_{M, n_i}(y_{2+2i}, y_{3+2i}) \quad (4.18)$$

を満たす関数とする。我々は低エネルギー有効理論を考えているので、10 次元の場は 10 次元の massless 運動方程式に従う。よって、

$$0 = i \not{D}_{10} \lambda \quad (4.19)$$

$$= \sum_{n_1, n_2, n_3} i \not{D}_4 \psi_{n_1 n_2 n_3} \otimes \prod_{i=1,2,3} \psi_{n_i} + \sum_{j=1,2,3} \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1 n_2 n_3} \otimes (i \not{D}_2 \psi_{n_j}) \otimes \prod_{i \neq j} \psi_{n_i} \quad (4.20)$$

$$= \sum_{n_1, n_2, n_3} \left(m_{4, n_1 n_2 n_3} + \sum_{j=1,2,3} m_{n_j} \right) \psi_{n_1 n_2 n_3} \otimes \prod_{i=1,2,3} \psi_{n_i} \quad (4.21)$$

となるが、これは4次元の質量がコンパクト空間部分の質量によって与えられることを意味している。 A_m に対しても同様である。低エネルギースケールにおいては場のコンパクト空間部分に関して基底状態 (massless 状態) を考えるのが妥当であるが、それは丁度4次元の質量が massless になることに対応しており、標準模型の再現においても都合がよい。

では KK 分解を湯川結合項に適用しよう。(4.15) と (4.16) を湯川結合項に代入すると、

$$S_Y = \frac{1}{2g^2} \sum_{I,J,K} \left\{ \int d^4x \bar{\psi}_{I_1 I_2 I_3}^{ab} \phi_{m, J_1 J_2 J_3}^{bc} \psi_{K_1 K_2 K_3}^{ca} \cdot \prod_{i=1,2,3} \left(\int_{T_i^2} dy_{2+2i} dy_{3+2i} \psi_{I_i}^{ab\dagger} \phi_{m, J_i}^{bc} \Gamma^m \psi_{K_i}^{ca} \right) \right. \\ \left. - \int d^4x \bar{\psi}_{I_1 I_2 I_3}^{ab} \phi_{m, J_1 J_2 J_3}^{ca} \psi_{K_1 K_2 K_3}^{bc} \cdot \prod_{i=1,2,3} \left(\int_{T_i^2} dy_{2+2i} dy_{3+2i} \psi_{I_i}^{ab\dagger} \phi_{m, J_i}^{ca} \Gamma^m \psi_{K_i}^{bc} \right) \right\} \quad (4.22)$$

が得られる。よって湯川結合は

$$Y_{(1)}^{IJK} = \frac{1}{2g^2} \prod_{i=1,2,3} \left(\int_{T_i^2} dy_{2+2i} dy_{3+2i} \psi_{I_i}^{ab\dagger} \phi_{m, J_i}^{bc} \Gamma^m \psi_{K_i}^{ca} \right) \\ Y_{(2)}^{IJK} = \frac{1}{2g^2} \prod_{i=1,2,3} \left(\int_{T_i^2} dy_{2+2i} dy_{3+2i} \psi_{I_i}^{ab\dagger} \phi_{m, J_i}^{ca} \Gamma^m \psi_{K_i}^{bc} \right) \quad (4.23)$$

となってコンパクト化空間上における波動関数の overlap 積分で与えられることになる。なお、これまでの議論は $T^2 \times T^2 \times T^2$ 以外のコンパクト空間に対しても可能である。

4.2 トーラス上のモジュラー対称性とモジュラー形式

我々は余剰6次元のコンパクト化としてトーラスコンパクト化に注目した。コンパクト空間の幾何学的性質、例えば境界条件など、はそこ上の波動関数の形に制限を与える。そこでトーラスの持つ幾何学的対称性、モジュラー対称性について調べよう。

モジュラー変換

図4.1のように、2次元トーラス T^2 は $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ とみなされる。

ここで \mathbb{C} は1次元の複素平面、 Λ は2つの基底ベクトル e_k ($k = 1, 2$) によって張られる2次元格子である。 T^2 上の複素座標は

$$z \equiv \frac{u}{e_1} \quad (4.24)$$

で定義される。ただし、ここで u は \mathbb{C} 上の複素座標である。 T^2 は $\tau \equiv e_2/e_1$ ($\text{Im}\tau > 0$) で定義される量 τ 、複素構造モジュラス (complex structure modulus) によって特徴づけられる。

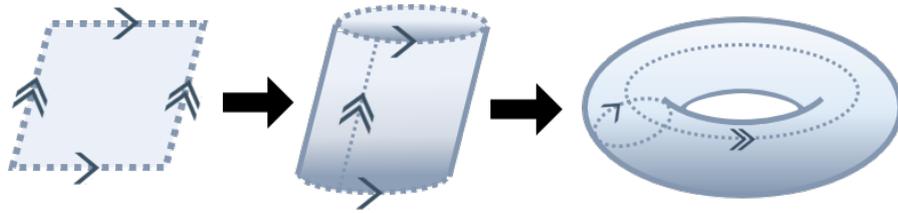


図 4.1: $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ の図形描画。 \mathbb{C}/Λ (左) から同一視を示す矢印に従って辺を繋げていくとトーラス (右) が得られる。

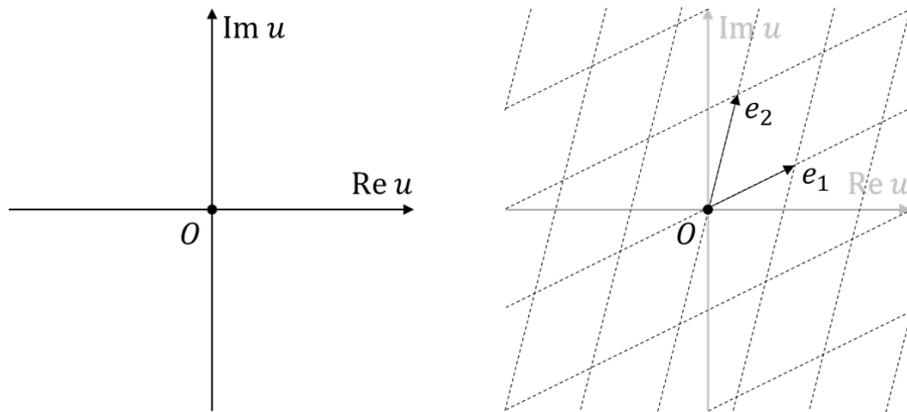


図 4.2: 2次元複素平面 \mathbb{C} (左) とその上に張られた2次元格子 Λ (右)

ここで、次のような格子ベクトルの変換を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} e'_2 \\ e'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \equiv \Gamma. \quad (4.25)$$

この変換は同一の格子を張るような格子ベクトル間の変換で、モジュラー変換と呼ばれる。実際、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z} は格子ベクトルが変換前の格子点のどこかへ移ることを意味しているが、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の行列式が1であることから格子の面積は不変であるため、変換後の格子ベクトルも同じ格子点を持つような格子を張ることになる。 $SL(2, \mathbb{Z})$ は次の2つの生成子によって生成される群で、

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

生成子 S, T は次の代数関係を満たす。

$$S^2 \equiv Z = -\mathbb{I}, \quad S^4 = Z^2 = (ST)^3 = \mathbb{I}. \quad (4.27)$$

$SL(2, \mathbb{Z})$ 変換の下で、 T^2 上の複素座標 z および複素構造モジュラス τ は次のように変換されることが確かめられる。

$$\gamma: z \equiv \frac{u}{e_1} \rightarrow z' \equiv \frac{u}{e'_1} = \frac{z}{c\tau + d}, \quad (4.28)$$

$$\gamma: \tau \equiv \frac{e_2}{e_1} \rightarrow \tau' \equiv \frac{e'_2}{e'_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (4.29)$$

特に、生成子 S, T 変換に対しては、

$$S: (z, \tau) \rightarrow \left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right), \quad T: (z, \tau) \rightarrow (z, \tau + 1). \quad (4.30)$$

と変換される。注意すると τ は $Z = -\mathbb{I}$ の下で不変であるため、 τ は $\bar{\Gamma} \equiv \Gamma / \{\pm \mathbb{I}\}$ によって変換される。

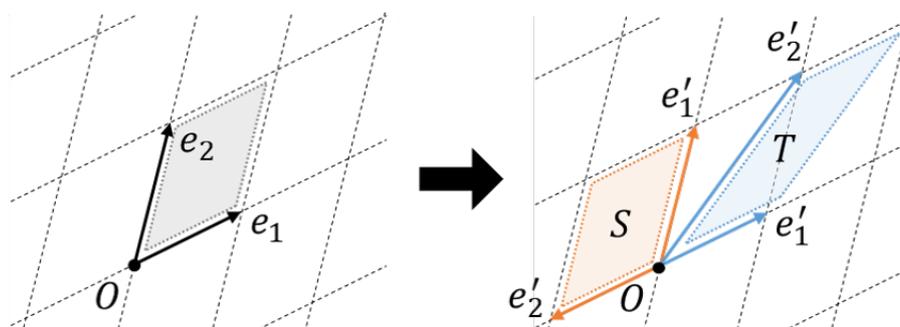


図 4.3: 格子ベクトルの S (赤), T (青) 変換。グレー、赤、青の格子 (トーラス) の面積は同じである。

結果をまとめておこう。

- モジュラー変換は同一の格子を張る格子ベクトルの間の変換で、 $SL(2, \mathbb{Z}) \equiv \Gamma$ で与えられる。
- モジュラー変換で互いに移り合う格子ベクトル e, e' は異なる複素構造モジュラス τ, τ' を持つ。

ここで重要なのは、2つの (同じ大きさの) トーラスが異なる複素構造モジュラス τ, τ' を持つとき、 $\tau' = \gamma: \tau$ であれば2つのトーラスが等価になることである。したがって、トーラスのモジュラー変換の下での不変性から、トーラス上の理論はモジュラー不変な理論となる。

モジュラー形式

ここではモジュラー形式と呼ばれるモジュラス τ の関数を導入していく [12–15]。その準備とし

て、まずレベル N の主合同部分群 (the principal congruence subgroup of level N) と呼ばれる次の群を導入しよう。

$$\Gamma(N) \equiv \left\{ h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma \mid \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\} \quad (4.31)$$

これはモジュラー群 Γ の正規部分群である。さらに、商群 $\Gamma'_N \equiv \Gamma/\Gamma(N)$ を定義しよう。それは次のような代数関係を満たす。

$$S^4 = (ST)^3 = T^N = \mathbb{I}, \quad S^2T = TS^2 \quad (4.32)$$

このとき、 $\Gamma(N)$ に対する整数ウェイト k のモジュラー形式 $f(\tau)$ が、次のモジュラー変換性を持つ τ の正則関数として定義される。

$$f(\gamma(\tau)) = J_k(\gamma, \tau) \rho(\gamma) f(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad J_k(\gamma, \tau) = (c\tau + d)^k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.33)$$

ここで $\rho(\gamma)$ は商群 Γ'_N のユニタリー表現で、

$$\rho(\gamma_1\gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \quad \rho(h) = \mathbb{I}, \quad h \in \Gamma(N) \quad (4.34)$$

および次の代数関係、

$$\rho(S)^4 = [\rho(S)\rho(T)]^3 = \rho(T)^N = \mathbb{I}, \quad \rho(S)^2\rho(T) = \rho(T)\rho(S)^2 \quad (4.35)$$

を満たす。

次に半整数ウェイト $k/2$ のモジュラー形式を考える [16, 17]。まず Γ の 2 重被覆群 $\tilde{\Gamma}$ を導入する。

$$\tilde{\Gamma} \equiv \{[\gamma, \epsilon] \mid \gamma \in \Gamma, \epsilon \in \{\pm 1\}\} \quad (4.36)$$

この群は次の 2 つの生成子によって生成される。

$$\tilde{S} \equiv [S, 1], \quad \tilde{T} \equiv [T, 1] \quad (4.37)$$

これらが従う代数関係は次のとおりである。

$$\tilde{S}^2 = \tilde{Z}, \quad \tilde{S}^4 = (\tilde{S}\tilde{T})^3 = \tilde{Z}^2 = [\mathbb{I}, -1], \quad \tilde{S}^8 = (\tilde{S}\tilde{T})^6 = [\mathbb{I}, 1] \equiv \tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{Z}\tilde{T} = \tilde{T}\tilde{Z}. \quad (4.38)$$

このとき、整数ウェイトのときと同様にして $\tilde{\Gamma}$ の正規部分群 $\tilde{\Gamma}(N)$ を定義できる。

$$\tilde{\Gamma}(N) \equiv \{[h, \epsilon] \in \tilde{\Gamma} \mid h \in \Gamma(N), \epsilon = 1\} \quad (4.39)$$

このようにして、半整数ウェイト $k/2$ のモジュラー形式 $\tilde{f}(\tau)$ が次のように得られる。

$$\tilde{f}(\tilde{\gamma}(\tau)) = \tilde{J}_{k/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \tilde{\rho}(\tilde{\gamma}) \tilde{f}(\tau), \quad \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} \quad (4.40)$$

$$\tilde{J}_{k/2}(\tilde{\gamma}, \tau) = \epsilon^k J_{k/2}(\gamma, \tau) = \epsilon^k (c\tau + d)^{k/2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.41)$$

ここで $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ は $\tilde{\Gamma}_N \equiv \tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(N)$ のユニタリー表現で、

$$\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2) = \tilde{\rho}(\tilde{\gamma}_1) \tilde{\rho}(\tilde{\gamma}_2), \quad \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{h}) = \tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{h} \in \tilde{\Gamma}(N) \quad (4.42)$$

および代数関係、

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})^2 = \tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{S})^4 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^3 = \tilde{\rho}(\tilde{Z})^2, \quad \tilde{\rho}(\tilde{S})^8 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^6 = \tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{Z})\tilde{\rho}(\tilde{T}) = \tilde{\rho}(\tilde{T})\tilde{\rho}(\tilde{Z}) \quad (4.43)$$

を満たす。

こうして我々はモジュラー形式と呼ばれるモジュライ τ の関数を導入できた。我々は後ほど、トーラス上の波動関数がモジュラー変換の下でウェイト $1/2$ のモジュラー形式として振舞うことを見る。

4.3 Magnetized T^2 モデル

4.1 節にて 4 次元湯川結合がコンパクト空間上の波動関数の overlap 積分で与えられることを見た。よって湯川結合を計算するためにはコンパクト空間、トーラス上の波動関数を調べる必要がある。さらに、4.2 節では波動関数の形を特徴づけられるトーラスの幾何学的対称性、モジュラー対称性について見た。ここでは背景磁場のあるトーラス上の波動関数を運動方程式から求め、そのモジュラー対称性を調べていく。

4.3.1 トーラス上のゼロモード波動関数

トーラス上の計量

トーラス上の波動関数を求めるに当たって、我々は最初にトーラス上の計量を求めなければならない。4.2 節でも触れたとおり 2 次元トーラス T^2 は $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ とみなされる。ここで 2 次元格子 Λ は 2 つの格子ベクトル $e_{1(i)} = 2\pi R$, $e_{2(i)} = 2\pi R_i \tau_i$ ($\tau_i \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\tau_i > 0$) によって張られる。これらを踏まえてトーラス上の計量を得ていこう。まず $(2 + 2i, 3 + 2i)$ 平面上の計量 $\eta_{mn}^{(i)}$ は

$$ds^2 = \eta^{(i)} \left(dy^m \frac{\partial}{\partial y^m}, dy^n \frac{\partial}{\partial y^n} \right) = \eta_{mn}^{(i)} dy^m dy^n, \quad \eta^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (m, n \in \{2 + 2i, 3 + 2i\}) \quad (4.44)$$

で与えられる。2次元格子を張る格子ベクトルは次のように書かれ、

$$e_{1(i)} = 2\pi R_i \frac{\partial}{\partial y^{2+2i}}, \quad e_{2(i)} = 2\pi R_i \left(\operatorname{Re}\tau \frac{\partial}{\partial y^{2+2i}} + \operatorname{Im}\tau \frac{\partial}{\partial y^{3+2i}} \right) \quad (4.45)$$

その双対1形式 dx_i^j は $\langle dx_i^j, e_{k(i)} \rangle = \delta_k^j$ ($j, k \in \{2+2i, 3+2i\}$) で定義される。ここで $(2+2i, 3+2i)$ 平面上の内積 $\langle dy^m, \partial/\partial y^n \rangle = \delta_n^m$ を用いると、

$$\begin{pmatrix} dy^{2+2i} \\ dy^{3+2i} \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} dx_i^{2+2i} \\ dx_i^{3+2i} \end{pmatrix} = 2\pi R_i \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{Re}\tau \\ 0 & \operatorname{Im}\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_i^{2+2i} \\ dx_i^{3+2i} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

が求められる。ここで e は zweibein で、 $g_{jk}^{(i)} = e_j^m e_k^n \delta_{mn} = e_j^m e_k^n \eta_{mn}^{(i)}$ である。したがって、トーラス上の計量は

$$ds^2 = g_{jk}^{(i)} dx_i^j dx_i^k, \quad g^{(i)} = (2\pi R_i)^2 \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{Re}\tau \\ \operatorname{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} \quad (j, k \in \{2+2i, 3+2i\}) \quad (4.47)$$

となる。こうしてトーラス上の計量が得られた。さらに、簡便さのためトーラス上の複素座標 $z_i = x_{2+2i} + \tau_i x_{3+2i}$ を導入しておく。そのとき計量は

$$ds^2 = 2h_{\mu\nu}^{(i)} dz_i^\mu d\bar{z}_i^\nu, \quad h^{(i)} = |e_{1(i)}|^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

と書き下される。このとき、トーラス上の座標 z が $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + \tau_i$ の同一視を持つことに注意しよう (図 4.4)。

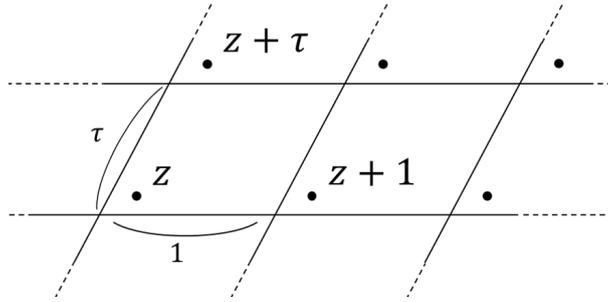


図 4.4: トーラス上の座標の同一視。任意の点 z と平行移動した点 $z + m + n\tau$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) はすべて同一視される。

トーラス上の Dirac 方程式を解くために我々は Clifford 代数 $\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2\delta^{mn}$ を満たすガンマ行列を見つける必要がある。具体的な表示としては次の Hermite 行列を選ぼう。

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

今我々は $\{\Gamma^j, \Gamma^k\} = 2g^{(i)jk}$ を満たすトーラス上のガンマ行列が欲しいので、新たなガンマ行列を zweibein を用いて $\Gamma^j = e_m^j \Gamma^m$ と定めればよい。さらにそれを複素座標に持っていくと、

$$\Gamma^{z_i} = \frac{1}{e_{1(i)}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\bar{z}_i} = \frac{1}{\bar{e}_{1(i)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

となって $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2h^{(i)\mu\nu}$ を満たすガンマ行列が得られる。

こうしてトーラス上の計量とガンマ行列を複素座標にて表現することができた。

トーラス上のゼロモード Dirac 方程式

トーラス上の Dirac 方程式を解く手順は次のとおりである [1]。

1. 背景磁場 F を導入する。
2. 背景磁場 F よりゲージ場 A を求め、トーラス上での境界条件を見つける。
3. トーラス上の波動関数 ψ の境界条件を見つける。
4. ゲージ場 A との couple より、 ψ の従う運動方程式を書き下す。

ここで一度 4.1 節で示した 10 次元 $U(N)$ super Yang Mills 理論の作用 (4.7) に戻る。そこで余剰次元方向において次のような背景磁場 (ゲージ場の真空期待値) を想定しよう。

$$\begin{aligned} F^{(i)} &= F_{z\bar{z}}^{(i)} dz_i \wedge d\bar{z}_i \\ &= \frac{\pi i}{\text{Im}\tau_i} \begin{pmatrix} M_a^{(i)} \mathbf{1}_{N_a \times N_a} & & \\ & M_b^{(i)} \mathbf{1}_{N_b \times N_b} & \\ & & M_c^{(i)} \mathbf{1}_{N_c \times N_c} \end{pmatrix} dz_i \wedge d\bar{z}_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\equiv \left(\prod_{\alpha=a,b,c} \oplus (F_{z\bar{z}}^{(i)})_\alpha \mathbf{1}_{N_\alpha \times N_\alpha} \right) dz_i \wedge d\bar{z}_i, \quad (F_{z\bar{z}}^{(i)})_\alpha = \frac{\pi i}{\text{Im}\tau_i} M_\alpha^{(i)} \quad (4.52)$$

$M^{(i)}$ は適当な定数であるが、すぐ後に整数に限られることを見る。場が $U(N)$ の随伴表現に属するためこれは $N \times N$ 行列である。よって $N = N_a + N_b + N_c$ となる。4次元での Lorentz 不変性を保つため、背景磁場は余剰次元方向にしか導入できないことに注意する。このとき、背景磁場によってゲージ対称性は $U(N)$ から $U(N_a) \times U(N_b) \times U(N_c)$ に破れる。 $F = dA$ より、これらの場の強さに対応するゲージポテンシャル $A^{(i)} = A_{z_i} dz_i + A_{\bar{z}_i} d\bar{z}_i$ として次のようなものを選ぶ¹。

$$A_{z_i} = -\frac{1}{2} \left(\prod_{\alpha=a,b,c} \oplus (F_{z\bar{z}}^{(i)})_\alpha (\bar{z}_i + \bar{\zeta}_{i\alpha}) \mathbf{1}_{N_\alpha \times N_\alpha} \right) \equiv \left(\prod_{\alpha=a,b,c} \oplus (A_{z_i})_\alpha \mathbf{1}_{N_\alpha \times N_\alpha} \right), \quad A_{\bar{z}_i} = A_{z_i}^\dagger \quad (4.53)$$

¹ゲージ変換 $A \rightarrow A + d\chi$ による任意性が存在する。

ここで T_α は破れていないゲージ群 $U(N_a) \times U(N_b) \times U(N_c)$ の生成子である。 ζ はゲージ変換でキャンセルすることのできない自由度で Wilson line と呼ばれる。

また、トーラス上の座標の同一視 $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + \tau_i$ よりベクトルポテンシャル $A^{(i)}$ は次の境界条件を持つ。

$$A_\alpha(z_i + 1, \bar{z}_i + 1) = A_\alpha(z_i, \bar{z}_i) + d\chi_{1\alpha}(z_i, \bar{z}_i) \quad (4.54)$$

$$A_\alpha(z_i + \tau_i, \bar{z}_i + \bar{\tau}_i) = A_\alpha(z_i, \bar{z}_i) + d\chi_{2\alpha}(z_i, \bar{z}_i) \quad (4.55)$$

$$\chi_{1\alpha}(z_i, \bar{z}_i) = \left(\frac{\pi M_\alpha^{(i)}}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(z_i + \zeta_{i\alpha}) \right), \quad \chi_{2\alpha}(z_i, \bar{z}_i) = \left(\frac{\pi M_\alpha^{(i)}}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(\bar{\tau}_i(z_i + \zeta_{i\alpha})) \right) \quad (4.56)$$

ただし $A_\alpha = (A_z)_\alpha dz + (A_{\bar{z}})_\alpha d\bar{z}$ である。これは丁度 $U(1)$ ゲージ変換に対応している。言い換えれば、ベクトルポテンシャルは格子点上で up to ゲージ変換で同一視される。ただし、ゲージ変換性が格子点上で同一であるように

$$\chi(z_i + n + m\tau_i, \bar{z}_i + n + m\bar{\tau}_i) = \chi(z_i, \bar{z}_i) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (4.57)$$

が課される。この条件より、フラックス条件 $M_\alpha^{(i)} \in \mathbb{Z}$ が見つかる。

次に A と couple するゲージノ場 λ を見る。簡単化のため以下では $U(N_a) \times U(N_b)$ パートに注目しよう。随伴表現に属するゲージノ場 λ の $U(N_a) \times U(N_b)$ パートは

$$\lambda(x, z) = \begin{pmatrix} \lambda^{aa}(x, z) & \lambda^{ab}(x, z) \\ \lambda^{ba}(x, z) & \lambda^{bb}(x, z) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

と書かれる。ここで λ^{aa} と λ^{bb} は破れていないゲージ群 $U(N_a) \times U(N_b)$ の下でのゲージノ場で、 λ^{ab} と λ^{ba} は $U(N_a) \times U(N_b)$ の下での双基本表現物質場 (N_a, \bar{N}_b) , (\bar{N}_a, N_b) である。これらの T_i^2 上の2次元スピノルは

$$\psi_{n_i}(z_i) = \begin{pmatrix} \psi_{n_i+} \\ \psi_{n_i-} \end{pmatrix}, \quad \psi_{n_i\pm}(z_i) = \begin{pmatrix} \psi_{n_i\pm}^{aa}(z_i) & \psi_{n_i\pm}^{ab}(z_i) \\ \psi_{n_i\pm}^{ba}(z_i) & \psi_{n_i\pm}^{bb}(z_i) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

と書かれる。ただし KK 分解 (4.15) に従って λ の T_i^2 パートを ψ_{n_i} とした。以降では ψ_{n_i} のゼロモード ψ_{0_i} に注目し、ゼロモードは $\psi_{(i)}(z_i)$ と表記することにする。

ベクトルポテンシャル A の境界条件が $U(1)$ ゲージ変換で与えられたことを思い出そう。随伴表現に属する場 $\psi_{(i)}$ の場合、ゲージ変換は (4.10) で与えられるので、

$$\psi_{(i)}(z_i + 1) = \begin{pmatrix} e^{i\chi_{1a}(z_i)} & \\ & e^{i\chi_{1b}(z_i)} \end{pmatrix} \psi_{(i)}(z_i) \begin{pmatrix} e^{-i\chi_{1a}(z_i)} & \\ & e^{-i\chi_{1b}(z_i)} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$\psi_{(i)}(z_i + \tau_i) = \begin{pmatrix} e^{i\chi_{2a}(z_i)} & \\ & e^{i\chi_{2b}(z_i)} \end{pmatrix} \psi_{(i)}(z_i) \begin{pmatrix} e^{-i\chi_{2a}(z_i)} & \\ & e^{-i\chi_{2b}(z_i)} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

という境界条件を持つだろう。これより、各セクターは

$$\begin{aligned}\psi_{(i)}^{aa}(z_i + 1) &= \psi_{(i)}^{aa}(z_i + \tau_i) = \psi_{(i)}^{aa}(z_i), \\ \psi_{(i)}^{ab}(z_i + 1) &= e^{i\chi_{1(i)}^{ab}(z_i)} \psi_{(i)}^{ab}(z_i), \quad \psi_{(i)}^{ab}(z_i + \tau_i) = e^{i\chi_{2(i)}^{ab}(z_i)} \psi_{(i)}^{ab}(z_i), \\ \psi_{(i)}^{ba}(z_i + 1) &= e^{-i\chi_{1(i)}^{ab}(z_i)} \psi_{(i)}^{ba}(z_i), \quad \psi_{(i)}^{ba}(z_i + \tau_i) = e^{-i\chi_{2(i)}^{ab}(z_i)} \psi_{(i)}^{ba}(z_i), \\ \psi_{(i)}^{bb}(z_i + 1) &= \psi_{(i)}^{bb}(z_i + \tau_i) = \psi_{(i)}^{bb}(z_i)\end{aligned}\tag{4.62}$$

という境界条件となる。ただし、

$$\chi_{1(i)}^{ab}(z_i) = \frac{\pi}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(I_{ab}^{(i)} z_i + \zeta_{iab}), \quad \chi_{2(i)}^{ab}(z_i) = \frac{\pi}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(\bar{\tau}_i (I_{ab}^{(i)} z_i + \zeta_{iab})).\tag{4.63}$$

を用いた。また、 $I_{ab}^{(i)}$ は $M_a^{(i)} - M_b^{(i)} \neq 0$ を表しており、定義から明らかに $I_{ab}^{(i)} + I_{ca}^{(i)} = I_{cb}^{(i)}$ を満たす。同様に $\zeta_{iab} \equiv M_a^{(i)} \zeta_{ia} - M_b^{(i)} \zeta_{ib}$ で $\zeta_{iab} + \zeta_{ica} = \zeta_{icb}$ を満たす。

波動関数 $\psi_{(i)}(z_i)$ の変換性が分かったので、次のように書き直しておこう。なお添え字 ab は省略している。

$$\psi_{(i)}(z_i) = e^{\frac{iI^{(i)}\pi}{2\text{Im}\tau_i} \text{Im}[(z_i + \tilde{\zeta}_i)^2]} \cdot \theta(z_i, \bar{z}_i)\tag{4.64}$$

$\tilde{\zeta}_i \equiv \zeta_i / I^{(i)}$ としている。ここで、 $\psi_{(i)}(z_i)$ の変換性より $\theta(z_i, \bar{z}_i)$ は次の変換性を持つ。

$$\theta(z_i + 1) = \theta(z_i)\tag{4.65}$$

$$\theta(z_i + \tau_i) = e^{-\pi i I^{(i)} \text{Re}\tau_i} e^{-2\pi i I^{(i)} \text{Re}(z_i + \tilde{\zeta}_i)} \theta(z_i)\tag{4.66}$$

実際、これらは元の境界条件 (4.62) と一致する。これらは、 $z_i = x_{2+2i} + \tau_i x_{3+2i}$ を用いて、 $\theta(z_i, \bar{z}_i) = \theta(x_{2+2i}, x_{3+2i})$ が次のように x_{2+2i} に関するフーリエ級数展開できることを意味している。

$$\theta(x_{2+2i}, x_{3+2i}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x_{3+2i}) e^{2\pi i n x_{2+2i}}\tag{4.67}$$

ただし c_n は次の変換性を持つ関数である。

$$c_n(x_{3+2i} + 1) = c_{n+I^{(i)}}(x_{3+2i}) e^{-\pi i I^{(i)} [\text{Re}\tau_i (1+2x_{3+2i}) + 2\text{Re}\tilde{\zeta}_i]}\tag{4.68}$$

今、我々はトーラス上のゼロモード波動関数に対する運動方程式を書き下すことができる。

$$i \not{D} \psi_{(i)} = (i\Gamma^{z_i} D_{z_i} + i\Gamma^{\bar{z}_i} D_{\bar{z}_i}) \psi_{(i)} = i \begin{pmatrix} 0 & -D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(i)+} \\ \psi_{(i)-} \end{pmatrix} = 0\tag{4.69}$$

ここで共変微分 $D_{z_i}, D_{\bar{z}_i}$ は次で与えられる。

$$D_{z_i} \psi_{(i)} = \partial_{z_i} \psi_{(i)} + [A_{z_i}, \psi_{(i)}], \quad D_{\bar{z}_i} \psi_{(i)} = \partial_{\bar{z}_i} \psi_{(i)} + [A_{\bar{z}_i}, \psi_{(i)}]\tag{4.70}$$

特に $\psi_{(i)+}$ の式を明示すると、

$$\begin{aligned} D\psi_{(i)+} &= (\pi R_i)^{-1} (\partial_{\bar{z}_i} \psi_{(i)+} + [A_{\bar{z}_i}, \psi_{(i)+}]) \\ &= (\pi R_i)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}_i} \psi_{(i)+}^{aa} & (\partial_{\bar{z}_i} + \frac{\pi I_{ab}^{(i)}}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{iab})) \psi_{(i)+}^{ab} \\ (\partial_{\bar{z}_i} - \frac{\pi I_{ab}^{(i)}}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{iab})) \psi_{(i)+}^{ba} & \partial_{\bar{z}_i} \psi_{(i)+}^{bb} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

となる。 $\psi_{(i)+}^{aa}$, $\psi_{(i)+}^{bb}$ については、境界条件より

$$\psi_{(i)+}(z_i + m + n\tau_i) = \psi_{(i)+}(z_i) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(i)+} = \sum_{m,n} c_{mn}(\tau_i) e^{2\pi i(m x_{2+2i} + n x_{3+2i})} \quad (4.72)$$

と書けるので、運動方程式は

$$0 = \partial_{\bar{z}_i} \psi_{(i)+} = \frac{1}{2i\text{Im}\bar{\tau}_i} (-\tau_i \partial_{2+2i} + \partial_{3+2i}) \psi_{(i)+} \quad (4.73)$$

$$= \frac{1}{2i\text{Im}\bar{\tau}_i} \sum_{m,n \neq 0} c_{mn}(\tau_i) \cdot 2\pi i (-\tau_i m + n) e^{2\pi i(m x_{2+2i} + n x_{3+2i})} \quad (4.74)$$

$$\Rightarrow c_{mn}(\tau_i) = 0 \quad (m, n \neq 0) \quad (4.75)$$

となる。つまり $\psi_{(i)+}^{aa}$, $\psi_{(i)+}^{bb}$ は定数である。

$\psi_{(i)+}^{ab}$, $\psi_{(i)+}^{ba}$ については、波動関数 (4.64) を代入すると、

$$\left(\partial_{\bar{z}_i} + \frac{\pi I_{\alpha\beta}^{(i)}}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \right) e^{\frac{i I_{\alpha\beta}^{(i)} \pi}{2\text{Im}\tau_i} \text{Im}[(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})^2]} \cdot \theta(z_i, \bar{z}_i) = 0, \quad \alpha\beta \in \{ab, ba\} \quad (4.76)$$

$$\Rightarrow \left(\partial_{\bar{z}_i} + \frac{i\pi I_{\alpha\beta}^{(i)}}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \right) \theta(z_i, \bar{z}_i) = 0 \quad (4.77)$$

この式にさらに (4.67) を代入すると、

$$0 = \left(\frac{1}{2i\text{Im}\bar{\tau}_i} (-\tau_i \partial_{2+2i} + \partial_{3+2i}) + \frac{\pi I_{\alpha\beta}^{(i)}}{\text{Im}\tau_i} \text{Im}(x_{2+2i} + \tau_i x_{3+2i} + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x_{3+2i}) e^{2\pi i n x_{2+2i}} \quad (4.78)$$

$$= \frac{1}{2\text{Im}\tau_i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2\pi n \tau_i + i \partial_{3+2i} + 2\pi I_{\alpha\beta}^{(i)} (x_{3+2i} \text{Im}\tau_i + \text{Im}\tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \right) c_n(x_{3+2i}) e^{2\pi i n x_{2+2i}} \quad (4.79)$$

$$\Rightarrow \frac{c'_n(x_{3+2i})}{c_n(x_{3+2i})} = -2\pi I_{\alpha\beta}^{(i)} (x_{3+2i} \text{Im}\tau_i + \text{Im}\tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) + 2\pi i n \tau_i \quad (4.80)$$

この微分方程式を解けば、

$$c_n(x_{3+2i}) = k_n e^{-\pi I_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{[\text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})]^2}{\text{Im}\tau_i}} e^{2\pi i n \tau_i x_{3+2i}} \quad (4.81)$$

が得られる。ここで k_n は座標に依らない定数で、(4.68) より次の関係を満たす。

$$\mathcal{N}_n \equiv k_n \exp \left[-i\pi \frac{n^2 \tau_i}{I_{\alpha\beta}^{(i)}} - 2\pi i n \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta} \right] = k_{n+I_{\alpha\beta}^{(i)}} \exp \left[-i\pi \frac{(n+I_{\alpha\beta}^{(i)})^2 \tau_i}{I_{\alpha\beta}^{(i)}} - 2\pi i (n+I_{\alpha\beta}^{(i)}) \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta} \right] \quad (4.82)$$

明らかに $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+I_{\alpha\beta}^{(i)}}$ が成り立つ。この定数については後ほど波動関数の規格化より定められる。これまでの解析をまとめると、

$$\psi_{(i)+}^{\alpha\beta} = e^{\frac{iI_{\alpha\beta}^{(i)}\pi}{2\text{Im}\tau_i} \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})^2} \cdot \theta(z_i, \bar{z}_i) \quad (4.83)$$

$$= e^{\frac{iI_{\alpha\beta}^{(i)}\pi}{2\text{Im}\tau_i} \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})^2} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x_{3+2i}) e^{2\pi i n x_{2+2i}} \quad (4.84)$$

$$= e^{\frac{iI_{\alpha\beta}^{(i)}\pi}{2\text{Im}\tau_i} \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})^2} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n e^{-\pi I_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{(\text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}))^2}{\text{Im}\tau_i}} e^{2\pi i n z_i} \quad (4.85)$$

$$= e^{\frac{iI_{\alpha\beta}^{(i)}\pi}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}_n e^{i\pi \frac{n^2 \tau_i}{I_{\alpha\beta}^{(i)}}} e^{2\pi i n (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \quad (4.86)$$

となる。ここで、summation を

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{j=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|-1} \sum_{r \in \mathbb{Z}} f(j + I_{\alpha\beta}^{(i)} r) \quad (4.87)$$

と分けよう。そのとき、周期性 $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+I_{\alpha\beta}^{(i)}}$ より

$$\psi_{(i)+}^{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i I_{\alpha\beta}^{(i)}}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \sum_{j=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|-1} \mathcal{N}_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{\pi i I_{\alpha\beta}^{(i)} \left(r + \frac{j}{I_{\alpha\beta}^{(i)}}\right)^2 \tau_i} e^{2\pi i I_{\alpha\beta}^{(i)} \left(r + \frac{j}{I_{\alpha\beta}^{(i)}}\right) (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \quad (4.88)$$

$$\equiv e^{\frac{\pi i I_{\alpha\beta}^{(i)}}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \sum_{j=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|-1} \mathcal{N}_j \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{j}{I_{\alpha\beta}^{(i)}} \\ 0 \end{matrix} \right] (I_{\alpha\beta}^{(i)}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}), I_{\alpha\beta}^{(i)} \tau_i) \quad (4.89)$$

と書き直せる。ここで ϑ は Jacobi の指標付き theta 関数と呼ばれ、次のように定義される。

$$\vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (\nu, \tau) \equiv \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (a+\ell)^2 \tau} e^{2\pi i (a+\ell)(\nu+b)}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \nu, \tau \in \mathbb{C} \quad (4.90)$$

Jacobi の指標付き theta 関数は次の擬 2 重周期性を持つ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$$\vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (\nu + n, \tau) = e^{2\pi i n a} \vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (\nu, \tau) \quad (4.91)$$

$$\vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (\nu + n\tau, \tau) = e^{-\pi i n^2 \tau - 2\pi i n(\nu+b)} \vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (\nu, \tau) \quad (4.92)$$

Jacobi の指標付き theta 関数が $\text{Im}\tau > 0$ でないと発散してしまうことに注意する。すなわち、波動関数 $\psi_{(i)+}^{\alpha\beta}$ は $I_{\alpha\beta}^{(i)} > 0$ でないと定義できない。したがって、 $I_{ab}^{(i)} > 0$ ($I_{ba}^{(i)} < 0$) ならば $\psi_{(i)+}^{ab}$ のみが、 $I_{ab}^{(i)} < 0$ ($I_{ba}^{(i)} > 0$) ならば $\psi_{(i)+}^{ba}$ のみが値を持つことになる。

ここで各モードを次のように表記しよう。

$$\psi_{(i)+}^{j,|I_{\alpha\beta}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) \equiv e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}^{(i)}|}{2\text{Im}\tau_i} (z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})} \mathcal{N}_j \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{j}{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|} \\ 0 \end{array} \right] (|I_{\alpha\beta}^{(i)}|(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}), |I_{\alpha\beta}^{(i)}|\tau_i), \quad (4.93)$$

$$j \in \{0, 1, \dots, |I_{\alpha\beta}^{(i)}| - 1\}$$

(4.89) は、波動関数のモード展開の内、独立なモードが (4.93) の $|I_{\alpha\beta}^{(i)}|$ 個であることを意味している。実際、theta 関数の定義より、モードの直交性

$$\int_{T_i^2} dz_i d\bar{z}_i \left(\psi_{(i)+}^{j,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) \right)^* \psi_{(i)+}^{k,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) = (2\pi R_i)^2 \mathcal{N}_j^2 \text{Im}\tau_i \left(\frac{1}{2|I_{\alpha\beta}^{(i)}|\text{Im}\tau_i} \right)^{1/2} \delta_{j,k} \quad (4.94)$$

が示せる。ここでは規格化定数として

$$\mathcal{N}_j = \left(\frac{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|}{(\mathcal{A}_{(i)})^2} \right)^{1/4}, \quad \mathcal{A}_{(i)} = (2\pi R_i)^2 \text{Im}\tau_i \quad (4.95)$$

を選ぼう。そのとき、直交関係は、

$$\int_{T_i^2} dz_i d\bar{z}_i \left(\psi_{(i)+}^{j,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) \right)^* \psi_{(i)+}^{k,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) = (\text{Im}\tau_i)^{-1/2} \delta_{j,k} \quad (4.96)$$

となる。

こうしてトーラス上の波動関数がフラックス I に対応した離散的なモードを持つことが分かった。今までの議論は $\psi_{(i)-}^{\alpha\beta}$ に対しても適用可能である。具体的には

$$\psi_{(i)-}^{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i I_{\alpha\beta}^{(i)}}{2\text{Im}\bar{\tau}_i} \overline{(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta}) \text{Im}(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})}} \sum_{j=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|-1} \mathcal{N}_j \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{j}{|I_{\alpha\beta}^{(i)}|} \\ 0 \end{array} \right] (I_{\alpha\beta}^{(i)} \overline{(z_i + \tilde{\zeta}_{i\alpha\beta})}, I_{\alpha\beta}^{(i)} \bar{\tau}_i) \quad (4.97)$$

$$\psi_{(i)-}^{j,|I_{ab}^{(i)}|}(\bar{z}_i, \bar{\tau}_i) = \left(\psi_{(i)+}^{-j,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i, \tau_i) \right)^* \quad (4.98)$$

と書ける。これより、波動関数がカイラリティについて次の排他性を持つことが分かる。

$$\psi_{(i)\pm}(z_i, \bar{z}_i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_{(i)+}^{aa}(z_i) & \psi_{(i)+}^{ab}(z_i) \\ \psi_{(i)+}^{ba}(z_i) & \psi_{(i)+}^{bb}(z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{const} & \sum \psi_{(i)+}^{j,|I_{ab}^{(i)}|}(z_i) \\ \text{no solution} & \text{const} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi_{(i)-}^{aa}(\bar{z}_i) & \psi_{(i)-}^{ab}(\bar{z}_i) \\ \psi_{(i)-}^{ba}(\bar{z}_i) & \psi_{(i)-}^{bb}(\bar{z}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{const} & \text{no solution} \\ \sum \psi_{(i)-}^{j,|I_{ab}^{(i)}|}(\bar{z}_i) & \text{const} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (I_{ab}^{(i)} > 0) \quad (4.99)$$

$I_{ab}^{(i)} < 0$ の場合は $\psi_{(i)+}$ が ba -セクターに、 $\psi_{(i)-}$ が ab -セクターに解を持つようになる。これは、フラックス $I_{ab}^{(i)} \neq 0$ を導入することで、その符号に対応したどちらかのカイラリティが選ばれることを意味する。まとめると、

- フラックス $I_{ab}^{(i)}$ を導入すると、 $U(N_a) \times U(N_b)$ の双基本表現で変換する波動関数以外は定数となる。
- そのとき、 $I_{ab}^{(i)}$ の符号次第で $\psi_{(i)+}$ の ab -セクターか ba -セクターのどちらかのみが $|I_{ab}^{(i)}|$ 個の独立な解を持つ。
- $\psi_{(i)-}$ の場合、 $\psi_{(i)+}$ と異なるセクターのみが解を持つ。

同様の議論はほかのセクターについても可能である。

最後に便利な theta 関数の性質を示しておこう。

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{r}{N_1} \\ 0 \end{bmatrix} (\nu_1, N_1\tau) \times \vartheta \begin{bmatrix} \frac{s}{N_2} \\ 0 \end{bmatrix} (\nu_2, N_2\tau) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_{N_1+N_2}} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{r+s+N_1m}{N_1+N_2} \\ 0 \end{bmatrix} (\nu_1 + \nu_2, (N_1 + N_2)\tau) \\ &\times \vartheta \begin{bmatrix} \frac{N_2r - N_1s + N_1N_2m}{N_1N_2(N_1+N_2)} \\ 0 \end{bmatrix} (\nu_1N_2 - \nu_2N_1, N_1N_2(N_1 + N_2)\tau), \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$r, s \in \mathbb{R}; N_1, N_2 \in \mathbb{Z}; \nu_1, \nu_2, \tau \in \mathbb{C}$$

この性質より、トーラス上の波動関数について次の積展開を導くことができる。ただし Wilson line は 0 とする。

$$\psi_{(i)\pm}^{j^{(i)}, |I_{ab}^{(i)}|} (z_i, \tau_i) \cdot \psi_{(i)\pm}^{k^{(i)}, |I_{ca}^{(i)}|} (z_i, \tau_i) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{|I_{cb}^{(i)}|}} Y_{j^{(i)}, k^{(i)}, m}^{|I_{ab}^{(i)}|, |I_{ca}^{(i)}|, |I_{cb}^{(i)}|} (\tau_i) \psi_{(i)\pm}^{j^{(i)}+k^{(i)}+m, |I_{ca}^{(i)}|, |I_{cb}^{(i)}|} (z_i, \tau_i), \quad (4.101)$$

ここで

$$Y_{j^{(i)}, k^{(i)}, m}^{|I_{ab}^{(i)}|, |I_{ca}^{(i)}|, |I_{cb}^{(i)}|} (\tau_i) \equiv \mathcal{A}_{(i)}^{-1/2} \left| \frac{I_{ab}^{(i)} I_{ca}^{(i)}}{I_{cb}^{(i)}} \right|^{1/4} \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{|I_{ca}^{(i)}|j^{(i)} - |I_{ab}^{(i)}|k^{(i)} + |I_{ab}^{(i)} I_{ca}^{(i)}|m}{|I_{ab}^{(i)} I_{ca}^{(i)} I_{cb}^{(i)}|} \\ 0 \end{array} \right] (0, |I_{ab}^{(i)} I_{ca}^{(i)} I_{cb}^{(i)}| \tau_i) \quad (4.102)$$

である。また、 $|I_{ab}^{(i)}| + |I_{ca}^{(i)}| = |I_{cb}^{(i)}|$ である。Nonzero Wilson line を想定する場合の波動関数の積展開については、同等なものとして Scherk-Schwarz phase と呼ばれる位相を導入した波動関数を用いて式 (4.130) にて示している。

トーラス上のゼロモード Klein-Gordon 方程式

我々はトーラス上のゼロモード Dirac 方程式に従う波動関数、すなわちトーラス上のフェルミ

オン場を求めることができた。湯川結合はトーラス上のフェルミオン場とボソン場の overlap 積分で与えられるため、ボソン場についても Klein-Gordon 方程式から解を求める必要がある。このとき、

$$(i \not{D})^2 = \begin{pmatrix} D^\dagger D & 0 \\ 0 & DD^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{D^\dagger, D\} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[D^\dagger, D] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[D, D^\dagger] \end{pmatrix} = \Delta + \begin{pmatrix} \frac{2iF_{z\bar{z}}^{(i)}}{(2\pi R_i)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2iF_{\bar{z}z}^{(i)}}{(2\pi R_i)^2} \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

となるため、これをトーラス上のゼロモードフェルミオン場 $\psi_{(i)}$ に作用させると、

$$N\psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} \equiv D^\dagger D\psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} = \left(\Delta - \frac{2\pi|I_{ab}^{(i)}|}{\mathcal{A}_{(i)}} \right) \psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} = 0 \quad (4.104)$$

となる。ここで Δ は Laplacian である。 $\psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|}$ が D で消える状態となっていることが分かる。また、 $[D^\dagger, D]$ から

$$[N, D^\dagger] = \frac{4\pi|I_{ab}^{(i)}|}{\mathcal{A}_{(i)}} D^\dagger \quad (4.105)$$

となることにも注意する。ここで

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{(i)}}{4\pi|I_{ab}^{(i)}|}} D, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{(i)}}{4\pi|I_{ab}^{(i)}|}} D^\dagger, \quad N = a^\dagger a \quad (4.106)$$

を導入しよう。これによって D の代数関係は

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [n, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [n, a] = -a \quad (4.107)$$

と書き直せる。また

$$a\psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} = 0, \quad \Delta(a^\dagger)^r \psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} = \frac{4\pi|I_{ab}^{(i)}|}{\mathcal{A}_{(i)}} \left(n + \frac{1}{2} \right) (a^\dagger)^r \psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} \propto \left(r + \frac{1}{2} \right) (D^\dagger)^r \psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|} \quad (4.108)$$

である。これらはまさに調和振動子の生成消滅演算子の満たす代数関係と一致しており、Laplacian Δ の固有状態は $(D^\dagger)^r \psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|}$ ($r \geq 0$) で与えられることになる。すなわち、トーラス上の Klein-Gordon 方程式に従うボソン場の基底状態はフェルミオン場同様 $\psi_+^{j,|I_{ab}^{(i)}|}$ によって与えられる。ところが、 Δ の固有値から基底状態は一般的に massless にならないのが分かる。しかし、今は $T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$ を考えており、3つのトーラスの寄与を考慮すれば、(4.104) は次のように書き換えられる。

$$\Delta \left(\prod_{i=1,2,3} \psi_{\epsilon_i}^{j,|I_{ab}^{(i)}|} \right) = \left(\sum_{i=1,2,3} \frac{2\pi|I_{ab}^{(i)}|}{\mathcal{A}_{(i)}} \right) \left(\prod_{i=1,2,3} \psi_{\epsilon_i}^{j,|I_{ab}^{(i)}|} \right) \quad (4.109)$$

ここで ϵ_i は各トーラスの波動関数のカイラリティである。したがって、トーラス上の Klein-Gordon 方程式に従うゼロモード波動関数が各セクターで massless となるには、つまり massless フェルミオン場との SUSY を保つには、

$$\sum_{i=1,2,3} \frac{2\pi |I_{ab}^{(i)}|}{\mathcal{A}^{(i)}} = 0 \quad (4.110)$$

が条件となる。

4.3.2 ゼロモード波動関数のモジュラー対称性

フラックス $I_{\alpha\beta} = \text{even}$ の場合

では、トーラス上の波動関数のモジュラー変換性について調べていこう [18,19]。ただしここでは Wilson line を 0 とする。4.3.1 節にてゼロモード波動関数がフラックスの大きさに対応した $|I^{(i)}|$ 個の離散モードを持つことを見た。これらのモードについて、 T 変換、 S 変換の下での振舞いを調べる。以降では必要のない限りカイラリティの符号 \pm およびトーラスのラベル i は省略する。また、波動関数の規格化因子 \mathcal{N}_j については、モジュラー変換の下で有意な寄与をしないのでその変換性を無視する。

まず T 変換性を調べよう。 $T : (z, \tau) \rightarrow (z, \tau + 1)$ より、

$$T : \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau + 1) \quad (4.111)$$

$$= e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}|}{2\text{Im}\tau} z \text{Im}z} \mathcal{N}_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{\pi i |I_{\alpha\beta}| \left(r + \frac{j}{|I_{\alpha\beta}|}\right)^2 (\tau + 1)} e^{2\pi i |I_{\alpha\beta}| \left(r + \frac{j}{|I_{\alpha\beta}|}\right) z} \quad (4.112)$$

$$= e^{i\pi \frac{j^2}{|I_{\alpha\beta}|}} \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (\text{if } |I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}) \quad (4.113)$$

最後の行を導くためにはフラックスが偶数でなくてはならない。言い換えれば、フラックスが偶数でなければ波動関数の $|I_{\alpha\beta}|$ 個のモードは T 変換の下で閉じない。これは次のように運動方程式と境界条件の T 変換性からも理解できる。

まず運動方程式は次のように T 変換の下で不変、つまり T 変換後の波動関数も同じ運動方程式に従う。

$$(i \mathcal{D}_2 - m)\psi(z, \tau) = 0 \xrightarrow{T} (i \mathcal{D}_2 - m)\psi(z, \tau + 1) = 0 \quad (4.114)$$

しかし、境界条件は次のように T 変換の下で変化してしまう。

$$\psi(z + 1, \tau) = e^{i\pi I \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau) \xrightarrow{T} \psi(z + 1, \tau + 1) = e^{i\pi I \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau + 1) \quad (4.115)$$

$$\psi(z + \tau, \tau) = e^{i\pi I \frac{\text{Im}\tau z}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau) \xrightarrow{T} \psi(z + \tau + 1, \tau + 1) = e^{i\pi I \frac{\text{Im}[(\tau+1)z]}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau + 1) \quad (4.116)$$

これらは T 変換後の波動関数 $\psi(z, \tau + 1)$ に対する次の境界条件を導く。

$$\psi(z + 1, \tau + 1) = e^{i\pi I \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau + 1) \quad (4.117)$$

$$\psi(z + \tau, \tau + 1) = e^{i\pi I} \cdot e^{i\pi I \frac{\text{Im}\tau z}{\text{Im}\tau}} \psi(z, \tau + 1) \quad (4.118)$$

2つ目の条件にて余分な位相因子 $e^{i\pi I}$ が現れてしまっている。結果として、フラックス I が偶数でなければ T 変換後の波動関数 $\psi(z, \tau + 1)$ は T 変換前の波動関数 $\psi(z, \tau)$ と同じ境界条件に従わず、運動方程式を解いてもその解は $\psi(z, \tau)$ によって展開することはできない。フラックス奇数のときの不整合は、 z における波動関数 $\psi(z, \tau)$ と $z + m + n\tau$ における波動関数 $\psi(z + m + n\tau, \tau)$ の間のゲージ変換に由来する位相因子の差から生じる。

次に S 変換を見る。 S 変換については、次のように変換することが確かめられる。 $S : (z, \tau) \rightarrow (-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau})$ より、

$$S : \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) \quad (4.119)$$

$$= (-\tau)^{1/2} \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{2\pi i \frac{jk}{|I_{\alpha\beta}|}} \psi^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.120)$$

今、我々はこれらの変換をモジュラー形式によって表すことが可能である。特に、 S 変換 (4.120) の $(-\tau)^{1/2}$ は、波動関数がウェイト $1/2$ であることを意味している。実際、次のように波動関数を書くことができる。

$$\psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(\tilde{\gamma}(z, \tau)) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \tilde{\rho}(\tilde{\gamma})_{jk} \psi^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau), \quad \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}, \quad (4.121)$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})_{jk} = e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{2\pi i \frac{jk}{|I_{\alpha\beta}|}}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{T})_{jk} = e^{i\pi \frac{j^2}{|I_{\alpha\beta}|}} \delta_{j,k} \quad (4.122)$$

ここで $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ は次の代数関係を満たすユニタリー表現である。

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})^2 = \tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{S})^4 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^3 = -\tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{Z})\tilde{\rho}(\tilde{T}) = \tilde{\rho}(\tilde{T})\tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{T})^{2|I_{\alpha\beta}|} = \tilde{\mathbb{I}} \quad (4.123)$$

これらの代数関係は先ほど導いた T, S 変換から確かめることができる。このようにして、トーラス上の波動関数がウェイト $1/2$ の $\tilde{\Gamma}(2|I_{\alpha\beta}|)$ に対するモジュラー形式とみなせると分かった。また、 $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ は商群 $\tilde{\Gamma}_{2|I_{\alpha\beta}|} \equiv \tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(2|I_{\alpha\beta}|)$ のユニタリー表現となる。

フラックス $I_{\alpha\beta} = \text{odd}$ の場合

上述のとおり、フラックスが奇数の場合、波動関数の $|I_{\alpha\beta}|$ 個のモードは T 変換の下で閉じない。しかしながら、Scherk-Schwarz (SS) phase と呼ばれるゲージ変換でキャンセルできない位相の自由度を考慮すれば、フラックスが奇数の場合の T 変換を consistent にできる [20]。SS phase

と Wilson line の等価性は付録 C にて示しており、SS phase か Wilson line のどちらかを常に 0 にすることができる。ここでは Wilson line を 0 として考える。

SS phase (α_1, α_2) のあるフラックス $I_{\alpha\beta}$ の T^2 上の波動関数は次の境界条件を満たす。

$$\psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z+1, \tau) = e^{2\pi i \alpha_1} e^{i\chi_1(z)} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) = e^{2\pi i \alpha_1} e^{\pi i I_{\alpha\beta} \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (4.124)$$

$$\psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z+\tau, \tau) = e^{2\pi i \alpha_2} e^{i\chi_2(z)} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) = e^{2\pi i \alpha_2} e^{\pi i I_{\alpha\beta} \frac{\text{Im}\bar{\tau}z}{\text{Im}\tau}} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (4.125)$$

ここで (α_1, α_2) は任意の実数で、境界条件 (および運動方程式) の等価性より $(\alpha_1 + m, \alpha_2 + n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$ の波動関数は (α_1, α_2) の波動関数によって与えられる。よって $(\alpha_1 \pmod{1}, \alpha_2 \pmod{1})$ を考えればよい。実際、以降に示すゼロモード波動関数の j -th モードより次の関係式が導ける。

$$\psi^{(j+\alpha'_1, \alpha'_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) = \psi^{(j+\alpha_1+m, \alpha_2+n), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.126)$$

$$= e^{-2\pi i n \left(\frac{j+m+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \right)} \psi^{(j+m+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.127)$$

$$= e^{-2\pi i n \left(\frac{j'+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \right)} \psi^{(j'+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.128)$$

ゼロモード波動関数の j -th モードは上記の境界条件と運動方程式より次のように求められる。

$$\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) = e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}|}{2\text{Im}\tau} z \text{Im}z} \mathcal{N}_j \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \\ -\alpha_2 \end{array} \right] (|I_{\alpha\beta}|z, |I_{\alpha\beta}|\tau), \quad j \in \{0, 1, \dots, |I_{\alpha\beta}| - 1\} \quad (4.129)$$

$(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ とすると no Wilson line ($\zeta = 0$) のモード展開 (4.93) と一致することに注意しよう。SS phase のある波動関数の積展開については、theta 関数の積展開 (4.100) を用いて次のように与えられる。

$$\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{ab}|}(z, \tau) \cdot \psi^{(k+\beta_1, \beta_2), |I_{ca}|}(z, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{|I_{cb}|}} Y_{j,k,\alpha,\beta,m}^{|I_{ab}|, |I_{ca}|, |I_{cb}|}(\tau) \psi^{(j+k+\gamma_1+m|I_{ca}|, \gamma_2), |I_{cb}|}(z, \tau), \quad (4.130)$$

ここで

$$Y_{j,k,\alpha,\beta,m}^{|I_{ab}|, |I_{ca}|, |I_{cb}|}(\tau) \equiv \mathcal{A}^{-1/2} \left| \frac{I_{ab} I_{ca}}{I_{cb}} \right|^{1/4} \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{|I_{ca}|(j+\alpha_1) - |I_{ab}|(k+\beta_1) + |I_{ab} I_{ca}|m}{|I_{ab} I_{ca} I_{cb}|} \\ 0 \end{array} \right] (|I_{ab}|\beta_2 - |I_{ca}|\alpha_2, |I_{ab} I_{ca} I_{cb}|\tau) \quad (4.131)$$

である。また、 $\alpha + \beta = \gamma$ である。

ではこのゼロモード波動関数に対するモジュラー変換を考えていく。まず T 変換は、

$$T : \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau+1) \quad (4.132)$$

$$= e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}|}{2\text{Im}\tau} z \text{Im}z} \mathcal{N}_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{\pi i |I_{\alpha\beta}| \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \right)^2 (\tau+1)} e^{2\pi i \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \right) (|I_{\alpha\beta}|z - \alpha_2)} \quad (4.133)$$

ここで $|i_{\alpha\beta}| \equiv |I_{\alpha\beta}| \pmod{2}$ を用いて、

$$e^{\pi i |I_{\alpha\beta}| \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}\right)^2} = e^{\pi i \left(|I_{\alpha\beta}| r^2 + 2(j+\alpha_1)r + \frac{(j+\alpha_1)^2}{|I_{\alpha\beta}|}\right)} \quad (4.134)$$

$$= \left[e^{\pi i |i_{\alpha\beta}| r(r+1)} \right] \left[e^{2\pi i j r} \right] e^{2\pi i r(\alpha_1 - |i_{\alpha\beta}|/2) + \pi i \frac{(j+\alpha_1)^2}{|I_{\alpha\beta}|}} \quad (4.135)$$

$$= e^{2\pi i \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}\right)(\alpha_1 - |i_{\alpha\beta}|/2) + \pi i \frac{(j+\alpha_1)^2}{|I_{\alpha\beta}|} - 2\pi i \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}(\alpha_1 - |i_{\alpha\beta}|/2)} \quad (4.136)$$

$$= e^{2\pi i \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}\right)(\alpha_1 - |i_{\alpha\beta}|/2) + \frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}(j+\alpha_1)(j-\alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|)} \quad (4.137)$$

となるので、

$$T : \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau + 1) \quad (4.138)$$

$$= e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}(j+\alpha_1)(j-\alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|)} e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}|}{2\text{Im}\tau} z \text{Im} z} \mathcal{N}_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{\pi i |I_{\alpha\beta}| \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}\right)^2} \tau e^{2\pi i \left(r + \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|}\right)(|I_{\alpha\beta}|z - (\alpha_2 - \alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|/2))} \quad (4.139)$$

$$= e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}(j+\alpha_1)(j-\alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|)} e^{\frac{\pi i |I_{\alpha\beta}|}{2\text{Im}\tau} z \text{Im} z} \mathcal{N}_j \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{j+\alpha_1}{|I_{\alpha\beta}|} \\ -(\alpha_2 - \alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|/2) \end{array} \right] (|I_{\alpha\beta}|z, |I_{\alpha\beta}|\tau) \quad (4.140)$$

$$= \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \sum_{\alpha'_1, \alpha'_2} e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}(j+\alpha'_1)(j-\alpha'_1 + |i_{\alpha\beta}|)} \psi^{(k+\alpha'_1, \alpha'_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \delta_{j,k} \delta_{\alpha'_1, \alpha_1} \delta_{\alpha'_2, \alpha_2 - \alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|/2} \quad (4.141)$$

と計算できる。

同様にして S 変換は次で与えられる。

$$S : \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|} \left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau} \right) \quad (4.142)$$

$$= (-\tau)^{1/2} \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \sum_{\alpha'_1, \alpha'_2} e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{\frac{2\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}((j+1)k + (1-\alpha_1)\alpha'_1)} \psi^{(k+\alpha'_1, \alpha'_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \delta_{\alpha_2, \alpha'_1} \delta_{1-\alpha_1, \alpha'_2} \quad (4.143)$$

まとめると、次のように波動関数をモジュラー形式として書くことができる。

$$\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(\tilde{\gamma}(z, \tau)) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \sum_{\alpha'_1, \alpha'_2} \tilde{\rho}(\tilde{\gamma})_{jk} \psi^{(k+\alpha'_1, \alpha'_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau), \quad \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}, \quad (4.144)$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})_{jk} = e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{\frac{2\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}((j+1)k + (1-\alpha_1)\alpha'_1)} \delta_{\alpha_2, \alpha'_1} \delta_{1-\alpha_1, \alpha'_2}, \quad (4.145)$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{T})_{jk} = e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|}(j+\alpha'_1)(j-\alpha'_1 + |i_{\alpha\beta}|)} \delta_{j,k} \delta_{\alpha'_1, \alpha_1} \delta_{\alpha'_2, \alpha_2 - \alpha_1 + |i_{\alpha\beta}|/2} \quad (4.146)$$

フラックス $I_{\alpha\beta}$ が偶数の場合、 $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ のみが、 $I_{\alpha\beta}$ が奇数の場合、 $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ のみがモジュラー変換の下で閉じることが分かる。前者は先ほど見たフラックスが偶数、Wilson

line が 0 のケースである。後者のフラックスと SS phase を考えると、 $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ が次の代数関係を満たすユニタリー表現であることを示せる。

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{S})^2 &= \tilde{\rho}(\tilde{Z}) = e^{\pi i/2} e^{-2\pi i(j+\alpha_1)/|I_{\alpha\beta}|} \delta_{|I_{\alpha\beta}|-j-1,k} \delta_{1-\alpha_1,\alpha'_1} \delta_{1-\alpha_2,\alpha'_2}, \\ \tilde{\rho}(\tilde{Z})^2 &= \tilde{\rho}(\tilde{S})^4 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^3 = -\tilde{\mathbb{I}}, \\ \tilde{\rho}(\tilde{Z})\tilde{\rho}(\tilde{T}) &= \tilde{\rho}(\tilde{T})\tilde{\rho}(\tilde{Z}), \\ \tilde{\rho}(\tilde{T})^{|I_{\alpha\beta}|} &= e^{\pi i/4} \tilde{\mathbb{I}}\end{aligned}\tag{4.147}$$

これは、フラックス奇数、 $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ のトーラス上の波動関数がウェイト $1/2$ の $\tilde{\Gamma}(8|I_{\alpha\beta}|)$ に対するモジュラー形式とみなせることを意味する。また、 $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ は商群 $\tilde{\Gamma}_{8|I_{\alpha\beta}|} \equiv \tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(8|I_{\alpha\beta}|)$ のユニタリー表現となる。

4.3.3 3 世代モデルの構築例

この Section を通してトーラス上の波動関数とそのモジュラー対称性を見てきた。そのとき、我々は以下の 3 つの性質を見つけることができた。

1. $U(N_\alpha) \times U(N_\beta)$ の双基本表現で変換する場のみが $|I_{\alpha\beta}^{(i)}|$ 世代を持つ関数となる ($\alpha \neq \beta$)。
 $\Rightarrow T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$ 上の $\alpha\beta$ -セクター波動関数の total の世代は $|I_{\alpha\beta}^{(1)} \times I_{\alpha\beta}^{(2)} \times I_{\alpha\beta}^{(3)}|$ となる (ただし $I_{\alpha\beta}^{(i)} = 0$ は constant な波動関数を示すため 1 世代とみなされる)。
2. トーラス上の $\alpha\beta$ セクターのカイラリティはフラックス $I_{\alpha\beta}^{(i)}$ の符号に応じてどちらかに選ばれるので、10 次元のカイラリティを固定すれば 4 次元のカイラリティも決まる。
3. i 番目のトーラスのモジュラー対称性はフラックス $I_{\alpha\beta}^{(i)} =$ 偶数かつ SS phase $(0, 0)$ 、またはフラックス $I_{\alpha\beta}^{(i)} =$ 奇数かつ SS phase $(1/2, 1/2)$ のときにのみ full に保たれる。

例として、現時点で可能な 3 世代 quark モデルを考えてみよう。1 つ目の性質は、例えば $N_a = 3$, $N_b = 2$, $N_c = 1$ としたとき、 ab -セクターでは $SU(3) \times SU(2)$ で変換する left-handed quark を、 ca -セクターでは $SU(3) \times SU(1)$ で変換する right-handed quark を up to $U(1)$ で再現できる可能性を示している。なお、このとき 4 次元の場に対して left と right を異なるセクターに assign できるのは 2 つ目の性質による。

さらに、quark が 3 世代でなければならないため、フラックスの大きさが $|I_{ab}^{(1)} \times I_{ab}^{(2)} \times I_{ab}^{(3)}| = |I_{ca}^{(1)} \times I_{ca}^{(2)} \times I_{ca}^{(3)}| = 3$ に限られることに注意する。フラックスは整数値をとるため、ここでは $|I_{ab}^{(1)}| = |I_{ca}^{(1)}| = 3$ とし、他は全て 0 としよう²。フラックスの関係式 $I_{ab}^{(i)} + I_{bc}^{(i)} + I_{ca}^{(i)} = 0$ はフラックスの大きさに関する条件式

$$|I_{cb}^{(i)}| = |I_{ab}^{(i)}| \pm |I_{ca}^{(i)}|, \quad i = 1, 2, 3\tag{4.148}$$

²5 章で見るが、例えば $|I_{ab}^{(1)}| = |I_{ca}^{(2)}| = 3$ で他は全て 0 としてしまうと、湯川結合行列のランクが 1 となってしまう現実的なモデルは作れない。そのため 3 世代の由来は同じトーラスからでなければならない。

を導くので、 $|I_{cb}^{(1)}| = 6, 0$ が可能なフラックス値となる。このとき、 cb -セクターは $6/1$ 世代波動関数となるが、それらは Higgs 場の超対称パートナーである Higgsino とみなされる。Wilson line が $\zeta_{iab} + \zeta_{ica} = \zeta_{icb}$ を満たすように SS phase もまた

$$|\alpha_{cb}^{(i)}| = |\alpha_{ab}^{(i)}| \pm |\alpha_{ca}^{(i)}| \pmod{1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.149)$$

を満たす。これらに基づいて可能な 3 世代モデルを表 4.2, 4.3 に示す。

セクター	ab	ca	cb
場	Left	Right	Higgsino
$ I_{\alpha\beta}^{(1)} $	3	3	6/0
世代	3	3	6/1
SS phase $(\alpha_{\alpha\beta 1}^{(1)}, \alpha_{\alpha\beta 2}^{(1)})$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
モジュラー対称性	無	無	有/無

表 4.2: トーラス上の波動関数を用いた 3 世代モデル (without SS phase)

セクター	ab	ca	cb
場	Left	Right	Higgsino
$ I_{\alpha\beta}^{(1)} $	3	3	6/0
世代	3	3	6/1
SS phase $(\alpha_{\alpha\beta 1}^{(1)}, \alpha_{\alpha\beta 2}^{(1)})$	(1/2, 1/2)	(1/2, 1/2)	(0, 0)
モジュラー対称性	有	有	有/無

表 4.3: トーラス上の波動関数を用いた 3 世代モデル (with SS phase)

こうしてトーラス上の波動関数を用いて 3 世代モデルを構築することができた。しかしながら、これら 2 つのモデルから現実的なモデルを導くのは難しい。また、前者のモデルがモジュラー対称性を部分的にしか有していないことも明らかである³。そこで、残りの Section では Orbifold (軌道体) と呼ばれる新たな幾何に注目し、その上における波動関数を考えていく。Orbifold とは、考えている幾何 (今は $T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$) をそれに作用する離散群 G の軌道で同一視した商空間 $(T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2)/G$ である。例として円 S_1 とその座標 θ に作用する群 $\mathbb{Z}_2 : \theta \rightarrow -\theta$ の orbifold を図 4.5 に示す。

実はこの orbifold を考えることで、 λ^{aa} のような constant な場やコンパクト空間方向のゲージ

³必ずしもモジュラー対称性が必要な訳ではないが、モジュラー対称性を持つ波動関数を用いたモデル構築は物理的に興味深く、実際多く研究されている。

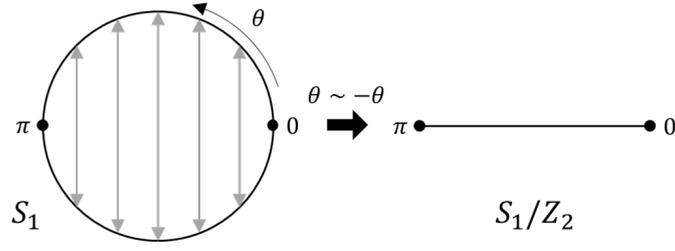


図 4.5: S_1/\mathbb{Z}_2 orbifold のイメージ

場 A_i ($i = 4, 5, 6, 7, 8, 9$) といった標準模型には現れない場を除くことができる。このような motivation を踏まえたうえで、本研究では特に twisted orbifold、permutation orbifold と呼ばれる 2 つの orbifolds に注目し、そこで新たな 3 世代モデル構築の可能性がもたらされることを見る。

4.4 Magnetized $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold モデル

4.4.1 Without SS phase

この Section では $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold を見ていく。まず SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ の場合を考える。 $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist は T^2 上の複素座標 z に対する次の変換によって定義される。

$$z \rightarrow -z \quad (4.150)$$

このとき、 T^2 上のゼロモード波動関数は次のように変換される。

$$\psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(-z, \tau) = \psi^{|I_{\alpha\beta}|-j, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.151)$$

ここで右辺は式 (4.93) から直接確かめることができる。 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上のゼロモード、 $\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z)$ 、は次の境界条件を満たす波動関数として定義される。

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(-z) = e^{i\pi m} \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z), \quad m \in \mathbb{Z}_2 \quad (4.152)$$

波動関数の添え字 m は orbifold 上の同一視 $z \sim -z$ の下でそれぞれ位相 $e^{i\pi m}$ で同一視される異なるモードを表す。したがって、 T^2 上の波動関数を用いて、これらは次のように展開できる [21, 22]。

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z) = \mathcal{N}_{t,2}^j \left(\psi_{T^2}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z) + e^{i\pi m} \psi_{T^2}^{|I_{\alpha\beta}|-j, |I_{\alpha\beta}|}(z) \right), \quad \mathcal{N}_{t,2}^j = \begin{cases} 1/2 & (j = 0, |I_{\alpha\beta}|/2) \\ 1/\sqrt{2} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.153)$$

このとき、

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{|I_{\alpha\beta}|-j, |I_{\alpha\beta}|}(z) \propto \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z) \quad (4.154)$$

が成り立つことから、独立なゼロモードは $j = \{0, 1, \dots, |I_{\alpha\beta}|/2\}$ (for $|I_{\alpha\beta}| = \text{even}$)、 $j = \{0, 1, \dots, (|I_{\alpha\beta}| - 1)/2\}$ (for $|I_{\alpha\beta}| = \text{odd}$) で与えられる。すなわち、 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上のゼロモードの数は表 4.4 のように与えられる。フラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}$ であるとき、 $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -even modes ($m = 0$) および odd modes ($m = 1$) はそれぞれ $(|I_{\alpha\beta}| + 2)/2$ 個と $(|I_{\alpha\beta}| - 2)/2$ 個のゼロモードを持つ⁴。一方で $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z} + 1$ のとき、 $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -even modes ($m = 0$) および odd modes ($m = 1$) はそれぞれ $(|I_{\alpha\beta}| + 1)/2$ 個と $(|I_{\alpha\beta}| - 1)/2$ 個のゼロモードを持つ。このとき、我々は 3 世代波動関数を $|I_{\alpha\beta}| = 4, 5$ の $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -even modes と $|I_{\alpha\beta}| = 7, 8$ の $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -odd modes に見つけることができる。

$\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist	$ I_{\alpha\beta} $									
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	$2\mathbb{Z}$
even	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$(I_{\alpha\beta} + 2)/2$
odd	0	0	1	2	3	4	5	6	7	$(I_{\alpha\beta} - 2)/2$
$\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist	$ I_{\alpha\beta} $									
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	$2\mathbb{Z} + 1$
even	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$(I_{\alpha\beta} + 1)/2$
odd	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$(I_{\alpha\beta} - 1)/2$

表 4.4: $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上の $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -even/odd modes の数 ($|I_{\alpha\beta}| \leq 17$)。3 世代は四角で囲われている。

特にフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}$ であるとき、我々は orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることができる。 \mathbb{Z}_2 twist(4.150) がモジュラー変換と可換であることに注意しよう。すなわち、 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上の even modes と odd modes はモジュラー変換の下で各々で閉じる。実際、orbifold 上のゼロモード (4.153) は $\tilde{\Gamma}(2|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト 1/2 のモジュラー形式として振舞う [19]。

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(\tilde{\gamma}(z, \tau)) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|/2} \tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}(\tilde{\gamma})_{jk} \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.155)$$

⁴even ($m = 0$) のとき波動関数は $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist の下で不変、odd ($m = 1$) のときは-1 倍となる。

ここで、ユニタリー表現は

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)0}}(\tilde{S})_{jk} = \mathcal{N}_{t,2}^j \mathcal{N}_{t,2}^k \frac{4e^{i\pi/4}}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} \cos\left(\frac{2\pi jk}{|I_{\alpha\beta}|}\right), \quad \tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)0}}(\tilde{T})_{jk} = e^{i\pi \frac{j^2}{|I_{\alpha\beta}|}} \delta_{j,k}, \quad (4.156)$$

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)1}}(\tilde{S})_{jk} = \mathcal{N}_{t,2}^j \mathcal{N}_{t,2}^k \frac{4ie^{i\pi/4}}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} \sin\left(\frac{2\pi jk}{|I_{\alpha\beta}|}\right), \quad \tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)1}}(\tilde{T})_{jk} = e^{i\pi \frac{j^2}{|I_{\alpha\beta}|}} \delta_{j,k}. \quad (4.157)$$

で与えられる。これらは代数関係 (4.123) を満たしている。

4.4.2 With SS phase

次に SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ の場合を考える。 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上のゼロモードは境界条件 (4.152) を満たす波動関数として定義されるが、そのような波動関数は

$$\mathcal{N}_{(t)}^{(j+\alpha_1)} (\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z, \tau) + \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-z, \tau)) \quad (4.158)$$

によって与えられる。 $\mathcal{N}_{(t)}^{(j+\alpha_1)}$ は規格化定数である。しかしながら、(4.158) は SS phase のあるトーラス上の境界条件 (4.124), (4.125) も満たす必要がある。すなわち、 $\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-z, \tau)$ が $\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z, \tau)$ と同じ境界条件を満たさなければならない。SS phase のあるトーラス上の境界条件 (4.124), (4.125) において $z \rightarrow -z$ として変形すると、

$$\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-(z+1), \tau) = e^{2\pi i(1-\alpha_1)} e^{\pi i I_{\alpha\beta} \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-z, \tau) \quad (4.159)$$

$$\psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-(z+\tau), \tau) = e^{2\pi i(1-\alpha_2)} e^{\pi i I_{\alpha\beta} \frac{\text{Im}\bar{z}}{\text{Im}\tau}} \psi^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(-z, \tau) \quad (4.160)$$

が導ける。これらが (4.124), (4.125) と一致するための SS phase の条件として

$$1 - \alpha_1 = \alpha_1 \pmod{1}, \quad 1 - \alpha_2 = \alpha_2 \pmod{1} \quad (4.161)$$

が導かれる。これが $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold と整合する SS phase の条件であり、 $(\alpha_1, \alpha_2) = (\ell_1/2, \ell_2/2)$, $(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_2)$ のみが許されることになる。 $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist に対して SS phase のある T^2 上の波動関数は

$$\psi_{T^2}^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \rightarrow \psi_{T^2}^{(j+\alpha_1, \alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(-z, \tau) = e^{-2\pi i(j+\alpha_1)/|I_{\alpha\beta}|} \psi_{T^2}^{(|I_{\alpha\beta}|-(j+\alpha_1), 1-\alpha_2), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.162)$$

と変換されるので、 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上のゼロモード、 $\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(j+\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau)$, は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
& \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(j+\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \\
&= \mathcal{N}_{(t)}^{(j+\frac{\ell_1}{2})} \sum_{k=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \left(\delta_{j,k} + (-1)^m e^{-2\pi i(j+\frac{\ell_1}{2})\ell_2/|I_{\alpha\beta}|} \delta_{|I_{\alpha\beta}|-j-\ell_1, k} \right) \psi_{T^2}^{(k+\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau), \quad (4.163) \\
& m \in \mathbb{Z}_2, \quad \mathcal{N}_{(t)}^{(j+\frac{\ell_1}{2})} = \begin{cases} 1/2 & (j + \ell_1/2 = 0, |I_{\alpha\beta}|/2) \\ 1/\sqrt{2} & (\text{otherwise}) \end{cases}
\end{aligned}$$

このとき、

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(|I_{\alpha\beta}|-j+\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \propto \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(j+\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.164)$$

が成り立つことから、独立なゼロモードは $j = \{0, 1, \dots, |I_{\alpha\beta}|/2 - \ell_1\}$ (for $|I_{\alpha\beta}| = 2\mathbb{Z}$)、 $j = \{0, 1, \dots, (|I_{\alpha\beta}|-1)/2\}$ (for $|I_{\alpha\beta}| = 2\mathbb{Z}+1$) で与えられる。SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (\ell_1/2, \ell_2/2) = (0, 0)$ におけるゼロモードの数は既に表 4.4 にて示してある。SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (\ell_1/2, \ell_2/2) \neq (0, 0)$ におけるゼロモードの数は表 4.5 に示したとおりである。

$\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist	(α_1, α_2)	$ I_{\alpha\beta} $					$ I_{\alpha\beta} $				
		0	2	4	6	$2\mathbb{Z}$	1	3	5	7	$2\mathbb{Z}+1$
even	$(1/2, 0)$	1	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	1	2	$\boxed{3}$	4	$(I_{\alpha\beta} +1)/2$
	$(0, 1/2)$	1	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	1	2	$\boxed{3}$	4	$(I_{\alpha\beta} +1)/2$
	$(1/2, 1/2)$	1	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	0	1	2	$\boxed{3}$	$(I_{\alpha\beta} -1)/2$
odd	$(1/2, 0)$	0	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	0	1	2	$\boxed{3}$	$(I_{\alpha\beta} -1)/2$
	$(0, 1/2)$	0	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	0	1	2	$\boxed{3}$	$(I_{\alpha\beta} -1)/2$
	$(1/2, 1/2)$	0	1	2	$\boxed{3}$	$ I_{\alpha\beta} /2$	1	2	$\boxed{3}$	4	$(I_{\alpha\beta} -1)/2$

表 4.5: SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ のある $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上の $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ -even($m = 0$)/odd($m = 1$) modes の数 ($|I_{\alpha\beta}| \leq 7$)。3 世代は四角で囲われている。

特に SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ かつフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}+1$ であるとき、我々は orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることができる。Orbifold 上のゼロモード (4.163) は $\tilde{\Gamma}(8|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト $1/2$ のモジュラー形式として振舞う。

$$\Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(\tilde{\gamma}(z, \tau)) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \sum_{k=0}^{(|I_{\alpha\beta}|-1)/2} \tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}(\tilde{\gamma})_{jk} \Psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), |I_{\alpha\beta}|}(z, \tau) \quad (4.165)$$

ここで、ユニタリー表現は

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)0}}(\tilde{S})_{jk} = \mathcal{N}_{(t)}^{(j+\frac{1}{2})} \mathcal{N}_{(t)}^{(k+\frac{1}{2})} \frac{4e^{i\pi/4}}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{\pi i(k-j)} \cos\left(\frac{2\pi}{|I_{\alpha\beta}|} \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.166)$$

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)0}}(\tilde{T})_{jk} = e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|} (j+\frac{1}{2})^2} \delta_{j,k}, \quad (4.167)$$

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)1}}(\tilde{S})_{jk} = \mathcal{N}_{(t)}^{(j+\frac{1}{2})} \mathcal{N}_{(t)}^{(k+\frac{1}{2})} \frac{4e^{i\pi/4}}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}|}} e^{\pi i(k-j)} \sin\left(\frac{2\pi}{|I_{\alpha\beta}|} \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.168)$$

$$\tilde{\rho}_{T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)1}}(\tilde{T})_{jk} = e^{\frac{\pi i}{|I_{\alpha\beta}|} (j+\frac{1}{2})^2} \delta_{j,k}. \quad (4.169)$$

で与えられる。これらは代数関係(4.147)を満たしている。

4.5 Magnetized $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_N$ orbifold モデル

次に $T^2 \times T^2$ 上の orbifold を考えていく。それにあたって、 $T^2 \times T^2$ 上のゼロモード波動関数にモジュラー形式を適用しておこう。前提として、以降では2つのトーラスは同じ複素構造モジュライを持つとする、つまり、 $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$ であるとする⁵。そのとき、モジュラー変換の下で SS phase のないフラックス偶数の $T_1^2 \times T_2^2$ 上のゼロモードは次のように変換する。

$$\begin{aligned} \psi_{T_1^2}^{j, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|}(\gamma(z_1, \tau)) \psi_{T_2^2}^{k, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|}(\gamma(z_2, \tau)) &= J_1(\gamma, \tau) \sum_{m=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(1)}|-1} \tilde{\rho}(\gamma)_{jm} \sum_{n=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(2)}|-1} \tilde{\rho}(\gamma)_{kn} \psi_{T_1^2}^{m, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|}(z_1, \tau) \psi_{T_2^2}^{n, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|}(z_2, \tau) \\ &\equiv J_1(\gamma, \tau) \sum_{m=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(1)}|-1} \sum_{n=0}^{|I_{\alpha\beta}^{(2)}|-1} \rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)_{(jk)(mn)} \psi_{T_1^2}^{m, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|}(z_1, \tau) \psi_{T_2^2}^{n, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|}(z_2, \tau), \end{aligned} \quad (4.170)$$

$$\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(S)_{(jk)(mn)} = \prod_{t=1,2} \tilde{\rho}_{T_t^2}(\tilde{S})_{j_t m_t} = \tilde{\rho}_{T_1^2}(\tilde{S})_{jm} \tilde{\rho}_{T_2^2}(\tilde{S})_{kn} = \frac{i}{\sqrt{|I_{\alpha\beta}^{(1)} I_{\alpha\beta}^{(2)}|}} e^{2i\pi \left(\frac{jm}{|I_{\alpha\beta}^{(1)}|} + \frac{kn}{|I_{\alpha\beta}^{(2)}|} \right)}, \quad (4.171)$$

$$\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(T)_{(jk)(mn)} = \prod_{t=1,2} \tilde{\rho}_{T_t^2}(\tilde{T})_{j_t m_t} = \tilde{\rho}_{T_1^2}(\tilde{T})_{jm} \tilde{\rho}_{T_2^2}(\tilde{T})_{kn} = e^{i\pi \left(\frac{j^2}{|I_{\alpha\beta}^{(1)}|} + \frac{k^2}{|I_{\alpha\beta}^{(2)}|} \right)} \delta_{j,m} \delta_{k,n}, \quad (4.172)$$

$$j, m \in \mathbb{Z}_{|I_{\alpha\beta}^{(1)}|}, k, n \in \mathbb{Z}_{|I_{\alpha\beta}^{(2)}|}, \gamma \in \Gamma,$$

⁵3-form fluxes を考慮すればこのような複素構造の stabilize が可能である [23]。

ここで $\tilde{\rho}_{T_1^2}$ および $\tilde{\rho}_{T_2^2}$ は各トーラス上の波動関数に対するモジュラー変換のユニタリー表現 (4.122) である。また、ユニタリー表現 $\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)$ は次の代数関係を満たす⁶。

$$\begin{aligned} \rho(T)_{(jk)(mn)}^{2\text{lcm}(|I_{\alpha\beta}^{(1)}|, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|)} &= \rho(S)_{(jk)(mn)}^4 = [\rho(S)\rho(T)]_{(jk)(mn)}^3 = \delta_{(jk), (mn)}, \\ [\rho(S)^2\rho(T)]_{(jk)(mn)} &= [\rho(T)\rho(S)^2]_{(jk)(mn)}, \quad \rho(S)_{(jk)(mn)}^2 = -\delta_{j, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|-m} \delta_{k, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|-n} \end{aligned} \quad (4.173)$$

こうして、 $T_1^2 \times T_2^2$ 上のゼロモードが $\Gamma(2\text{lcm}(|I_{\alpha\beta}^{(1)}|, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|))$ に対するウェイト 1 モジュラー形式として振舞うことが分かった。また、 $\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)$ は商群 $\Gamma'_{2\text{lcm}(|I_{\alpha\beta}^{(1)}|, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|)}$ のユニタリー表現となる。同様にして、SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ のあるフラックス奇数の場合も議論できる。

以下では [24] に基づき、orbifold について議論する。

4.5.1 $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold

ここでは $(T_1^2 \times T_2^2)$ 上の orbifold である $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold を考える。ここでも $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$ としている。 $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation は $T_1^2 \times T_2^2$ 上の複素座標 (z_1, z_2) に対する次の変換で定義される。

$$(z_1, z_2) \rightarrow (z_2, z_1) \quad (4.174)$$

このとき、 $T_1^2 \times T_2^2$ 上のゼロモード (任意の SS phase を持つ) は次のように変換される。

$$\psi^{j, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|}(z_1, \tau) \psi^{k, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|}(z_2, \tau) \rightarrow \psi^{j, |I_{\alpha\beta}^{(1)}|}(z_2, \tau) \psi^{k, |I_{\alpha\beta}^{(2)}|}(z_1, \tau) \quad (4.175)$$

$\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation によってこの orbifold 上では T_1^2 と T_2^2 の区別がないので、我々はフラックス条件 $|I_{\alpha\beta}^{(1)}| = |I_{\alpha\beta}^{(2)}| \equiv |I_{\alpha\beta}|$ および SS phase 条件 $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ を課す必要がある。 $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold 上のゼロモード、 $\Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2)$ 、は次の境界条件を満たす波動関数として定義される。

$$\Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_2, z_1) = e^{i\pi n} \Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2), \quad n \in \mathbb{Z}_2 \quad (4.176)$$

したがって、これらは T^2 上のゼロモードを用いて次のように展開できる [24]。

$$\Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2) = \mathcal{N}_{2,p}^{jk} (\psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z_1) \psi^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z_2) + e^{i\pi n} \psi^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z_2) \psi^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z_1)) \quad (4.177)$$

$$j, k \in \mathbb{Z}_{|I_{\alpha\beta}|}, \quad j \geq k, \quad \mathcal{N}_{2,p}^{jk} = \begin{cases} 1/2 & (j = k) \\ 1/\sqrt{2} & (j > k) \end{cases}$$

$(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold 上のゼロモードの数は表 4.6 に示したとおりである (世代数は SS phase に依らない)。 $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ -even modes ($n = 0$) および odd modes はそれぞれ $|I_{\alpha\beta}|(|I_{\alpha\beta}| +$

$\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation	$ I_{\alpha\beta} $							\mathbb{Z}
	0	1	2	3	4	5	6	
even	1	1	3	6	10	15	21	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 1)/2$
odd	0	0	1	3	6	10	15	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 1)/2$

表 4.6: $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold 上の $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ -even/odd modes の数 ($|I_{\alpha\beta}| \leq 6$)。3 世代は四角で囲われている。

1)/2 個と $|I_{\alpha\beta}|(|I_{\alpha\beta}| - 1)/2$ 個のゼロモードを持つ。このとき、我々は 3 世代波動関数を $|I_{\alpha\beta}| = 2$ の $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ -even modes と $|I_{\alpha\beta}| = 3$ の $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ -odd modes に見つけることができる。

特に SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ かつフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}$ であるとき、我々は orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることができる。 \mathbb{Z}_2 twist 同様、 \mathbb{Z}_2 permutation (4.174) がモジュラー変換と可換であることに注意しよう。すなわち、 $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(p)}$ permutation orbifold 上の even modes と odd modes はモジュラー変換の下で各々で閉じる。実際、orbifold 上のゼロモード (4.177) は $\Gamma(2|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト 1 のモジュラー形式として振舞う。

$$\Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(\gamma(z_1, z_2, \tau)) = J_1(\gamma, \tau) \sum_{j'=0}^{|I_{\alpha\beta}|-1} \sum_{k'=0}^{j'} \rho_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}(\gamma)_{(jk)(j'k')} \Psi_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}^{j'k', |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2, \tau) \quad (4.178)$$

ここで、ユニタリー表現は、

$$\rho_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})n}}(\gamma)_{(jk)(j'k')} = 2\mathcal{N}_{2,p}^{jk} \mathcal{N}_{2,p}^{j'k'} \left(\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)_{(jk)(j'k')} + e^{i\pi n} \rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)_{(jk)(k'j')} \right) \quad (4.179)$$

$$\rho_{T_1^2 \times T_2^2}(\gamma)_{(jk)(j'k')} \equiv \tilde{\rho}_{T_1^2}(\tilde{\gamma})_{jj'} \tilde{\rho}_{T_2^2}(\tilde{\gamma})_{kk'} \quad (4.180)$$

で与えられる。これらは代数関係 (4.173) を満たしている。

SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ かつフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z} + 1$ であるときも orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることが可能である。そのとき orbifold 上のゼロモード (4.177) は $\Gamma(4|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト 1 のモジュラー形式として振舞う。

続く subsection では、 $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold に $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist を組み合わせた $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold を考える。

4.5.2 $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold

ここでは $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ モデルを考える。前と同じように我々は $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$, $|I_{\alpha\beta}^{(1)}| = |I_{\alpha\beta}^{(2)}| \equiv |I_{\alpha\beta}|$ および $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ を想定する。また $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist と

⁶lcm(a, b) は a と b の最小公倍数を表す。

の整合性から $(\alpha_1, \alpha_2) = (\ell_1/2, \ell_2/2)$, $(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_2)$ も課される。この orbifold 上のゼロモード、 $\Psi_{m(t), n(\text{per})}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2)$ は $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上のゼロモード (4.153) (または SS phase を想定する場合 (4.163)) を用いて次のように展開される。

$$\Psi_{m(t), n(\text{per})}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2) = \mathcal{N}_{2,p}^{jk} \left(\Psi_{T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z_1) \Psi_{T_2^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z_2) + e^{i\pi n} \Psi_{T_2^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{j, |I_{\alpha\beta}|}(z_2) \Psi_{T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)m}}^{k, |I_{\alpha\beta}|}(z_1) \right) \quad (4.181)$$

$$j, k \in \mathbb{Z}_{|I_{\alpha\beta}|/2+1}, \quad j \geq k, \quad m, n \in \mathbb{Z}_2$$

注意すると T_1^2 と T_2^2 に区別がないことから、 $T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ orbifold 上のゼロモードの $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist 固有値は $T_2^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ orbifold 上のゼロモードのそれと同じである。このとき、SS phase のない $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上のゼロモードの数は表 4.7 で与えられる。我々は 3 世代を $|I_{\alpha\beta}| = 2, 3$ の $(\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist, $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation) = (even, even) modes、 $|I_{\alpha\beta}| = 4, 5$ の (even, odd) modes、 $|I_{\alpha\beta}| = 5, 6$ の (odd, even) modes および $|I_{\alpha\beta}| = 7, 8$ の (odd, odd) modes に見つけることができる。

$(\mathbb{Z}_2^{(t)}, \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$	$ I_{\alpha\beta} $									$2\mathbb{Z}$
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	
(even, even)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	$(I_{\alpha\beta} + 2)(I_{\alpha\beta} + 4)/8$
(even, odd)	0	1	3	6	10	15	21	28	36	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$
(odd, even)	0	0	1	3	6	10	15	21	28	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$
(odd, odd)	0	0	0	1	3	6	10	15	21	$(I_{\alpha\beta} - 2)(I_{\alpha\beta} - 4)/8$
$(\mathbb{Z}_2^{(t)}, \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$	$ I_{\alpha\beta} $									$2\mathbb{Z} + 1$
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
(even, even)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} + 3)/8$
(even, odd)	0	1	3	6	10	15	21	28	36	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} - 1)/8$
(odd, even)	0	1	3	6	10	15	21	28	36	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} - 1)/8$
(odd, odd)	0	0	1	3	6	10	15	21	28	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} - 3)/8$

表 4.7: SS phase のない $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上の $(\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist, $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation) = (even, even), (even, odd), (odd, even) および (odd, odd) modes のゼロモードの数 ($|I_{\alpha\beta}| \leq 16$)。3 世代は四角で囲われている。

SS phase のある $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上のゼロモードの数は表 4.8 で与えられる。

特にフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z}$ であるとき、我々は orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることができる。ゼロモード (4.181) は $\Gamma(2|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト 1 のモジュラー形

$(\mathbb{Z}_2^{(t)}, \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$	(α_1, α_2)	$ I_{\alpha\beta} $					$ I_{\alpha\beta} $				
		0	2	4	6	$2\mathbb{Z}$	1	3	5	7	$2\mathbb{Z} + 1$
(even, even)	(1/2, 0)	1	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	1	3	6	10	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} + 3)/8$
	(0, 1/2)	1	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	1	3	6	10	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} + 3)/8$
	(1/2, 1/2)	1	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} + 1)/8$
(even, odd)	(1/2, 0)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} - 1)/8$
	(0, 1/2)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} - 1)/8$
	(1/2, 1/2)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	0	1	3	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} - 3)/8$
(odd, even)	(1/2, 0)	0	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} + 1)/8$
	(0, 1/2)	0	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} + 1)/8$
	(1/2, 1/2)	0	1	3	6	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} + 2)/8$	1	3	6	10	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} + 3)/8$
(odd, odd)	(1/2, 0)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	0	1	3	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} - 3)/8$
	(0, 1/2)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	0	1	3	$(I_{\alpha\beta} - 1)(I_{\alpha\beta} - 3)/8$
	(1/2, 1/2)	0	0	1	3	$ I_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} - 2)/8$	0	1	3	6	$(I_{\alpha\beta} + 1)(I_{\alpha\beta} - 1)/8$

表 4.8: SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ の $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上の $(\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist, $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation) = (even, even), (even, odd), (odd, even) および (odd, odd) modes のゼロモードの数 ($|I_{\alpha\beta}| \leq 7$)。3 世代は四角で囲われている。

式として振舞う。

$$\Psi_{m(t), n(\text{per})}^{jk, |I_{\alpha\beta}|}(\gamma(z_1, z_2, \tau)) = J_1(\gamma, \tau) \sum_{j'=0}^{|I_{\alpha\beta}|/2} \sum_{k'=0}^{j'} \rho_{m(t), n(\text{per})}(\gamma)_{(jk)(j'k')} \Psi_{m(t), n(\text{per})}^{j'k', |I_{\alpha\beta}|}(z_1, z_2, \tau) \quad (4.182)$$

ここでユニタリー表現は、

$$\rho_{m(t), n(\text{per})}(\gamma)_{(jk)(j'k')} = 2\mathcal{N}_{2,p}^{jk} \mathcal{N}_{2,p}^{j'k'} \left(\rho_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(t)}}(\gamma)_{(jk)(j'k')} + e^{i\pi n} \rho_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(t)}}(\gamma)_{(jk)(k'j')} \right) \quad (4.183)$$

$$\rho_{(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(t)}}(\gamma)_{(jk)(j'k')} \equiv \tilde{\rho}_{T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}}(\tilde{\gamma})_{jj'} \tilde{\rho}_{T_2^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}}(\tilde{\gamma})_{kk'} \quad (4.184)$$

で与えられる。

SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/2, 1/2)$ かつフラックスが $|I_{\alpha\beta}| \in 2\mathbb{Z} + 1$ であるときも orbifold 上のゼロモードのモジュラー対称性を考えることが可能である。そのとき orbifold 上のゼロモード (4.181) は $\Gamma(4|I_{\alpha\beta}|)$ に対するウェイト 1 のモジュラー形式として振舞う。

このように、orbifold を考えることでさらなる 3 世代モデル構築の可能性があることが分かった。次章ではこれらの 3 世代モデルを分類し、湯川結合の持つ一般的性質を考えていく。

第5章 3世代モデル

我々は前章にて $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold, $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold および $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold において3世代波動関数が存在することを見た。また、SS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ かつフラックスが偶数である場合、波動関数がモジュラー対称性を持つことも見た。それらを踏まえて、ここではSS phase $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ のときの上記の orbifolds 上の3世代波動関数を用いた全ての可能な3世代モデルの分類を行う [25–27]。さらにそれらの3世代モデルから導き出される湯川結合の持つモジュラー対称性を考察する。この章は [28] に基づく。なお、同様の分類はSS phaseのある orbifolds 上の3世代波動関数を用いても可能だが、本紙では触れない。

5.1 3世代モデルの分類

前章の Section 4.3.1 で見たように、背景磁場のある10次元 $U(N)$ super Yang Mills 理論のゲージ対称性は $U(N_a) \times U(N_b) \times U(N_c)$ へと破れる。ここで $N = N_a + N_b + N_c$ である。このとき、6つのタイプの双基本表現の物質場、 $\lambda^{ab}(N_a, \bar{N}_b)$, $\lambda^{bc}(N_b, \bar{N}_c)$, $\lambda^{ca}(N_c, \bar{N}_a)$, $\lambda^{ba}(\bar{N}_a, N_b)$, $\lambda^{cb}(\bar{N}_b, N_c)$, $\lambda^{ac}(\bar{N}_c, N_a)$ が存在した。また、トーラス上の波動関数のカイラリティがフラックスの符号によって固定されたことを思い出そう。特に ab -セクターに注目して考えると、10次元のカイラリティを固定したとき、4次元理論では $\lambda^{ab}(N_a, \bar{N}_b)$ か $\lambda^{ba}(\bar{N}_a, N_b)$ のどちらかのみが massless となる。同様のことは他のセクターに対しても言える。

この章では10次元ゲージノ場 λ が left のカイラリティを持つと想定する。すなわち massless な場として λ^{ab} , λ^{bc} , λ^{ca} が現れるとする。我々は最終的には標準模型を導きたい。そのためには $U(N_a) \times U(N_b) \times U(N_c)$ ゲージ群として $N_a = 3$, $N_b = 2$, $N_c = 1$ を選ばば良いように思える。しかし、そのようなゲージ群の配置で現れる双基本表現場

$$\lambda^{ab}(3, \bar{2}); \lambda^{bc}(2, \bar{1}); \lambda^{ca}(1, \bar{3}) \quad (5.1)$$

では標準模型の quark, lepton 粒子を全て導くことはできない。例えば $\lambda^{ab}(3, \bar{2})$ は left-handed quarks, $\lambda^{bc}(2, \bar{1})$ は left-handed leptons, $\lambda^{ca}(1, \bar{3})$ は right-handed quark とみなせるだろうが、right-handed lepton の候補が足りていない。また、超対称性を求めるならば Higgs 場の超対称パートナー、Higgsino 場の候補も必要である。

標準模型を導くための方法の候補として、 $U(8)$ ゲージ群の $U(4) \times U(2) \times U(2)$ への breaking がある。これは Pati-Salam ゲージ群 $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ を $U(1)^3$ 因子を除いて再現する。このとき、 λ^{ab} と λ^{ca} はそれぞれ left-および right-handed matter fields (quarks, leptons) に対応する。 λ^{bc} は up-type と down-type の Higgsinos に対応する。ここで我々は SUSY が各セクターの間で保たれているとする。つまり SUSY 条件 (4.110) が成り立っているとする。よって Higgs 場と Higgsino 場の数は同じである。また、時空のボソン・フェルミオンの有効場に対して SUSY を要請しているため、tree level にタキオニックなモードは現れない¹。

前章で見たようにゲージノ場 λ の余剰次元部分はトーラスまたは orbifolds 上の波動関数によって与えられる。我々は orbifolds として $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold, $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold, $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold に注目し、そこで適切なフラックスを選ぶことで 3 世代波動関数が現れることを見た。3 世代 quarks・leptons を得るためにコンパクト空間上の波動関数は total で 3 世代となる必要がある。したがって、 $T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上に 3 世代波動関数があるとするとき、 $T_2^2 \times T_3^2$ 上には 1 世代のゼロモード波動関数が存在しなければならない。同様に、 $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold 上に 3 世代波動関数があるとするとき、 T_3^2 上には 1 世代のゼロモード波動関数が存在しなければならない。 $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold に関しても同じである。

このような状況において、4 次元有効理論の湯川結合行列は一般的に rank 3 を持つ。(4.23) で見たように、湯川結合はゼロモードの overlap 積分で与えられる。

$$\tilde{Y}^{IJK} = \int d^6 z \text{Tr} \left[\psi_L^I(z) \cdot \psi_R^J(z) \cdot (\phi_H^K(z))^\dagger \right] \quad (5.2)$$

ここで ψ_L^I , ψ_R^J , ϕ_H^K はそれぞれ (3 世代) left-handed matter fields, (3 世代) right-handed matter fields, Higgs fields を表している。Higgs fields が 3 世代とは限らないことに注意しよう。また、(4.108) で見たようにボソン場のゼロモード波動関数はフェルミオン場のそれと同じである。ゼロモードの 3 世代添え字 I, J に関して湯川結合を見ると、

$$\tilde{Y}^{IJ} = a_{(1 \times 2)}^{IJ}(\tau) \cdot b_{(3)}(\tau_3) \quad (5.3)$$

と書ける。ここで下付き添え字 (1×2) と (3) はそれぞれ $T_1^2 \times T_2^2$ と T_3^2 からの寄与を意味する。すなわち、 $a_{(1 \times 2)}^{IJ}(\tau)$ は $T_1^2 \times T_2^2$ に由来する $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$ の関数 (3×3 行列) で、湯川結合のフレーバー構造を決定する。対して $b_{(3)}(\tau_3)$ は T_3^2 に由来する τ_3 の関数で、overall factor となる。我々は $a_{(1 \times 2)}^{IJ}(\tau)$ の rank を湯川結合行列の rank とみなしている。

湯川結合行列の rank の減少は ψ_L^I と ψ_R^J が次のような構造を持つときに起きる。

$$\psi_L^I = \psi_{T_1^2}^I \otimes \psi_{T_2^2}, \quad \psi_R^J = \psi_{T_1^2} \otimes \psi_{T_2^2}^J \quad (5.4)$$

¹3.2 章参照。

ここで $\psi_{T_1^2}$ と $\psi_{T_2^2}$ はそれぞれ T_1^2 と T_2^2 上の 1 世代ゼロモード波動関数を表す。このような構造の波動関数は次の形の湯川結合行列を導く。

$$a_{(1 \times 2)}^{IJ}(\tau) = \alpha_{(1)}^I \cdot \beta_{(2)}^J \quad (5.5)$$

これは明らかに rank 1 の行列であり、現実的なフレーバー構造を導くことはできない。よって、我々はこのタイプのフレーバー構造は考えないことにする。注意すると、1 つのトーラス T_1^2 上にもみ 3 世代波動関数が存在する場合、波動関数は次のような構造を持つ。

$$\psi_L^I = \psi_{T_1^2}^I \otimes \psi_{T_2^2}, \quad \psi_R^J = \psi_{T_1^2}^J \otimes \psi_{T_2^2} \quad (5.6)$$

このとき T_2^2 からの寄与は単に overall factor となる。

これらを踏まえて、各 orbifolds 上の 3 世代波動関数を ψ_L^I と ψ_R^J に割り当てることを考えよう。その際の注意点として、4 次元湯川結合項は $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist および $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation の下で even (不変) でなければならない。湯川結合項はコンパクト空間座標 z_i ($i = 1, 2, 3$) には依らないので、仮に $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist または $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation の下で odd だとすると、それは 0 になってしまう。0 とならない湯川結合を導く波動関数 ($\lambda^{ab}, \lambda^{ca}, \lambda^{bc}$) のモードパターンは表 5.1 で与えられる。

	λ^{ab}	λ^{ca}	λ^{bc}
I	even	even	even
II	odd	even	odd
II'	even	odd	odd
III	odd	odd	even

表 5.1: 0 とならない湯川結合を導くゼロモードの可能な \mathbb{Z}_2 twist (permutation) モードパターン。

このとき、type II は left と right-handed matter fields の反転の下で type II' と一致する。例えば、($\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist, $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation) の下でのモードパターン (II, II) は (II', II') とは等価だが、(II, II') と (II', II) とは等価ではない。等価性による重複を避けるため、我々は left と right の反転で得られるどちらかのモデルのみを考える。

さらに、フラックスの定義から導かれるフラックスの関係式 (4.148) が存在することにも注意する。各 orbifolds 上で ψ_L^I と ψ_R^J に対して 3 世代波動関数を与えるようなフラックスを選んだ時、この関係式から ϕ_H^K に対するフラックスが自動的に定まる。すなわち Higgs fields の世代数が定められる。

このようにして、我々は 0 とならない湯川結合を導く 3 世代モデルを分類することができる。 $T^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold, $(T^2 \times T^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold, $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold における 3 世代モデルの分類をそれぞれ表 5.2, 5.3, 5.4 に示す。なお、表 5.2 の結果は [25] にて調べられている。

表 5.2: $T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold 上の 0 とならない湯川結合を導く可能な 3 世代モデル。第 1 列 (T_1) は $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist (T_1) の下での表 5.1 に示したモードパターンを示している。第 2 列は left (ab) および right (ca) handed matter fields に 3 世代を与えるようなフラックスの大きさを示している。記号 “/” はフラックス条件 (4.148) における符号 \pm の選択を (+/-) で区別している。残りの列ではモジュラー変換 $\tilde{\rho}^{(\alpha\beta)}$ および $\tilde{\rho}^{(Y)}$ の満たす代数関係を示している ($\alpha\beta \in \{ab, ca, cb\}$)。ただし $\tilde{\rho}^{(\alpha\beta)}$ は $\alpha\beta$ -セクター波動関数、 $\tilde{\rho}^{(Y)}$ は湯川結合に作用するモジュラー変換のユニタリー表現である。

$T_1^2/\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twisted orbifold								
(T_1)	$ I_{ab}^{(1)} $	$ I_{ca}^{(1)} $	$ I_{cb}^{(1)} $	The number of Higgs zero-modes	$\tilde{\rho}^{(ab)}$	$\tilde{\rho}^{(ca)}$	$\tilde{\rho}^{(cb)}$	$\tilde{\rho}^{(Y)}$
(I)	4	4	8/0	5/1	$\tilde{\Gamma}'_8$	$\tilde{\Gamma}'_8$	$\tilde{\Gamma}'_{16}/-$	$\tilde{\Gamma}'_{16}/-$
(II)	8	4	12/4	5/1	$\tilde{\Gamma}'_{16}$	$\tilde{\Gamma}'_8$	$\tilde{\Gamma}'_{24}/\tilde{\Gamma}'_8$	$\tilde{\Gamma}'_{48}/\tilde{\Gamma}'_{16}$
(III)	8	8	16/0	9/1	$\tilde{\Gamma}'_{16}$	$\tilde{\Gamma}'_{16}$	$\tilde{\Gamma}'_{32}/-$	$\tilde{\Gamma}'_{32}/-$
(I)	5	4	9/1	5/1	-	$\tilde{\Gamma}'_8$	-	$\tilde{\Gamma}'_{360}/\tilde{\Gamma}'_{40}$
(I)	5	5	10/0	6/1	-	-	$\tilde{\Gamma}'_{20}/-$	$\tilde{\Gamma}'_{500}/-$
(II)	8	5	13/3	6/1	$\tilde{\Gamma}'_{16}$	-	-	$\tilde{\Gamma}'_{1040}/\tilde{\Gamma}'_{240}$
(II)	7	4	11/3	5/1	-	$\tilde{\Gamma}'_8$	-	$\tilde{\Gamma}'_{616}/\tilde{\Gamma}'_{168}$
(II)	7	5	12	5	-	-	$\tilde{\Gamma}'_{24}$	$\tilde{\Gamma}'_{840}$
(III)	8	7	15/1	8/1	$\tilde{\Gamma}'_{16}$	-	-	$\tilde{\Gamma}'_{1680}/\tilde{\Gamma}'_{112}$
(III)	7	7	14/0	8/1	-	-	$\tilde{\Gamma}'_{28}/-$	$\tilde{\Gamma}'_{1372}/-$

表 5.3: $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold 上の 0 とならない湯川結合を導く可能な 3 世代モデル。第 1 列 (P) は $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation (P) の下での表 5.1 に示したモードパターンを示している。注意すると $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation によって T_1^2 におけるフラックスは T_2^2 におけるそれと同じである。つまり、 $|I_{\alpha\beta}^{(1)}| = |I_{\alpha\beta}^{(2)}| \equiv |I_{\alpha\beta}|$, $\alpha\beta \in \{ab, ca, cb\}$ である。

$(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold								
(P)	$ I_{ab} $	$ I_{ca} $	$ I_{cb} $	The number of Higgs zero-modes	$\rho^{(ab)}$	$\rho^{(ca)}$	$\rho^{(cb)}$	$\rho^{(Y)}$
(I)	2	2	4/0	10/1	Γ'_4	Γ'_4	$\Gamma'_8/-$	$\Gamma'_8/-$
(II)	3	2	5	10	-	Γ'_4	-	Γ'_{60}
(III)	3	3	6/0	21/1	-	-	$\Gamma'_{12}/-$	$\Gamma'_{108}/-$

表 5.4: $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上の 0 とならない湯川結合を導く可能な 3 世代モデル。第 1 列 (T,P) は $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist (T) および $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation (P) の下での表 5.1 に示したモードパターンを示している。

$(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold								
(T,P)	$ I_{ab} $	$ I_{ca} $	$ I_{cb} $	The number of Higgs zero-modes	$\rho^{(ab)}$	$\rho^{(ca)}$	$\rho^{(cb)}$	$\rho^{(Y)}$
(I, I)	2	2	4/0	6/1	Γ'_4	Γ'_4	$\Gamma'_8/-$	$\Gamma'_8/-$
(I, II)	4	2	6/2	6/1	Γ'_8	Γ'_4	Γ'_{12}/Γ'_4	Γ'_{24}/Γ'_8
(I, III)	4	4	8/0	15/1	Γ'_8	Γ'_8	$\Gamma'_{16}/-$	$\Gamma'_{16}/-$
(II, I)	6	2	8/4	6/1	Γ'_{12}	Γ'_4	Γ'_{16}/Γ'_8	$\Gamma'_{48}/\Gamma'_{24}$
(II, II)	8	2	10/6	6/1	Γ'_{16}	Γ'_4	$\Gamma'_{20}/\Gamma'_{12}$	$\Gamma'_{80}/\Gamma'_{48}$
(II, II')	6	4	10	6	Γ'_{12}	Γ'_8	Γ'_{20}	Γ'_{120}
(II, III)	8	4	12/4	15/1	Γ'_{16}	Γ'_8	Γ'_{24}/Γ'_8	$\Gamma'_{48}/\Gamma'_{16}$
(III, I)	6	6	12/0	28/1	Γ'_{12}	Γ'_{12}	$\Gamma'_{24}/-$	$\Gamma'_{24}/-$
(III, II)	8	6	14/2	28/1	Γ'_{16}	Γ'_{12}	Γ'_{28}/Γ'_4	$\Gamma'_{336}/\Gamma'_{48}$
(III, III)	8	8	16/0	45/1	Γ'_{16}	Γ'_{16}	$\Gamma'_{32}/-$	$\Gamma'_{32}/-$

$(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold								
(T, P)	$ I_{ab} $	$ I_{ca} $	$ I_{cb} $	The number of Higgs zero-modes	$\rho^{(ab)}$	$\rho^{(ca)}$	$\rho^{(cb)}$	$\rho^{(Y)}$
(I, I)	3	2	5/1	6/1	-	Γ'_4	-	$\Gamma'_{60}/\Gamma'_{12}$
(I, I)	3	3	6/0	10/1	-	-	$\Gamma'_{12}/-$	$\Gamma'_{108}/-$
(I, II)	4	3	7	6	Γ'_8	-	-	Γ'_{168}
(I, II)	5	2	7/3	6/1	-	Γ'_4	-	$\Gamma'_{140}/\Gamma'_{60}$
(I, II)	5	3	8/2	10/1	-	-	Γ'_{16}/Γ'_4	$\Gamma'_{240}/\Gamma'_{60}$
(I, III)	5	4	9/1	15/1	-	Γ'_8	-	$\Gamma'_{360}/\Gamma'_{40}$
(I, III)	5	5	10/0	21/1	-	-	$\Gamma'_{20}/-$	$\Gamma'_{500}/-$
(II, I)	6	3	9/3	10/1	Γ'_{12}	-	-	$\Gamma'_{324}/\Gamma'_{108}$
(II, I)	5	2	7/3	6/1	-	Γ'_4	-	$\Gamma'_{140}/\Gamma'_{60}$
(II, I)	5	3	8	6	-	-	Γ'_{16}	Γ'_{240}
(II, II)	8	3	11/5	10/1	Γ'_{16}	-	-	$\Gamma'_{528}/\Gamma'_{240}$
(II, II)	7	2	9/5	6/1	-	Γ'_4	-	$\Gamma'_{252}/\Gamma'_{140}$
(II, II)	7	3	10	6	-	-	Γ'_{20}	Γ'_{420}
(II, II')	6	5	11	10	Γ'_{12}	-	-	Γ'_{660}
(II, II')	5	4	9	6	-	Γ'_8	-	Γ'_{360}
(II, II')	5	5	10	6	-	-	Γ'_{20}	Γ'_{500}
(II, III)	8	5	13/3	21/1	Γ'_{16}	-	-	$\Gamma'_{1040}/\Gamma'_{240}$
(II, III)	7	4	11/3	15/1	-	Γ'_8	-	$\Gamma'_{616}/\Gamma'_{168}$
(II, III)	7	5	12	15	-	-	Γ'_{24}	$\Gamma'_{840}/\Gamma'_{140}$
(III, I)	6	5	11/1	21/1	Γ'_{12}	-	-	$\Gamma'_{660}/\Gamma'_{60}$
(III, I)	5	5	10/0	21/1	-	-	$\Gamma'_{20}/-$	$\Gamma'_{500}/-$
(III, II)	8	5	13/3	21/1	Γ'_{16}	-	-	$\Gamma'_{1040}/\Gamma'_{240}$
(III, II)	7	6	13	21	-	Γ'_{12}	-	Γ'_{1092}
(III, II)	7	5	12/2	21/1	-	-	Γ'_{24}/Γ'_4	$\Gamma'_{840}/\Gamma'_{140}$
(III, III)	8	7	15/1	36/1	Γ'_{16}	-	-	$\Gamma'_{1680}/\Gamma'_{112}$
(III, III)	7	7	14/0	36/1	-	-	$\Gamma'_{28}/-$	$\Gamma'_{1372}/-$

5.2 湯川結合

5.2.1 湯川相互作用

この subsection ではゼロモード波動関数の具体的な形 (4.93) から湯川結合を計算していく。 $T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$ コンパクト化した 4D 有効理論の湯川結合は、次の $T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$ 上のゼロモードの overlap 積分で与えられる。

$$\tilde{Y}^{IJK} = \int d^6 z \psi_a^{I\dagger}(z) \Gamma^m \psi_b^J(z) \phi_{c,m}^K(z) f^{abc} \quad (5.7)$$

$$= \prod_{i=1,2,3} \left(\int dz_i d\bar{z}_i \text{Tr} \{ \psi_+^{I_i} \cdot [\phi_-^{K_i}, \psi_+^{J_i}] \} + \int dz_i d\bar{z}_i \text{Tr} \{ \psi_-^{I_i} \cdot [\phi_+^{K_i}, \psi_-^{J_i}] \} \right) \quad (5.8)$$

ここで $m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ である。また ψ_\pm および ϕ_\pm は (4.99) を ab, bc, ca セクターに拡張したもので与えられることに注意。 ϕ_\pm はベクトル場 ϕ_m の helicity ± 1 を表している。これに (4.99) の形を代入して場の 3 点関数のみを残せば、

$$\tilde{Y}^{IJK} = \prod_{i=1,2,3} \left(\int_{T_i^2} dz_i d\bar{z}_i \psi_{T_i}^{I_i, |I_{ab}^{(i)}|}(z_i) \cdot \psi_{T_i}^{J_i, |I_{ca}^{(i)}|}(z_i) \cdot \left(\psi_{T_i}^{K_i, |I_{cb}^{(i)}|}(z_i) \right)^* \right) \quad (5.9)$$

が得られる²。簡単化のためここでは 1 つのトーラス上にのみ 3 世代波動関数が存在すると考えよう。その場合、他の 2 つのトーラスからの寄与は overall factor になるのでそれを無視すれば、

$$\tilde{Y}^{ijk} = \int_{T^2} dz d\bar{z} \psi_{T^2}^{i, |I_{ab}|}(z) \cdot \psi_{T^2}^{j, |I_{ca}|}(z) \cdot \left(\psi_{T^2}^{k, |I_{cb}|}(z) \right)^* \quad (5.10)$$

となる。これは波動関数の規格化 (4.96) および積展開 (4.101) を用いて次のように計算できる。

$$\tilde{Y}^{ijk} = (2\text{Im}\tau)^{-1/2} \mathcal{A}^{-1/2} \left| \frac{I_{ab} I_{ca}}{I_{cb}} \right|^{1/4} \sum_{m=0}^{|I_{cb}|-1} \vartheta \left[\begin{array}{c} |I_{ca}|i - |I_{ab}|j + |I_{ab} I_{ca}|m \\ |I_{ab} I_{ca} I_{cb}| \\ 0 \end{array} \right] (0, |I_{ab} I_{ca} I_{cb}| \tau) \times \delta_{i+j-k, |I_{cb}|\ell - |I_{ab}|m} \quad (5.11)$$

ここで $\ell \in \mathbb{Z}$ である。よって湯川結合の selection rule として、

$$i + j - k = |I_{cb}|\ell - |I_{ab}|m \quad (5.12)$$

が現れる。もしくは、

$$i + j - k \propto g \equiv \text{gcd}(|I_{ab}|, |I_{cb}|) \quad (5.13)$$

²ここで暗に $|I_{ab}| + |I_{ca}| = |I_{bc}|$ であるとして計算しているが、 $|I_{ab}| - |I_{ca}| = |I_{bc}|$ の場合、フラックス条件は $|I_{bc}| + |I_{ca}| = |I_{ab}|$ とみなされ、 ab と bc セクターの位置が入れ替わる。つまり bc セクターの複素共役はなくなって ab セクター波動関数に複素共役がかかる。以降では $|I_{ab}| + |I_{ca}| = |I_{bc}|$ と仮定して話を進めるが、 $|I_{ab}| - |I_{ca}| = |I_{bc}|$ の場合も同様の議論が可能であることに留意する。

を満たす (i, j, k) の湯川結合の成分は nonzero となる³。 $0 \leq m \leq |I_{cb}| - 1$ に留意すると、 $\ell|I_{cb}| = m|I_{ab}|$ が成り立つような $m \in \mathbb{Z}_{|I_{cb}|}, \ell \in \mathbb{Z}$ は、

$$\begin{cases} (m, \ell) = (0, 0) & \text{for } g = 1 \\ (m, \ell) = (0, 0), (|I_{cb}|/g, |I_{ab}|/g), \dots, ((g-1)|I_{cb}|/g, (g-1)|I_{ab}|/g) & \text{for } g \neq 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

で与えられる。よって、一度 $i + j - k = |I_{cb}|\ell - |I_{ab}|m$ を満たす整数 (i, j, k, m, ℓ) が見つかり、

$$m' = m + n \frac{|I_{ab}|}{g}, \quad \ell' = \ell + n \frac{|I_{ab}|}{g}, \quad n \in \mathbb{Z}_g \quad (5.15)$$

もまた $i + j - k = |I_{cb}|\ell' - |I_{ab}|m'$ を満たす整数 (i, j, k, m', ℓ') を与える。結果として、 g 個の解が存在することが分かる。最終的には、湯川結合は g 個の theta 関数の和として、

$$\tilde{Y}^{ijk} = (2\text{Im}\tau)^{-1/2} \mathcal{A}^{-1/2} \left| \frac{I_{ab}I_{ca}}{I_{cb}} \right|^{1/4} \sum_{n=1}^g \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{|I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca}I_{cb}|\ell_0}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \frac{n}{g} \\ 0 \end{matrix} \right] (0, |I_{ab}I_{ca}I_{cb}|\tau) \quad (5.16)$$

と書ける。ここで ℓ_0 は $i + j - k = |I_{cb}|\ell_0 - |I_{ab}|m_0$, $m_0 \in \mathbb{Z}$ を満たす整数である。以降では次の notation を用いる。

$$\eta_N(\tau) = \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{N}{M} \\ 0 \end{matrix} \right] (0, M\tau), \quad M = |I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \quad (5.17)$$

Orbifolds 上の湯川結合を計算する場合は orbifold 上のゼロモードの overlap 積分を考える必要がある。すなわち、4章で見たようにトーラス上の波動関数の適切な線形結合をとる必要がある。

今、我々はこの議論を $T_1^2 \times T_2^2$ とその orbifolds 上の湯川結合へと拡張することができる。例えば $T_1^2 \times T_2^2$ 上の湯川結合は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^{IJK} &= \int_{T_1^2 \times T_2^2} dz_1^2 dz_2^2 \left(\psi_{T_1^2}^{i(1), |I_{ab}^{(1)}|} \psi_{T_2^2}^{i(2), |I_{ab}^{(2)}|} \right) \cdot \left(\psi_{T_1^2}^{j(1), |I_{ca}^{(1)}|} \psi_{T_2^2}^{j(2), |I_{ca}^{(2)}|} \right) \cdot \left(\psi_{T_1^2}^{k(1), |I_{cb}^{(1)}|} \psi_{T_2^2}^{k(2), |I_{cb}^{(2)}|} \right)^* \\ &= \prod_{r=1,2} \left[\int_{T_r^2} dz_r d\bar{z}_r \psi_{T_r^2}^{i(r), |I_{ab}^{(r)}|}(z_r) \cdot \psi_{T_r^2}^{j(r), |I_{ca}^{(r)}|}(z_r) \cdot \left(\psi_{T_r^2}^{k(r), |I_{cb}^{(r)}|}(z_r) \right)^* \right] \\ &= \prod_{r=1,2} \tilde{Y}_{(r)}^{ijk} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ここで $I = (i_1 i_2)$, $J = (j_1 j_2)$, $K = (k_1 k_2)$ である。

前節にて、我々は 0 とならない湯川結合を導く可能な 3 世代モデルをまとめた。そこでは $|I_{cb}| = 0$ であるような、つまり Higgs ゼロモードが constant となるようなモデルがいくつか見つかった。そのようなケースでは、波動関数の規格化 (4.96) およびフラックス条件 (4.148) を用いることで湯川結合行列が (3×3) 単位行列に比例することを確認される。そのとき現実的なフレーバー構造を導くことはできない。よって $|I_{cb}| = 0$ となる 3 世代モデルは考えないことにする。

³ $\text{gcd}(a, b)$ は a と b の最大公約数を表す。

5.2.2 湯川結合のモジュラー対称性

ここでは湯川結合のモジュラー対称性を考える。湯川結合はゼロモード波動関数というモジュラー形式の overlap 積分で書かれるため、それはモジュラー形式の言葉で表すことができるはずである。そこでまず湯川結合の正則関数部分を抜き出すことを考える。

大域的超対称理論におけるスーパーポテンシャル \widetilde{W} は超重力理論のスーパーポテンシャル W と次のような関係を持つ。

$$|\widetilde{W}|^2 = e^K |W|^2 \quad (5.19)$$

ここで K はケーラーポテンシャルで、

$$K = -\ln[i(\bar{\tau} - \tau)] = -\ln(2\text{Im}\tau) \quad (5.20)$$

で与えられる。したがって、大域的超対称理論 (4.7) における湯川結合 (5.16) も次のように書くことができる。

$$\widetilde{Y}^{ijk} = e^{K/2} Y^{ijk}(\tau) \quad (5.21)$$

ここで $Y^{ijk}(\tau)$ は (4.102) で現れた τ の正則関数で、

$$Y^{ijk}(\tau) = \mathcal{A}^{-1/2} \left| \frac{I_{ab} I_{ca}}{I_{cb}} \right|^{1/4} \sum_{n=1}^g \eta(|I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca} I_{cb}| \ell_0 + n \frac{|I_{ab} I_{ca} I_{cb}|}{g}) (\tau) \quad (5.22)$$

$$\equiv c \sum_{n=1}^g \eta_{N(j,k,n)}(\tau), \quad N(j,k,n) = |I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca} I_{cb}| \ell_0 + n \frac{|I_{ab} I_{ca} I_{cb}|}{g} \quad (5.23)$$

と書くことができる。ここではこの τ の正則関数 $Y^{ijk}(\tau)$ の持つモジュラー変換性を調べていく。また簡単化のため1つのトーラス上の湯川結合に焦点を当てる。

湯川結合の正則関数部分 (5.23) において、最初に $N(j,k,n)$ のとりうる値を調べよう。 $|I_{ab}| + |I_{ca}| = |I_{cb}|^4$ より、

$$N(j,k,n) = |I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca}||I_{cb}|\ell_0 + n|I_{ab}||I_{ca}||I_{cb}|/g \quad (5.24)$$

$$= |I_{cb}|(k-j) - |I_{ab}|k + |I_{ca}||I_{cb}|\ell_0 + n|I_{ab}||I_{ca}||I_{cb}|/g \quad (5.25)$$

$$= \left(\frac{|I_{cb}|}{g}(k-j) - \frac{|I_{ab}|}{g}k + |I_{ca}||I_{cb}|\ell_0/g + n|I_{ab}||I_{ca}||I_{cb}|/g^2 \right) g \quad (5.26)$$

と書き直せる。ここで $j \in \mathbb{Z}_{|I_{ca}|}$, $k \in \mathbb{Z}_{|I_{cb}|}$ で、 ℓ_0 のみ自由な整数値をとれる。また、 $\frac{|I_{cb}|}{g}$ と $\frac{|I_{ab}|}{g}$ が互いに素な整数であることに注意する。ベズーの等式より、互いに素である2つの整数 a, b に対して、

$$ax + by = 1 \quad (5.27)$$

⁴(5.10) にてフラックス条件の符号をこのように仮定したことに注意。

を満たす整数の組 (x, y) (ベズー係数) が必ず存在する。よって、

$$\frac{|I_{cb}|}{g}x - \frac{|I_{ab}|}{g}y = 1 \quad (5.28)$$

を満たす整数の組 (x, y) が存在する。両辺を整数 R 倍すれば、任意の整数 R に対して

$$\frac{|I_{cb}|}{g}X - \frac{|I_{ab}|}{g}Y = R \quad (5.29)$$

を満たす整数の組 (X, Y) が見つけられる。しかしながら、今 $\frac{|I_{cb}|}{g}$ と $\frac{|I_{ab}|}{g}$ の係数 $(k - j)$, k は自由な整数値をとれるわけではない。 $j \in \mathbb{Z}_{|I_{ca}|}$, $k \in \mathbb{Z}_{|I_{cb}|}$ を思い出そう。ところが、 $N(j, k, n)$ において $j \rightarrow j + p|I_{cb}|$, $k \rightarrow k + q|I_{ca}|$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) としても、追加の寄与は全て ℓ_0 の値に吸収できる。 ℓ_0 は自由な整数値をとれるため、 j, k が実質的に自由な整数値をとれることになるのである。同様に $|I_{ab}|/g$ が整数となることから、 $n|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g$ の項も ℓ_0 に吸収できる。結果として、

$$\frac{|I_{cb}|}{g}(k - j) - \frac{|I_{ab}|}{g}k + |I_{ca}I_{cb}|\ell_0/g + n|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2 = \frac{|I_{cb}|}{g}X - \frac{|I_{ab}|}{g}Y, \quad X, Y \in \mathbb{Z} \quad (5.30)$$

と書ける。したがってベズーの等式から、任意の整数 m に対して

$$\frac{|I_{cb}|}{g}(k - j) - \frac{|I_{ab}|}{g}k + |I_{ca}I_{cb}|\ell_0/g + n|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2 = m \in \mathbb{Z} \quad (5.31)$$

となる整数の組 (j, k, ℓ_0) が存在する。ところで、(5.17)において $N \rightarrow N + M$ としても $\eta_N(\tau)$ が不変となることに注意しよう。よって $N(j, k, n)/g$ のとりうる値の範囲は $\{0, 1, 2, \dots, |I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g - 1\}$ となる。つまり

$$N(j, k, n) = mg, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, |I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g - 1\} \quad (5.32)$$

である。ひとたび整数の組 (j, k, ℓ_0) が決まれば、それらの整数に対して湯川結合の成分に関する selection rule

$$i + j - k = |I_{cb}|\ell_0 - |I_{ab}|m_0 \quad (5.33)$$

を満たす整数 i, m_0 が必ず存在する。この selection rule で (j, k, ℓ_0) を固定したとき、 $i \rightarrow i + |I_{ab}|$ としてもその追加の寄与は $m_0 \in \mathbb{Z}$ によって吸収できることに注意しよう。すなわち m_0 の存在によって i を自由な整数とみなすことができる。こうして、いかなる整数の組 (j, k, ℓ_0) に対しても selection rule を満たすような整数の組 (i, m_0) が存在することになるのである。

これらを踏まえて、 $\eta_{N(j, k, n)}(\tau)$ の T, S 変換を考えよう。まず $N(j, k, n)$ を次のように書き換えておく。

$$N(j, k, n) = |I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca}||I_{cb}|\ell_0 + n|I_{ab}||I_{ca}||I_{cb}|/g \quad (5.34)$$

$$= (J(j, k) + (n - 1)|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2)g \equiv N(J, n - 1), \quad J = \{0, 1, 2, \dots, |I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2 - 1\} \quad (5.35)$$

このとき $\sum \eta_{N(J,n-1)}$ の T 変換は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^g \eta_{N(J,n-1)} &\xrightarrow{T} \sum_{n=1}^g \vartheta \left[\begin{array}{c} N(J,n-1) \\ |I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \\ 0 \end{array} \right] (0, (\tau+1)|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|) \\
&= \sum_{n=1}^g \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \ell \right)^2 (\tau+1)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^g \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \ell \right)^2 \tau} \cdot e^{\pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)^2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^g \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \ell \right)^2 \tau} \cdot e^{\pi i \left(\frac{(N(J,0)+|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|n/g)^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)} \right) \\
&= e^{\pi i \left(\frac{(N(J,0))^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)} \sum_{n=1}^g \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \ell \right)^2 \tau} \cdot e^{\pi i \left(\frac{2N(J,0)n}{g} \right)} e^{\pi i \left(\frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|n^2}{g^2} \right)} \right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

先ほど見たように $N(J,0)/g = J \in \mathbb{Z}$ である。また $|I_{ab}| + |I_{ca}| = |I_{cb}|$ から $|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2 \in 2\mathbb{Z}$ である。よって、 T 変換は、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^g \eta_{N(J,n-1)} &\xrightarrow{T} e^{\pi i \left(\frac{(gJ)^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)} \sum_{n=1}^g \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}| \pi i \left(\frac{N(J,n-1)}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} + \ell \right)^2 \tau} \right) \\
&= e^{\pi i \left(\frac{g^2 J^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)} \sum_{n=1}^g \eta_{N(J,n-1)}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

と求まる。

同様にして S 変換は、

$$\sum_{n=1}^g \eta_{N(J,n-1)} \xrightarrow{S} \sqrt{\frac{-i\tau g^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}}^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2-1} \sum_{K=0}^g e^{\left(\frac{2\pi i g^2 JK}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right)} \sum_{n=1}^g \eta_{N(K,n-1)} \tag{5.38}$$

と計算できる。

T 変換 (5.37) と S 変換 (5.38) は実は T^2 上の波動関数に対する T 変換 (4.113) および S 変換 (4.120) と同じ形をしている。具体的には、次の対応の下で完全に一致する。

$$j, k \rightarrow J, K \tag{5.39}$$

$$|I_{\alpha\beta}| \rightarrow \left(\frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}{g^2} \right) \tag{5.40}$$

これは、 T^2 上の湯川結合が $\tilde{\Gamma}(2|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2)$ に対するウェイト $1/2$ のモジュラー形式として振

舞うことを意味している。すなわち、湯川結合

$$Y^{ijk}(\tau) = c \sum_{n=1}^g \eta_g \left(J + (n-1) \frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}{g^2} \right) (\tau), \quad J \equiv (|I_{ca}|k - |I_{cb}|j + |I_{ca}I_{cb}|\ell_0)/g \in \mathbb{Z} \left(\frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}{g^2} \right) \quad (5.41)$$

はモジュラー変換の下で次のように振舞う。

$$\begin{aligned} Y^{ijk}(\tilde{\gamma}\tau) &= c \sum_{n=1}^g \eta_g \left(J + (n-1) \frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}{g^2} \right) (\tilde{\gamma}\tau) \\ &= \tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}, \tau) \sum_{K=0}^{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2-1} \tilde{\rho}^{(Y)}(\tilde{\gamma})_{JK} c \sum_{n=1}^g \eta_g \left(K + (n-1) \frac{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}{g^2} \right) (\tau) \end{aligned} \quad (5.42)$$

ここで、ユニタリー表現は

$$\tilde{\rho}^{(Y)}(\tilde{S})_{JK} = e^{i\pi/4} \frac{g}{\sqrt{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|}} e^{2\pi i \left(\frac{g^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right) JK}, \quad \tilde{\rho}^{(Y)}(\tilde{T})_{JK} = e^{i\pi \left(\frac{g^2}{|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|} \right) J^2} \delta_{J,K} \quad (5.43)$$

で与えられる。これらは次の $\tilde{\Gamma}_{2|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2}$ の代数関係を満たしている。

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})^2 = \tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{S})^4 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^3 = -\tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{Z})\tilde{\rho}(\tilde{T}) = \tilde{\rho}(\tilde{T})\tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{T})^{2|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2} = \tilde{\mathbb{I}} \quad (5.44)$$

ここで記号 (Y) は省略した。

湯川結合はなぜこのような代数関係を持つユニタリー表現で変換されるのだろうか。我々はこれらの代数関係をユニタリー表現のテンソル積から理解できる。モジュラー変換の下で、波動関数の積として書かれた湯川結合 \tilde{Y} (5.10) も正則関数である湯川結合 (5.23) と同じように次のユニタリー表現で変換される。

$$\tilde{\rho}^{(L \otimes R \otimes H^*)}(\tilde{\gamma})_{(ijk)(i'j'k')} = \tilde{\rho}_{T^2}^{(ab)}(\tilde{\gamma})_{ii'} \otimes \tilde{\rho}_{T^2}^{(ca)}(\tilde{\gamma})_{jj'} \otimes \left(\tilde{\rho}_{T^2}^{(cb)}(\tilde{\gamma})_{kk'} \right)^* \quad (5.45)$$

ここで $\tilde{\rho}_{T^2}^{(\alpha\beta)}$ は $\alpha\beta$ -セクター ($\alpha\beta \in \{ab.ca.cb\}$) に作用するモジュラー変換のユニタリー表現で、 $\tilde{\Gamma}_{2|I_{\alpha\beta}|}$ の代数関係 (4.123) を満たす。よって、 $\tilde{\rho}^{(L \otimes R \otimes H^*)}$ は次の代数関係を満たすはずである。

$$\tilde{\rho}(\tilde{S})^2 = \tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{S})^4 = [\tilde{\rho}(\tilde{S})\tilde{\rho}(\tilde{T})]^3 = -\tilde{\mathbb{I}}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{Z})\tilde{\rho}(\tilde{T}) = \tilde{\rho}(\tilde{T})\tilde{\rho}(\tilde{Z}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{T})^{2|\text{lcm}(I_{ab}, I_{ca}, I_{cb})|} = \tilde{\mathbb{I}} \quad (5.46)$$

ここで記号 $(L \otimes R \otimes H^*)$ は省略した。我々は (5.46) における \tilde{T} の位数 $2|\text{lcm}(I_{ab}, I_{ca}, I_{cb})|$ が (5.44) における \tilde{T} の位数 $2|I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2$ と一致することをフラックス条件 (4.148) より確かめることができる。

今、我々はこの結果を $T_1^2 \times T_2^2$ 上の湯川結合へ拡張することができる。単に $\tilde{\rho}(\tilde{\gamma})$ のテンソル積表現を考えるだけで、我々は湯川結合の正則関数部分 Y^{ijk} が $\Gamma(2|\text{lcm}(|I_{ab}^{(1)}I_{ca}^{(1)}I_{cb}^{(1)}|/g_1^2, |I_{ab}^{(2)}I_{ca}^{(2)}I_{cb}^{(2)}|/g_2^2))$ に対するウェイト 1 のモジュラー形式として振舞うことを確かめることができる。我々は表 5.2, 5.3, 5.4 に、分類した 3 世代モデルにおける (正則) 湯川結合の代数関係を示した。

5.2.3 再現例: 2-2-4 モデル on $(T^2 \times T^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ twisted & permutation orbifold

この章を通して我々は次の事実を見てきた。

- 4D 有効理論の湯川結合はトーラス (コンパクト空間) 上の波動関数の overlap 積分で書かれる。
- トーラス上の波動関数はカイラリティとフラックスの大きさに対応した世代を持つ。
- $\mathbb{Z}_2^{(t)}$ twist および $\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ による orbifolds 上ではフラックスを適切に選ぶことで多くの 3 世代波動関数を実現できる。
- これらの波動関数はフラックスが偶数の時にのみモジュラー対称性をもち、 T^2 上の波動関数はウェイト $1/2$ のモジュラー形式、 $T^2 \times T^2$ 上の波動関数はウェイト 1 のモジュラー形式として振舞う。
- 湯川結合もまた同様のモジュラー形式となる。

これらの事実を踏まえて、ここでは具体的に分類した 3 世代モデルの湯川結合から CKM 行列を計算し、実験値との比較を行っていく。分類したモデルの内、我々は表 5.4 に示した $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上の $(T, P) = (I, I)$ である $(|I_{ab}^{(1)}|, |I_{ca}^{(1)}|, |I_{cb}^{(1)}|) = (|I_{ab}^{(2)}|, |I_{ca}^{(2)}|, |I_{cb}^{(2)}|) = (2, 2, 4)$ モデルを例として調べる。

2-2-4 モデルにおける left-handed matter fields L_I , right-handed matter fields R_J , Higgs fields H^K のゼロモード波動関数は表 5.5 に示したとおりである。

	$L^I(\lambda^{ab})$	$R^J(\lambda^{ca})$	$H^K(\lambda^{cb})$
(00)	$\psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^0$	$\psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^0$	$\psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^0$
(10)	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{T_1^2}^1 \psi_{T_2^2}^0 + \psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{T_1^2}^1 \psi_{T_2^2}^0 + \psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^1)$	$\frac{1}{2}(\psi_{T_1^2}^1 + \psi_{T_1^2}^3) \psi_{T_2^2}^0 + \frac{1}{2} \psi_{T_1^2}^0 (\psi_{T_2^2}^1 + \psi_{T_2^2}^3)$
(11)	$\psi_{T_1^2}^1 \psi_{T_2^2}^1$	$\psi_{T_1^2}^1 \psi_{T_2^2}^1$	$\frac{1}{2}(\psi_{T_1^2}^1 + \psi_{T_1^2}^3)(\psi_{T_2^2}^1 + \psi_{T_2^2}^3)$
(20)	-	-	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{T_1^2}^2 \psi_{T_2^2}^0 + \psi_{T_1^2}^0 \psi_{T_2^2}^2)$
(21)	-	-	$\frac{1}{2} \psi_{T_1^2}^2 (\psi_{T_2^2}^1 + \psi_{T_2^2}^3) + \frac{1}{2} (\psi_{T_1^2}^1 + \psi_{T_1^2}^3) \psi_{T_2^2}^2$
(22)	-	-	$\psi_{T_1^2}^2 \psi_{T_2^2}^2$

表 5.5: $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ orbifold 上の 2-2-4 モデルのゼロモード波動関数

このとき湯川結合 $Y^{IJK}H^K$ は次のように展開される。

$$Y^{IJK}H^K = y_{IJ}^{(00)}H^{(00)} + y_{IJ}^{(10)}H^{(10)} + y_{IJ}^{(11)}H^{(11)} + y_{IJ}^{(20)}H^{(20)} + y_{IJ}^{(21)}H^{(21)} + y_{IJ}^{(22)}H^{(22)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} y_{IJ}^{(00)} &= \begin{pmatrix} y_a & 0 & 0 \\ 0 & y_b & 0 \\ 0 & 0 & y_c \end{pmatrix}, & y_{IJ}^{(10)} &= \begin{pmatrix} 0 & y_d & 0 \\ y_d & 0 & y_e \\ 0 & y_e & 0 \end{pmatrix}, \\ y_{IJ}^{(11)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_f \\ 0 & y_f & 0 \\ y_f & 0 & 0 \end{pmatrix}, & y_{IJ}^{(20)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}y_b & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(y_a + y_c) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}y_b \end{pmatrix}, \\ y_{IJ}^{(21)} &= \begin{pmatrix} 0 & y_e & 0 \\ y_e & 0 & y_d \\ 0 & y_d & 0 \end{pmatrix}, & y_{IJ}^{(22)} &= \begin{pmatrix} y_c & 0 & 0 \\ 0 & y_b & 0 \\ 0 & 0 & y_a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

および

$$\begin{aligned} y_a &= (\eta_0 + \eta_8)^2, & y_b &= 2(\eta_0 + \eta_8)\eta_4, \\ y_c &= 4\eta_4^2, & y_d &= \sqrt{2}(\eta_0 + \eta_8)(\eta_2 + \eta_6), \\ y_e &= 2\sqrt{2}\eta_4(\eta_2 + \eta_6), & y_f &= 2(\eta_2 + \eta_6)^2. \end{aligned}$$

である。このとき我々は ϑ 関数の性質

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{j}{M} \\ 0 \end{bmatrix} (0, M\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} \frac{M-j}{M} \\ 0 \end{bmatrix} (0, M\tau), \quad j \in \mathbb{Z}_M, M \in \mathbb{Z}, \quad (5.48)$$

および $M = 16$ のときの (5.17) の notation η_N を用いた。さらに、モジュラー対称性については、left-handed matter fields, right-handed matter fields, Higgs fields のゼロモードはそれぞれ $\Gamma'_4, \Gamma'_4, \Gamma'_8$ の下で変換される。またこれらは全てウェイト 1 のモジュラー形式である。湯川結合は $\Gamma(8)$ に対するウェイト 1 のモジュラー形式で、 Γ'_8 の下で変換される。

では 2-2-4 モデルから観測可能な物理量を計算していこう。我々は quarks の質量比と CKM 行列を求めていく。表 5.5 に示したように、3 世代波動関数である L^I を 3 世代 left-handed quark doublets、 R^J を 3 世代 right-handed quark doublets、6 世代である H^K を up および down type の Higgs fields であるとみなす。つまり、up type と down type の湯川結合行列は 2-2-4 モデルから与えられる。さらに、我々は Higgs 場の up と down type の真空期待値 (VEVs) が独立で互いの値を関連付けるものがないと想定する。このとき、我々は up と down type の Higgs fields の真空期待値配置を異なるように取ることで quark 混合を再現することができる。

Higgs fields の真空期待値配置の生成について言及しておく [29]。非摂動的な効果や高次の operator の寄与を考慮したとき、

$$W_{\text{eff}} = \mu_{IJ} H_u^I H_d^J \quad (5.49)$$

という超対称な有効質量項が生成される。Subscripts (I, J) は Higgs fields の世代をラベルする。このとき、我々は質量パラメーター μ_{IJ} が次のように対角化可能であると想定する。

$$\sum_{I,J} (U_{H_u})_I^I \mu_{IJ} (U_{H_d}^\dagger)^J_j = \mu_{\hat{I}} \delta_{\hat{I},j}, \quad |\mu_{\hat{I}=0}| \ll M_{\text{GUT}} \lesssim |\mu_{\hat{I} \neq 0}| \quad (5.50)$$

ここで M_{GUT} は GUT スケール 2.0×10^{16} GeV を表す。 $\mu_{\hat{I} \neq 0}$ の大きな質量スケールから、Higgs fields の世代のうち1つ ($\hat{I} = 0$) 以外は低エネルギーな場と decouple してしまう。よって真空期待値を与える Higgs 場の質量項としては、最も軽い線形結合、

$$(U_{H_u})_0^I H_u^I, \quad (U_{H_d})_0^I H_d^I \quad (5.51)$$

からなる項を考えればよい。Higgs 場の真空期待値はこの質量項により生じるポテンシャルのミニマムとして得られる。以降では、真空期待値の配置がどのようにして決定されるかは据え置きして、realistic なモデルが得られるような真空期待値の配置を考える。

最初に単純な真空期待値の配置を考えよう。

$$\begin{aligned} \langle H_u^{(22)} \rangle &\neq 0, \quad (\text{other VEVs}) = 0, \\ \langle H_d^{(21)} \rangle &= 0.4 \langle H_d^{(22)} \rangle \neq 0, \quad (\text{other VEVs}) = 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

このような配置の下で湯川結合は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \psi = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{pmatrix} : Y_u^{IJK} H_K &= \begin{pmatrix} y_c & & \\ & y_b & \\ & & y_a \end{pmatrix} H_u^{(22)} \\ &\xrightarrow{\tau=1.5i} \begin{pmatrix} 3.23 \times 10^{-4} & & \\ & 1.80 \times 10^{-2} & \\ & & 1.00 \end{pmatrix} H_u^{(22)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \psi = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{pmatrix} : Y_d^{IJK} H_K &= \begin{pmatrix} y_c & 0.4y_e & 0 \\ 0.4y_e & y_b & 0.4y_d \\ 0 & 0.4y_d & y_a \end{pmatrix} H_d^{(22)} \\ &\xrightarrow{\tau=1.5i} \begin{pmatrix} 3.23 \times 10^{-4} & 3.13 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.13 \times 10^{-3} & 1.80 \times 10^{-2} & 1.74 \times 10^{-1} \\ 0 & 1.74 \times 10^{-1} & 1.00 \end{pmatrix} H_d^{(21)} \end{aligned} \quad (5.54)$$

ここで up-sector, down-sector 各々の mass matrix を対角化する基底変換行列 U_L^u, U_L^d を $\tau = 1.5i$ にて求める。

$$U_L^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

$$U_L^d = \begin{pmatrix} 9.73230573 \times 10^{-1} & -2.29830341 \times 10^{-1} & 5.15459206 \times 10^{-4} \\ 2.26415348 \times 10^{-1} & 9.59149973 \times 10^{-1} & 1.69609610 \times 10^{-1} \\ -3.94758372 \times 10^{-2} & -1.64952550 \times 10^{-1} & 9.85511194 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

これより quark 質量比と $|V_{\text{CKM}}|$ が計算できる. $\tau = 1.5i$ に対する各値を次の表 5.6 に示す.

	理論値	実験値
$(m_u, m_c, m_t)/m_t$	$(3.22 \times 10^{-4}, 1.80 \times 10^{-2}, 1)$	$(1.26 \times 10^{-5}, 7.38 \times 10^{-3}, 1)$
$(m_d, m_s, m_b)/m_b$	$(1.02 \times 10^{-3}, 1.24 \times 10^{-2}, 1)$	$(1.12 \times 10^{-3}, 2.22 \times 10^{-2}, 1)$
$ V_{\text{CKM}} \equiv (U_L^u)^\dagger U_L^d $	$\begin{pmatrix} 0.973 & 0.230 & 0.000515 \\ 0.226 & 0.959 & 0.170 \\ 0.0395 & 0.165 & 0.986 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.974 & 0.227 & 0.00361 \\ 0.226 & 0.973 & 0.0405 \\ 0.00854 & 0.0398 & 0.999 \end{pmatrix}$

表 5.6: 真空期待値配置 (5.52) の下での $\tau = 1.5i$ における quarks の質量比と CKM 行列の理論値. 実験値は [11] 参照.

Nonzero の Higgs field VEVs を増やせば、より realistic な値を得ることができる. 例えば up-sector と down-sector の Higgs fields の VEVs を次のように定める.

$$\begin{aligned} \langle H_u^{(21)} \rangle &= 0.22 \langle H_u^{(22)} \rangle \neq 0, \quad (\text{other VEVs}) = 0, \\ \langle H_d^{(20)} \rangle &= -0.10 \langle H_d^{(22)} \rangle \neq 0, \quad \langle H_d^{(21)} \rangle = 0.34 \langle H_d^{(22)} \rangle \neq 0, \quad (\text{other VEVs}) = 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

このとき、湯川結合は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \psi = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{pmatrix} : Y_u^{IJK} H_K &= \begin{pmatrix} y_c & 0.22y_e & 0 \\ 0.22y_e & y_b & 0.22y_d \\ 0 & 0.22y_d & y_a \end{pmatrix} H_u^{(22)} \\ &\xrightarrow{\tau=1.5i} \begin{pmatrix} 3.23 \times 10^{-4} & 1.72 \times 10^{-3} & 0 \\ 1.72 \times 10^{-3} & 1.80 \times 10^{-2} & 9.58 \times 10^{-2} \\ 0 & 9.58 \times 10^{-2} & 1.00 \end{pmatrix} H_u^{(22)} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \psi = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{pmatrix} : Y_d^{IJK} H_K &= \begin{pmatrix} y_c - 0.10 \times \sqrt{2}y_b & 0.34y_e & 0 \\ 0.34y_e & y_b - \frac{0.10}{\sqrt{2}}(y_a + y_c) & 0.34y_d \\ 0 & 0.34y_d & y_a - 0.10 \times \sqrt{2}y_b \end{pmatrix} H_d^{(22)} \\ &\xrightarrow{\tau=1.5i} \begin{pmatrix} -2.21 \times 10^{-3} & 2.66 \times 10^{-3} & 0 \\ 2.66 \times 10^{-3} & -5.28 \times 10^{-2} & 1.48 \times 10^{-1} \\ 0 & 1.48 \times 10^{-1} & 9.97 \times 10^{-1} \end{pmatrix} H_d^{(21)} \end{aligned} \quad (5.59)$$

ここで up-sector, down-sector 各々の mass matrix を対角化する基底変換行列 U_L^u, U_L^d を $\tau = 1.5i$ にて求める。

$$U_L^u = \begin{pmatrix} 9.81258153 \times 10^{-1} & -1.91819732 \times 10^{-1} & 1.83746444 \times 10^{-2} \\ 1.92697717 \times 10^{-1} & 9.76705364 \times 10^{-1} & -9.44151604 \times 10^{-2} \\ 1.64077082 \times 10^{-4} & 9.61863979 \times 10^{-2} & 9.95363326 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

$$U_L^d = \begin{pmatrix} 9.99314336 \times 10^{-1} & -3.70233804 \times 10^{-2} & 3.57110613 \times 10^{-4} \\ 3.66255876 \times 10^{-2} & 9.89898444 \times 10^{-1} & 1.36965822 \times 10^{-1} \\ -5.42444097 \times 10^{-3} & -1.36858830 \times 10^{-1} & 9.90575709 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

これより quark 質量比と $|V_{\text{CKM}}|$ が計算できる。 $\tau = 1.5i$ に対する各値を次の表 5.7 に示す。

	理論値	実験値
$(m_u, m_c, m_t)/m_t$	$(1.35 \times 10^{-5}, 8.96 \times 10^{-3}, 1)$	$(1.26 \times 10^{-5}, 7.38 \times 10^{-3}, 1)$
$(m_d, m_s, m_b)/m_b$	$(2.08 \times 10^{-3}, 7.20 \times 10^{-2}, 1)$	$(1.12 \times 10^{-3}, 2.22 \times 10^{-2}, 1)$
$ V_{\text{CKM}} \equiv (U_L^u)^\dagger U_L^d $	$\begin{pmatrix} 0.973 & 0.229 & 0.00772 \\ 0.229 & 0.973 & 0.0403 \\ 0.00171 & 0.0410 & 0.999 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.974 & 0.227 & 0.00361 \\ 0.226 & 0.973 & 0.0405 \\ 0.00854 & 0.0398 & 0.999 \end{pmatrix}$

表 5.7: 真空期待値配置 (5.57) の下での $\tau = 1.5i$ における quarks の質量比と CKM 行列の理論値。実験値は [11] 参照。

このようにして、nonzero な Higgs field の VEVs を増やすことで quarks 質量比と CKM 行列の値をより realistic に再現することができた。しかし、標準模型を再現するためにはさらなる課題がある。

- 複素構造モジュラス τ を固定する方法 (ここでは $\tau = 1.5i$ としている)
- $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ へ破る方法
- Leptons の再現
- Higgs 場の真空期待値の方向を決定する方法 (複素構造モジュラス τ 同様、ここでは realistic なモデルを得るための適当な配置を想定している)

1 つ目については、スーパーポテンシャルの最小化によるモジュライの stabilization がよく研究されている。2 つ目については、ここでは $U(8)$ から Pati-Salam ゲージ群 $SU(4) \times SU(2) \times$

$SU(2)$ へ破ることを考えたが、orbifold \mathbb{Z}_2 twist をゲージ空間に適切に埋め込むことにより、 $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)^2$ とすることができる [27]。この1つの $U(1)$ は、ハイパーチャージ Y に対応するもので、残りは B-L の $U(1)$ である。3つ目については、我々の3世代モデルは quarks に限定したものではないため、leptons に対しても適用可能である。注意すると、leptons、neutrino の質量を得る機構は quarks とは異なるため、再現の際には適切な3世代モデルを考えなければならない。さらに right-handed neutrino に質量を生成する必要がある。4つ目については、Higgs は一般に多数であり、ここでは、それらに質量項が生成され、一番軽い線形結合が真空期待値の方向と仮定した。具体的に質量項生成機構を検討する必要がある。

第6章 総括

本研究では、超弦理論のトーラスコンパクト化に焦点を当て、標準模型におけるフレーバー構造の再現を試みた。まず我々は標準模型における quarks・leptons の由来となる 3 世代波動関数の再現可能性として $(T_1^2 \times T_2^2)/\mathbb{Z}_2^{(\text{per})}$ permutation orbifold とその $\mathbb{Z}^{(t)}$ twist に注目し、その上の波動関数および湯川結合を調べた。結果、適切なフラックスを選ぶことで、5.1 節に示したように多くの 3 世代モデルが実現されると分かった。これらの多様な 3 世代モデルによって、より realistic なフレーバー構造を与えるモデルの構築が期待される。

さらに、我々はトーラスの持つ幾何学的対称性、モジュラー対称性に注目した。トーラス上の波動関数はトーラスの複素構造モジュラスの関数であるため、波動関数の overlap 積分である湯川結合は複素構造モジュラスによってパラメトライズされることになる。したがって、湯川結合のモジュラー変換の下での対称性はフレーバー対称性とみなせる。我々がトーラス上の湯川結合の持つモジュラー対称性を調べると、湯川結合の正則関数部分がウェイト 1/2 のモジュラー形式で、モジュラー変換の下で群 $\tilde{\Gamma}_{2N}$, $N \equiv |\text{lcm}(I_{ab}, I_{ca}, I_{cb})| = |I_{ab}I_{ca}I_{cb}|/g^2$ によって変換されることが分かった。同様に $T_1^2 \times T_1^2$ 上の湯川結合の正則関数部分を考えると、それはウェイト 1 のモジュラー形式で、群 $\Gamma'_{2\text{lcm}(N_1, N_2)}$ によって変換された。これらの結果は理論をモジュラー形式によって構成することを可能にする。

我々はモデル構築の例として、 $(T_1^2 \times T_2^2)/(\mathbb{Z}_2^{(t)} \times \mathbb{Z}_2^{(\text{per})})$ permutation & twisted orbifold 上の 2-2-4 モデルを用いた再現を試みた。5.2.3 節で示したように、そのとき、Higgs 場および複素構造モジュラスの真空期待値を調整することで realistic な quarks 質量比と CKM 行列の値が再現できた。同じようにして、我々の 3 世代モデルを leptons を含めたモデル構築に用いることもできる。

今後の研究としては、標準模型再現のためのより包括的なモデル構築が挙げられる。ただし、leptons を考慮したとき、right-handed neutrino の質量生成の機構が必要となる。また、Higgs 場および複素構造モジュラスの真空期待値を具体的に決める機構など、据え置きとなっている課題の解決も必要である。

謝辞

本研究に際して数多くの方々にご指導をいただきました。特に小林達夫教授にはゼミや研究を通して多くの助言・ご指導をいただきました。また、同研究室の先輩である内田さんや、共同研究者である KEK の大塚啓さんには、研究のお力添えをいただきました。感謝いたします。

最後に、研究生生活において多くの議論や協力をしていただいた素粒子・宇宙論研究室の皆様
に深くお礼申し上げます。

付録 A Clifford 代数

ここでは Clifford 代数の表現を考える。([7,30] 参照。) 次元の設定として奇数次元も可能だが、実用性から偶数次元 $D = 2k + 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ に話を絞ろう。また、時間的な次元の数は 1 つとする。まず Clifford 代数の定義は、 D 次元の不変距離に対して

$$x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{D-1}^2 = (x_0\Gamma^0 - x_1\Gamma^1 - \dots - x_{D-1}\Gamma^{D-1})^2 \quad (\text{A.1})$$

を満たす行列として与えられる。この定義より Clifford 代数が次式を満たさなければならないことが示される。

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, \dots, -1) \quad (\text{A.2})$$

ここで次の線形結合をとろう。

$$\Gamma^{0\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma^0 \pm \Gamma^1), \quad \Gamma^{a\pm} = \frac{1}{2}(i\Gamma^{2a} + \pm\Gamma^{2a+1}) \quad (a = 1, \dots, k) \quad (\text{A.3})$$

これらは次の代数関係を満たす。

$$\{\Gamma^{A+}, \Gamma^{B-}\} = \delta^{AB}, \quad \{\Gamma^{A+}, \Gamma^{B+}\} = \{\Gamma^{A-}, \Gamma^{B-}\} = 0 \quad (A, B = 0, 1, \dots, k) \quad (\text{A.4})$$

これらはまさに調和振動子の昇降演算子の満たす代数と一致する。そのため、 $(\Gamma^{A\pm})^2 = 0$ より全ての Γ^{A-} に対して

$$\Gamma^{A-}\zeta = 0 \quad \text{for } A = 0, 1, \dots, k \quad (\text{A.5})$$

を満たす最低状態 ζ を考えることができる。この状態を k 個のスピンについての最低状態として

$$\zeta \equiv |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\rangle \quad (\text{A.6})$$

と書こう。これより、任意のスピン状態が

$$\zeta^s = |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle \quad (\text{A.7})$$

$$= (\Gamma^{k+})^{s_k + \frac{1}{2}} (\Gamma^{k-1+})^{s_{k-1} + \frac{1}{2}} \dots (\Gamma^{0+})^{s_0 + \frac{1}{2}} |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\rangle \quad (\text{A.8})$$

$$= (\Gamma^{k+})^{s_k + \frac{1}{2}} (\Gamma^{k-1+})^{s_{k-1} + \frac{1}{2}} \dots (\Gamma^{0+})^{s_0 + \frac{1}{2}} \zeta \quad (\text{A.9})$$

と書け、全状態は 2^{k+1} 個ある。したがってこれらを基底とした 2^{k+1} 次元表現が存在し、それはスピノル表現と呼ばれる。スピノル自身は Dirac スピノルと呼ばれる。

Γ^μ の表現行列

2^{k+1} 次元基底に作用する Γ^μ 行列を考えよう。まず、 Γ^μ を

$$\Gamma^0 = \Gamma^{0+} + \Gamma^{0-}, \quad \Gamma^1 = \Gamma^{0+} - \Gamma^{0-} \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma^{2\kappa} = -i(\Gamma^{\kappa+} + \Gamma^{\kappa-}), \quad \Gamma^{2\kappa+1} = \Gamma^{\kappa+} - \Gamma^{\kappa-} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.11})$$

と昇降演算子で書き直す。このとき、 Γ^μ ($\mu \neq 0, 1$) の 2^{k+1} 次元基底への作用は、反交換関係より次のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu \prod_{\text{all spins}} (\otimes |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle) &= \Gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{k+} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{k-1+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{0+} \end{pmatrix} \zeta \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma^{k+} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma^{k-1+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \Gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{0+} \end{pmatrix} \zeta \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ここで、

$$\Gamma^{2\kappa} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta = \begin{pmatrix} -i(\Gamma^{\kappa+} + \Gamma^{\kappa-}) \\ -i(\Gamma^{\kappa+} + \Gamma^{\kappa-})\Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.13})$$

$$= \begin{pmatrix} -i\Gamma^{\kappa+} \\ -i\Gamma^{\kappa-}\Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\because \Gamma^{\kappa-}\zeta = 0, (\Gamma^{\kappa\pm})^2 = 0) \quad (\text{A.14})$$

$$= -i \begin{pmatrix} \Gamma^{\kappa+} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.15})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.16})$$

$$\Gamma^{2\kappa+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta = \begin{pmatrix} \Gamma^{\kappa+} - \Gamma^{\kappa-} \\ (\Gamma^{\kappa+} - \Gamma^{\kappa-})\Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.17})$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma^{\kappa+} \\ -\Gamma^{\kappa-}\Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\because \Gamma^{\kappa-}\zeta = 0, (\Gamma^{\kappa\pm})^2 = 0) \quad (\text{A.18})$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma^{\kappa+} \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.19})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma^{\kappa+} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \zeta \quad (\text{A.20})$$

となる。したがって、 $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ($\mu \neq 0, 1$) に対して

$$\Gamma^{2\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_k \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\kappa+1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}_\kappa \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\kappa-1} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma^{2\kappa+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_k \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\kappa+1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_\kappa \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\kappa-1} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.22})$$

となる。下付き添え字は作用する基底との対応を表している。同様にして $\mu = 0, 1$ の場合も、

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_k \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_k \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.24})$$

と求まる。

Lorentz 群の表現

スピノルに対する Lorentz 生成子は

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad (\text{A.25})$$

で与えられる。これを確かめるには実際に以下の Lorentz 生成子の交換関係を満たしていることを見ればよい。

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \quad (\text{A.26})$$

このとき、 $\Sigma^{2a, 2a+1}$ ($a = 0, 1, \dots, k$) は可換なのでこれらを Cartan 部分代数に用いる。

$$S_a \equiv -(i)^{\delta_{a,0}}\Sigma^{2a, 2a+1} = \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2} \quad (\text{A.27})$$

これを任意のスピン状態 $\zeta^s = |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle$ に作用させると、

$$S_a \zeta^s = \left(\Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2} \right) \zeta^s \quad (\text{A.28})$$

$$= \begin{cases} (1 - \frac{1}{2})\zeta^s & (\zeta^s \text{ に } \Gamma^{a+} \text{ が含まれている}) \\ -\frac{1}{2}\zeta^s & (\zeta^s \text{ に } \Gamma^{a+} \text{ が含まれていない}) \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$= s_a \zeta^s \quad (\text{A.30})$$

となる。すなわち、Cartan 部分代数以外の残りの生成子はこのスピン固有状態 (スピノル表現の基底) を上げ下げすることになる。しかしながら、偶数次元の場合このスピノル表現は Lorentz 変換の下で既約ではない。なぜなら、 $\Sigma^{\mu\nu}$ に対して全ての Γ^μ の積

$$\Gamma \equiv i^{-k} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{D-1} \quad (\text{A.31})$$

が可換になるからである (Γ が Γ^μ と反交換であるため確認は容易である)。つまり、 Γ の異なる固有状態は Lorentz 変換の下で混ざりあわない (Γ の固有値を Lorentz 変換は変えることができない)。補足すると、奇数次元 $D = 2k + 3$ の場合、新たな代数 Γ^{2k+2} を今の Clifford 代数に追加すればよいように思えるが、実は単に $\Gamma^{2k+2} = \Gamma$ とすればよいのである。実際この定義は Clifford 代数の反交換関係 (A.2) を満たす。したがって奇数次元の場合、偶数次元における Γ のような Lorentz 変換と交換する演算子は存在しないためスピノル表現は既約となる。

簡単な計算から Γ は次のように書き換えられる。

$$\Gamma = 2^{k+1} S_0 S_1 \dots S_k \quad (\text{A.32})$$

これより、

$$\zeta^s = |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle \text{ が偶数個の } s_a = -\frac{1}{2} \text{ を含む} \Rightarrow \Gamma = +1 \quad (\text{A.33})$$

$$\zeta^s = |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle \text{ が奇数個の } s_a = -\frac{1}{2} \text{ を含む} \Rightarrow \Gamma = -1 \quad (\text{A.34})$$

となる。これらの異なる Γ 固有状態は Lorentz 変換の下で独立な表現であり、Weyl 表現またはカイラル表現と呼ばれる。スピノル自身は Weyl スピノルと呼ばれる。

荷電共役

ここでは Dirac スピノル ζ に対する荷電共役を導入したい。しかし、単に $i \rightarrow -i$ とする複素共役 ζ^* をとっただけでは変換前後で Lorentz 変換性が異なってしまう。一般にスピノル ζ は複素数だからである。そのため、変換の前後で Lorentz 変換が同じになるような荷電共役を定義したい。

方針としては、 $\zeta^c \equiv B^{-1} \zeta^*$ としたとき Lorentz 変換性が ζ と一致するような定数行列 B を求めていく。それぞれの変換性は

$$\zeta \rightarrow (1 + i\omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}) \zeta \quad (\text{A.35})$$

$$B^{-1} \zeta^* \rightarrow B^{-1} ((1 + i\omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}) \zeta)^* = B^{-1} (1 - i\omega_{\mu\nu} (\Sigma^{\mu\nu})^*) \zeta = (1 - i\omega_{\mu\nu} B^{-1} (\Sigma^{\mu\nu})^* B) B^{-1} \zeta \quad (\text{A.36})$$

で与えられる。したがって

$$B^{-1} (\Sigma^{\mu\nu})^* B = -\Sigma^{\mu\nu} \quad (\text{A.37})$$

となる B を見つければよい。(A.25) を用いれば、より具体的に

$$B^{-1}(\Gamma^\mu)^* B = \pm \Gamma^\mu \quad (\text{A.38})$$

を満たせばよいと分かる。

Γ^μ の構成方法から、 $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^{2\kappa}$ は real、 $\Gamma^{2\kappa+1}$ は pure imaginary であると分かる ($\kappa = 1, 2, \dots, k$)。そこで

$$B_1 = \Gamma^3 \Gamma^5 \dots \Gamma^{D-1}, \quad B_2 = \Gamma B_1 \propto \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^4 \dots \Gamma^{D-2} \quad (\text{A.39})$$

としてみよう。すると、

$$B_1 \Gamma^\mu B_1^{-1} = \begin{cases} B_1 B_1^{-1} (-1)^{k-1} \Gamma^\mu & (\mu = 3, 5, \dots, D-1) = (-1)^k (-\Gamma^\mu) \\ B_1 B_1^{-1} (-1)^k \Gamma^\mu & (\mu = 0, 1, 2, 4, \dots, D-2) = (-1)^k (\Gamma^\mu)^* \end{cases} = (-1)^k (\Gamma^\mu)^* \quad (\text{A.40})$$

$$B_2 \Gamma^\mu B_2^{-1} = \begin{cases} B_2 B_2^{-1} (-1)^{k+2} \Gamma^\mu & (\mu = 3, 5, \dots, D-1) = (-1)^{k+1} (-\Gamma^\mu) \\ B_2 B_2^{-1} (-1)^{k+1} \Gamma^\mu & (\mu = 0, 1, 2, 4, \dots, D-2) = (-1)^{k+1} (\Gamma^\mu)^* \end{cases} = (-1)^{k+1} (\Gamma^\mu)^* \quad (\text{A.41})$$

と求まる。よってどちらの B に対しても (A.38) が成り立つ。こうしてスピノル ζ と同じ Lorentz 変換性を持つような荷電共役スピノル $\zeta^c = B^{-1} \zeta^*$ を見つけることができた。よく知られた 4 次元での例を示しておこう。まず基底を次のように 2 つの Weyl スピノルが並ぶ形に整える。

$$\zeta = \begin{pmatrix} |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \end{pmatrix} \rightarrow O\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$= \begin{pmatrix} |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}\rangle_0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |-\frac{1}{2}\rangle_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \zeta_L \\ \zeta_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

このとき、 $\zeta^c = B^{-1} \zeta^*$ は

$$B_1^{-1} \zeta^* \rightarrow O B_1^{-1} O^{-1} (T\zeta)^* = -i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_L^* \\ \zeta_R^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i\sigma^2 \zeta_R^* \\ i\sigma^2 \zeta_L^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$B_2^{-1}\zeta^* \rightarrow OB_2^{-1}O^{-1}(T\zeta)^* = -i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_L^* \\ \zeta_R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2\zeta_R^* \\ -i\sigma^2\zeta_L^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

と求まる。これらは $O\zeta = (\zeta_L, \zeta_R)^T$ と同じ Lorentz 変換性を持つ。ここで B_1 と B_2 の選択に本質的な差がないことは明らかだろう。こうして我々がよく知る荷電共役スピノルの形を得ることができた。

Majorana スピノル

次に Majorana スピノルを導入しよう。Majorana スピノルは次の性質を満たすスピノルとして定義される。

$$\zeta = \zeta^c = B^{-1}\zeta^* \quad (\text{A.47})$$

注意すべき点として、行列 B は

$$\zeta = B^{-1}\zeta^* = B^{-1}(B^{-1}\zeta^*)^* = B^{-1}(B^{-1})^*\zeta \Rightarrow B^*B = 1 \quad (\text{A.48})$$

を満たさなければならない。 B_1 と B_2 について見ると、

$$B_1^*B_1 = (-1)^k \Gamma^3 \Gamma^5 \dots \Gamma^{D-1} \Gamma^3 \Gamma^5 \dots \Gamma^{D-1} = (-1)^{k+k-1+k-2+\dots+1} = (-1)^{k(k+1)/2} \quad (\text{A.49})$$

$$B_2^*B_2 = \Gamma^* B_1^* \Gamma B_1 = (-1)^k \Gamma^* \Gamma B_1^* B_1 = (-1)^k B_1^* B_1 = (-1)^{k(k-1)/2} \quad (\text{A.50})$$

となる。ただし B_1 が k 個の pure imaginary な行列の積からなることを用いた。したがって、Majorana スピノルをとれる条件は

$$B_1 \text{ による Majorana 条件: } \Rightarrow k = 0, 3 \pmod{4} \quad (D = 2, 8 \pmod{8}) \quad (\text{A.51})$$

$$B_2 \text{ による Majorana 条件: } \Rightarrow k = 0, 1 \pmod{4} \quad (D = 2, 4 \pmod{8}) \quad (\text{A.52})$$

である。少なくともどちらかが満たされれば、 $\zeta = \zeta^c$ という条件を満たすことが可能な ζ が存在する。

Majorana スピノルと Weyl スピノルが両立可能かどうかも見よう。 $\Gamma^* = \Gamma$ に気を付けて、 ζ と ζ^c の Γ に対する固有値が同じになる条件を探す。まず

$$B_1 \Gamma B_1^{-1} = (-1)^k \Gamma = (-1)^k \Gamma^* = (-1)^{k+2} \Gamma = B_2 \Gamma B_2^{-1} \Rightarrow \Gamma B^{-1} = (-1)^k B^{-1} \Gamma^* \quad (\text{A.53})$$

となるので、 $\Gamma\zeta = \pm\zeta$ のとき、

$$\Gamma\zeta^c = \Gamma B^{-1}\zeta^* = B^{-1}(\Gamma\zeta)^* = \pm(-1)^k \zeta^c \quad (\text{A.54})$$

となる。よって、 ζ と ζ^c の Γ に対する固有値が同じになるには $k = \text{even}$ でなければならない。これを Majorana 条件と合わせると、次の Majorana-Weyl 条件が見つかる。

$$B_1, B_2 \text{による Majorana-Weyl 条件: } \Rightarrow k = 0 \pmod{4} \quad (D = 2 \pmod{8}) \quad (\text{A.55})$$

したがって10次元以下の偶数次元に限ると、Majorana-Weyl スピノルが存在するのは $D = 2, 10$ のときだけである。

スピノルの積と分解

$D = 2k + 2$ における 2^{k+1} 成分スピノル ζ と χ の直積からなる表現を考えよう。

$$\zeta_a \otimes \chi_b, \quad (a, b \in \{0, 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}) \quad (\text{A.56})$$

これは $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 行列である。2つのスピノルの積は整数スピンを与えるので、これは Lorentz 群のテンソル表現となるだろう。ところで、 $D = 2k + 2$ の Clifford 代数は $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 行列で与えられるのだった。その自由度(Γ^μ から構成される独立な行列の数)は

$$\begin{aligned} 0 \text{個: } \mathbf{1} &\rightarrow \text{自由度 } 1 \\ 1 \text{個: } \Gamma^\mu &\rightarrow \text{自由度 } {}_D C_1 \\ 2 \text{個の積: } \Gamma^\mu \Gamma^\nu &\rightarrow \text{自由度 } {}_D C_2 \\ &\vdots \\ D \text{個の積: } \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{D-1} &\rightarrow \text{自由度 } {}_D C_D \\ \hline \text{合計自由度 } \sum_{n=0}^D {}_D C_n &= 2^D = 2^{2k+2} \end{aligned}$$

である。反交換関係 $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ より同じ代数は1度しか積に現れないことに注意しよう。この自由度の数は昇降演算子 $\Gamma^{a\pm}$ を用いた状態数の数え方と同等である。すなわち、任意の $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 行列(成分数 2^{2k+2})は $D = 2k + 2$ の Clifford 代数から構成される独立な行列で展開できることになる。よって2つの Dirac スピノルの直積から得られる状態について、次の対応があるだろう。

$$\zeta_a \otimes \chi_b \rightarrow \bar{\zeta} [c_0 \mathbf{1} + c_1 \Gamma^{\mu_1} + c_2 \Gamma^{\mu_1 \mu_2} + c_3 \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \dots + c_D \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}] \chi \quad (\text{A.57})$$

ただし、独立な Γ 行列の積として、時空の添え字 μ_m が完全反対称となるもの、

$$\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \equiv \Gamma^{[\mu_1 \Gamma^{\mu_2} \dots \Gamma^{\mu_D}] \quad (\text{A.58})$$

を選んでいる。また、 $\zeta_a \otimes \chi_b$ に含まれている任意の状態

$$|s_0^\zeta, s_1^\zeta, \dots, s_k^\zeta\rangle \otimes |s_0^\chi, s_1^\chi, \dots, s_k^\chi\rangle \in \zeta_a \otimes \chi_b \quad (\text{A.59})$$

は必ずどのスピンの対しても整数値をとるのでスピノルの足は消えていなければならない。 ζ が $\bar{\zeta}$ となっているのはそのためである。ただし、 χ の逆の Lorentz 変換性を持つものとして $\bar{\zeta}$ を用いてしまうと、 $\zeta_a \otimes \chi_b$ に ζ^* が含まれていないため正しい対応とならない。そのため、 $\bar{\zeta}$ と同じ変換性を持つ代わりのものが必要である。そこで次の性質を持つ荷電共役行列 C を導入しよう。

$$C^{-1}(\Sigma^{\mu\nu})^T C = -\Sigma^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad C^{-1}(\Gamma^\mu)^T C = \pm\Gamma^\mu \quad (\text{A.60})$$

このような行列 C が存在すれば、

$$\zeta^T C \rightarrow ((1 + i\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})\zeta)^T C = \zeta^T (1 + i\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^T) C \quad (\text{A.61})$$

$$= \zeta^T C (1 + i\omega_{\mu\nu} C^{-1}(\Sigma^{\mu\nu})^T C) \quad (\text{A.62})$$

$$= \zeta^T C (1 - i\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}) \quad (\text{A.63})$$

となって $\zeta^T C$ は ζ^* を使わずに χ の逆の Lorentz 変換性を持つことになる。

Γ^μ の構成方法から、 $a = 0, 1, \dots, k$ に対して $(\Gamma^{2a})^T = \Gamma^{2a}$ 、 $(\Gamma^{2a+1})^T = -\Gamma^{2a+1}$ である。そこで

$$C_1 = \Gamma^1 \Gamma^3 \dots \Gamma^{D-1}, \quad C_2 = \Gamma C_1 \propto \Gamma^2 \Gamma^4 \dots \Gamma^{D-2} \quad (\text{A.64})$$

としてみよう。すると、

$$C_1 \Gamma^\mu C_1^{-1} = \begin{cases} C_1 C_1^{-1} (-1)^{k+1} \Gamma^\mu & (\mu = 0, 2, \dots, D-2) = (-1)^{k+1} \Gamma^\mu \\ C_1 C_1^{-1} (-1)^k \Gamma^\mu & (\mu = 1, 3, \dots, D-1) = (-1)^{k+1} (-\Gamma^\mu) \end{cases} = (-1)^{k+1} (\Gamma^\mu)^T \quad (\text{A.65})$$

$$C_2 \Gamma^\mu C_2^{-1} = \begin{cases} C_2 C_2^{-1} (-1)^k \Gamma^\mu & (\mu = 0, 2, \dots, D-2) = (-1)^k \Gamma^\mu \\ C_2 C_2^{-1} (-1)^{k+1} \Gamma^\mu & (\mu = 1, 3, \dots, D-1) = (-1)^k (-\Gamma^\mu) \end{cases} = (-1)^k (\Gamma^\mu)^T \quad (\text{A.66})$$

と求まる。よってどちらの C に対しても (A.60) が成り立つ。注意すると、先ほど求めた荷電共役行列 B は Dirac スピノル ζ を、 ζ と同じ変換性を持つような ζ^* と結び、ここで求めた C は ζ と逆の変換性を持つような ζ^T と結ぶものである。

こうして荷電共役行列 C が存在することが分かった。今、2つの Dirac スピノルの直積との正しい対応は次のように書ける。

$$\zeta_a \otimes \chi_b \rightarrow \zeta^T C [c_0 \mathbf{1} + c_1 \Gamma^{\mu_1} + c_2 \Gamma^{\mu_1 \mu_2} + c_3 \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \dots + c_D \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}] \chi \quad (\text{A.67})$$

と対応する。このことから、2つの Dirac スピノル表現の直積には、次のように n 階の反対称テンソル表現 $[n]$ が含まれていることになる。

$$\mathbf{2}_{\text{Dirac}}^{k+1} \times \mathbf{2}_{\text{Dirac}}^{k+1} = [0] + [1] + \dots + [2k+2] \quad (\text{A.68})$$

$$= [0]^2 + [1]^2 + \dots + [k]^2 + [k+1] \quad (\text{A.69})$$

2行目ではHodge 双対より n 階テンソルと $D - n$ 階テンソルが等価であることを用いて、上付き添え字で同じ階数のテンソル表現の個数を示した。各テンソル表現の次元は $[n]$ に対して ${}_D C_n$ で与えられる。

最後に2つの Weyl スピノルの直積も調べておこう。 ζ, χ をそれぞれ任意のカイラリティの Weyl スピノルとする。また、 Γ^μ も Weyl 表現の Clifford 代数とする。まず次の恒等式を示そう。

$$\zeta^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \Gamma \chi = (-1)^{k+m+1} (\Gamma \zeta)^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi \quad (\text{A.70})$$

左辺から右辺を目指していく。

$$(\text{左辺}) = (-1)^m \zeta^T C \Gamma \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi \quad (\because \{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0) \quad (\text{A.71})$$

$$= (-1)^{k+m+1} \zeta^T \Gamma C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi \quad (\because C = (k+1 \text{ 個の } \Gamma^\mu \text{ の積})) \quad (\text{A.72})$$

$$= (-1)^{k+m+1} (\Gamma \zeta)^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi \quad (\because (\Gamma^{2a})^T = \Gamma^{2a}, (\Gamma^{2a+1})^T = -\Gamma^{2a+1}) \quad (\text{A.73})$$

$$= (\text{右辺}) \quad (\text{A.74})$$

では (A.70) の意味を考えよう。 ζ と χ のカイラリティ (Γ 固有値) をそれぞれ $(-1)^{\gamma_\zeta}, (-1)^{\gamma_\chi}$ とすると ($\gamma_\zeta, \gamma_\chi \in \{0, 1\}$)、

$$(-1)^{\gamma_\chi} \zeta^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi = (-1)^{k+m+1+\gamma_\zeta} \zeta^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi \quad (\text{A.75})$$

$$\Rightarrow \gamma_\chi - \gamma_\zeta = k + m + 1 \pmod{2} \quad (\text{A.76})$$

となる。したがって、(A.76) を満たさない場合、 $\zeta^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} \chi = 0$ となる。つまりカイラリティと次元 $D = 2k + 2$ の値次第では0となってしまう m 階テンソル表現が存在することになる。まとめると、

ζ と χ のカイラリティが同じ $\Rightarrow k + m$ が奇数となる m 階テンソル表現のみ残る

ζ と χ のカイラリティが異なる $\Rightarrow k + m$ が偶数となる m 階テンソル表現のみ残る

となる。よって2つの Weyl 表現の積は、

同一カイラリティ :

$$2_{\text{Weyl}}^k \times 2_{\text{Weyl}}^k = \begin{cases} [1] + [3] + \dots + [k-1] + [k+1] & (k : \text{偶数}) \\ [0] + [2] + \dots + [k-1] + [k+1] & (k : \text{奇数}) \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

異なるカイラリティ :

$$2_{\text{Weyl}}^k \times 2_{\text{Weyl}}^k = \begin{cases} [0] + [2] + \dots + [k] & (k : \text{偶数}) \\ [1] + [3] + \dots + [k] & (k : \text{奇数}) \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

というテンソル表現を含む。

例として、Type II理論では $k = 4$ ($D = 10$) であり、R-R セクターに

$$\text{IIA} : \text{逆のカイラリティ} \Rightarrow [0] + [2] + [4] \quad (\text{A.79})$$

$$\text{IIB} : \text{同一カイラリティ} \Rightarrow [1] + [3] + [5] \quad (\text{A.80})$$

というようなテンソル表現を含む。ただし、これらの完全反対称テンソルは場の強さに対応しており、場としては

$$\text{IIA} : \text{逆のカイラリティ} \Rightarrow [1] + [3] \quad (\text{A.81})$$

$$\text{IIB} : \text{同一カイラリティ} \Rightarrow [0] + [2] + [4] \quad (\text{A.82})$$

が現れることに注意する。

付録B 超対称性 (SUSY)

ここでは4次元時空上の場の理論の超対称性をまとめる [30, 31]。

B.1 超対称性の表現

超対称変換は boson と fermion の間の対称性である。

$$Q|\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle, \quad Q|\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle \quad (\text{B.1})$$

超対称性が考えられる以前、Coleman-Mandula の定理と呼ばれる S 行列の対称性に関する次の定理が示されていた [32]。

- Coleman-Mandula の定理

S 行列の対称性は Poincaré 対称性と内部対称性に限られる。内部対称性とは、その生成子が Poincaré 変換の生成子と可換で運動量およびスピンの依存しないエルミート演算子として作用するものをいう。すなわちこの定理は、運動量 p_1, \dots, p_n およびスピン s_1, \dots, s_n の n 粒子状態に対して

$$|p_1, \dots, p_n, s_1, \dots, s_n\rangle \rightarrow T_{p_1 \dots p_n s_1 \dots s_n}^{p'_1 \dots p'_n s'_1 \dots s'_n} |p'_1, \dots, p'_n, s'_1, \dots, s'_n\rangle \quad (\text{B.2})$$

と変換する T を考えたとき、 S 行列が

$$T^\dagger S T = S \quad (\text{B.3})$$

となるようなものは Poincaré 変換のみという主張である。内部対称性は運動量・スピン以外の自由度、例えば color など、に対して作用したときの S 行列の不変性となる。

しかしながら、Coleman-Mandula の定理は S 行列に作用する対称性として、boson 的な対称性しか考慮していなかった。つまり、

$$[t_a, t_b] = t_a t_b - t_b t_a = i f_{ab}^c t_c \quad (\text{B.4})$$

となる生成子 t を持つ対称性 T しか考えていなかったのである。ところが、次数付き Lie 代数と呼ばれる、反交換関係も取り入れた対称性

$$t_a t_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} t_b t_a = i f_{ab}^c t_c, \quad \eta_\alpha \in \{0, 1\} : t_\alpha \text{ の次数} \quad (\text{B.5})$$

$$\eta_\alpha = \begin{cases} 0 & (t_\alpha \text{ は boson 的}) \\ 1 & (t_\alpha \text{ は fermion 的}) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

を考えたとき例外が生じることが分かった。このより一般的な対称性に対する定理は Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理と呼ばれている [33]。

- Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理

S 行列の対称性は Poincaré 対称性、超対称性および内部対称性に限られる。

$$P_\mu, M_{\mu\nu} : \text{Poincaré 生成子} \quad (\text{B.7})$$

$$\left(\begin{array}{l} J_{r=1,2,3} = (-M_{23}, -M_{31}, -M_{12}) = -\frac{i}{2} \sigma_r : \text{空間回転の生成子} \\ K_{r=1,2,3} = (M_{01}, M_{02}, M_{03}) = -\frac{1}{2} \sigma_r : \text{Lorentz ブーストの生成子} \end{array} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$t_i : \text{内部対称性生成子} \quad (\text{B.9})$$

$$Q_\alpha^i : \text{超対称性生成子 } (i = 1, 2, \dots, N; \alpha = +1/2, -1/2) \quad (\text{B.10})$$

としたとき、これらは閉じた代数をつくる。特に超対称性代数は次で与えられる。

$$\{Q_\alpha^i, (Q_\beta^j)^*\} = 2\delta^{ij} \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad (\text{B.11})$$

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = e_{\alpha\beta} Z^{ij} \quad (\text{B.12})$$

$$[Q_\alpha^i, P_\mu] = [(Q_\alpha^i)^*, P_\mu] = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$[J_r, Q_\alpha^i] = -\frac{1}{2} (\sigma_r)_{\alpha\beta} Q_\beta^i \quad (\text{B.14})$$

$$[K_r, Q_\alpha^i] = -\frac{i}{2} (\sigma_r)_{\alpha\beta} Q_\beta^i \quad (\text{B.15})$$

ここで Z^{ij} はセントラルチャージと呼ばれ、 ij について反対称で、全ての生成子と可換である。また、 $i = 1, 2, \dots, N$ は異なる超対称性代数 Q^i が N 個あることを意味する。 Q^* は演算子 Q のエルミート共役を意味する ($(Q_\alpha^i Q_\beta^j)^* = (Q_\beta^j)^* (Q_\alpha^i)^*$ に注意)。なお、Pauli 行列の表示は

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

である。

注意すると、超対称性生成子 Q^i が運動量演算子 P_μ と可換なことから、超対称変換前の状態と変換後の状態は同じ P^2 固有値を持つ。つまり、超対称変換で結ばれる boson 的状态と fermion 的状态は同じ質量 $P^2 = M^2$ を持つことになる。また、このとき boson 的状态と fermion 的状态の数(自由度)は同数でなければならない。Fermion 的状态の数を与える個数演算子を N_f とし、 $(-1)^{N_f}$ という演算子を導入してみる。このとき、1 粒子 boson 的状态 $|\text{boson}\rangle$ に対して $(-1)^{N_f}$ は +1、1 粒子 fermion 的状态 $|\text{fermion}\rangle$ に対して -1 を与えることが分かる。したがって、

$$(-1)^{N_f} Q |\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle \quad (\text{B.17})$$

$$Q (-1)^{N_f} |\text{fermion}\rangle = -|\text{boson}\rangle \quad (\text{B.18})$$

$$(-1)^{N_f} Q |\text{boson}\rangle = -|\text{fermion}\rangle \quad (\text{B.19})$$

$$Q (-1)^{N_f} |\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle \quad (\text{B.20})$$

となる。すなわち、

$$\{(-1)^{N_f}, Q\} |\text{state}\rangle = 0 \quad (\text{B.21})$$

となる。これより、状態 $|\text{state}\rangle$ に関する trace をとった次の量は、

$$\text{Tr}[(-1)^{N_f} \{Q, \bar{Q}\}] = \text{Tr}[(-1)^{N_f} (Q\bar{Q} + \bar{Q}Q)] \quad (\text{B.22})$$

$$= \text{Tr}[-Q(-1)^{N_f} \bar{Q} + Q(-1)^{N_f} \bar{Q}] \quad (\text{B.23})$$

$$= 0 \quad (\text{B.24})$$

となる。一方で (B.11) より

$$\text{Tr}[(-1)^{N_f} \{Q, \bar{Q}\}] \propto \text{Tr}[(-1)^{N_f}] \quad (\text{B.25})$$

である。よって $\text{Tr}[(-1)^{N_f}] = 0$ でなければならず、boson 的状态と fermion 的状态の数は等しくなる。

我々は超弦理論における massless 状態に興味があるので、以降では特に超対称性代数の 1 粒子状態の massless 表現を調べていこう。

Massless 表現

Massless な粒子に対して超対称性代数は

$$\{Q_\alpha^i, (Q_\beta^j)^*\} = 2\delta^{ij} \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 0 \quad (\text{B.26})$$

で与えられる。セントラルチャージが現れていないが、massless にてセントラルチャージが消える必要性は静止系 $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$ をとったときの代数関係から示すことができる。

ここでは $P_\mu = (E, 0, 0, -E) \equiv K_\mu$ となるローレンツ座標系をとって考えていこう。そのとき、

$$\{Q_\alpha^i, (Q_\beta^j)^*\} = 2\delta^{ij}E(\sigma_{\alpha\beta}^0 - \sigma_{\alpha\beta}^3) = 2\delta^{ij}E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

となる。したがって、実質的な超対称性生成子の代数関係は

$$\{Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^j)^*\} = 4\delta^{ij}E \quad (\text{B.28})$$

$$\{Q_{-1/2}^i, Q_{-1/2}^j\} = \{(Q_{-1/2}^i)^*, (Q_{-1/2}^j)^*\} = 0 \quad (\text{B.29})$$

のみである。よって、もし超対称性生成子の作用する状態空間 (超対称多重項) が存在して、それが運動量 K の状態を持つのであれば、

$$\langle K | \{Q_{1/2}^i, (Q_{1/2}^j)^*\} | K \rangle = \langle K | (Q_{1/2}^i (Q_{1/2}^j)^* + (Q_{1/2}^j)^* Q_{1/2}^i) | K \rangle \quad (\text{B.30})$$

$$= \delta^{ij} |(Q_{1/2}^i)^* | K \rangle|^2 + \delta^{ij} |Q_{1/2}^i | K \rangle|^2 \quad (\text{B.31})$$

$$= 0 \quad (\text{B.32})$$

となって消えることになる。これより $(Q_{1/2}^i)^* | K \rangle = Q_{1/2}^i | K \rangle = 0$ が成り立つ。すなわち、超対称性多重項は $(Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^i)^*)$ によって張られる空間を考えればよいことになる。

ここで $(Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^i)^*)$ が次の交換関係を満たすことに注意しよう。

$$[J^3, Q_{-1/2}^i] = -\frac{1}{2}(\sigma^3)_{-1/2\beta} Q_\beta^i = \frac{1}{2}Q_{-1/2}^i \quad (\text{B.33})$$

$$-[J^3, (Q_{-1/2}^i)^*] = [J^3, (Q_{-1/2}^i)^*] = -\frac{1}{2}(Q_{-1/2}^i)^* \quad (\text{B.34})$$

これは、 $(Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^i)^*)$ がスピン空間 (J^3 の固有空間) に対しそれぞれ上昇・下降演算子として作用することを意味する。すなわち、最大スピン λ_{\max} を持つ超対称性多重項 $|K; \lambda_{\max}, \lambda\rangle$ を考えたとき、

$$\lambda = \lambda_{\max} : |K; \lambda_{\max}, \lambda_{\max}\rangle \quad (\text{B.35})$$

$$\lambda = \lambda_{\max} - 1/2 : (Q_{-1/2}^i)^* |K; \lambda_{\max}, \lambda_{\max}\rangle$$

という空間が張られる。ただし最大スピンという仮定から $Q_{-1/2}^i |K; \lambda_{\max}, \lambda_{\max}\rangle = 0$ である。反交換関係 (B.29) より $(Q_{-1/2}^i)^*$ を 2 回作用させると消えてしまうことに注意しよう。また、 $(Q_{-1/2}^i)^* |K; \lambda_{\max}, \lambda_{\max}\rangle$ に $Q_{-1/2}^i$ を作用させるとスピン λ_{\max} を持つ状態に戻ることも明らかだ。したがって、 $(Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^i)^*)$ による超対称性多重項は (B.35) の 2 状態となることが分かった。しかしながらこの 2 状態だけでは一般的な場の理論を作ることはできない。理論の CPT 不変性より、これらの状態に対する CPT パートナーが必要となる。

- $N=1$

この場合超対称性生成子は一組 $(Q_{-1/2}, Q_{-1/2}^*)$ からなる。上記の状態に CPT パートナーの状態を加えれば、超対称性多重項は

λ	状態
λ_{\max}	$ \lambda_{\max}\rangle$
$\lambda_{\max} - 1/2$	$Q_{-1/2}^* \lambda_{\max}\rangle$
\oplus	\oplus
$-\lambda_{\max} + 1/2$	$Q_{1/2} -\lambda_{\max}\rangle$
$-\lambda_{\max}$	$ -\lambda_{\max}\rangle$

という 4 状態となる。特に $\lambda_{\max} = 1/2, 1, 2$ のものは順に

$$\text{カイラル多重項: } (A, B, \psi) = (\text{スピン } 0, 0, \pm 1/2) \quad (\text{B.36})$$

$$\text{ベクトル多重項: } (A_\mu, \lambda) = (\text{スピン } \pm 1, \pm 1/2) \quad (\text{B.37})$$

$$\text{超重力多重項: } (e_\mu^\alpha, \psi_\mu) = (\text{スピン } \pm 2, \pm 3/2) \quad (\text{B.38})$$

と呼ばれる。例えば 4.1 節で見た $U(N)$ super Yang Mills 理論は 10 次元の $N = 1$ ベクトル多重項である。

- N -extended

この場合超対称性生成子は N 組 $(Q_{-1/2}^i, (Q_{-1/2}^i)^*)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) からなる。 $(Q_{-1/2}^i)^*$ を最高状態に作用させていくことで、スピンは λ_{\max} から $\lambda_{\max} - N/2$ までを取り得る。よって CPT パートナーを加えた超対称性多重項は次で与えられる。

λ ($k \in \mathbb{Z}_{N+1}$)	状態	多重度
$\lambda_{\max} - k/2$	$\prod_{i=1}^k (Q_{-1/2}^{p_i})^* \lambda_{\max}\rangle$	${}_N C_k$
\oplus	\oplus	
$-\lambda_{\max} + k/2$	$\prod_{i=1}^k Q_{1/2}^{p_i} -\lambda_{\max}\rangle$	${}_N C_k$

全状態数は $2 \times \sum_{k=0}^N {}_N C_k = 2^{N+1}$ で与えられる。ただし自己共役 (CPT パートナーが 1 つの多重項の中に含まれている) 場合、状態数は 2^N である。 $|\lambda_{\max}\rangle$ が boson 的状态だとすると、boson 的状态の数は $n_b = 2(1 + {}_N C_2 + {}_N C_4 + \dots) = 2^N$ 、fermion 的状态の数は $n_f = 2({}_N C_1 + {}_N C_3 + \dots) = 2^N$ となって同数である。

以降に各多重項に含まれるスピン状態とその多重度を示す。自己共役な多重項に対しては「*」を付けた。スピンの λ_{\max} から $-\lambda_{\max}$ まで $1/2$ 刻みで値を取るため、 N の最大値が $4\lambda_{\max}$ であることに注意する。

カイラル多重項 (最大スピン 1/2):

λ	$N = 1$	$N = 2^*$
$\frac{1}{2}$	1	1
0	1 + 1	2
$-\frac{1}{2}$	1	1

Super Yang-Mills(最大スピン 1):

λ	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4^*$
1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	2	3 + 1	4
0		1 + 1	3 + 3	6
$-\frac{1}{2}$	1	2	1 + 3	4
-1	1	1	1	1

超重力 (最大スピン 2):

λ	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8^*$
2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{3}{2}$	1	2	3	4	5	6	7 + 1	8
1		1	3	6	10	15 + 1	21 + 7	28
$\frac{1}{2}$			1	4	10 + 1	20 + 6	35 + 21	56
0				1 + 1	5 + 5	15 + 15	35 + 35	70
$-\frac{1}{2}$			1	4	1 + 10	6 + 20	21 + 35	56
-1		1	3	6	10	1 + 15	7 + 21	28
$-\frac{3}{2}$	1	2	3	4	5	6	1 + 7	8
-2	1	1	1	1	1	1	1	1

これより、スピン 2 までの場を理論に加えたい場合、最大で $N = 8$ となることが分かる。

B.2 超対称な理論

超場

前節を通して超対称性変換の表現がスピンと超対称性の数 N によって決められることを見た。ここではそれらの超対称性多重項からなる作用の構成方法を見ていく。

超対称性を持つ作用を構成するには超空間を導入するのが簡便である。実際、我々は 3.2.1 節にて 2 次元世界座標 + 2 次元グラスマン座標からなる超空間を導入して超弦理論の世界面に関

する超対称性を持つ作用の形を導いた。我々は今4次元時空に注目しているため、4次元グラスマン座標 $(\theta, \bar{\theta})$ 、

$$\theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_1^\dagger \\ \theta_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

を用いる。ここで θ は2成分 Left-handed Weyl スピノル (Majorana ではない¹)、 $\bar{\theta}$ は θ のエルミート共役であると定義している。Weyl スピノルを Right にとっても議論に支障はない。

付録 A で見たように4次元では $i\sigma^2$ をかけることで Lorentz 変換の下での変換性が変わるのだった。ここでは次に示す4つの異なる変換性を持つ Weyl スピノルが存在する。

Weyl スピノル	Lorentz 変換性
θ_a	Left
$\bar{\theta}_a \equiv \theta_a^\dagger$	Right inverse
$\bar{\theta}^a \equiv i(\sigma^2)^{ab}\bar{\theta}_b$	Right
$\theta^a \equiv (\bar{\theta}^a)^\dagger = i(\sigma^2)^{ab}\theta_b$	Left inverse

それぞれを添え字の上付き・下付きおよび 'bar' あり・なしで区別することにする。また Left と Right の変換性を区別するため点無し (Left)、点付き (Right) とした。Lorentz 不変となるのは、同じ種類の添え字が上と下付きで組み合わせるものである。すなわち、Lorentz 不変な量は、

$$\theta^a \theta_a \equiv \theta\theta, \quad \bar{\theta}_a \bar{\theta}^a \equiv \bar{\theta}\bar{\theta} \quad (\text{B.40})$$

の2つである。以降では、 $\theta\theta$ は添え字が (上付き・下付き) という順の積、 $\bar{\theta}\bar{\theta}$ は添え字が (下付き・上付き) という順の積であると定義して用いる。2つのスピノルの直積表現から得られるテンソル表現は

$$\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \bar{\theta}^b \equiv \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \quad (\text{B.41})$$

のみである。これは付録 A で見た異なるカイラリティを持つ2つの Weyl スピノルの直積に含まれるテンソル表現の議論から理解できる ($D = 4 = 2k + 2$ より (A.78) で $k = 1$ とおく)。

ここでグラスマン数の性質

$$\{\theta_a, \theta_b\} = \{\bar{\theta}_a, \bar{\theta}_b\} = 0 \quad (\text{B.42})$$

から

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} (a\theta + \bar{b}\bar{\theta} + c\theta\bar{d}\bar{\theta} + A\theta\theta + B\bar{\theta}\bar{\theta} + e\theta\bar{\theta}\bar{\theta} + \theta\theta\bar{f}\bar{\theta} + C\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) = C \quad (\text{B.43})$$

$$a, b, c, d, e, f : \text{Weyl スピノル}, \quad A, B, C : \text{スカラー}$$

¹付録 A で見たように4次元では Majorana-Weyl スピノルをとることができない。

となることに注意しよう。すなわち、任意の $(x, \theta, \bar{\theta})$ のスカラー関数 (超場) $G(x, \theta, \bar{\theta})$ の展開とそのグラスマン積分は、

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + m(x)\theta\theta + n(x)\bar{\theta}\bar{\theta} \\ + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + d(x)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \quad (\text{B.44})$$

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} G(x, \theta, \bar{\theta}) = d(x) \quad (\text{B.45})$$

となる。

では 3.2.1 節でしたように、超場 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ に対する超空間上の微分演算子 P, Q, \bar{Q} を導入しよう。

$$P_\mu = i\partial_\mu \quad (\text{B.46})$$

$$Q_a = i\partial_a - (\sigma^\mu)_{ab}\bar{\theta}^b\partial_\mu \quad (\text{B.47})$$

$$\bar{Q}_{\dot{a}} = -i\bar{\partial}_{\dot{a}} - \theta^b(\sigma^\mu)_{b\dot{a}}\partial_\mu \quad (\text{B.48})$$

これらは次の代数関係を満たす。

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad (\text{B.49})$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0 \quad (\text{B.50})$$

$$\{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 2(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}P^\mu \quad (\text{B.51})$$

実際、超空間上の並進という変換の下で S 行列は不変だが、その際 boson 的状态と fermion 的状态が入れ替わる。Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理より、そのような変換は SUSY 代数を満たすはずである。

では、このような SUSY 代数を満たす超空間上の並進演算子がどのようにして (B.46), (B.47), (B.48) という形に決まるかを見ていく。運動量演算子 P^μ の形は既知のものとして考えてよいだろう。超空間上での並進が

$$G(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) = (1 + \delta x^\mu\partial_\mu + \delta\theta^a\partial_a + \delta\bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\partial}^{\dot{a}})G(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{B.52})$$

$$= (1 - ia^\mu P_\mu - i\xi^a Q_a - i\bar{\xi}_{\dot{a}}\bar{Q}^{\dot{a}})G(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{B.53})$$

a_μ, ξ_a : 変換のパラメーター

と書けることから

$$Q_a = i\partial_a + \dots, \quad \bar{Q}^{\dot{a}} = i\bar{\partial}^{\dot{a}} + \dots \quad (\text{B.54})$$

となる。ただし、

$$\delta x^\mu = a^\mu, \quad \delta \theta^a = \xi^a, \quad \bar{\theta}_{\dot{a}} = \bar{\xi}_{\dot{a}} \quad (\text{B.55})$$

とは限らないことに注意する。なぜなら、SUSYの代数関係の1つ (B.51) が、演算子 $P_\mu, Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}}$ が完全に独立ではないことを意味しているためである。実際、

$$\exp(-ia^\mu P_\mu - i\xi^a Q_a - i\bar{\xi}_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}}) \exp(-ix^\mu P_\mu - i\theta^a Q_a - i\bar{\theta}_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}}) = \exp(-ix'^\mu P_\mu - i\xi'^a Q_a - i\bar{\xi}'_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}}) \quad (\text{B.56})$$

を Baker-Campbell-Hausdorff の定理:

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + \dots\right) \quad (\text{B.57})$$

および SUSY 代数関係を用いて計算すると、パラメーターにおける次の関係式が得られる。

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} \quad \Rightarrow \quad \delta x^\mu = a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} \quad (\text{B.58})$$

$$\theta' = \theta + \xi \quad \Rightarrow \quad \delta\theta = \xi \quad (\text{B.59})$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi} \quad \Rightarrow \quad \delta\bar{\theta} = \bar{\xi} \quad (\text{B.60})$$

したがって、超空間上の並進演算子が (B.46), (B.47), (B.48) で与えられることになる。

超空間上の並進演算子、すなわち超対称性生成子の形が分かったので、それらの超場 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ への作用を調べておこう。

$$\delta_\xi G(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) G(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} &= \delta_\xi f(x) + \theta \delta_\xi \phi(x) + \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\chi}(x) + \delta_\xi m(x) \theta \theta + \delta_\xi n(x) \bar{\theta} \bar{\theta} \\ &\quad + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \delta_\xi v_\mu(x) + \theta \theta \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \delta_\xi \psi(x) + \delta_\xi d(x) \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

第1行右辺に Q_a (B.47)、 \bar{Q}_a (B.48) を代入することで超場の各成分の変換則が導ける [30]。

$$\delta_\xi f = \xi\phi + \bar{\xi}\bar{\phi} \quad (\text{B.63})$$

$$\delta_\xi\phi_a = 2\xi_a m - (\sigma^\mu\bar{\xi})_a [i\partial_\mu f + v_\mu] \quad (\text{B.64})$$

$$\delta_\xi\bar{\chi}^{\dot{a}} = 2\bar{\xi}^{\dot{a}} n + (\bar{\sigma}^\mu\xi)^{\dot{a}} [i\partial_\mu f - v_\mu] \quad (\text{B.65})$$

$$\delta_\xi m = \bar{\xi}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi \quad (\text{B.66})$$

$$\delta_\xi n = \xi\psi + \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} \quad (\text{B.67})$$

$$\delta_\xi v_\mu = \xi\sigma^\mu\bar{\lambda} - \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi - \frac{i}{2}\xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\partial_\nu\phi + \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\bar{\chi} \quad (\text{B.68})$$

$$\delta_\xi\psi_a = 2\xi_a d - i(\sigma^\mu\bar{\xi})_a\partial_\mu n - \frac{i}{2}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\xi)_a\partial_\mu v_\nu \quad (\text{B.69})$$

$$\delta_\xi\bar{\lambda}^{\dot{a}} = \bar{\xi}^{\dot{a}} d - i(\bar{\sigma}^\mu\xi)^{\dot{a}}\partial_\mu m + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\xi})^{\dot{a}}\partial_\mu v_\nu \quad (\text{B.70})$$

$$\delta_\xi d = -\frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} \quad (\text{B.71})$$

カイラル多重項

では、準備ができたので超対称性を持つ超空間上のラグランジアンを書き下すことを考える。しかし、実は超場 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ を単に用いるだけでは、より大きな超対称性多重項からなるラグランジアンが得られてしまう。どういうことかということ、超場 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ には boson 場 (f, m, n, v^μ, d) と fermion 場 ($\phi, \chi, \psi, \lambda$) が含まれているが、これは明らかに我々が前節で見たどの $N = 1$ 多重項よりも多い。すなわち、これは超対称性変換の可約な表現となっているはずである。そこで既約な表現を得るため、次のような constraint を導入してみる。

$$\bar{\partial}_a G(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (\text{B.72})$$

これは超場の変数を (x, θ) に減らすことを意味しており、これを満たすとき (B.44) 中の $\bar{\theta}$ 比例項は全て消える。結果、場は boson 場 (f, m) と fermion 場 (ϕ) に減るだろう。

しかしながら、これはうまくいかない。なぜなら、微分 $\bar{\partial}_a$ は超対称性生成子 Q_a と反交換ではなく、constraint (B.72) が超対称性変換の下で変化してしまうからである (\bar{Q}_a とは反交換である)。そのため超対称性生成子と反交換する共変微分 \bar{D}, D を考えよう。

$$\{\bar{D}_a, Q_b\} = \{D_a, \bar{Q}_b\} = 0 \quad (\text{B.73})$$

\bar{D}_a の形を考えたとき、 Q_b の形を考慮して、

$$\bar{D}_a = \bar{\partial}_a + C_{ab}\theta^b \quad (\text{B.74})$$

と推測できる。あとは実際に

$$\{\bar{D}_a, Q_b\} = \{\bar{\partial}_a + C_{ac}\theta^c, i\partial_b - (\sigma^\mu)_{ba}\bar{\theta}^d\partial_\mu\} = 0 \quad (\text{B.75})$$

を解けばよい。 D_a も同様にして得られる。結果として、

$$\bar{D}_a = \bar{\partial}_a - i\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\partial_\mu \quad (\text{B.76})$$

$$D_a = \partial_a - i(\sigma^\mu)_{ab}\bar{\theta}^b\partial_\mu \quad (\text{B.77})$$

が導ける。よって、既約表現を得るための constraint は

$$\bar{D}_a G(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (\text{B.78})$$

となる。ただし、今後の議論をより簡便にするため、新たな座標

$$y^\mu(x, \bar{\theta}) \text{ s.t. } \bar{D}_a y^\mu(x, \bar{\theta}) = 0 \quad (\text{B.79})$$

を導入しよう。このとき超場 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ は (B.78) を満たすため $G(y, \theta)$ と書けることになる。具体的に新たな座標 y^μ は次のようにして得られる。まず推測として、

$$y^\mu = x^\mu + \bar{\theta}^a K_a^\mu \quad (\text{B.80})$$

と書けるだろう。これを $\bar{D}_a y^\mu(x, \bar{\theta}) = 0$ に代入すれば、

$$y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (\text{B.81})$$

と求まる。したがって、constraint は次で書ける。

$$\bar{D}_a G(y, \theta) = 0 \quad (\text{B.82})$$

これを満たす表現はカイラル多重項と呼ばれる。以降では超場の区別を付けるため、カイラル多重項を $\Phi(y, \theta)$ と表記することにする。カイラル超場 $\Phi(y, \theta)$ を展開すると、

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} &= A(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

となる。2行目以降では各成分場についてさらに θ で展開した。現れている場は boson 場 (A, F)、fermion 場 (ψ) であり、我々が表現論から求めた最大スピン 1/2 のカイラル多重項の状態数と一致していることが分かる。

同様に、

$$(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})^\dagger = (\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\bar{\theta}^b)^\dagger = (\bar{\theta}^b)^\dagger(\sigma^\mu_{ba})^\dagger(\theta^a)^\dagger = \theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (\text{B.85})$$

となることを用いて (エルミート共役は積の順序を変えることに注意)、

$$D_a(\Phi(y, \theta))^\dagger = 0, \quad D_a(y^\mu)^\dagger = 0, \quad (y^\mu)^\dagger = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (\text{B.86})$$

を示すことができる。よってカイラル多重項のエルミート共役が、

$$D_a\Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}) = 0 \quad (\text{B.87})$$

$$\Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}) = A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^\dagger) \quad (\text{B.88})$$

$$\begin{aligned} &= A^*(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A^*(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\sigma^\mu\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

と導入できる。注意すると、カイラル多重項の積 $\Phi\Phi$ もまたカイラル多重項であるが、 $\Phi^\dagger\Phi$ はカイラル多重項ではない。

ベクトル多重項

既約表現を得る方法はもう1つある。それは、次のような constraint を超場に課すことで成される。なお、ここでは超場の区別をつけるため、超場を V と書くことにする。

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{B.90})$$

これを満たす多重項はベクトル多重項と呼ばれる。例えば $\Phi^\dagger\Phi$ はベクトル多重項である。ただし、カイラル多重項を用いた変形、

$$V' = V(x, \theta, \bar{\theta}) + n(\Phi + \Phi^\dagger), \quad n : \text{real な係数} \quad (\text{B.91})$$

もまた constraint を満たすことが分かる。これはベクトル多重項のゲージ自由度である。おおまかにいえば、一般の可約表現な超場 G (最大スピン 1) から既約表現なカイラル多重項 (最大スピン 1/2) を引けば、そこには既約表現なベクトル多重項 (最大スピン 1) が残るだろう。それを成すには constraint (B.90) で十分であり、課された後はゲージ固定という操作でカイラル多重項の寄与を落とせる。実際、適切なゲージ固定を行えば、

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (\text{B.92})$$

と表せる。

後のため書いておくと、 V を用いて場の強さ

$$W_a = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_a V, \quad \bar{W}_{\dot{a}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{a}} V \quad (\text{B.93})$$

を定義できるが、これらはカイラル多重項である ($D_a, \bar{D}_{\dot{a}}$ を作用させれば分かる)。また、これらはゲージ変換 $V \rightarrow V + (\Phi + \Phi^\dagger)$ の下で不変である。

超対称ラグランジアン

今、我々は超対称なラグランジアンを書き下すことができる。ラグランジアンの質量次元が 4 であることに注意して、繰り込み可能な項のみを考えると、

$$\mathcal{L} = \Phi_i^\dagger \Phi_i \Big|_{\text{D-term}} + (\mathcal{W}(\Phi) \Big|_{\text{F-term}} + h.c.) + \frac{1}{4} (W^a W_a + \bar{W}_{\dot{a}} \bar{W}^{\dot{a}}) \Big|_{\text{F-term}} \quad (\text{B.94})$$

$$\mathcal{W}(\Phi) = \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i : \text{スーパーポテンシャル} \quad (\text{B.95})$$

となる。「D(F)-term」はその成分をグラスマン積分によって取り出すことを意味する。ここではこれ以上立ち入らないが、カイラル超場にもゲージ変換を導入することができ、結果として標準模型を $N = 1$ 超対称に拡張した最小超対称標準模型 (minimal supersymmetric standard model, MSSM) を作るすることができる。そのとき、標準模型における各粒子はその超対称パートナーを持つことになる。

付録C Wilson line と Scherk-Schwarz phase

ここでは Wilson line と Scherk-Schwarz (SS) phase の等価性を示す。まず、境界条件 (4.124) および (4.125) を満たす、SS phase のある T^2 上のゼロモード $\psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau)$ に対する次のゲージ変換を考える。

$$\tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) = e^{-i\text{Re}\bar{\beta}z} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (\text{C.1})$$

このとき、ゲージポテンシャル $A(z)$ に対するゲージ変換は、

$$\tilde{A}(z) = A(z) - d[\text{Re}\bar{\beta}z] = \frac{\pi I_{\alpha\beta}}{\text{Im}\tau} \text{Im} \left(\left(\bar{z} - \frac{i\text{Im}\tau}{\pi I_{\alpha\beta}} \bar{\beta} \right) dz \right) \quad (\text{C.2})$$

で与えられる。ここで β は複素数である。ゲージポテンシャル (4.53) と比較すると、 $\frac{i\text{Im}\tau}{\pi I_{\alpha\beta}} \beta \equiv \tilde{a}_w$ を Wilson line とみなせることが分かる。したがって、Wilson line 入りのゲージポテンシャル $\tilde{A}(z)$ は (4.56) の代わりに

$$\tilde{\chi}_1(z) = \frac{\pi I_{\alpha\beta}}{\text{Im}\tau} \text{Im} \left(z + \frac{i\text{Im}\tau}{\pi I_{\alpha\beta}} \beta \right) = \chi_1(z) + \text{Re}\beta \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{\chi}_2(z) = \frac{\pi I_{\alpha\beta}}{\text{Im}\tau} \text{Im}\bar{\tau} \left(z + \frac{i\text{Im}\tau}{\pi I_{\alpha\beta}} \beta \right) = \chi_2(z) + \text{Re}\bar{\tau}\beta \quad (\text{C.4})$$

による境界条件を持つ。同様に、 $\tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau)$ は次の境界条件を持つ。

$$\tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z+1, \tau) = e^{2\pi i \alpha_1 - 2i\text{Re}\beta} e^{i\tilde{\chi}_1(z)} \tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z+\tau, \tau) = e^{2\pi i \alpha_2 - 2i\text{Re}\bar{\tau}\beta} e^{i\tilde{\chi}_2(z)} \tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (\text{C.6})$$

このとき、ゲージ変換として $\beta = -i\pi \frac{\alpha_1\bar{\tau} - \alpha_2}{\text{Im}\tau}$ を選べば、ゲージ変換された波動関数

$$\tilde{\psi}^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) = e^{\pi i \frac{\text{Im}(\alpha_1\bar{\tau} - \alpha_2)z}{\text{Im}\tau}} \psi^{\alpha_1, \alpha_2}(z, \tau) \quad (\text{C.7})$$

は Wilson line $\tilde{a}_w = (\alpha_1\tau - \alpha_2)/I_{\alpha\beta}$ と SS phase $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = (0, 0)$ を持つ。こうして SS phase はゲージ変換を通して Wilson line として吸収できることになる。

参考文献

- [1] D. Cremades, L. E. Ibanez and F. Marchesano, JHEP **05** (2004), 079 [arXiv:hep-th/0404229 [hep-th]].
- [2] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada and M. Tanimoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **183** (2010) 1 [arXiv:1003.3552 [hep-th]].
- [3] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu and M. Tanimoto, Lect. Notes Phys. **858** (2012) 1, Springer.
- [4] K. Becker, M. Becker and J H. Schwarz, “STRING THEORY AND M-THEORY A Modern Introduction,” Cambridge University Press, (2006)
- [5] Joseph Polchinski, “STRING THEORY VOLUME I An Introduction to the Bosonic String,” Cambridge University Press, (1998)
- [6] Joseph Polchinski, “STRING THEORY VOLUME II Superstring Theory and Beyond,” Cambridge University Press, (1998)
- [7] 太田信義, “超弦理論・ブレーン・M理論,” Springer Press, (2002)
- [8] 細道和夫 (著), 京都大学基礎物理学研究所 (監修) “弦とブレーン,” 朝倉書店, (2017)
- [9] L. E. Ibanez and A. M. Uranga, “String Theory and Particle Physics: An Introduction to String Phenomenology,” Cambridge University Press, (2012)
- [10] L. E. Ibanez, F. Marchesano and R. Rabadan, JHEP **11** (2001), 002 doi:10.1088/1126-6708/2001/11/002 [arXiv:hep-th/0105155 [hep-th]].
- [11] P. A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], PTEP **2020** (2020) no.8, 083C01
- [12] R. C. Gunning, *Lectures on Modular Forms* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962).
- [13] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions* (Springer-Verlag, 1974)

- [14] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (Springer-Verlag, 1984)
- [15] J.H. Bruinier, G.V.D. Geer, G. Harder, and D. Zagier, *The 1-2-3 of Modular Forms* (Springer, 2008)
- [16] G. Shimura, *Annals of Mathematics*, **97**(3), second series, 440 (1973)
- [17] J. F. Duncan and D. A. Mcgady, [arXiv:1806.09875 [math.NT]].
- [18] T. Kobayashi, S. Nagamoto, S. Takada, S. Tamba and T. H. Tatsuishi, *Phys. Rev. D* **97**, no. 11, 116002 (2018) [arXiv:1804.06644 [hep-th]].
- [19] S. Kikuchi, T. Kobayashi, S. Takada, T. H. Tatsuishi and H. Uchida, *Phys. Rev. D* **102**, no.10, 105010 (2020) [arXiv:2005.12642 [hep-th]].
- [20] S. Kikuchi, T. Kobayashi and H. Uchida, [arXiv:2101.00826 [hep-th]].
- [21] H. Abe, T. Kobayashi and H. Ohki, *JHEP* **09** (2008), 043 [arXiv:0806.4748 [hep-th]].
- [22] T. H. Abe, Y. Fujimoto, T. Kobayashi, T. Miura, K. Nishiwaki and M. Sakamoto, *JHEP* **1401**, 065 (2014) [arXiv:1309.4925 [hep-th]].
- [23] T. Kobayashi and H. Otsuka, *Phys. Rev. D* **101** (2020) no.10, 106017 doi:10.1103/PhysRevD.101.106017 [arXiv:2001.07972 [hep-th]].
- [24] S. Kikuchi, T. Kobayashi, H. Otsuka, S. Takada and H. Uchida, [arXiv:2007.06188 [hep-th]].
- [25] H. Abe, K. S. Choi, T. Kobayashi and H. Ohki, *Nucl. Phys. B* **814**, 265-292 (2009) [arXiv:0812.3534 [hep-th]].
- [26] T. h. Abe, Y. Fujimoto, T. Kobayashi, T. Miura, K. Nishiwaki, M. Sakamoto and Y. Tatsuta, *Nucl. Phys. B* **894**, 374-406 (2015) [arXiv:1501.02787 [hep-ph]].
- [27] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita and Y. Tatsuta, *Phys. Rev. D* **90**, no.10, 105006 (2014) [arXiv:1405.5012 [hep-ph]].
- [28] K. Hoshiya, S. Kikuchi, T. Kobayashi, Y. Ogawa and H. Uchida, [arXiv:2012.00751 [hep-th]].
- [29] H. Abe, T. Kobayashi, H. Ohki, A. Oikawa and K. Sumita, *Nucl. Phys. B* **870** (2013), 30-54 doi:10.1016/j.nuclphysb.2013.01.014 [arXiv:1211.4317 [hep-ph]].

- [30] J. D. Lykken, [arXiv:hep-th/9612114 [hep-th]].
- [31] S.Weinberg(著), 青山秀明, 有末宏明, 杉山勝之 (共訳) “ワインバーグ場の量子論5巻 超対称性: 構成と超対称標準模型,” 吉岡書店, (2001)
- [32] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251-1256 (1967)
doi:10.1103/PhysRev.159.1251
- [33] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975)
doi:10.1016/0550-3213(75)90279-5