

原子核基礎論A (シラバス)

■ 担当：大西 (基研)、板垣 (基研)

■ 授業の概要・目的

- まず原子核の基本的性質、およびスピン・アイソスピン依存性や斥力芯の存在などの核力の基本的性質について概観し、中間子交換や強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) に基いてそれらの起源について議論する。また、密度や温度を変化させたときの核物質の性質・状態方程式について概観する。(大西)
- 次に、原子核の性質を理解することを目的に、核子の多体として見た場合に核構造を記述するためにどのような描像があり得るのか、基本的な模型から現代的なアプローチまでを概観し、多様な現象のいくつかを解説する。(板垣)

■ 到達目標

- 半径や質量、殻効果などの原子核の基本的性質、スピン・アイソスピン依存性や内部斥力芯の存在など核力の現象論的特徴を把握し、これらがどのような観測データから導かれるかを理解する。また核子・中間子自由度、および QCD に基づく核力の起源、核力から原子核を記述する理論的枠組み、核物質の相図と状態方程式について、その概要を把握する。(大西)
- 核力の理解を基礎に、核構造を記述する基本的な模型から平均場理論やクラスター理論など現代的なアプローチの基本概念とその手法について理解する。宇宙での元素合成を含む多様な核現象を基礎理論に関連付けて理解する。(板垣)

原子核基礎論A (シラバス, cont.)

■ 授業計画と内容

核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

- 1. はじめに(原子核の基本的性質) (2コマ)
- 2. 核力とその起源 (3コマ)
- 3. 核物質の相図と状態方程式 (2コマ)
- 4. 核力再説 (1コマ)
- 5. 液滴模型と核物質 (1コマ)
- 6. シェル模型と平均場模型 (2コマ)
- 7. クラスタ模型と第一原理計算 (1コマ)
- 8. 最近の話題(講義の途中でもとりあげる) (1コマ)
不安定核の構造、宇宙の元素合成

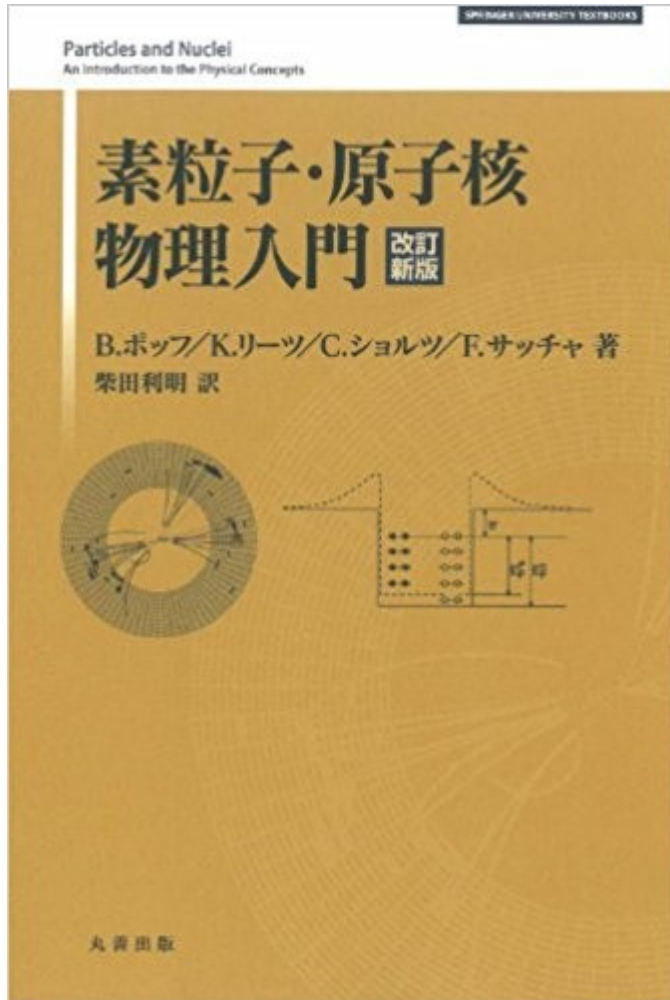
■ 成績評価の方法・観点及び達成度

- レポート試験の成績 (80 %) 平常点評価 (20 %)
平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。

はじめに (原子核の基本的性質)

- 原子核とは
- 原子核の大きさ
 - 微分断面積と散乱振幅，ラザフォード散乱と構造因子，原子核の密度分布，不安定原子核
- 原子核の質量
 - 質量公式，フェルミガス模型
- 原子核の構造
 - 殻構造，原子核の変形
- クォークとハドロン
 - ハドロンの種類、ハドロンを含む原子核の例

- Sec. 1 ではポッフ・リーツ・ショルツ・サッチャの教科書を参考に使っています

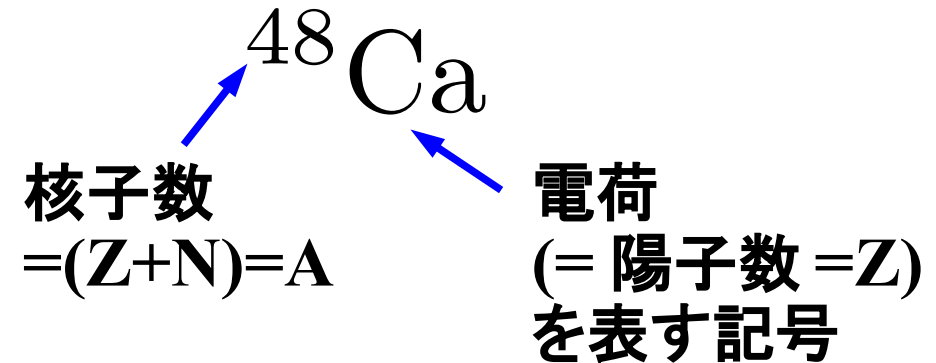


5616 円

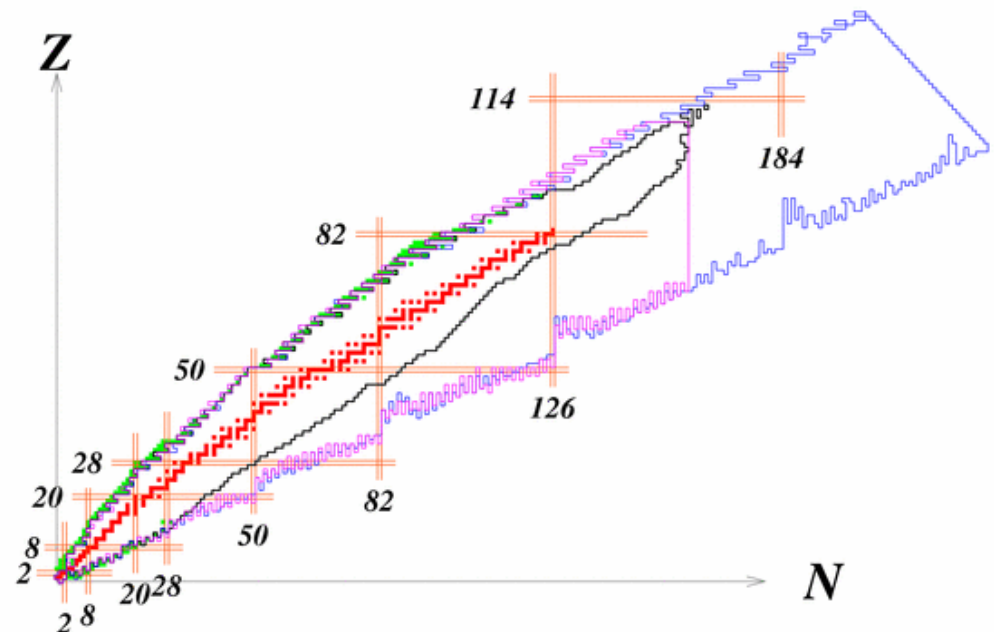
原子核とは

■ 定義 1: 原子の中心にある核子 (陽子・中性子) からなる系

- 陽子数 Z 、中性子数 N
- 安定な原子核 287 種
- 見つかった原子核 ~ 3000 種
- 存在が予言 ~ 9000 種



Nuclear Chart



原子核とは

■ 定義 2: 強い相互作用によって現れるハドロン束縛・共鳴状態

- 構成要素 = ハドロン

核子 (p, n), ハイペロン (Λ , Σ , Ξ), 中間子 (K, η , ...)

- ハドロン = 強い相互作用で結合したクォーク・ハドロン複合粒子

■ ハイパー核

バリオン数

$$=(Z+N+1)=A$$

電荷 = 6

^{12}C

Λ を一つ含む

Λ

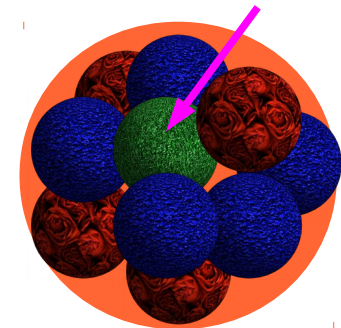
$$^4_{\Sigma}\text{He} = \alpha |^3\text{H} + \Sigma^+\rangle + \beta |^3\text{He} + \Sigma^0\rangle$$

$$^6_{\Lambda\Lambda}\text{He} = ^4\text{He} + \Lambda + \Lambda$$

■ 中間子原子核

$$^2_{\bar{K}}\text{H} = \alpha |^2\text{He} + K^-\rangle + \beta |^2\text{H} + \bar{K}^0\rangle$$

Λ 粒子



原子核物理の広がり

- 安定核から不安定核へ
- 核子多体系からハドロン多体系へ
- 基底状態から励起状態へ
- 原子核から様々な温度・密度の核物質へ

原子核の大きさ

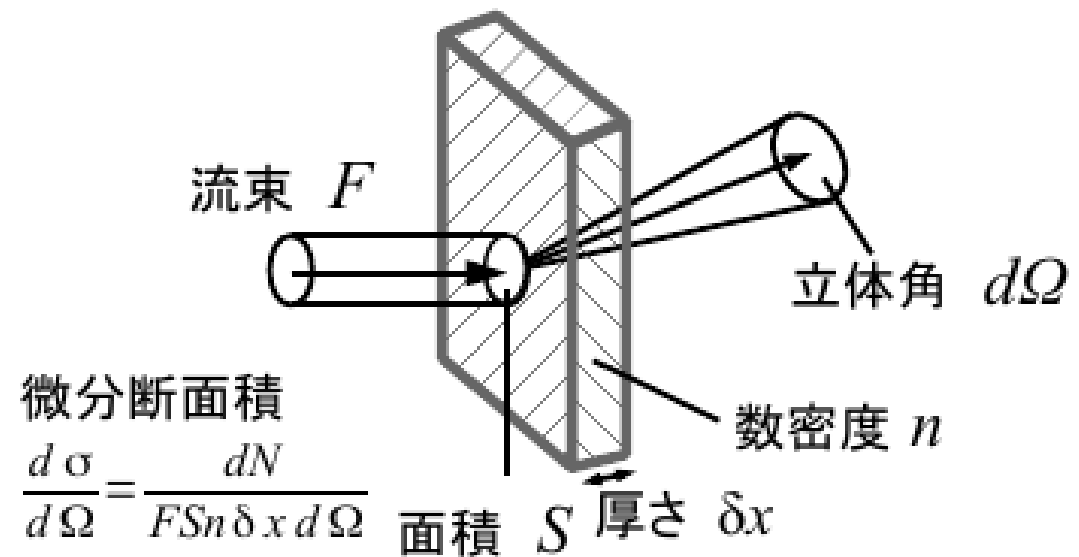
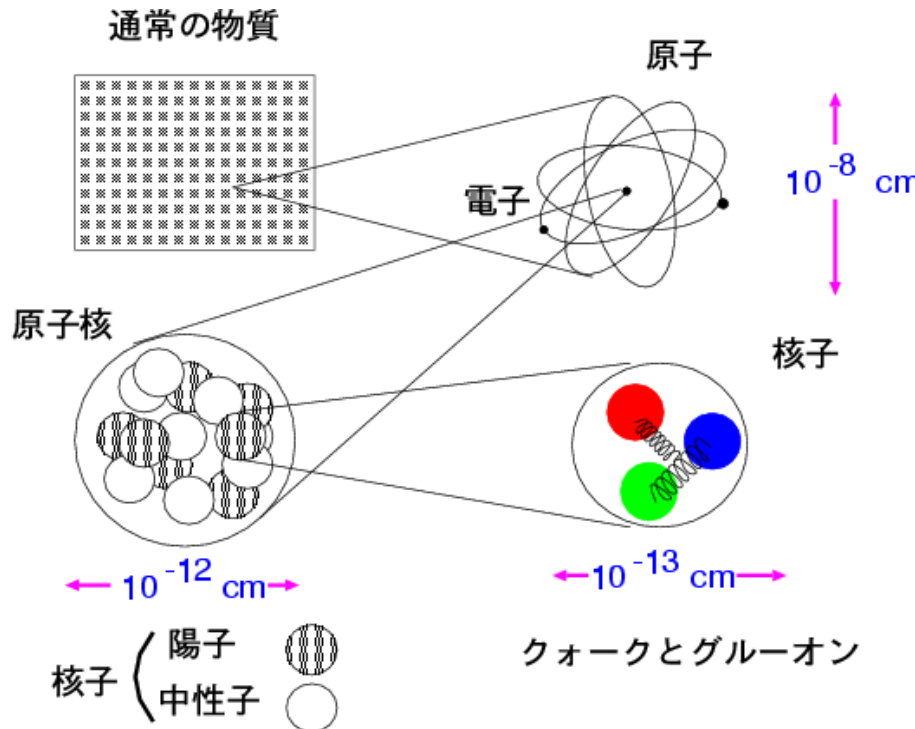
断面積

- 原子核の大きさ: $R \sim 10^{-14}$ m (原子 $\sim 10^{-10}$ m の 1 万分の1)
- 「目で見えない」小さなものをどうやってみるか?
→ 粒子をぶつけて散乱させて測る

■ 散乱断面積

$$\sigma = \frac{N}{FSn\delta x}$$

- 単位入射流束当たり一つの標的で散乱される確率 (面積の次元)



■ シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

$$p = -i\hbar \nabla$$

短く書くと

$$(H_0 + V)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad \left(H_0 = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right)$$

- 束縛状態: 遠方で波動関数 ψ がゼロに近づく。
- 散乱状態: 遠方から定常的に流れ込み、
標的で散乱されて流れ出る波動関数

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\begin{aligned} f &= \text{散乱振幅} \\ \mathbf{k} &= \text{入射波束} \\ k &= |\mathbf{k}| \end{aligned}$$

波動関数は規格化されていないが、
流れの密度を用いて (相対的な) 確率解釈が可能。

散乱振幅と微分断面積

■ 流れの密度

$$\mathbf{j} = -i\hbar[\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] / 2m$$

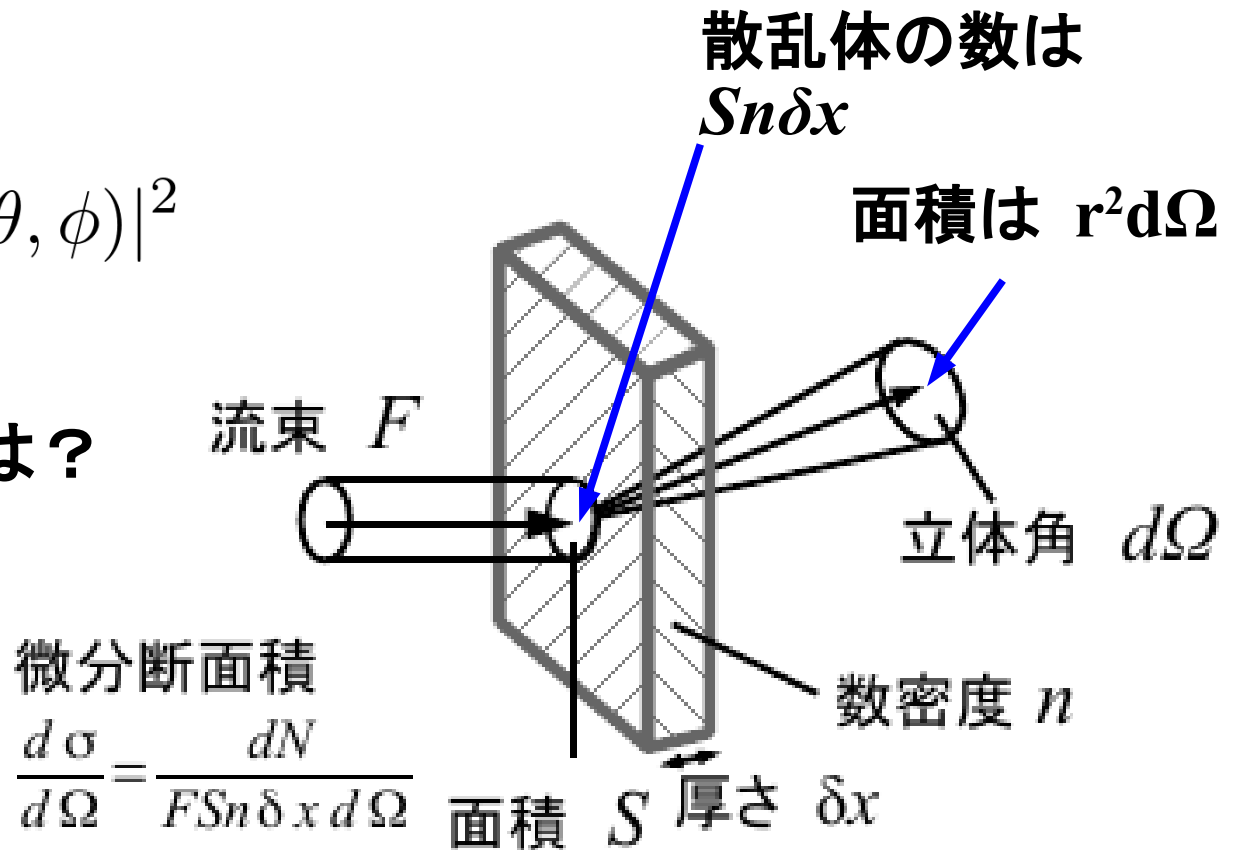
■ 入射流束・外向き球面波の流れの密度

$$F = \hbar k / m, \quad j_r = \hbar k |f(\theta, \phi)|^2 / mr^2$$

■ 微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{F d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

■ 散乱振幅 f と ポテンシャル V の関係は？



散乱波動関数の形式解

■ シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi = \Phi, \quad \Phi \equiv \hat{V}\Psi$$

■ Φ が与えられているとすると、一般解は特解 + 斉次方程式の解 斉次項を入射平面波にとると、

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (E - H_0)^{-1}\Phi$$

■ グリーン関数 G を用いてあらわに座標表示

$$(E - H_0)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}')$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \quad f(\theta, \phi) \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boxed{\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle} \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned}$$

$\mathbf{k}_f = \mathbf{r}$ 方向の
波数ベクトル

■ グリーン関数の導出

● フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - q^2) \tilde{G}(\mathbf{q}) = 1$$

$$\rightarrow \tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k^2 - q^2} = \frac{1}{E - E_q} \quad (E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

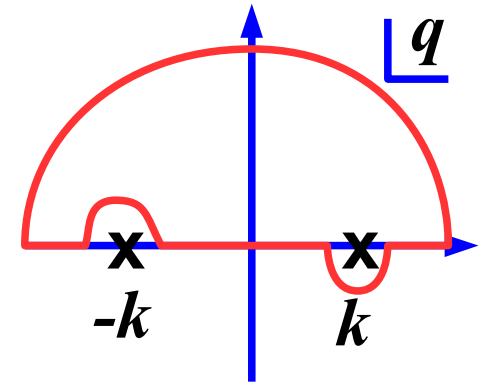
● 逆フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{q^2 dq d(\cos \theta) d\phi}{(2\pi)^3} e^{iqr \cos \theta} \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqr}}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} 2\pi i \times k e^{ikr} \times \frac{-1}{2k} = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$



Cauchy の積分定理で
遠方で外向き球面波となるよう
 $q=k$ の pole をとる。($i\varepsilon$ 処方)

■ 散乱振幅

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle$$

右辺の ψ を平面波で近似 (ボルン近似)

$$f_{\text{Born}}(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \mathbf{k} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

ボルン近似での散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換に比例

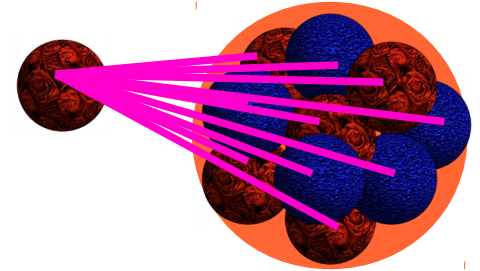
畳み込みポテンシャルと構造因子

■ 畳み込みポテンシャル(原子核と粒子のポテンシャル)

$$V(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad \begin{array}{l} v = \text{入射粒子 - 核子ポテンシャル} \\ \rho = \text{密度} \end{array}$$

フーリエ変換

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \underbrace{F(\mathbf{q})}_{\text{構造因子}}$$



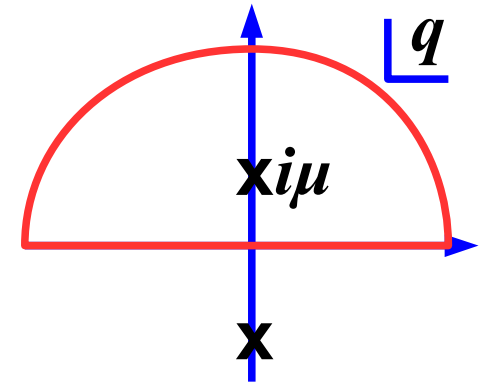
■ 散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{v}(\mathbf{q})|^2 |F(\mathbf{q})|^2, \quad F(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

原子核との散乱断面積 = 核子との散乱断面積 × |構造因子|²
(ボルン近似 & 畳み込みの場合)

■ 畳み込みのフーリエ変換 = フーリエ変換の積

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C(\mathbf{r}') \\
 &= \int d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k}') \\
 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k})
 \end{aligned}$$



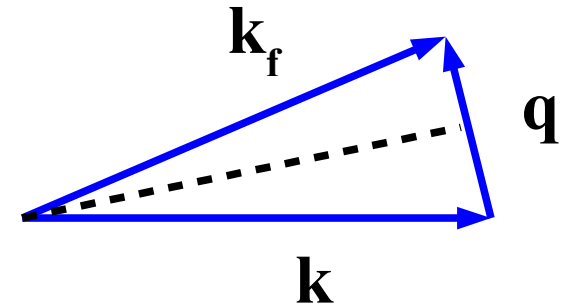
■ 湯川関数のフーリエ変換 = Lorentzian

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mu^2 + q^2} = \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqr}}{\mu^2 + q^2} \\
 &= \frac{1}{ir} \times 2\pi i \times \frac{i\mu}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\mu r}}{2i\mu} = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}
 \end{aligned}$$

ラザフォード散乱

■ 湯川ポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C \exp(-\mu r)}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{\mu^2 + q^2}$$



■ クーロンポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{q^2}$$

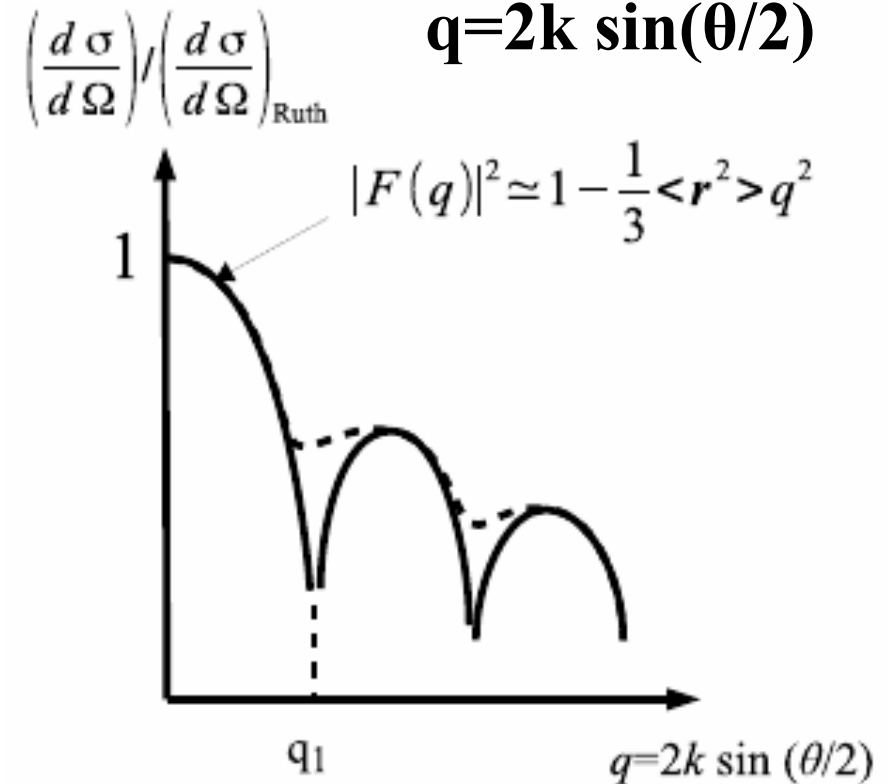
■ ラザフォード散乱(クーロン散乱)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} |F(\mathbf{q})|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \left(\frac{2m\alpha Z_1 Z_2}{q^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\alpha Z_1 Z_2}{4E \sin^2(\theta/2)} \right)^2$$

$$q = 2k \sin(\theta/2)$$



(自然単位系。
ρ は規格化されているとする。)

■ 密度が球対称である場合

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \frac{\sin qr}{qr}$$

$$= \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \left(1 - \frac{1}{6} q^2 r^2 + \mathcal{O}(q^4) \right)$$

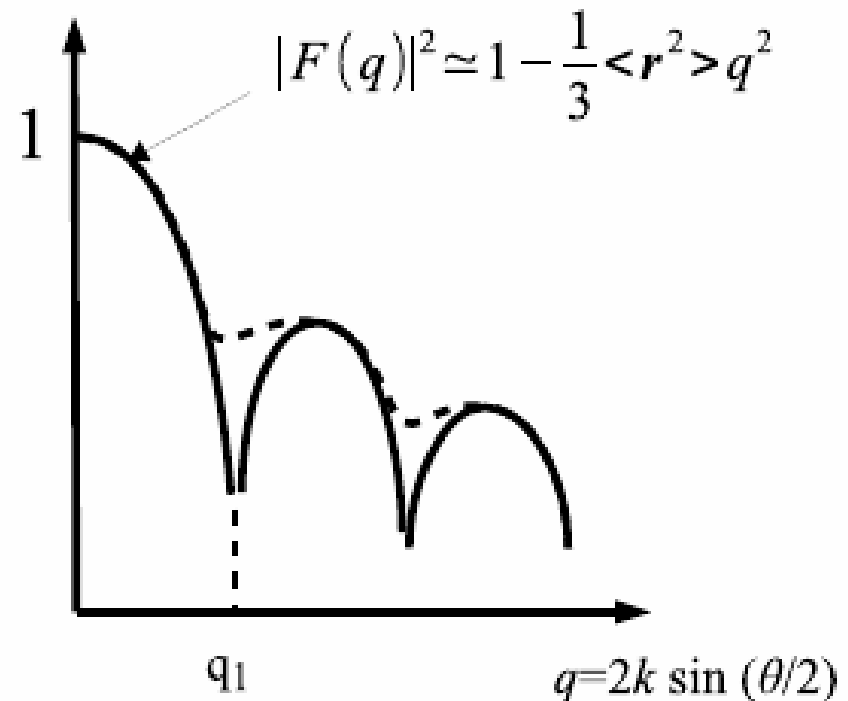
$$= 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$

小さな q での形から
平均自乗半径が分かる

■ 半径 R の一様球の場合

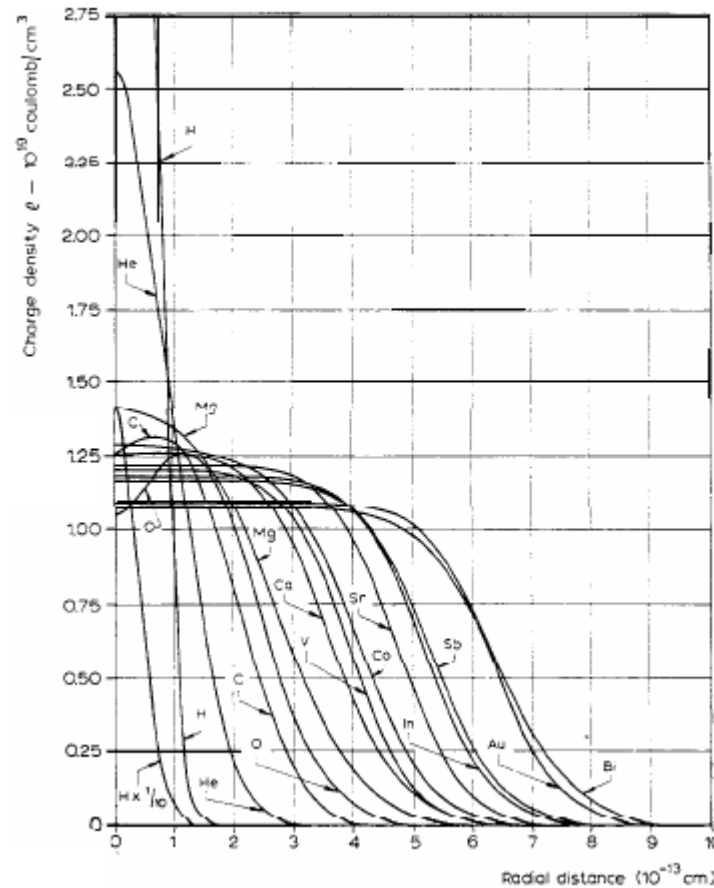
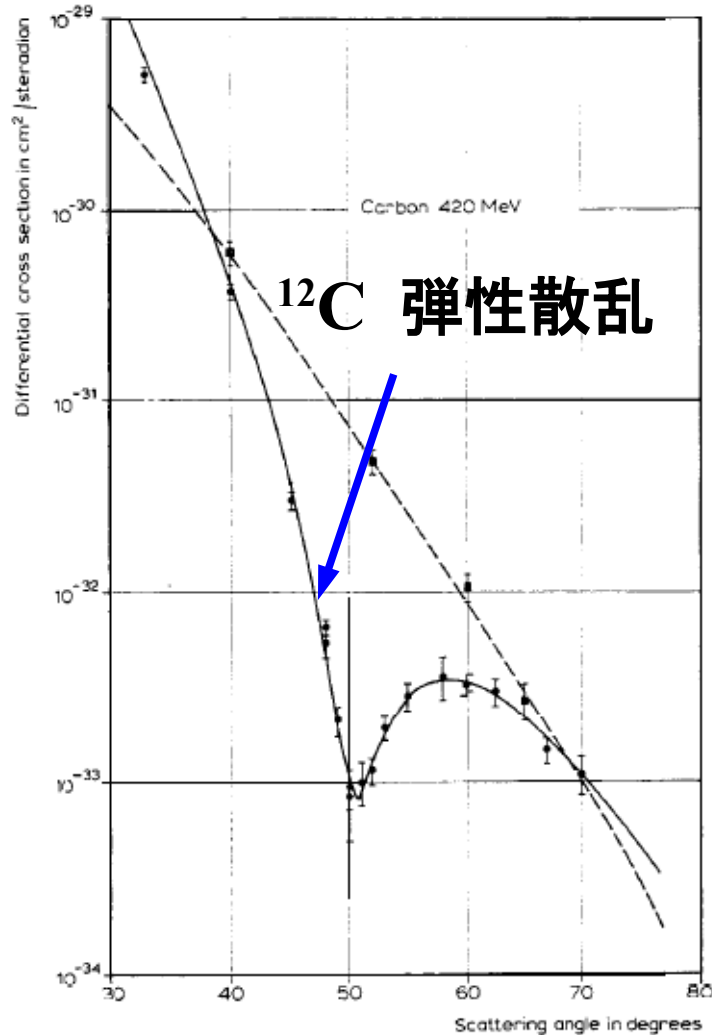
$$F(\mathbf{q}) = \frac{3}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR)$$

F が小さくなる q から半径が
推定できる！



原子核の密度分布

- 電子散乱による原子核の密度分布研究
Robert Hofstadter (Nobel prize in Physics, 1961)



<http://www.nobelprize.org/>

原子核の密度分布

- 原子核における核子の密度: Woods-Saxon (または Fermi) 型

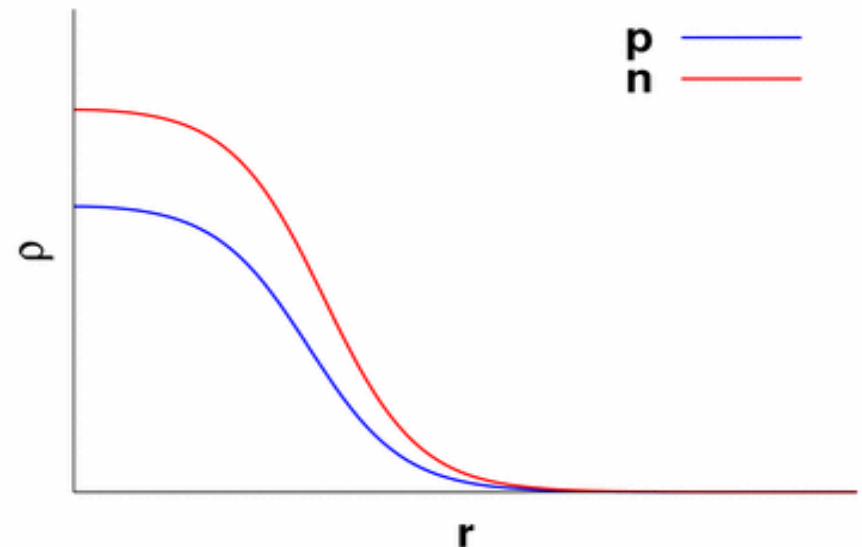
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \left[\frac{r - R_{WS}}{d} \right]}$$

$$R_{WS} \simeq 1.07 A^{1/3} \text{ fm}, \quad d \simeq 0.54 \text{ fm}, \quad \rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$$

→ 一様球として平均自乗半径を説明するには

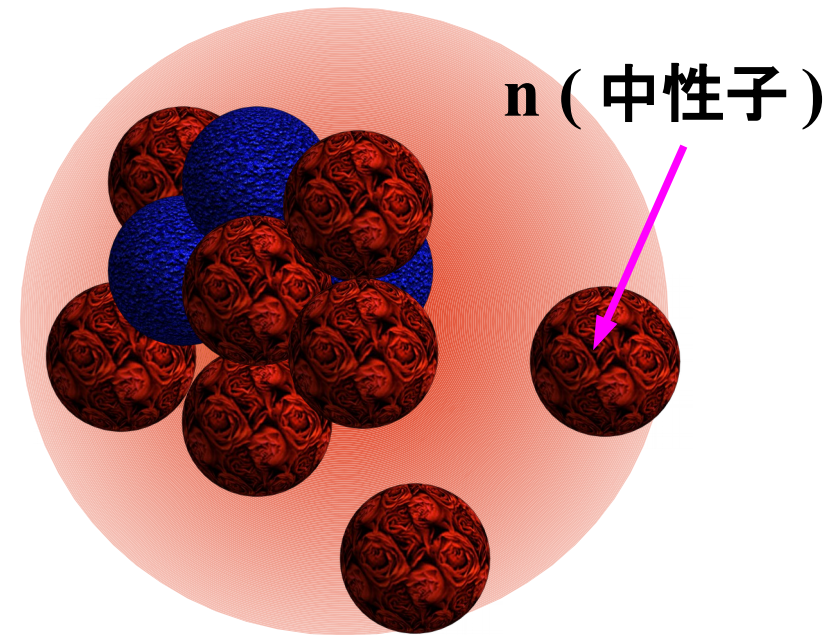
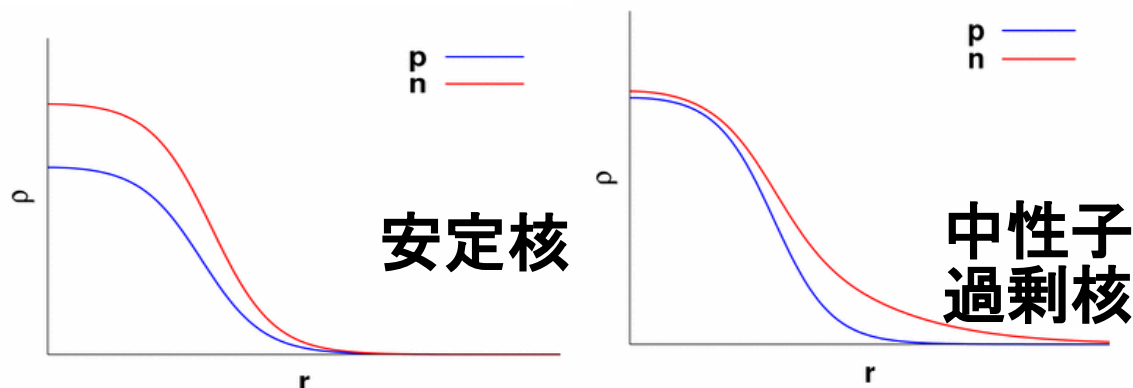
$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.21 \text{ fm}$$

半径 $\propto A^{1/3} \rightarrow$ 体積 $\propto A$
→ 大きな原子核の中心部は
密度が原子核によらず
一定の値 ρ_0 をとる
→ 「核物質」



不安定原子核

- 安定核の半径 $R \sim 1.1 A^{1/3}$ (fm) $\rightarrow$ 密度は原子核によらず一定
- 中性子過剰核の半径 $R \gg 1.1 A^{1/3}$ (fm) (公式はまだない)
 $\rightarrow$ 外側の中性子が大きく広がっている「ハロー構造」
(ハロー = 太陽の回りに見える暈)



中性子過剰核 $N \gg Z$
例: ^{11}Li ($Z=3, N=8$)

注意点

- ポテンシャル問題から2体問題に移るには、質量 (m) を換算質量 ($\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$) に置き換えが必要
- 相対論効果・反跳効果・強い相互作用効果を見していることにも注意。
- 電子散乱では Rutherford 散乱断面積を、スピンの効果を含めた Mott 散乱断面積に書き換える必要あり。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{(2Z_1 Z_2 \alpha E)^2}{q^4} [1 - v^2 \sin^2(\theta/2)]$$

(自然単位系 $\hbar=c=1$, E は質量エネルギーを含む)

原子核の質量

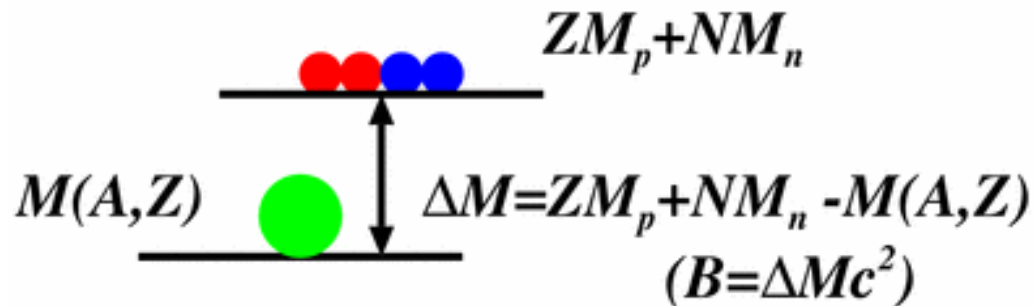
原子核の束縛エネルギー

■ 束縛エネルギー

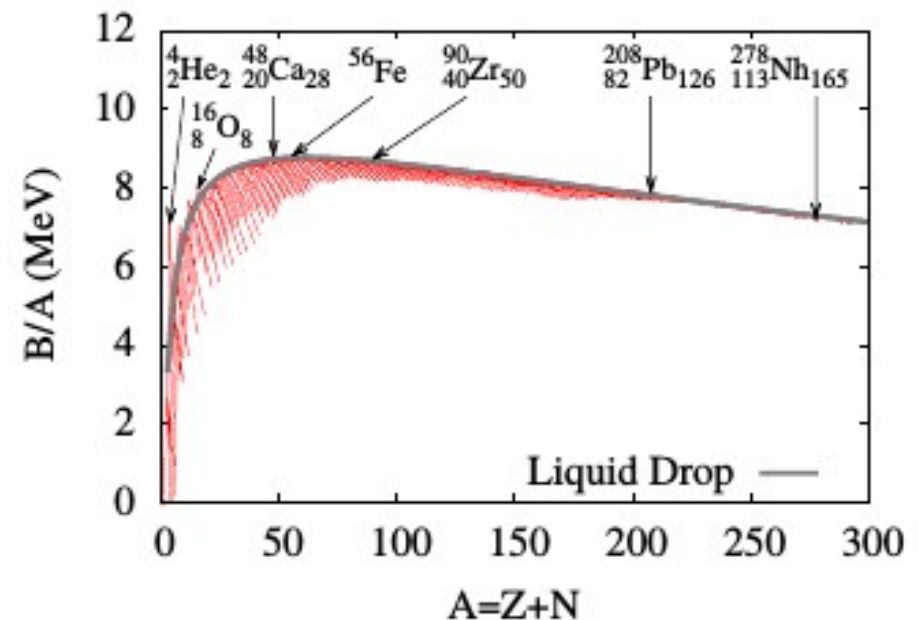
$$B(A, Z) = ZM_p + NM_n - M(A, Z)$$

- 陽子数 Z , 中性子数 N , 陽子質量 M_p , 中性子質量 M_n , 原子核質量 $M(A, Z)$
- 原子核の質量は、核子の質量の和より小さい (質量欠損)

■ 束縛エネルギーの観測値 : $16 \leq A \leq 240$ において、 $B/E \sim 8 \text{ MeV}$



質量欠損 = 核子質量の和 - 原子核の質量
束縛エネルギー = 質量欠損 $\times c^2$



質量公式

■ Weizsäcker の半経験的質量公式

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta_p}{A^\gamma}$$

体積 表面 クーロン 対称エネルギー 対エネルギー

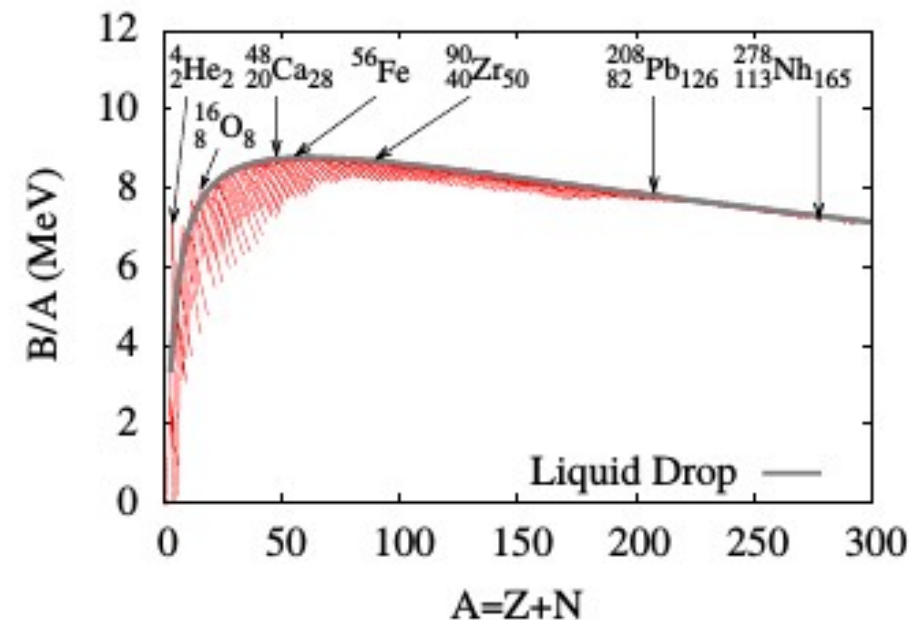
- 体積項、表面項 → 表面張力のある液滴
- 一様帯電球 (半径 $R = r_0 A^{1/3}$, 電荷 $Q = Ze$) のクーロンエネルギー

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

- 対称エネルギー、対エネルギーは液滴描像からは出てこない。

a_v	a_s	a_c	a_a	a_p
15.85	18.34	0.71	23.21	12.0

単位 MeV ($\gamma=1/2$ の場合)



フェルミガス模型 (1)

■ フェルミガス模型

- 核子はフェルミオン → 一つの量子状態に1粒子までしか入れない
- フェルミ分布関数

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp [(E - \mu)/T]} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\mu - E)$$

温度ゼロではエネルギーが化学ポテンシャル μ までの状態に
びっしりと粒子が詰まる。

$$A = 2 \times 2 \times \sum_n f(E_n) = 4V \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Theta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{4V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3}$$

- 体積 $V=4\pi r_0^3 A/3$ よりフェルミ波数 k_F 、運動エネルギーが求まる

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \simeq 33 \text{ MeV}, \quad E_K = \frac{1}{A} \frac{4V}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_F} d\mathbf{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} E_F \simeq 20 \text{ MeV}$$

**質量公式の体積項の説明には、核子あたり -36 MeV の
相互作用エネルギー(引力)が必要！**

■ 状態数 = 位相空間

- 1次元の箱 (長さ L , 周期境界条件)

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x}, \quad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

L が十分大きいとき、 $n=Lk/2\pi$

$$\sum_n = \frac{L}{2\pi} \Delta k \sum_{k_n} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$$

- 3次元の箱 (体積 $V=L^3$, 周期境界条件)

$$\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

フェルミガス模型 (2)

- 陽子数と中性子数が異なる場合 → フェルミ波数がずれる

$$k_{Fp} = k_F \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} = k_F (1 - \delta)^{1/3}, \quad k_{Fn} = k_F \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3} = k_F (1 + \delta)^{1/3}$$

非対称度

$$\delta = (N - Z)/A$$

- 核子あたりの運動エネルギー

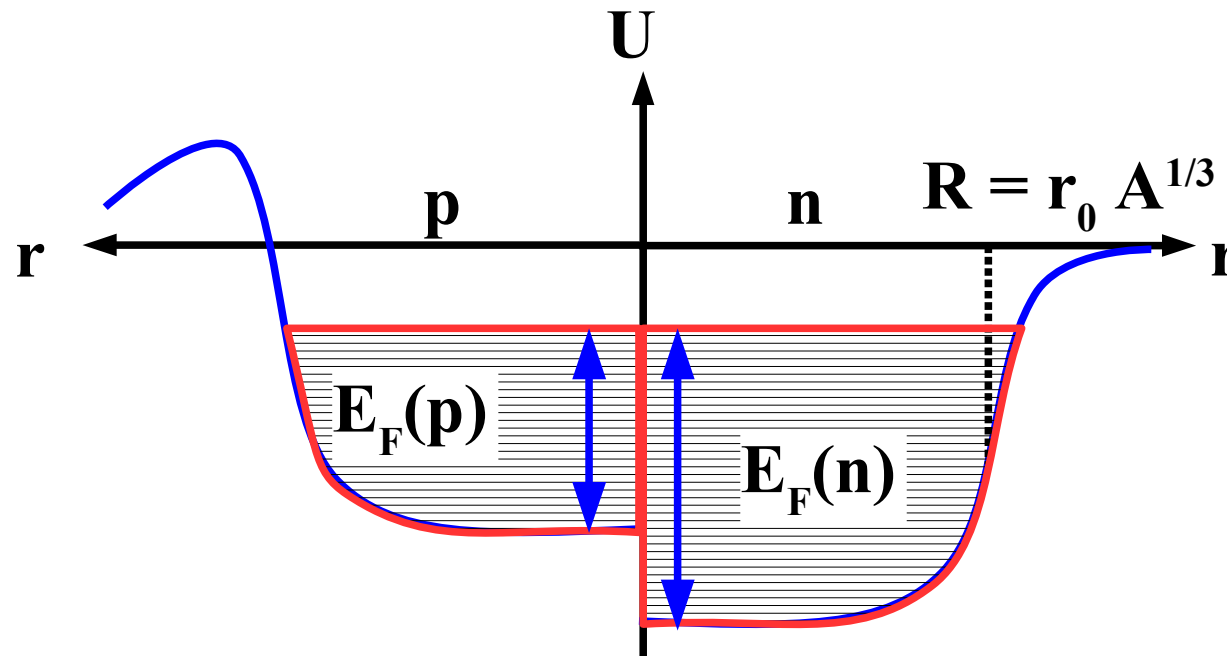
$$E_K = \frac{Z}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fp}^2}{2m} + \frac{N}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fn}^2}{2m} = \frac{3}{5} E_F \times \frac{1}{2} \left[(1 - \delta)^{5/3} + (1 + \delta)^{5/3} \right]$$
$$\simeq \frac{3}{5} E_F + \frac{1}{3} E_F \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$$

フェルミガス模型の運動エネルギーから現れる
対称エネルギーは $E_F/3 \sim 11 \text{ MeV}$

→ 陽子・陽子、中性子・中性子間の引力よりも強い
陽子・中性子間の引力が必要

原子核の描像

- 中心部分はほぼ密度一定の「核物質」
- 核子間に引力が働き、一粒子ポテンシャル中を核子が運動
- 表面では密度・ポテンシャルともに小さくなる
→ 質量公式の表面項



■ 陽子・中性子・ α 粒子放出

$$S_p = B(A, Z) - B(A - 1, Z - 1)$$

$$S_n = B(A, Z) - B(A - 1, Z)$$

$$S_\alpha = B(A, Z) - B(A - 4, Z - 2)$$

分離エネルギーが負 ($S < 0$) の場合、粒子放出により崩壊
(2p, 2n 放出についても考える必要あり)

例:



■ 弱崩壊: 陽子・中性子が入れ替わって核種が変化

$${}^{\prime\prime}n^{\prime\prime} \rightarrow {}^{\prime\prime}p^{\prime\prime} + e^{-} + \bar{\nu}_e \quad (\beta \text{ decay})$$

$${}^{\prime\prime}p^{\prime\prime} \rightarrow {}^{\prime\prime}n^{\prime\prime} + e^{+} + \nu_e \quad (\beta^{+} \text{ decay})$$

$${}^{\prime\prime}p^{\prime\prime} + {}^{\prime\prime}e^{\prime\prime} \rightarrow {}^{\prime\prime}n^{\prime\prime} + \nu_e \quad (\text{electron capture})$$

■ 粒子放出に対して安定であり、同重体 (A が一定) の中で最も質量が小さい場合、原子核は安定である。

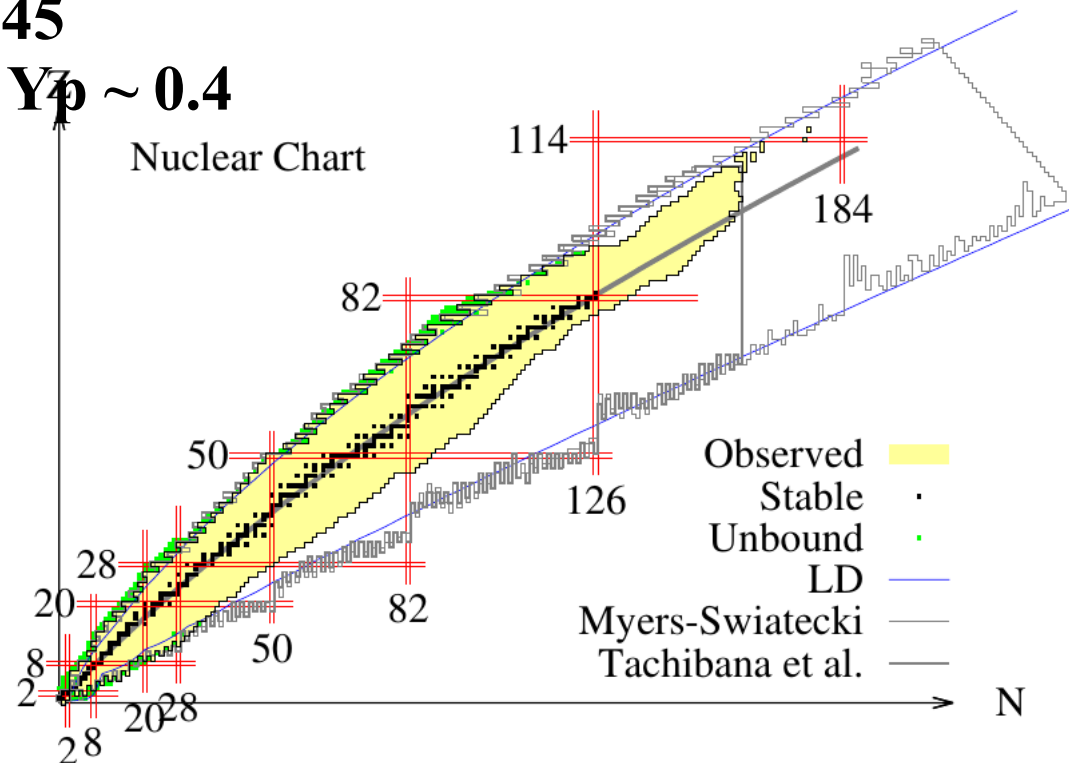
原子核の安定性

■ ハイゼンベルグの谷 同重体の中で最も安定な原子核を繋いだ線

- 質量公式による安定条件 (対エネルギーは無視)

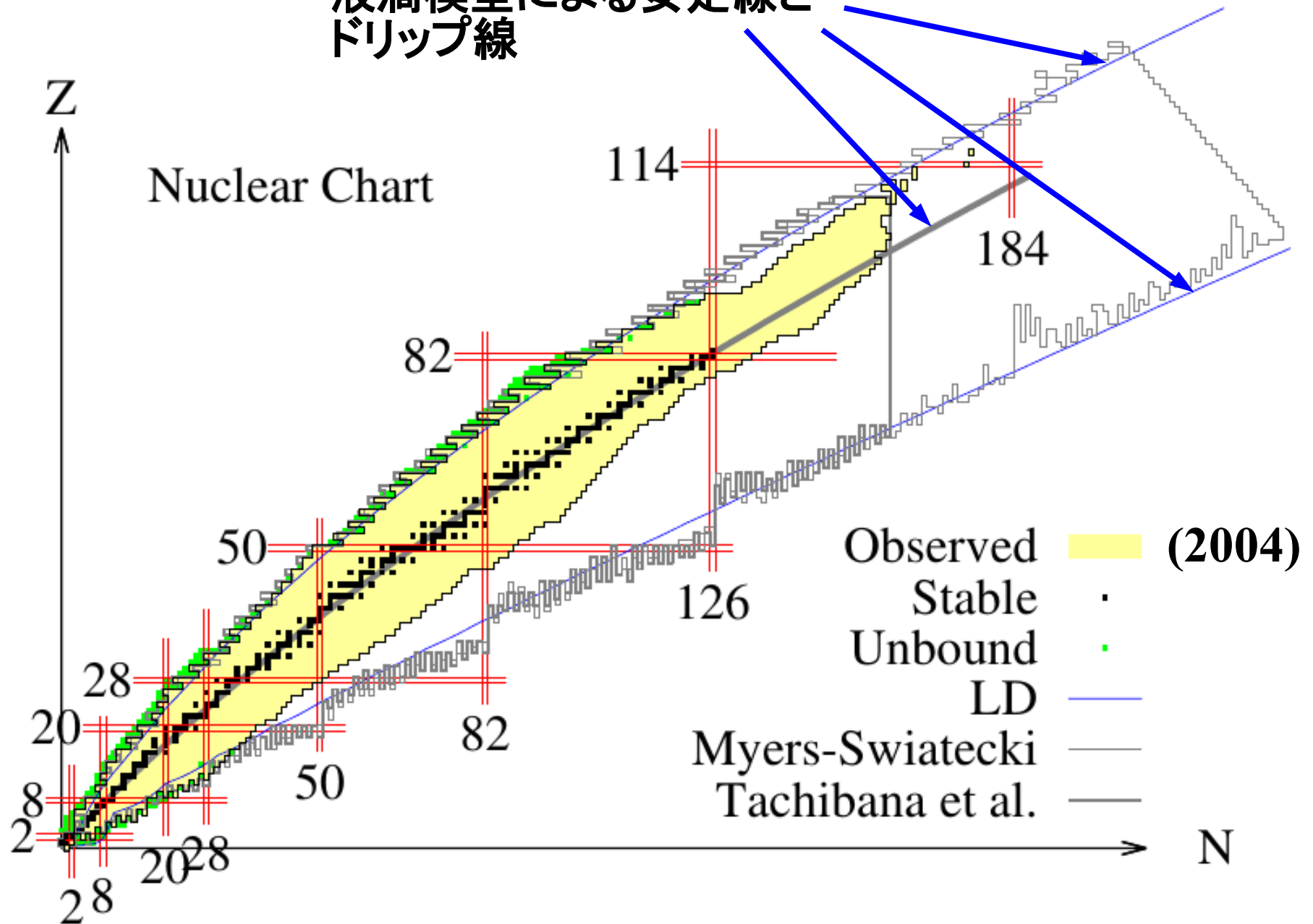
$$Y_p \equiv \frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_c A^{2/3}}{4a_a} \right)^{-1}$$

- 小さな原子核では $Y_p \sim 0.5$
鉄近辺の原子核では $Y_p \sim 0.45$
大きな原子核 ($A \sim 200$) では $Y_p \sim 0.4$



原子核の安定性

液滴模型による安定線と
ドリップ線



レポート問題 (Sec. 1 (a))

- 密度分布が
点状、指数関数、ガウス型

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{8\pi} \exp(-ar), \rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} \exp(-a^2 r^2 / 2)$$

である場合に、形状因子を求めよ。

- 中性子星を中性子のみからなり、重力を含む質量公式

$$M(A, Z) = M_N A - B(A, Z) - \frac{3}{5} \frac{GM_N^2 A^2}{R}$$

に従う密度一定の巨大な原子核とする。このとき中性子星の最大質量を求めよ。

ただし、以下の数字を用いて良い。

$$\frac{GM_N^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39}, M_\odot = 1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}, \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm},$$

$$M_N = 939 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}, r_0 = 1.07 \text{ fm}$$

(結果は非現実的。信じないように。)

原子核の殻構造

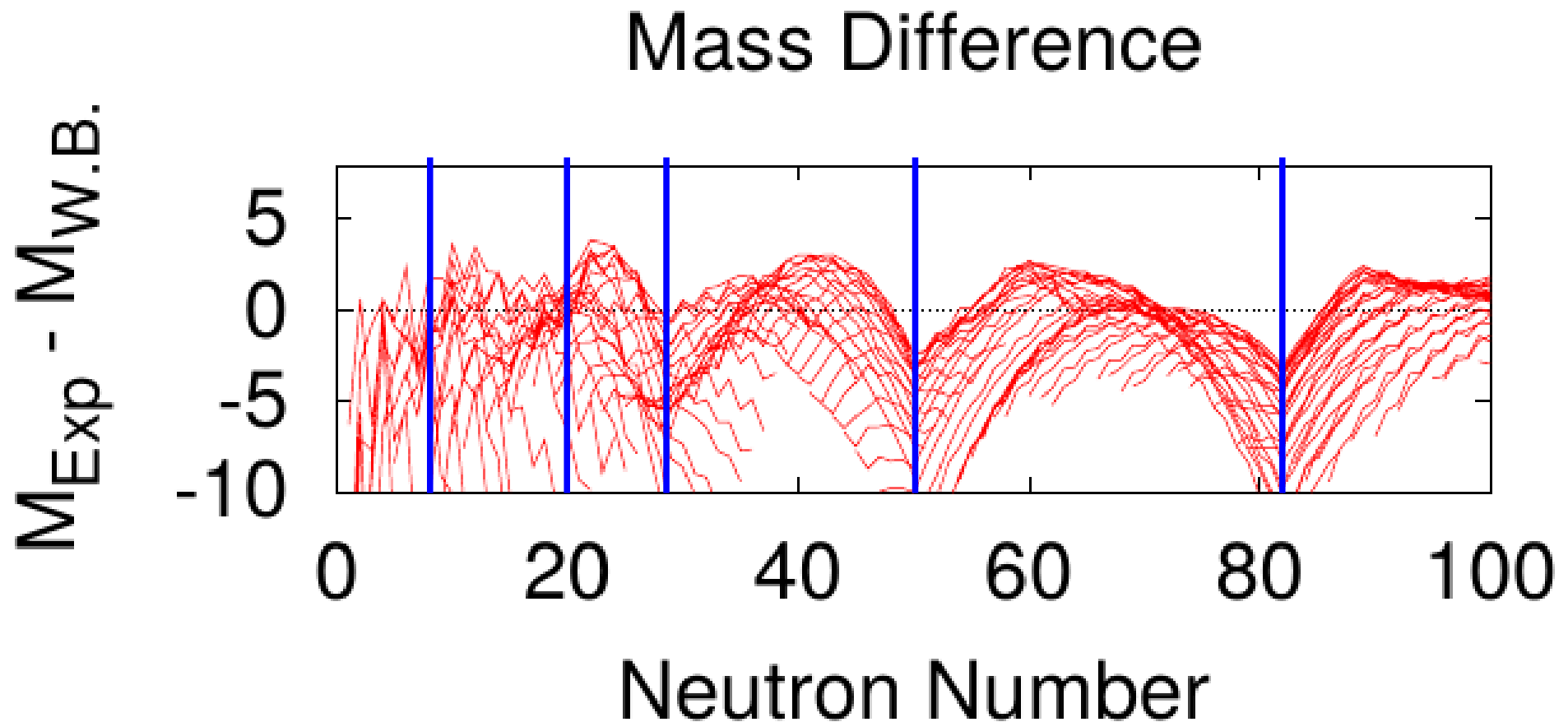
原子核の殻構造

- 魔法数 (Magic Number)

N or $Z=2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ において原子核は安定

- 殻構造

縮退した1粒子状態が埋まると系は安定となる



魔法数

■ 3次元調和振動子の魔法数

- k 個の量子を3つに分ける

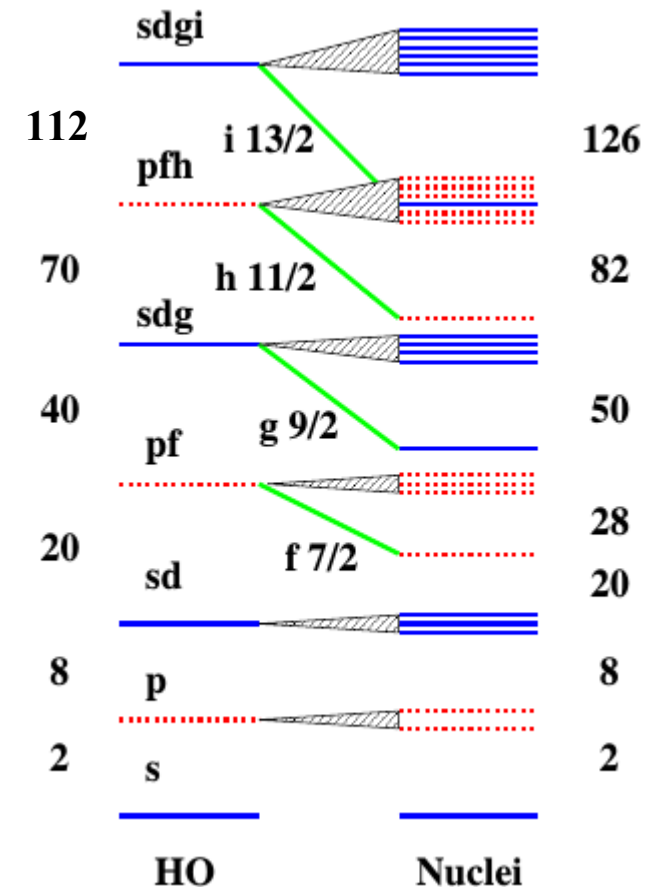
$$\text{M.N.} = 2 \sum_{k=0}^n k+2 C_2 = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

- 魔法数 = 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, ...

■ それぞれの shell ($n \geq 3$) において最大の j 状態

$f_{7/2}(L=3), g_{9/2}(L=4), h_{11/2}(L=5), i_{13/2}(L=6)$
 が大きく下がると、魔法数
 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126
 が説明可能

強い軌道スピン (LS) 力による
 魔法数の説明
 Mayer-Jensen ('49)
 [Nobel prize in phys. ('63)]



Nobel prize in physics (1963)

- **Mayer & Jensen, Nobel prize in physics (1963)
for their discoveries concerning nuclear shell structure**



Maria Goeppert Mayer



J. Hans D. Jensen

<https://www.nobelprize.org>

$$\hbar\omega = 41 A^{-1/3}$$

■ n と A の関係

$$A = 4 \int^n dk \frac{n^2}{2} = \frac{2}{3} n^3 \rightarrow n = (3A/2)^{1/3}$$

■ エネルギー (3D HO)

$$E \simeq \hbar\omega \int^n dk k 2k^2 = \hbar\omega \times \frac{1}{2} n^4$$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 A \langle r^2 \rangle = \frac{1}{2} E$$

■ 半径 $\propto A^{1/3}$ を利用

$$\hbar\omega = \frac{5\hbar^2}{4mr_0^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} A^{-1/3} \simeq 41 A^{-1/3} \text{ MeV}$$

(経験的な値と一致)

原子核の変形

- 陽子数・中性子数が魔法数の原子核 (閉核) = 球形
 - L_j の決まった状態を全て埋めると密度分布は球対称
- 魔法数から離れた多くの原子核は変形
 - 液滴は球形を好む (表面張力) → 変形は量子効果 (1 粒子軌道)

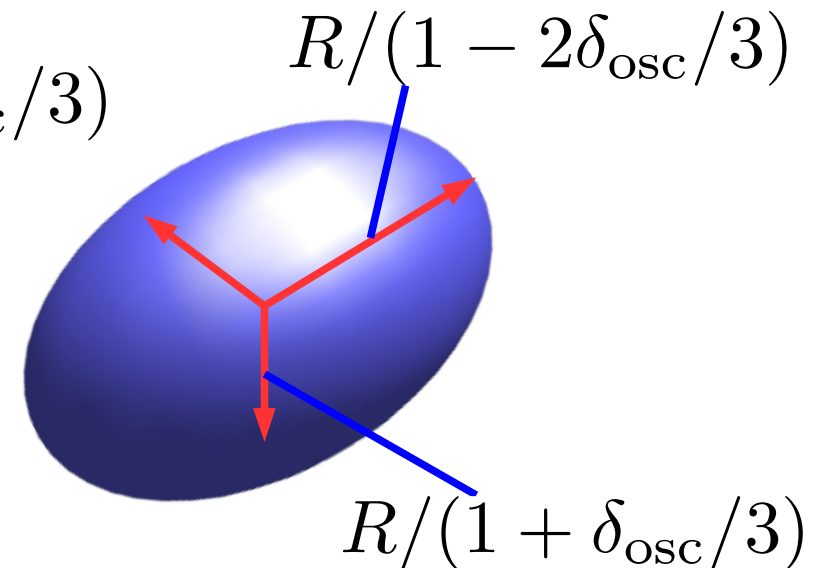
■ 3 次元調和振動子

- 伸びた方向の ω が小さくなる

$$\delta_{\text{osc}} = (\omega_{\perp} - \omega_z) / \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{3}(2\omega_{\perp} + \omega_z)$$

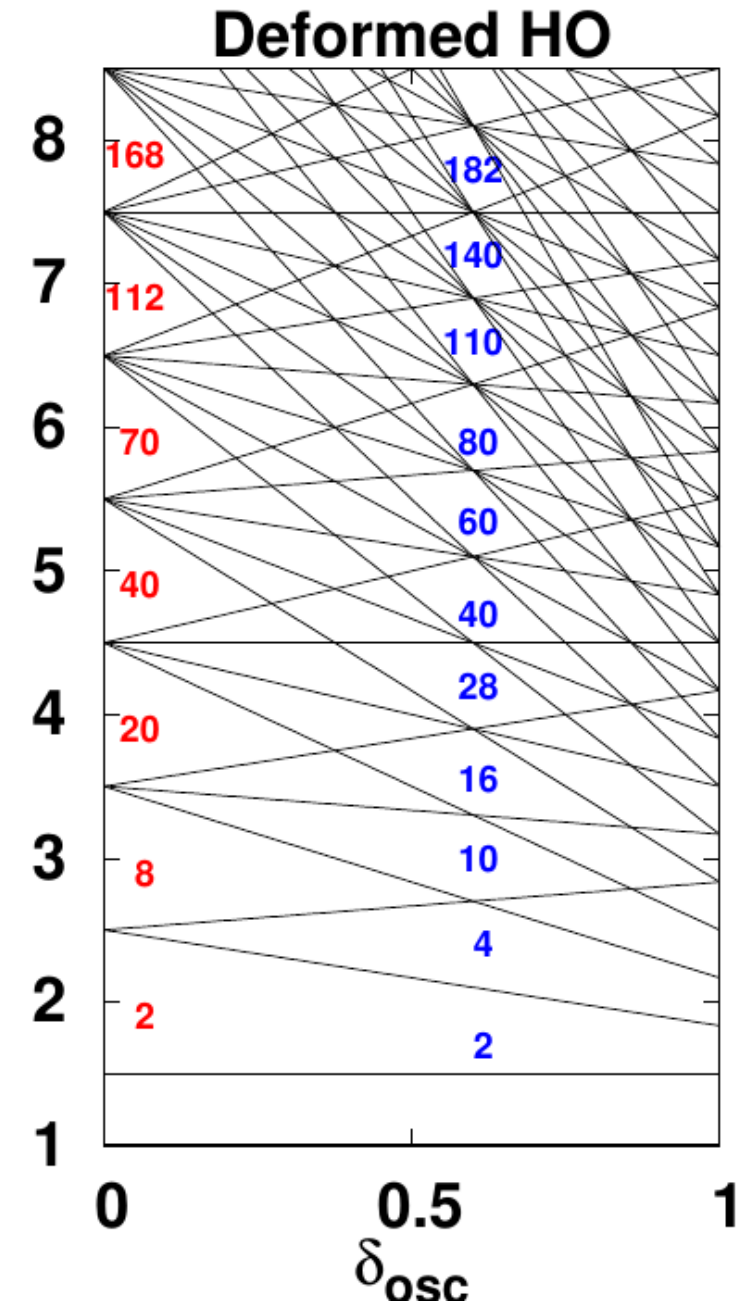
$$\omega_{\perp} = \bar{\omega}(1 + \delta_{\text{osc}}/3), \quad \omega_z = \bar{\omega}(1 - 2\delta_{\text{osc}}/3)$$

- 変形により下がる1粒子状態を核子が占め、より安定となる
→ 閉核から離れた原子核が変形



変形核での魔法数

- 変形核での1粒子エネルギー (Nilsson diagram)
→ 球形とは異なる粒子数で縮退が起こる
- 超変形状態 (super deformation)
 - 長軸 : 短軸 = 2:1 ($\delta = 0.6$)
 - 新しい魔法数
2, 4, 10, 16, 28, 40, 60, 80, 110, 140, 182
 - 超変形核は大きな慣性能率をもち、高い角運動量 ($J \sim 60$) まで回転バンドが存在する
P. Twin et al., PRL57('86)811



Superdeformed Band of ^{152}Dy

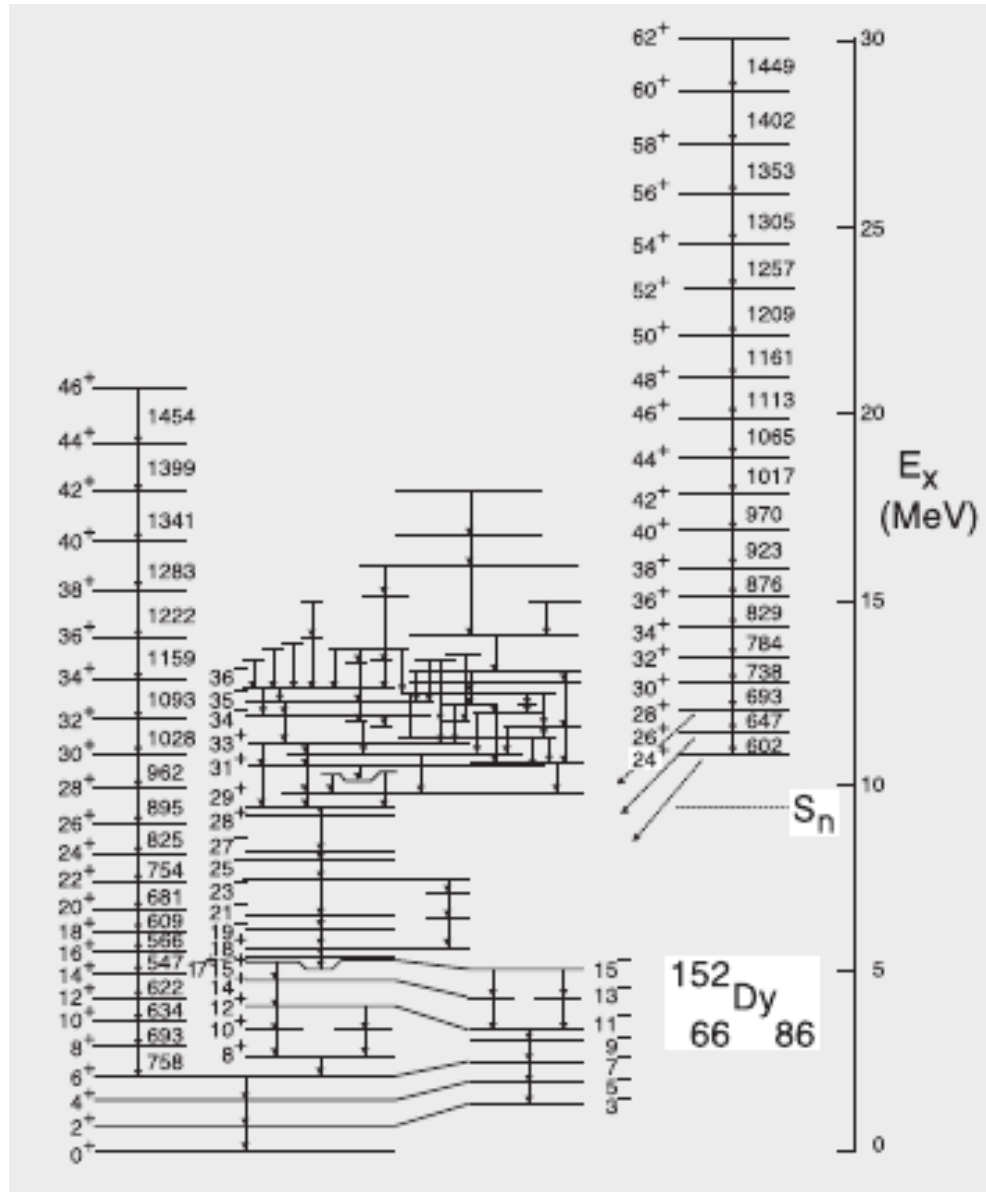
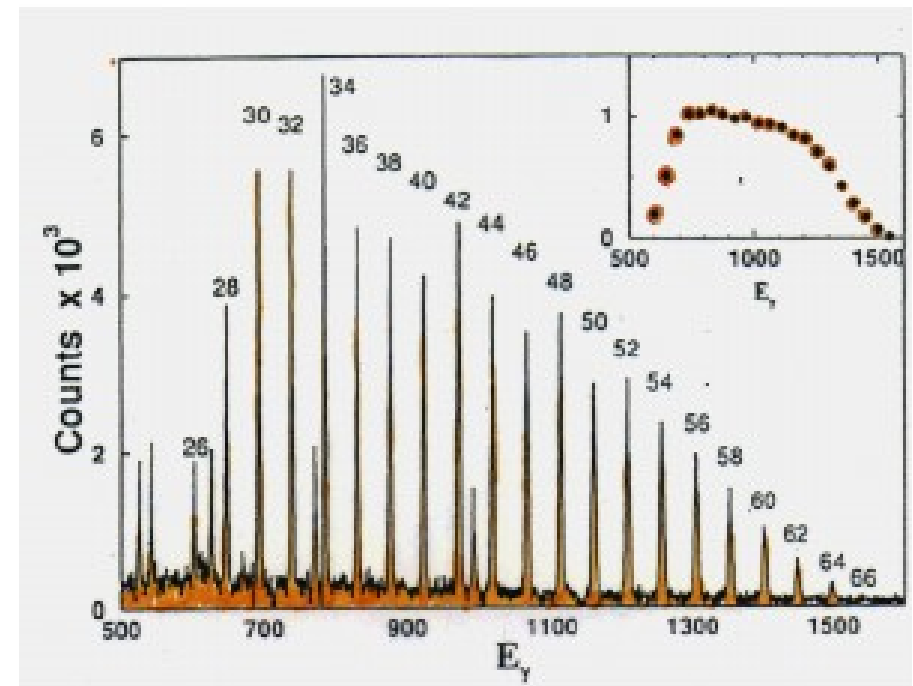


Figure 5. Superdeformed band in ^{152}Dy .

Heyde, Wood, *Phys. Scr.* 91 ('16) 083008.



P. Twin et al., *PRL* 57('86)811

注意点

- 調和振動子は大きな原子核のポテンシャルとしてはよくない。
 L^2 に比例する項を加える、または密度分布と同様に、Woods-Saxon 型のポテンシャルでの議論が必要。
- Nilsson diagram において、より正確な計算では1粒子エネルギーは変形度の1次関数でなく、より複雑な振る舞いをすることに注意。
- 核構造のこの先については講義後半(担当:板垣)、原子核理論ゼミ(担当:吉田)を参考のこと。
 - 原子核の励起
 - ◆ 1粒子励起、集団励起(振動、回転)、巨大共鳴
 - 原子核の模型
 - ◆ 殻模型、クラスター模型、平均場模型

クォークとハドロン (原子核の構成要素として)

量子色力学 (*Quantum Chromodynamics, QCD*)

■ QCD= 強い相互作用の基礎理論

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad D_\mu = \partial_\mu \pm ig A_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\pm ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \pm ig [A_\mu, A_\nu]$$

- クォークとグルーオンのダイナミクスを記述する非可換ゲージ理論
Yang, Mills ('54), Color DOF: Greensite ('64), Han, Nambu ('65)
- 大きなエネルギースケールでは結合が弱くなる (漸近的自由性)
Gross, Wilczek ('73), Politzer ('73), Nobel prize in Phys. ('04)
- 小さなエネルギースケールでは非摂動的
→ カラーの閉じ込め、カイラル対称性の自発的破れ
*Wilson ('74) [Nobel prize in Phys. ('82), Critical phenomena]
Nambu, Jona-Lasino, Nobel prize in Phys. ('08) [Nambu]*

クォーク

物質粒子				力を伝える粒子	
	第1世代	第2世代	第3世代	強い力	
クォーク	u アップ	c チャーム	t トップ	g グルーオン	
	d ダウン	s ストレンジ	b ボトム		
レプトン	ν_e eニュートリノ	ν_μ μ ニュートリノ	ν_τ τ ニュートリノ	電磁力	
	e 電子	μ ミューオン	τ タウ	γ 光子	
				弱い力	
				w^+ w^- z Wボゾン Zボゾン	
ヒッグス場に伴う粒子				H ヒッグス粒子	

<http://www.kek.jp/ja/Research/IPNS/>

クォーク

世代	種類	電荷	質量
I	u	$+2/3$	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ (300) MeV
	d	$-1/3$	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ (300) MeV
II	c	$+2/3$	1.275 ± 0.025 (1.5) GeV
	s	$-1/3$	95 ± 5 (500) MeV
III	t	$+2/3$	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.87$ GeV
	b	$-1/3$	4.18 ± 0.03 (4.5) GeV

Particle Data Group

クォークの自由度

■ クォークは色々な「座標」を持っている！

- 時間・空間座標 $(\mathbf{x}, t)$
- スピン $(\uparrow, \downarrow)$
- フレーバー $(u, d, s, c, b, t (+ \text{more ?}))$
 - ◆ 強い相互作用ではフレーバー (クォークの種類) は保存
 - ◆ 軽い3つのクォーク (u, d, s) からなる系には近似的な $SU(3)_f$ 対称性がある。 ($N_f=3$)
- カラー (R, G, B)
 - ◆ 厳密な $SU(3)_c$ 対称性 (ゲージ対称性) がある。
(カラー空間で回しても (unitary 変換しても) 同じエネルギー)
 - ◆ 観測される粒子は常にカラー 1 重項
(カラー空間の回転で「回らない」スカラー)
c.f. 単独のクォークはカラー 3 重項 ($N_c=3$)

カラー (R,G,B)

$q_f^a(\mathbf{x}, t)$

フレーバー
(u, d, s, ...)

4-spinor
(spin と粒子・反粒子)

クォークからハドロンへ

■ バッグ模型

Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn, Weisskopf ('74)

- クォーク・反クォーク対、グルーオン対の凝縮により、エネルギーが下がる
→ 物理的真空
- 凝縮のない真空 (摂動論的真空) 中をクォークが自由に運動

$$E_h = \frac{n_q x}{R} + \frac{4\pi R^3}{3} B$$

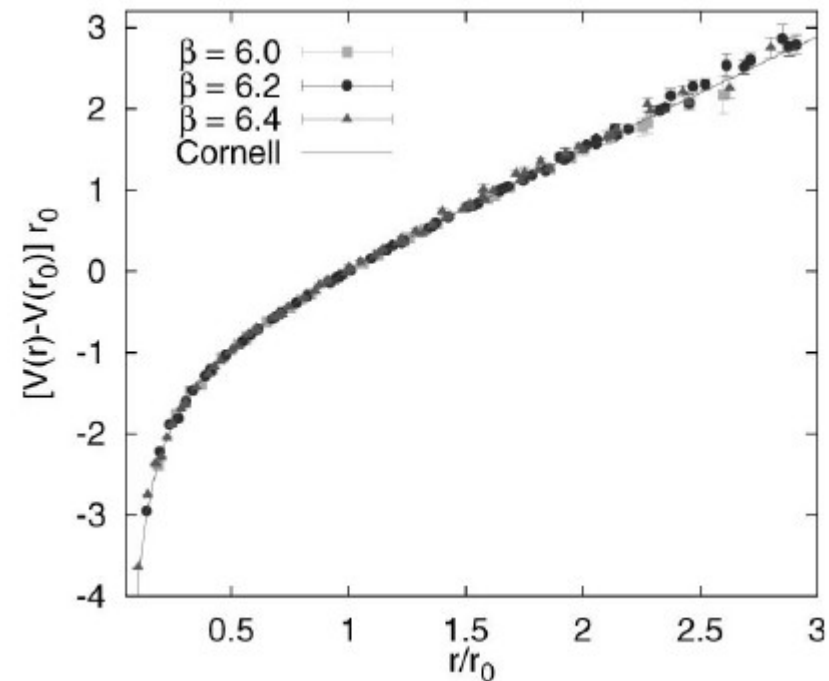
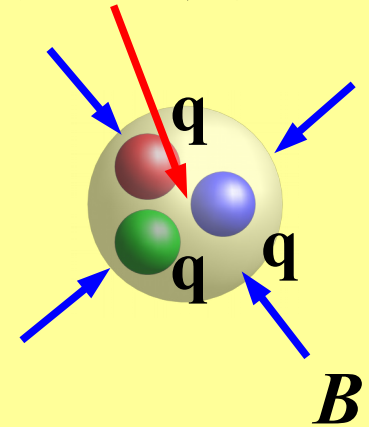
$$(x \simeq 2.04, B^{1/4} \simeq 220 \text{ MeV})$$

■ (非相対論的) クォーク模型

- クォーク間の閉じ込めポテンシャル、グルーオン交換ポテンシャル等による残留相互作用を考慮
- 構成子クォーク質量

$$m_q \sim 300 \text{ MeV}, m_s \sim 500 \text{ MeV}$$

摂動論的真空



G.S. Bali, Phys. Rept. 343 ('01) 1

ハドロン

■ ハドロン

= クォーク・グルーオンから作られる、強い相互作用をする粒子

● バリオン (3 つのクォーク)

Λ (uds), Σ^- (dds), Σ^0 (uds), Σ^+ (uus), Ξ^- (dss), Ξ^0 (uss)

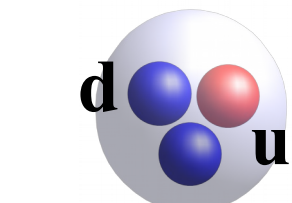
→ s クォークを含むバリオン = ハイペロン

● 中間子 (メソン、クォークと反クォーク)

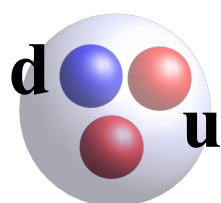
π^- ($d\bar{u}$), π^0 ($(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$), π^+ ($u\bar{d}$),

K^- ($s\bar{u}$), $\bar{K}^0$ ($s\bar{d}$), K^+ ($u\bar{s}$), K^0 ($d\bar{s}$),

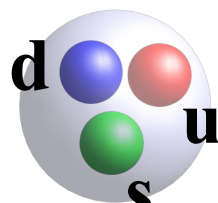
η ($(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$)



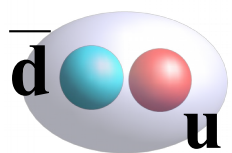
中性子 d



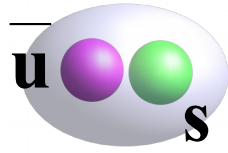
陽子 u



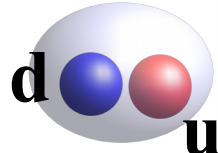
Λ ハイペロン



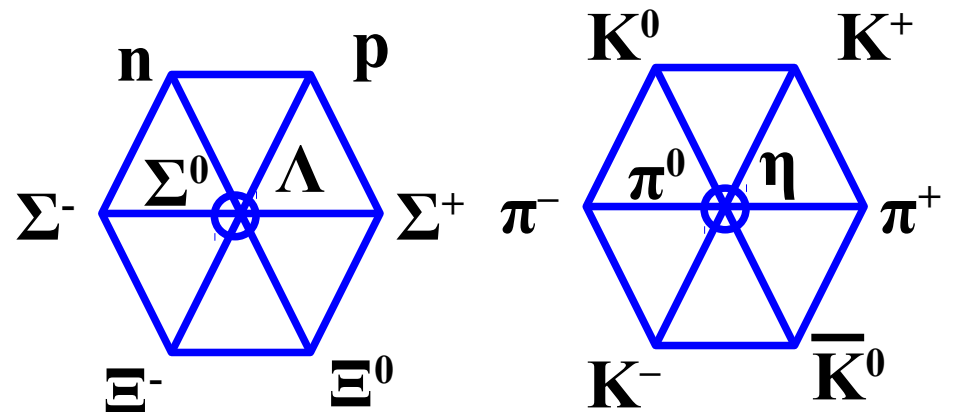
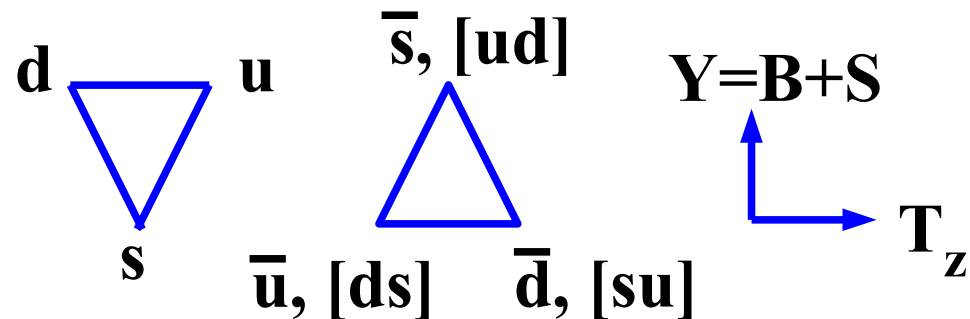
π 中間子



K 中間子



クォーク対



カラー1重項の作り方

- クォーク (カラー3重項) からカラー 1 重項を作るには？
→ RGB 成分をベクトルの成分と考える。

$$\vec{q} = (q_R, q_G, q_B)^T$$

- ベクトルからスカラーを作る方法

- 内積 → 中間子

$$\vec{q}_1^\dagger \cdot \vec{q}_2 = q_1^{a*} q_2^a$$

- スカラー3重積 → バリオン

$$(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2) \cdot \vec{q}_3 = \varepsilon_{abc} q_1^a q_2^b q_3^c$$

- 4つのクォーク、5つのクォーク、... からでもスカラーは作れる。
(Exotic hadrons)

- なぜ3つの種類のクォーク (u,d,s) から8重項が現れる？
→ 9種類の $\bar{q}q$ の組み合わせのうち、
ひとつはフレーバー空間でのスカラー、残りが8重項。

ハドロン

バリオン				メソン (中間子)			
種類	電荷	クォーク組成	質量	種類	電荷	クォーク組成	質量
p	+1	uud	938.27 MeV	π^+	+1	$u\bar{d}$	139.57 MeV
n	0	udd	939.57 MeV	π^0	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	134.98 MeV
Λ	0	$(uds - dus)/\sqrt{2}$	1115.68 MeV	π^-	-1	$d\bar{u}$	139.57 MeV
Σ^+	+1	uus	1189.37 MeV	K^+	+1	$u\bar{s}$	493.68 MeV
Σ^0	0	$(uds + dus)/\sqrt{2}$	1192.64 MeV	K^-	-1	$s\bar{u}$	493.68 MeV
Σ^-	-1	dds	1197.45 MeV	K^0	0	$d\bar{s}$	497.61 MeV
Ξ^0	0	uds	1314.86 MeV	$\bar{K}^0$	0	$s\bar{d}$	497.61 MeV
Ξ^-	-1	dds	1321.71 MeV	η	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	543.86 MeV

$SU(3)_f$ transformation

- Fundamental triplet $(u,d,s)^T = \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{U} \mathbf{q} \ (\mathbf{U} \in SU(3))$
- Anti-quark $\bar{\mathbf{q}} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}' = \bar{\mathbf{q}} \mathbf{U}^+$
- Meson octet $\mathbf{M}_{ij} = \bar{\mathbf{q}}_j \mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{M}' = \mathbf{U} \mathbf{M} \mathbf{U}^+$

$$\begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{d}u & \bar{s}u \\ \bar{u}d & \bar{d}d & \bar{s}d \\ \bar{u}s & \bar{d}s & \bar{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = P$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{a_0}{\sqrt{2}} & a_0^+ & \kappa^+ \\ a_0^- & \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}} & \kappa^0 \\ \kappa^- & \bar{\kappa}^0 & \xi \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & \frac{\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}$$

$SU(3)_f$ transformation

- Fundamental triplet $(u,d,s)^T = \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{U} \mathbf{q} \ (\mathbf{U} \in SU(3))$
- Diquark $\mathbf{D}_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{q}_j \mathbf{q}_k \rightarrow \mathbf{D}' = \mathbf{D} \mathbf{U}^+$
- Baryon octet $\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{D}_j \mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{B}' = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^+$

$$\begin{pmatrix} [ds]u & [su]u & [ud]u \\ [ds]d & [su]d & [ud]d \\ [ds]s & [su]s & [ud]s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} + \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} - \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$SU(3)$ 表現の次元

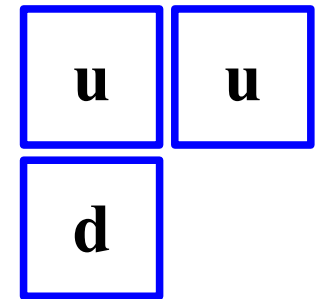
■ ヤング図 (Young tableau)

- 列で反対称化、行で対称化

$$udu \rightarrow (ud-du)u \rightarrow udu + udu - duu - uud$$

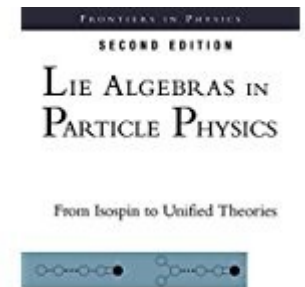
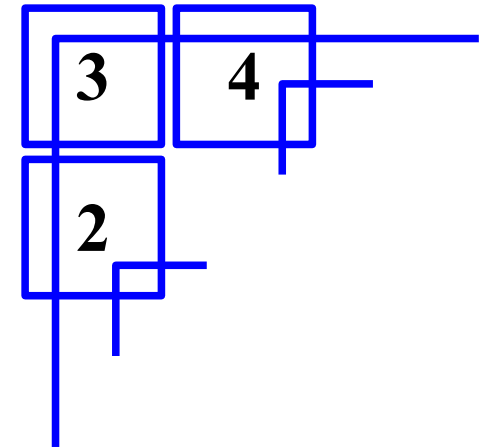
$$\rightarrow (ud-du)u - u(ud-du)$$

(proton = diquark (isospin=0) と u quark)



■ 次元 = Factor / Hook

- Factor = 3 x 4 x 2
- Hook = 3 x 1 x 1
- Dimension = Factor / Hook = 8



H. Georgi

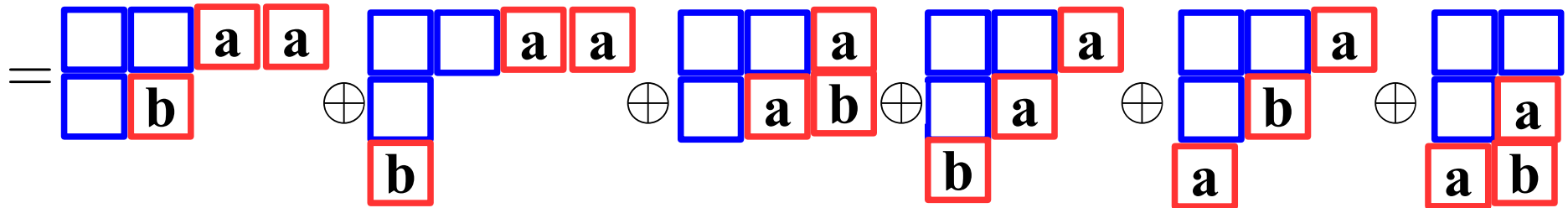
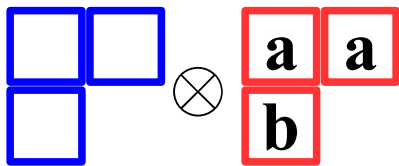


Howard Georgi



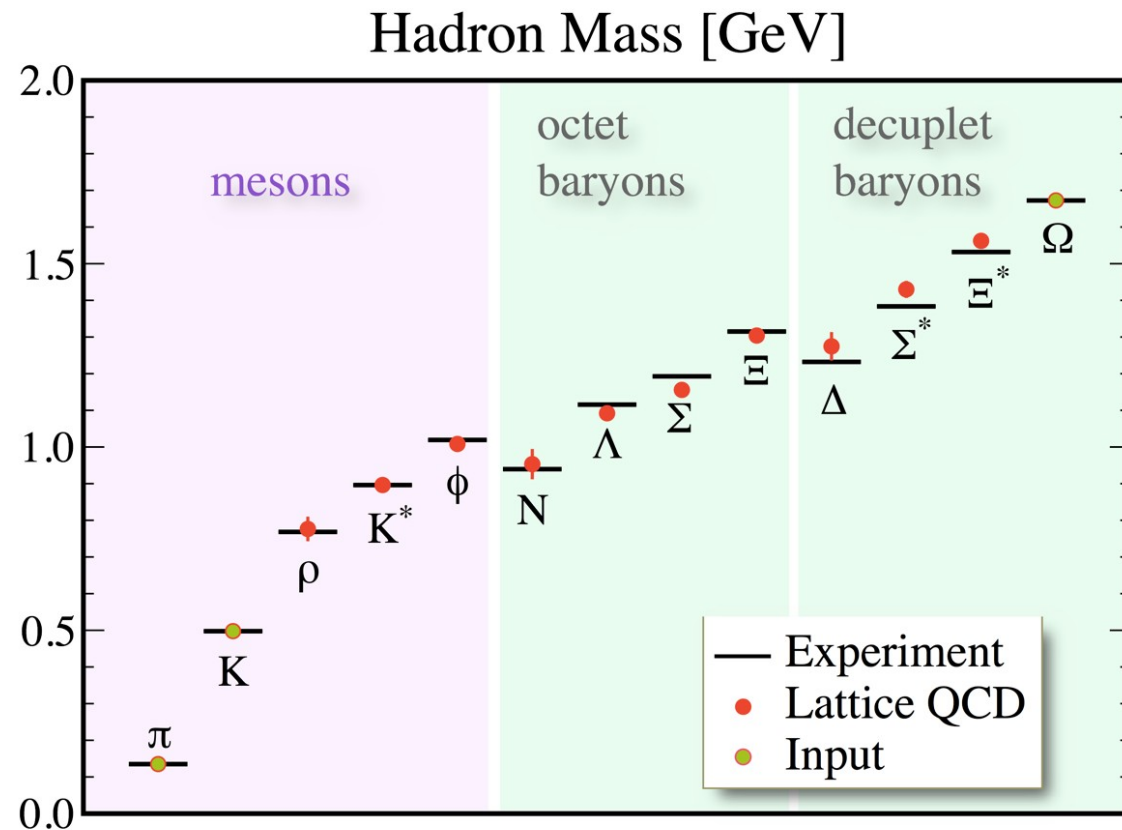
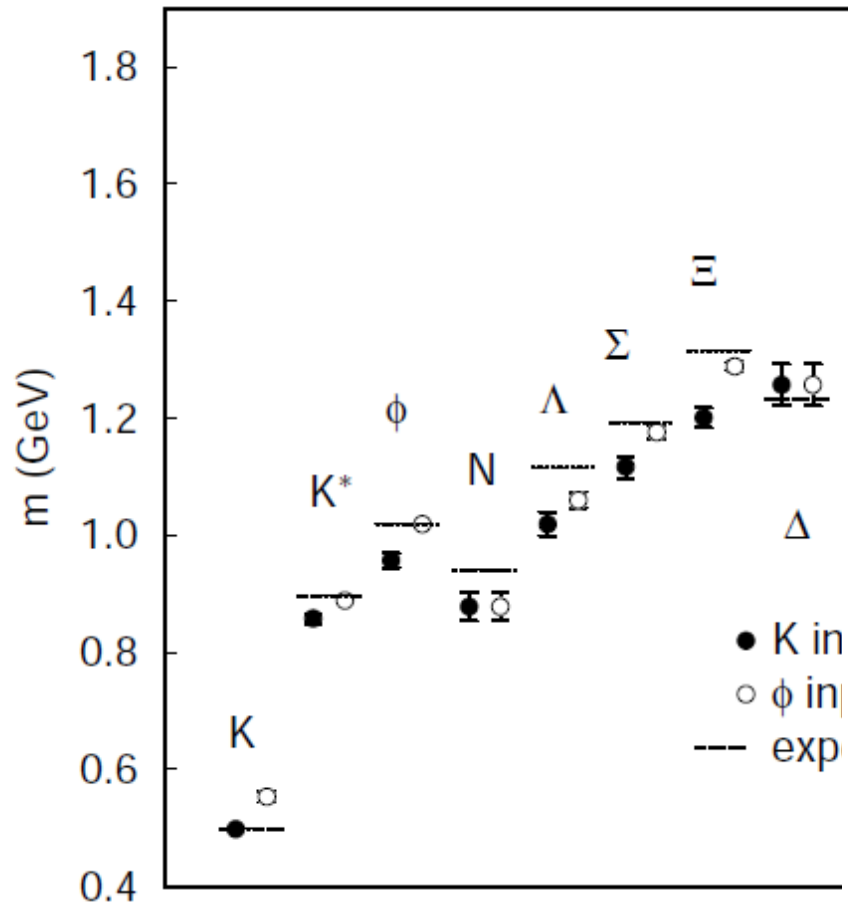
■ 合成

- 1 行目の a を異なる列へ
- 2 行目の b を異なる列へ
- 制限
右から左、上から下へ読んだ時、 a の数の和 $\geq b$ の数の和
 $SU(N)$ のとき、 N 行以下



$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Lattice QCD results of hadron masses



S. Aoki et al. (CP-PACS Collab.) ('02)

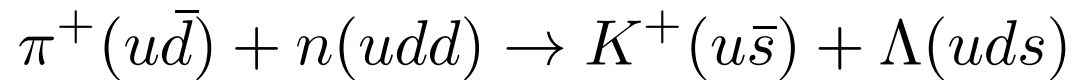
Kuramashi

https://www.ccs.tsukuba.ac.jp/depart_intro/depart_particle/

ハドロン核構造の探求方法

- 原子核中にハドロンを生成
 - 束縛状態あり → 束縛エネルギーからポテンシャルを決定
 - 束縛状態無し → スペクトルの形からポテンシャルを推定
- 様々なハドロンと原子核のポテンシャルが生成反応により調べられてきた。

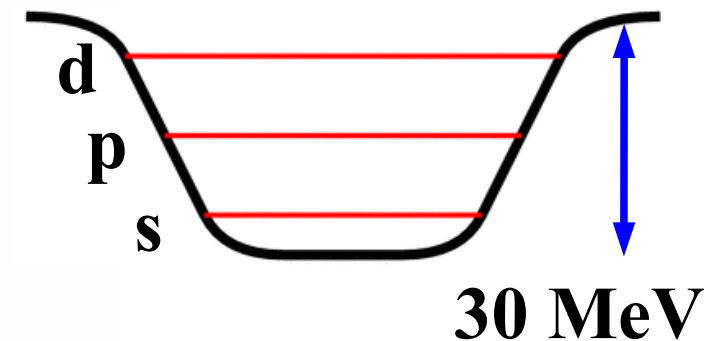
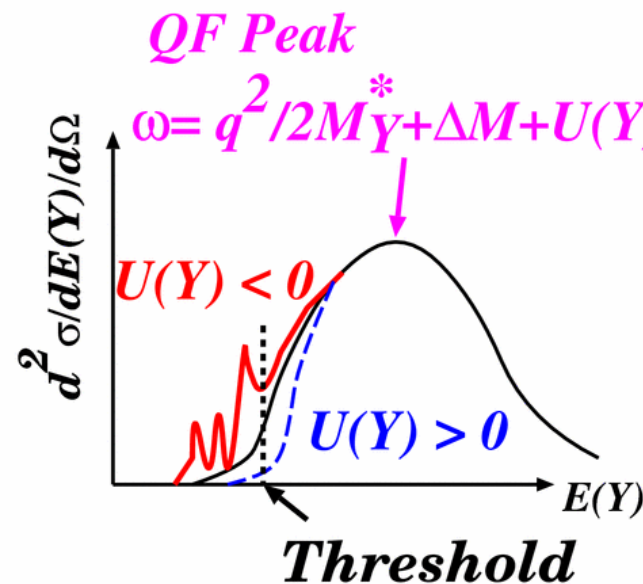
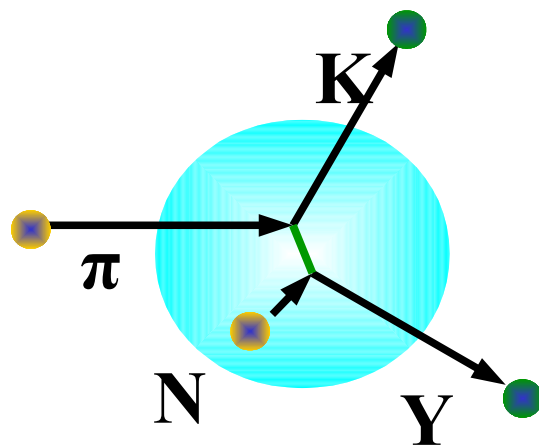
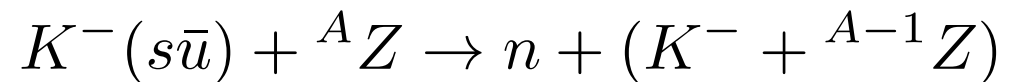
- ハイパー核生成反応



- パイ中間子原子生成反応



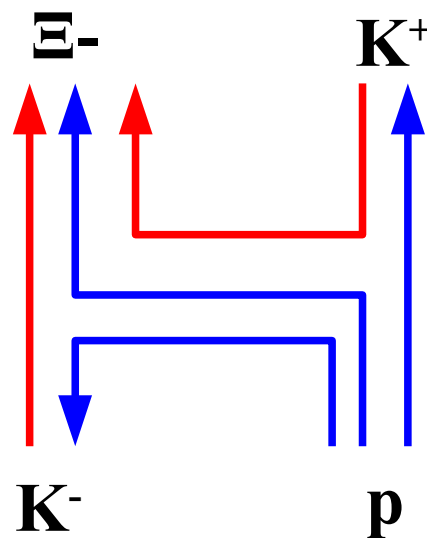
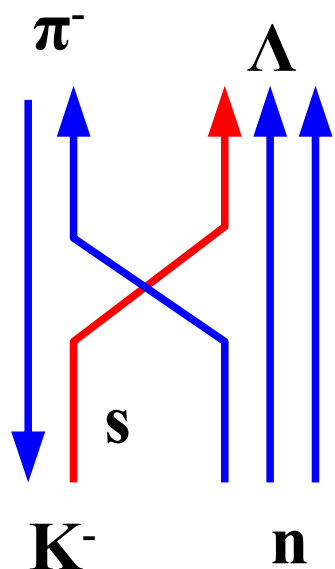
- 反 K 中間子原子核生成反応



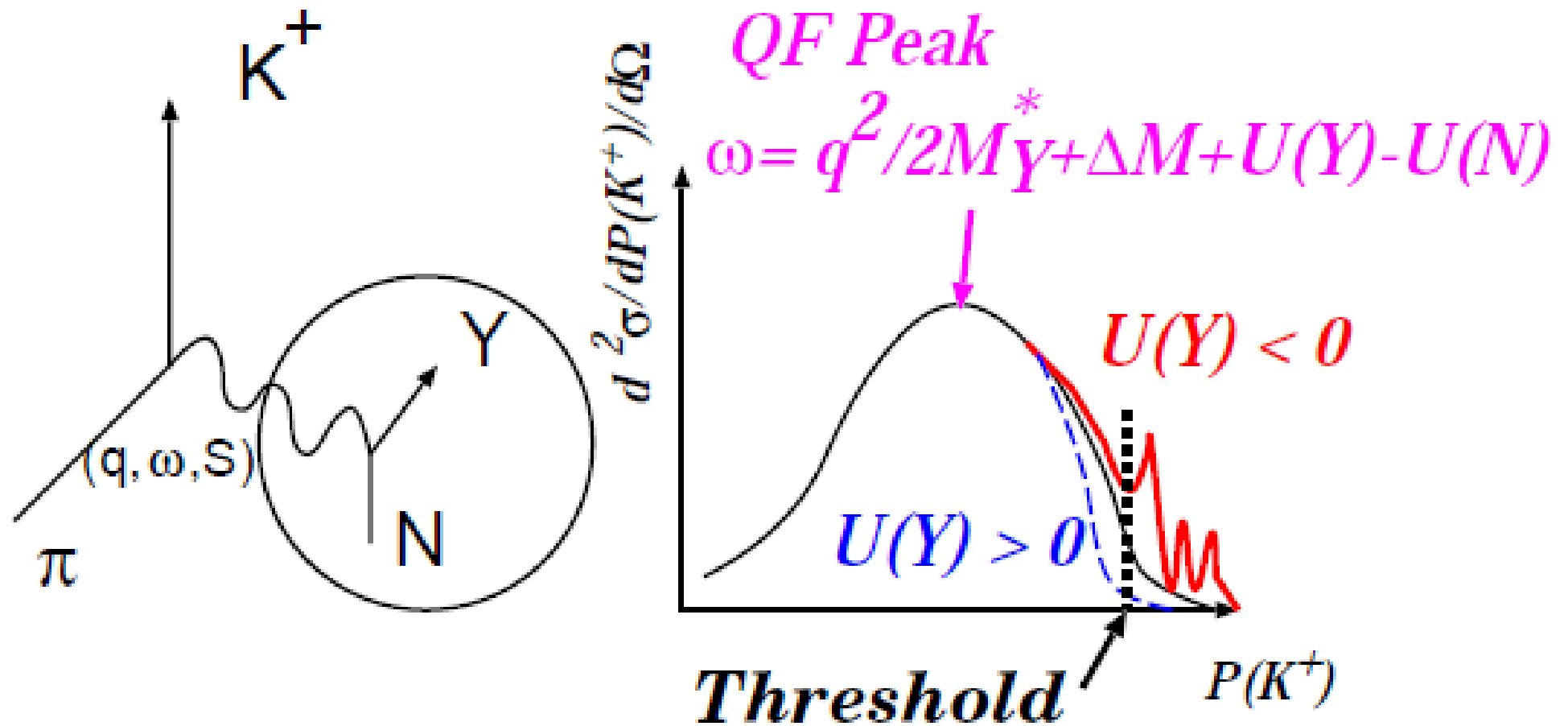
Hypernuclear formation

- (K^-, π) , (π, K^+) , and (K^-, K^+) reactions on nuclei $\rightarrow$ Hypernuclei

Reaction	Elementary Processes	
	Main Process	Other Processes
(K^-, π^-)	$K^- n \rightarrow \pi^- \Lambda$,	$K^- n \rightarrow \pi^- \Sigma^0$, $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+$
(K^-, π^+)	$K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$,	$K^- pp \rightarrow \pi^+ \Lambda n$ (n-rich hypernuclear formation)
(π^+, K^+)	$\pi^+ n \rightarrow K^+ \Lambda$,	$\pi^+ n \rightarrow K^+ \Sigma^0$, $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$
(π^-, K^+)	$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$,	$\pi^- pp \rightarrow K^+ \Lambda n$ (n-rich hypernuclear formation)
(K^-, K^+)	$K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-$,	$K^- pp \rightarrow K^+ \Lambda \Lambda$

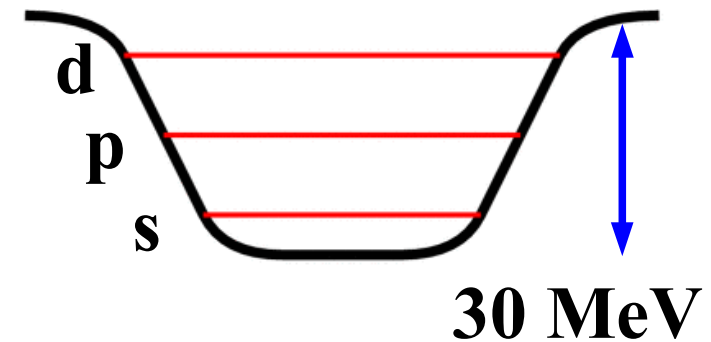
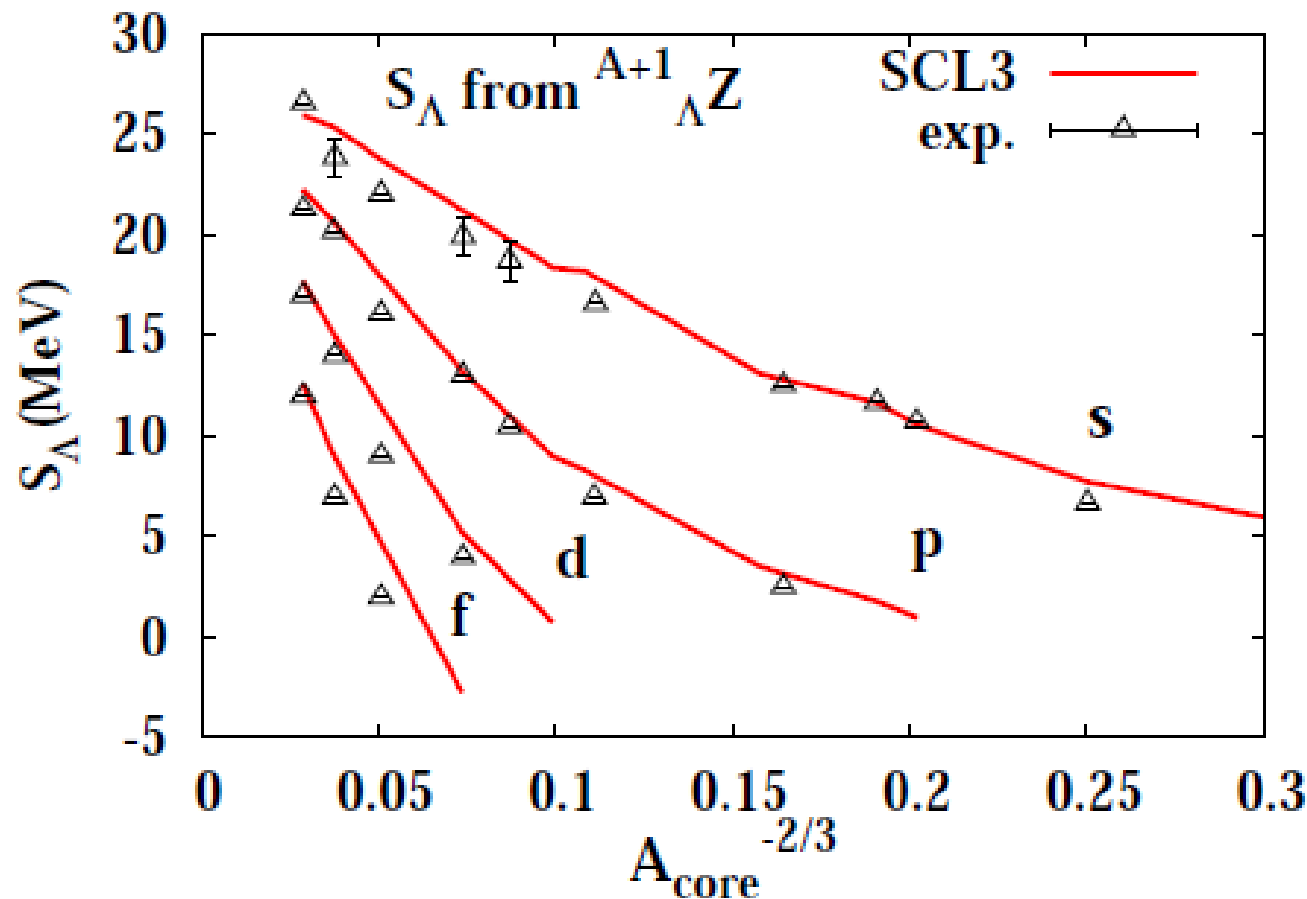


Hypernuclear formation



Single particles states of Λ in nuclei

- Single particle potential depth of Λ is around -30 MeV
 - s, p, d, f, ... states are clearly seen
 - $A_{\text{core}}^{-2/3} \propto R^{-2} \propto \text{K.E. of } \Lambda$



Hypernuclear production (discrete state)

■ Substitutional reaction

- Magic momentum 近辺では $q \sim 0$
→ 核子軌道にハイペロンが入る状態が有利

*H. Bando, T. Motoba, J. Zofca,
Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990), 4021-4198.*

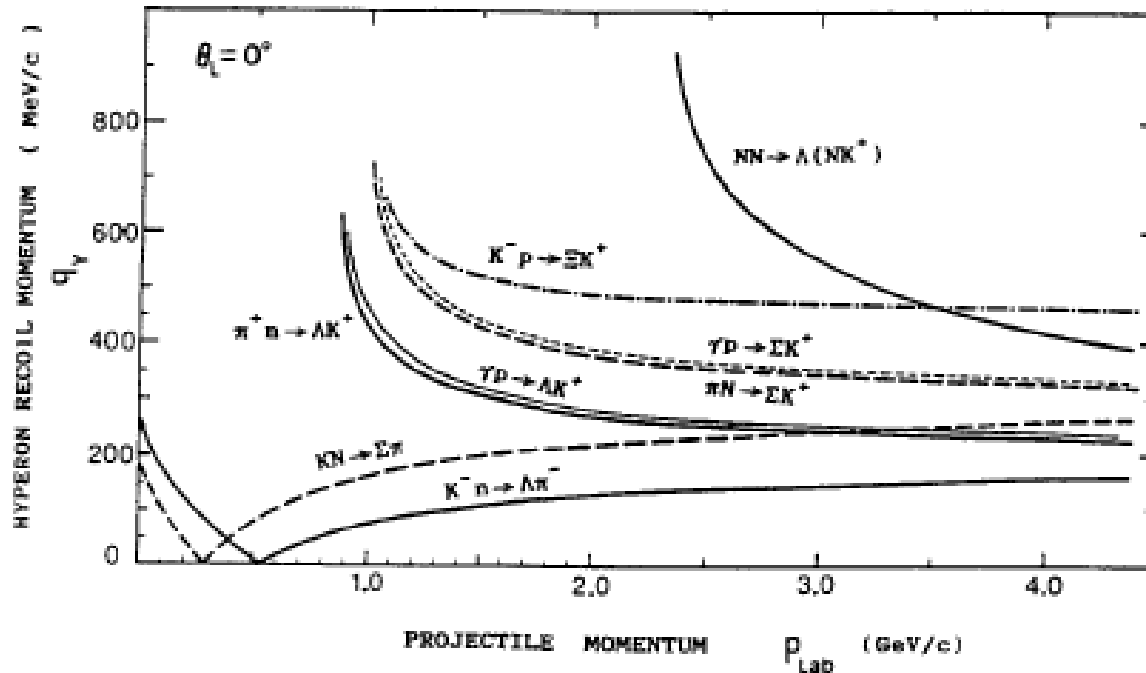
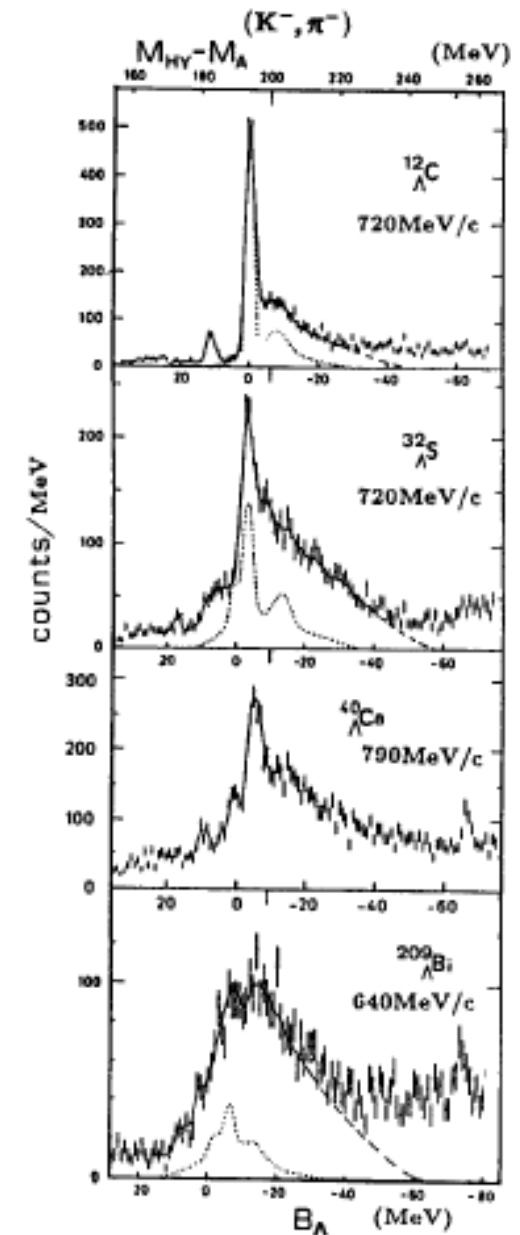


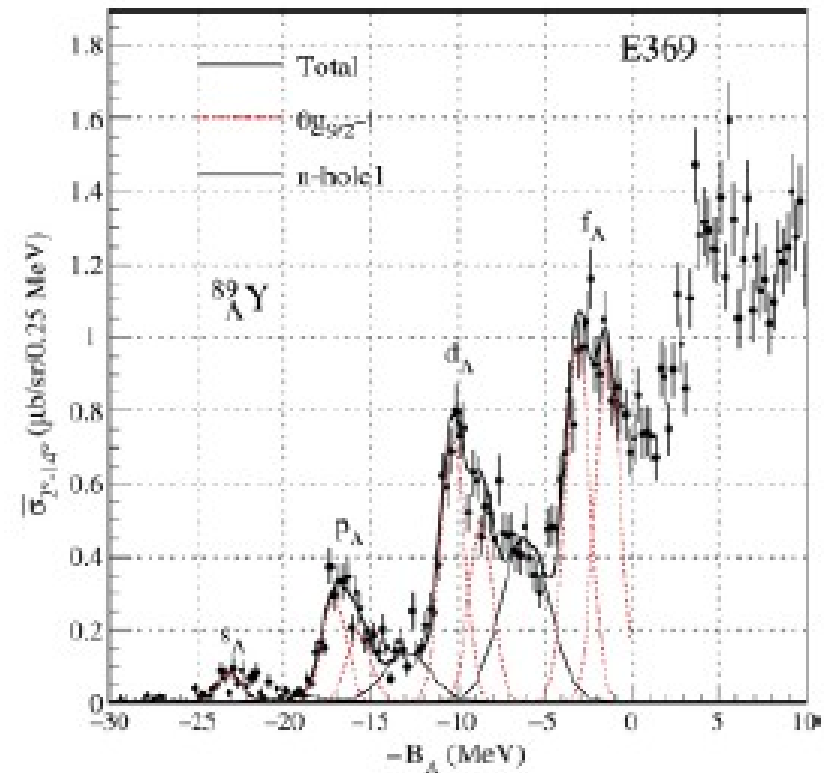
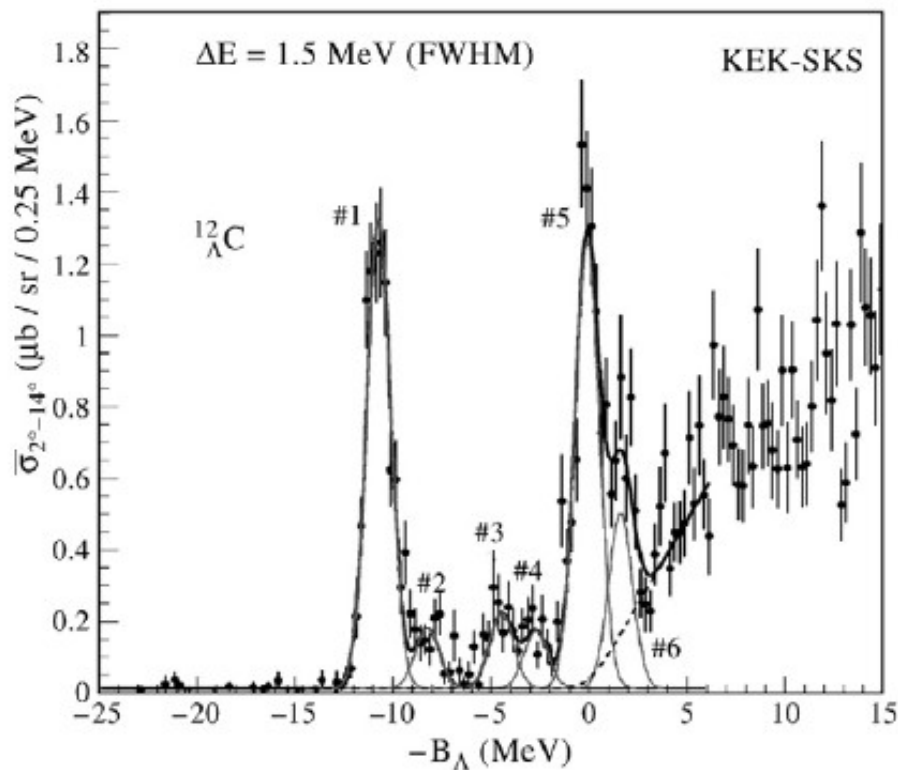
Fig. 2.3. The momentum q_Y transferred to the hyperon Y as a function of the projectile momentum $p_{\text{proj}} = p_x$ in the reaction $aN \rightarrow Yb$ at $\theta_{b,L} = 0^\circ$.



Λ hypernuclear formation

■ (π^+, K^+) reactions on nuclei

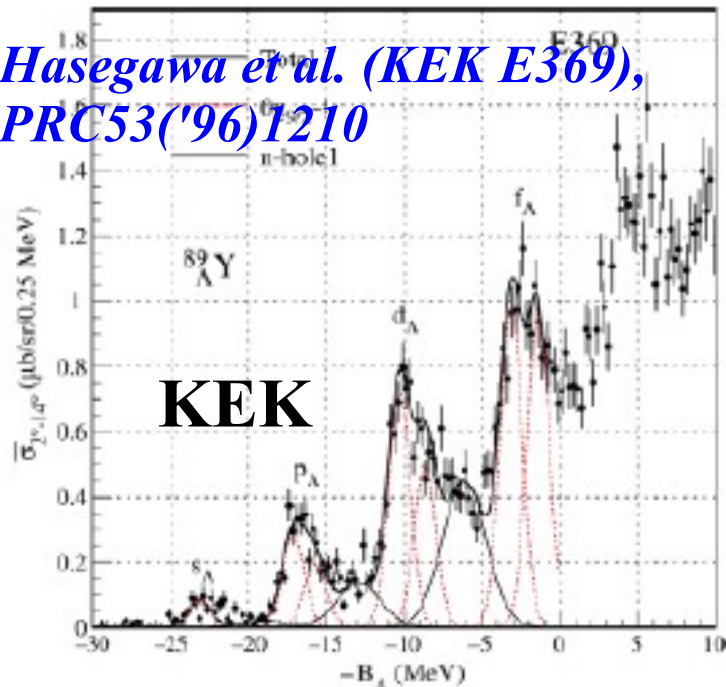
- $q \sim k_F \rightarrow$ various s.p. states of Λ are populated



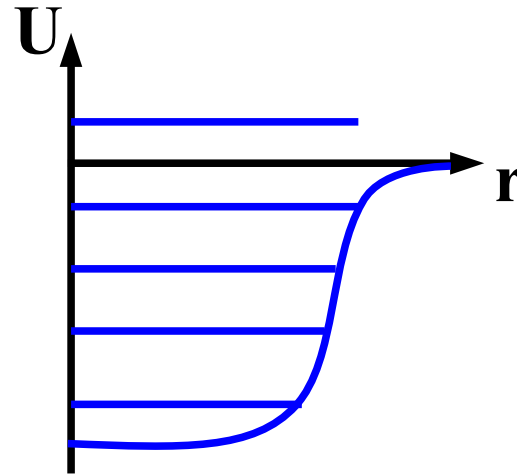
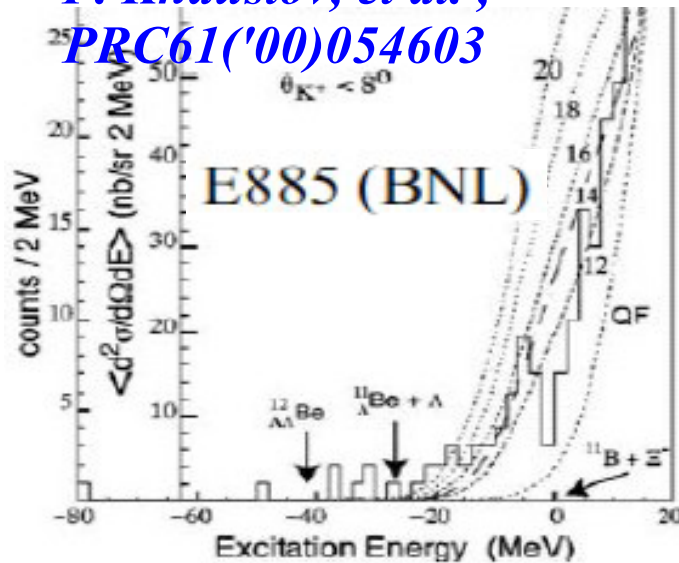
Hasegawa et al.(1996)

Λ , Σ^- , Ξ^- , K^- 核

Hasegawa et al. (KEK E369),
PRC53('96)1210



P. Khaustov, et al.,
PRC61('00)054603

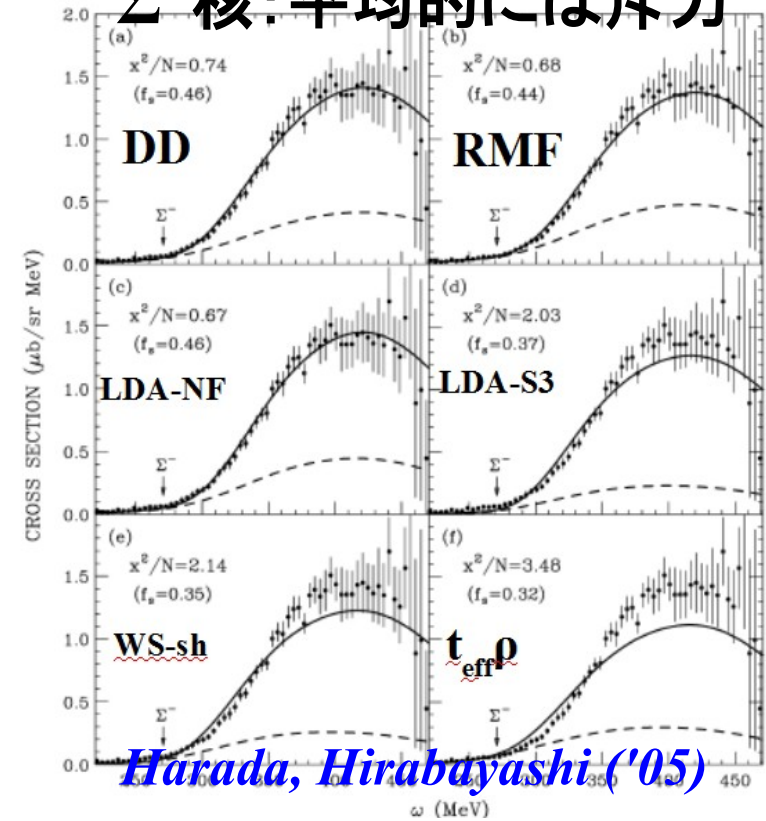


Λ 核: 明白な
一粒子状態を観測

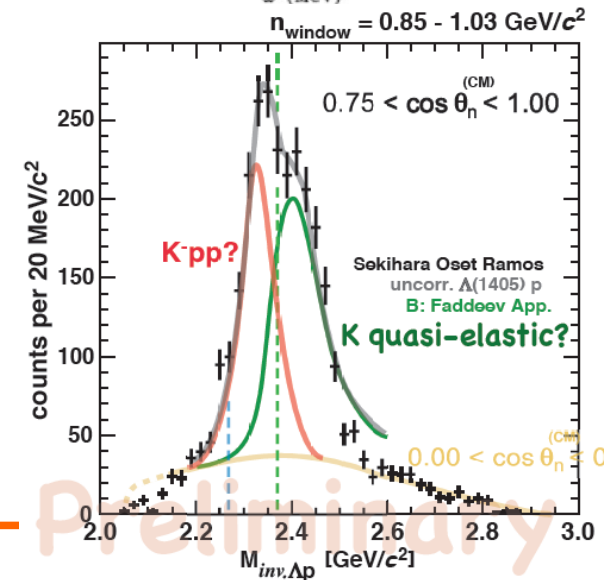
Ξ 核: 弱い引力
最近のデータでも
束縛状態の存在を示す

K^- 核は存在しそう。
ただしゆるい束縛
(J-PARC E15
preliminary,
Iwasaki et al.)

Σ^- 核: 平均的には斥力



Harada, Hirabayashi ('05)



Preliminary

レポート問題 (Sec. 1 (b))

- 長軸 : 短軸 = 3:1 となる変形はハイパー変形と呼ばれる。
3次元変形調和振動子において、ハイパー変形を表す δ はいくらか？またこのときの魔法数を調べよ。
(下から5つ程度)
- 陽子・ Λ 粒子のスピン・フレーバー波動関数 (スピン・フレーバーについて完全対称化したもの) を求めよ。
- ハドロンを含む原子核を作るには、終状態で現れるハドロンが原子核に「止まる」ことが必要である。
不変質量 $s^{1/2}$ と2粒子の質量 m_1, m_2 が与えられている場合、重心系での粒子の運動量の大きさは

$$p = \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} / 2\sqrt{s}$$

で与えられる。これを用いて、原子核標的における (K^-, π^-) , (π^+, K^+) , (K^-, K^+) , (K^-, n) 反応におけるハイペロン、 K^- 粒子の運動量の大きさを評価せよ。放出粒子は前方 (0度) で観測されるとする。(素過程反応において核子は静止しているとせよ。)