

原子核基礎論B

京大基研 大西 明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 核力・特に非中心力や3体力 (1 回)
2. 原子核構造を記述するための種々のモデルの最近の進展 (2 回)
3. 最近の中性子過剰核の物理の最近の進展 (2 回)
4. 原子核構造における異なる状態の混合や競合 (2 回) 板垣
5. 高温・高密度核物質概観 (1 回)
6. 有限温度・密度における場の理論入門 (2 回)
7. QCD 有効モデルにおける相転移と相図 (2 回)
8. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1 回)
9. 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論 (2 回) 大西

Introduction to Lattice Field Theory

格子上の場の理論

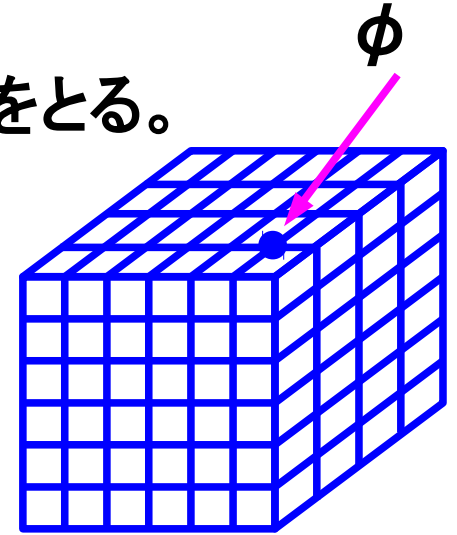
■ 場の理論＝無限自由度

- 解析的・厳密にとくことは一般には困難 → 数値的に解く
- 求めたいものは非常に複雑な積分
→ 「区分求積」＝ 有限の格子上で解き、連続極限をとる。

■ スカラー場

- 連続理論 (Euclidean) の作用 (ϕ^4 理論)

$$S_{\text{cont}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right]$$



- 格子上の作用

- ◆ 連続極限で S_{cont} に一致
- ◆ S_{cont} とできるだけ同じ対称性を持つ

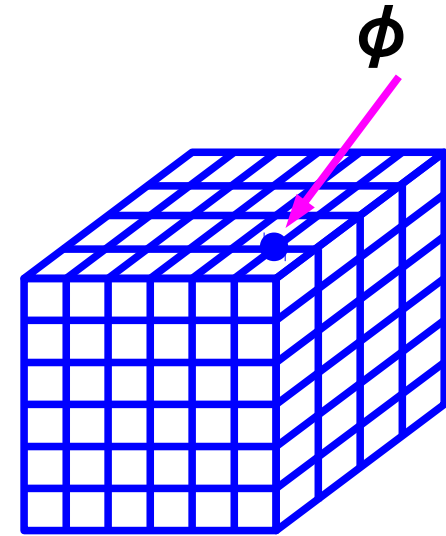
$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n,\mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

■ 格子上の作用：スカラー場理論

$$S_{\text{lat}} = -\frac{a^4}{2} \sum_{n, \mu} \phi(n) \frac{\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} \\ + a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) \right]$$

$n = (n_x, n_y, n_z)$: spacetime point on the lattice

$\hat{\mu}$: unit vector in the positive μ direction.



● $a \rightarrow 0$ の極限で、連続理論の作用と一致

$$S_{\text{lat}} \rightarrow a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2} \phi(n) \sum_{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\mu}^2} + \frac{m^2}{2} \phi(n)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(n)^4 \right] + O(a^6) \\ = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi(x) \partial^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right]$$

ϕ 等の対称性を保つ。

■ QCD Lagrangian

notation: Yagi, Hatsuda, Miake

$$L = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - m) q - \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g A_\mu \quad (\text{Covariant derivative})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu] = \frac{-i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (\text{Field strength})$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad (t^a = \text{SU}(3) \text{ generator}, [t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

■ Gauge transformation

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad g A_\mu(x) \rightarrow V(x) (g A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^\dagger(x)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x) F_{\mu\nu} V^\dagger(x), \quad D_\mu(x) \rightarrow V(x) D_\mu(x) V^\dagger(x)$$

■ QCD の特徴

- 非可換ゲージ理論 [SU(3)]、漸近的自由性
- 低エネルギーでは非摂動的
カイラル対称性の自発的破れ、カラーの閉じ込め

- Space-time discretization of fields

- Quarks = Grassmann number on sites

$$\chi_i \chi_j = -\chi_j \chi_i, \quad \int d\chi 1 = 0, \quad \int d\chi \chi = 1$$

$$\rightarrow \int d\chi_1 d\chi_2 \cdots d\bar{\chi}_1 d\bar{\chi}_2 \cdots \exp(\bar{\chi} D \chi) = \det(D)$$

- Gluons → Link variable

$$U_\mu(x) = \exp \left[ig \int_x^{x+\hat{\mu}} dx A(x) \right] \sim \exp(ig A_\mu)$$

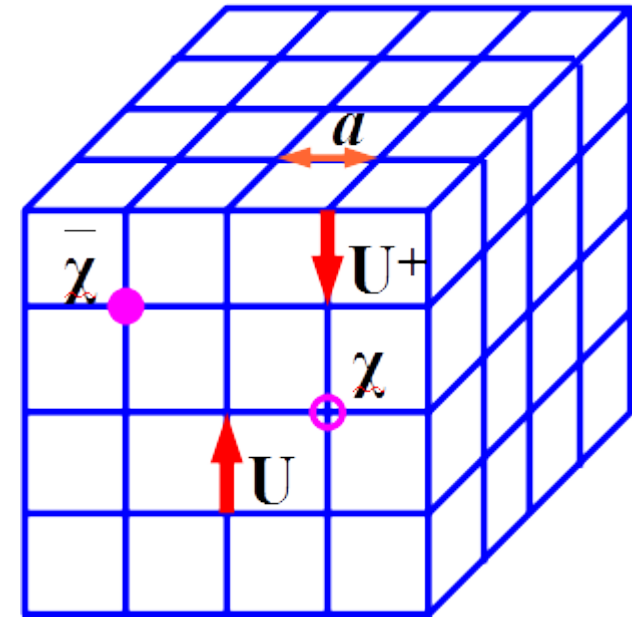
$$\int dU U_{ab} = 0, \quad \int dU U_{ab} U_{cd}^\dagger = \delta_{ad} \delta_{bc} / N_c, \quad \int dU U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf} / N_c!$$

- Gauge transf.

$$\chi(x) \rightarrow V(x) \chi(x), \quad \bar{\chi}(x) \rightarrow \bar{\chi}(x) V^\dagger(x),$$

$$U_\mu(x) \rightarrow V(x) U_\mu(x) V^\dagger(x+\hat{\mu})$$

$$\bar{\chi}(x) U_\mu(x) \chi(x+\hat{\mu}) = \text{invariant}$$

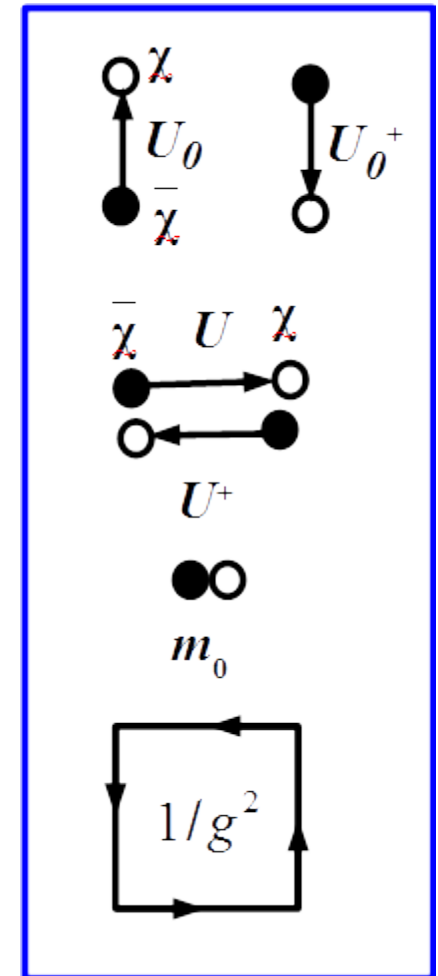


Lattice spacing = a
→ Lattice unit: a=1

Lattice QCD action

■ Lattice QCD action (unrooted staggered fermion)

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{\chi}_x U_0(x) e^{\mu} \chi_{x+\hat{0}} - \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^+(x) e^{-\mu} \chi_x \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{x,j} \eta_j(x) \left[\bar{\chi}_x U_j(x) \chi_{x+\hat{j}} - \bar{\chi}_{x+\hat{j}} U_j^+(x) \chi_x \right] \\
 & + m_0 \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x \quad \rightarrow \chi (\partial + i g A) \chi \\
 & + \frac{2 N_c}{g^2} \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(x) \right] \quad \text{Stokes theorem} \\
 & \quad \quad \quad \rightarrow \text{rotation}
 \end{aligned}$$



● Staggered sign factor ($\sim \gamma$ matrix)

$$\eta_j(x) = (-1)^{x_0 + \dots + x_{j-1}}$$

● Chiral transf.

$$\chi_x \rightarrow \exp[i \theta \varepsilon(x)] \chi_x, \quad \varepsilon(x) = (-1)^{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

χ quark
(Grassmann #)
 U link $\sim \exp(igA)$

■ Gauge action (Euclidean)

$$S_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$$

$$A_\mu = A_\mu^a t^a \quad ([t^a, t^b] = if_{abc} t^c, \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab})$$

(経路積分では変数がc数なので、 $gA \rightarrow A$ とスケール)

■ Gauge transformation

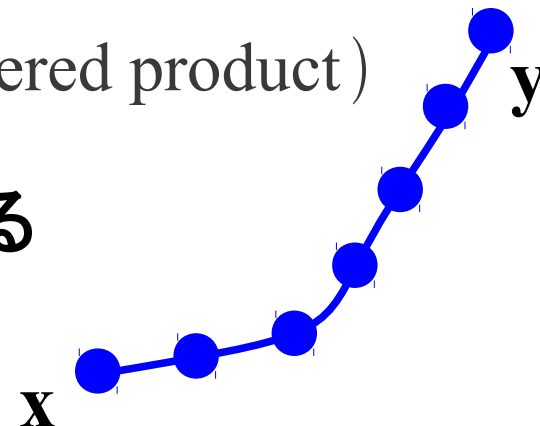
$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i\partial_\mu)V^+(x), \quad F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x)F_{\mu\nu}V^+(x)$$

■ ゲージ不変性をもつ格子上の作用をどのように作るか？ → リンク変数

$$U(x, y) \equiv P \exp \left[i \int_x^y dz_\mu A_\mu(z) \right] \quad (P: \text{path ordered product})$$

リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受ける

$$U(x, y) \rightarrow U'(x, y) = V(x)U(x, y)V^+(y)$$



x

Appendix: Gauge transformation of U

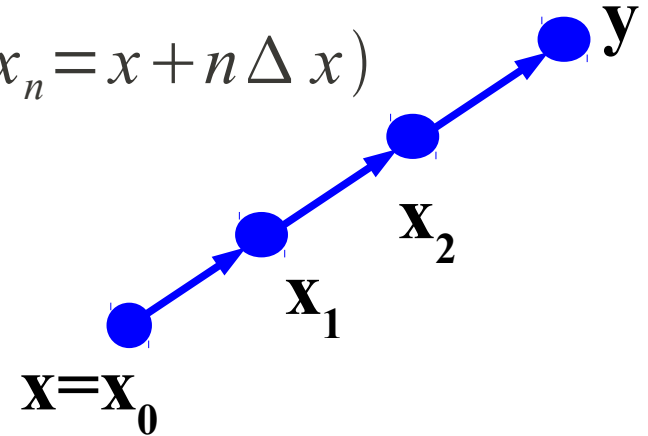
■ Proof of $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow V(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \mathbf{y})V^\dagger(\mathbf{y})$

$$U(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] \quad (x_n = x + n \Delta x)$$

(multiply $(1+i A \Delta x)$ to the right !)

By using the gauge transformation of A ,

$$A_\mu(x) \rightarrow V(x)(A_\mu(x) - i \partial_\mu) V^\dagger(x)$$



and the unitarity of V , $V(x) V^\dagger(x)=1$, we get

$$\begin{aligned} & 1 + i A'_\mu(x_n) \Delta x_\mu \\ &= 1 + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^\dagger(x_n) \Delta x_\mu + V(x_n) \partial_\mu V^\dagger(x_n) \Delta x_\mu \\ &= V(x_n) V^\dagger(x_{n+1}) + i V(x_n) A_\mu(x_n) V^\dagger(x_{n+1}) \Delta x_\mu + O((\Delta x)^2) \\ &= V(x_n) [1 + i A_\mu(x_n) \Delta x_\mu] V^\dagger(x_{n+1}) + O((\Delta x)^2) \\ &\rightarrow U'(x, y) = V(x) U(x, y) V^\dagger(y) \end{aligned}$$

Gauge action

■ リンク変数

$$U_{n,\mu} \equiv U(n, n+\hat{\mu}) = \exp[ia A_{\mu}(n)] \in \text{SU}(N)$$

- リンク変数は両端の点でのゲージ変換を受けるので、「閉じた経路」にそって積をとると、その trace はゲージ不変。

$$\prod_{n \in C} U \rightarrow V(n) \left(\prod_{n \in C} U \right) V^+(n)$$

■ Plaquette

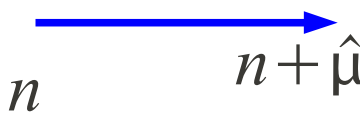
Lattice 上で最も小さな loop は
単位正方形

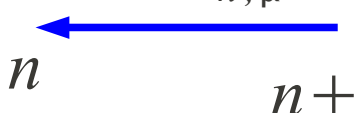
$$n \rightarrow n+\hat{\mu} \rightarrow n+\hat{\mu}+\hat{\nu} \rightarrow n$$

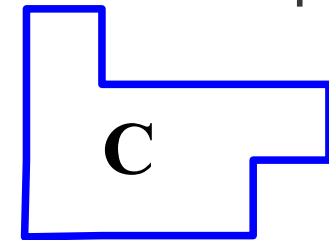
$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\nu,\mu}^+ U_{n,\nu}^+$$

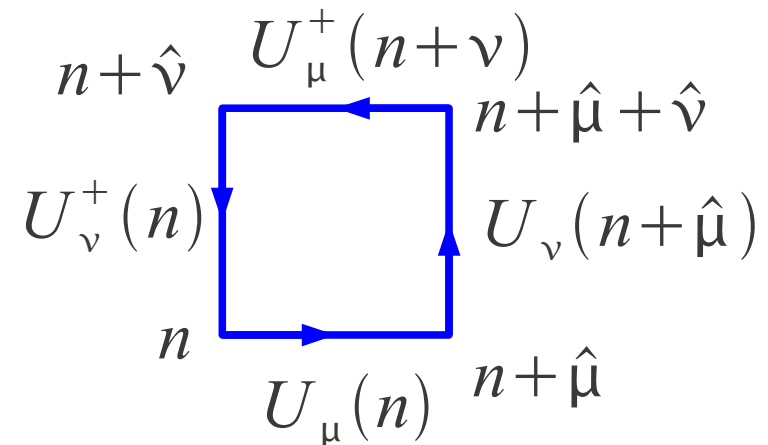
■ Gauge action (plaquette action)

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right] \quad (\beta_g = 2 N_c / g^2)$$

$$U_{n,\mu} = U(n, n+\hat{\mu})$$


$$U_{n,\mu}^+ = U(n+\hat{\mu}, n)$$


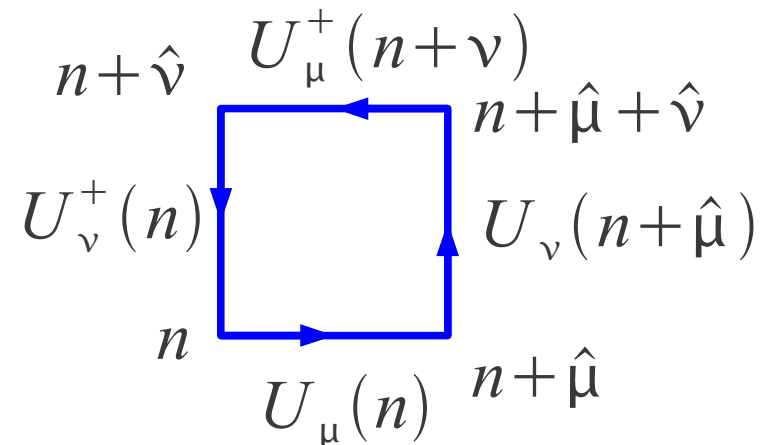




Appendix: Plaquette and continuum action

■ ゲージ場の格子作用

$$S_G = \beta_g \sum_{\text{plaq.}} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_{\mu\nu}(n) \right]$$



● U(1) (電磁場) の場合：周積分 = rotation の面積分 $\rightarrow F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

● 非可換ゲージ場の場合：Hausdorff 公式の利用 $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

$$\begin{aligned} \text{tr } U_{\mu\nu}(x) &= \text{tr } e^{ia\{A_\mu(x) + A_\nu(x+\hat{\mu}) + ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}} \times e^{-ia\{A_\mu(x+\hat{\nu}) + A_\nu(x) - ia[A_\mu, A_\nu]/2 + \dots\}} \\ &= \text{tr } e^{ia[(A_\nu(x+\hat{\mu}) - A_\nu(x)) - (A_\mu(x+\hat{\nu}) - A_\mu(x)) + ia[A_\mu, A_\nu] + O(a^3)]} \\ &= \text{tr} \left[1 + ia^2 F_{\mu\nu} + a^4 X_4 - a^4 F_{\mu\nu}^2/2 + O(a^6) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G = \frac{\beta_g}{N_c} \sum_{n, \mu \neq \nu} \text{tr} \left[\frac{a^4}{4} F_{\mu\nu}^2(n) \right] = \frac{a^4}{2g^2} \sum_{n, \mu \neq \nu} \text{tr} F_{\mu\nu}^2(n)$$

S. Aoki, Text

■ ゲージ場の経路積分

$$Z_G = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp(-S_G) = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \exp[\beta_g \sum_{P \in \text{plaq.}} \text{tr}(U_P + U_P^+)]$$

- dU は群上の不変測度 (Haar measure)
→ ゲージ変換

$$U_{n, \mu} \rightarrow V(n) U_{n, \mu} V^+(n + \hat{\mu})$$

に対して不変な積分の測度が必要

■ リンク積分 $SU(N)$

- ゲージ不変性のみで、リンク変数の多項式の積分はほぼ決まる。

$$\int dU \, 1 = 1 \quad (\text{normalization}), \quad \int dU \, U_{ab} = 0$$

$$\int dU \, U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$$

$$\int dU \, U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

Proof of the one-link integral formulae

■ $\int dU U_{ab} = 0$

● LHS = R_{ab} とおく。両辺に左から $SU(N)$ 行列 V をかけると

$$\text{LHS} = \int dU (VU)_{ab} = \int d(VU) (VU)_{ab} = R_{ab}, \quad \text{RHS} = (VR)_{ab}$$

V は任意の $SU(N)$ の元だから、 $R_{ab} = 0$

■ $\int dU U_{ab} U_{ij}^+ = \frac{1}{N} \delta_{aj} \delta_{bi}$

● LHS = T_{bi}^{aj} とおく。 U, U^+ が LU, U^+L^+ と変換するよう L, L^+ をかける。

$$\text{LHS} = \int dU (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = \int d(LU) (LU)_{ab} (LU)_{ij}^+ = T_{bi}^{aj}$$

$$\text{RHS} = L_{ac} T_{bi}^{ck} L_{kj}^+ \rightarrow L T_{bi} = T_{bi} L \rightarrow T_{bi}^{aj} = S_{bi} \delta^{aj}$$

任意の $SU(N)$ の元と交換するので上添字について T は単位行列。

同様に右変換して S も単位行列に比例。

$a=j$ において和をとると、比例係数が $1/N$ と分かる。

Proof of the one-link integral formulae

$$\int dU U_{ai} U_{bj} U_{ck} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} \quad (N=3)$$

- 左辺を T_{ijk}^{abc} とおく。U を左変換。 $T_{ijk}^{abc} = L_{ad} L_{be} L_{cf} T_{ijk}^{def}$
任意の L に対して不変な 3 階のテンソルは完全反対称テンソルのみ。
右変換も同様。

$$T_{ijk}^{abc} = c \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk}$$

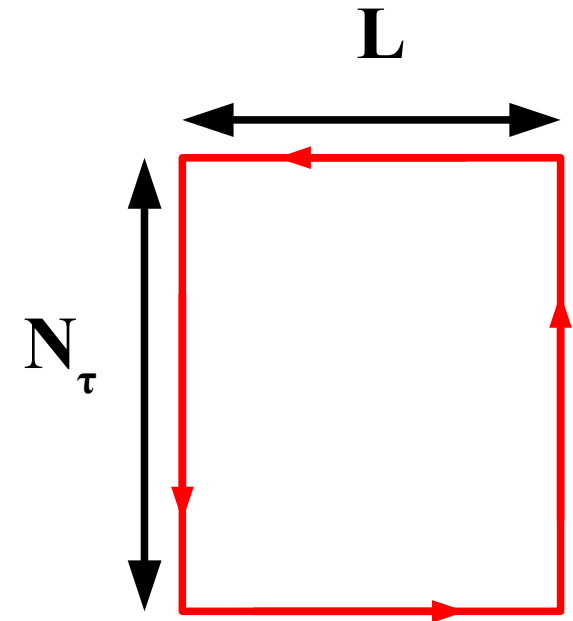
- 両辺に abc をかけて和をとり、 $\det U=1$ を使うと $c=1/N!$

Wilson Loop

- One link integral formulae の応用として、
強結合領域での Wilson loop の期待値を求めてみます。
- Wilson loop

$$W(C=L \times N_\tau) = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

- 空間方向 L 、時間方向 N_τ のループにそって、
リンク変数を掛け合わせたもの。
- 意味づけ
ある時刻に両端が重いクォークからなり、
 L だけ伸びたストリングを作る。
虚時間 N_τ の後に同じ位置で観測する
確率。



$$\langle O_L(N_\tau) O_L^+(0) \rangle \propto \exp(-V(L) N_\tau) \quad (\text{for large } N_\tau)$$

$V(L)$ = Interquark potential

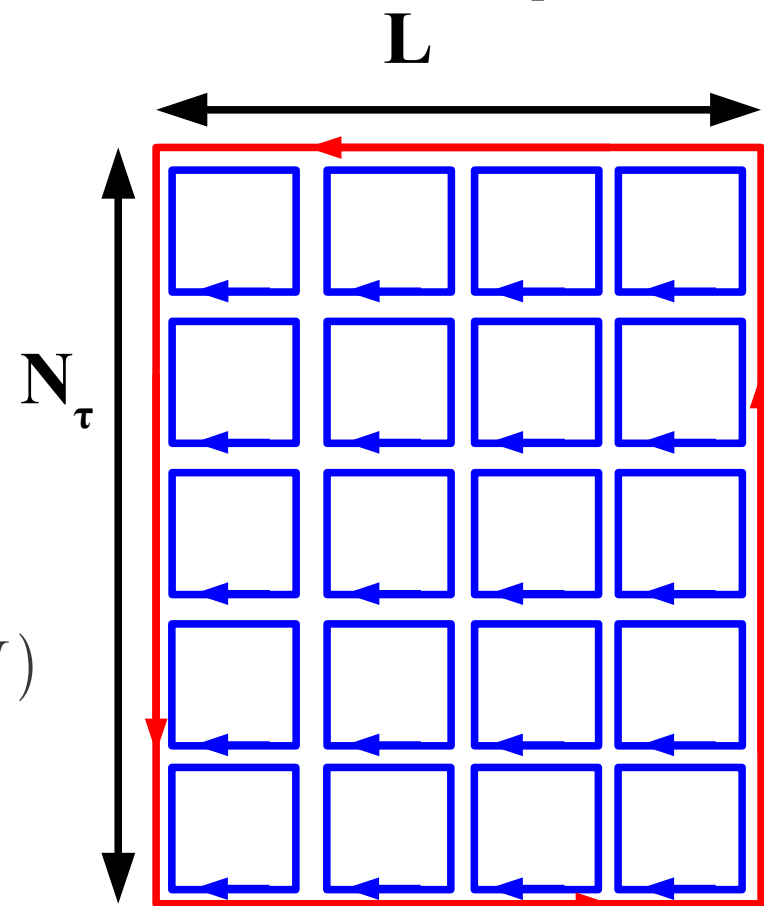
■ 強結合極限での評価

$$\langle W(C=L \times N_\tau) \rangle = \int DU W(C) \exp \left[\frac{1}{g^2} \sum_P \text{tr} (U_P + U_P^\dagger) \right]$$

- リンク変数が残っていると積分して0。
→ Wilson loop に含まれるすべてのリンクを plaquette からのリンクと組み合わせて消す必要がある。
- 結合が強いとき、できるだけ少ない数の plaq. で消すには、Wilson loop を平面的に plaq. で埋めればよい。

$$\langle W(C) \rangle = N \left(\frac{1}{g^2 N} \right)^{LN_\tau} \rightarrow V(L) = L \log(g^2 N)$$

強結合極限では面積則
→ クォークの閉じ込め



K.G.Wilson, PRD10('74),2445

Strong Coupling Lattice QCD: Pure Gauge

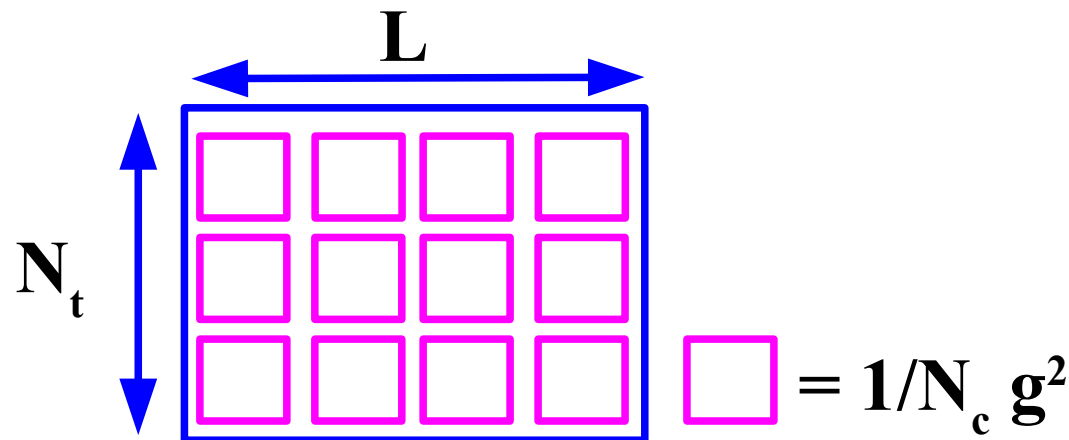
■ Quarks are confined in Strong Coupling QCD

● Strong Coupling Limit (SCL)

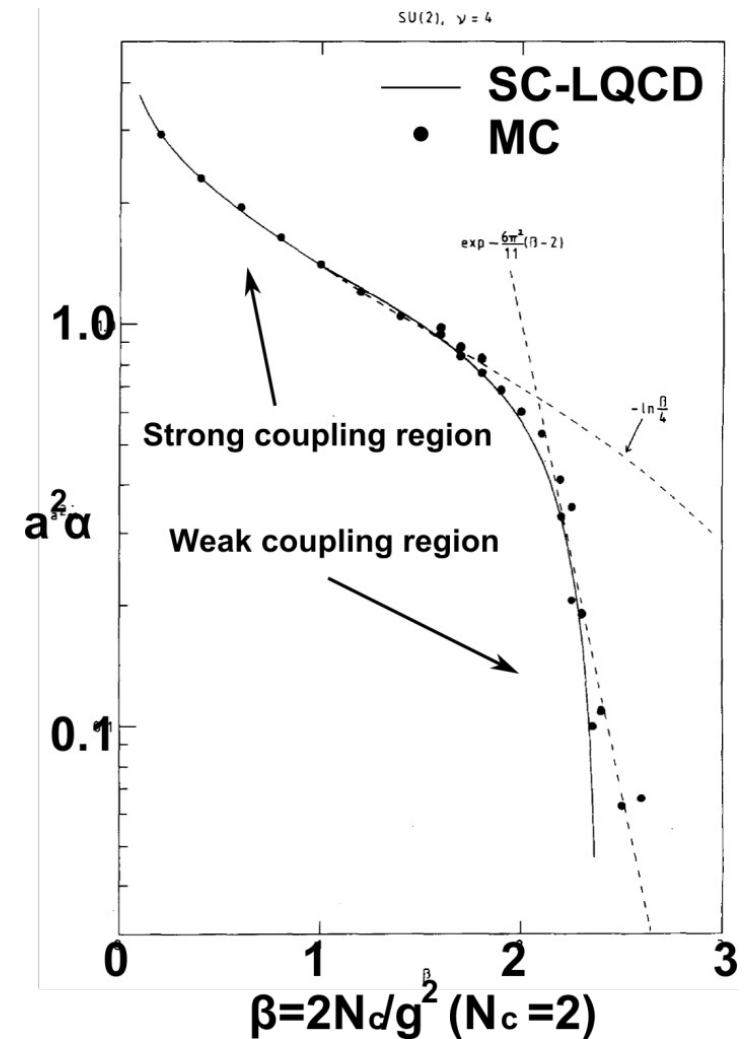
- Fill Wilson Loop with Min. # of Plaquettes
- Area Law (Wilson, 1974)

$$S_{\text{LQCD}} = -\frac{1}{g^2} \sum_{\square} \text{tr} [U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}]$$

● Smooth Transition from SCL to pQCD in MC (Creutz, 1980; Munster 1980)



K. G. Wilson, PRD10(1974),2445
M. Creutz, PRD21(1980), 2308.
G. Munster, (1980, 1981)



Munster, '80

■ Fermion action (Euclidean)

$$S_{q, cont} = \int d^4 x \bar{q} (-i \gamma_\mu D_\mu + m) q, \quad D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu$$

■ 格子上の action → Link 変数の利用

$$S_{F, lat} = a^4 \sum_x \left[\sum_\mu \frac{(\bar{q}(x) \Gamma_\mu U_{x, \mu} q(x + \hat{\mu}) - \bar{q}(x + \hat{\mu}) \Gamma_\mu U_{x, \mu}^+ q(x))}{2a} + m \bar{q}(x) q(x) \right]$$

● q, U の変換性からゲージ不変

$$q(x) \rightarrow V(x) q(x), \quad U_{x, \mu} \rightarrow V(x) U_{x, \mu} V^+(x + \hat{\mu})$$

● 連続極限で $S_{q, cont}$ へ

$$U = 1 + i A_\mu a, \quad S_{F, lat} \rightarrow a^4 \sum_x \bar{q}(x) \left[\Gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i A_\mu \right) + m \right] q(x)$$

$$\Gamma_\mu = -i \gamma_\mu$$

これ以降、 Γ を γ , $x_4 \rightarrow x_0$ とします。

Fermions on the Lattice (cont.)

■ 一見よさそうだが、問題点が... → ダブラー

- 自由場の場合、Fermion の hopping matrix を Fourier 変換すると

$$D = i \Gamma_\mu \frac{\sin(p_\mu a)}{a} \quad (p_\mu = 2\pi n_\mu / La, n_\mu = 0, 1, \dots, L-1)$$

- (3+1) 次元格子上で、D は 16 回 0 となる。($p_\mu = 0, \pi/a$)
→ 低エネルギーで現れる Fermion の種類が 16 倍増える。

■ Nielsen-Ninomiya の定理

「適当な仮定 (平行移動不変性、カイラル対称性、局所性、エルミート性、双線形性) を満たす格子 Fermion にはダブラーが存在」

■ 解決方法

- Wilson Fermion : $a \rightarrow 0$ でダブラーが無限に重くなるように 2 階微分に対応する項を加える。(カイラル対称性がない)
- Domain wall Fermion, Overlap Fermion,
- Staggered (Kogut-Susskind) Fermion

Staggered Fermion

- Staggered Fermion: Spinor 構造・ γ 行列を数因子 η で表せる。

$$q = \gamma_0^{x_0} \gamma_1^{x_1} \gamma_2^{x_2} \gamma_3^{x_3} \chi$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x+\hat{\mu}) &= \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \gamma_2^{x_2} \gamma_1^{x_1} \gamma_0^{x_0} \gamma_\mu \gamma_0^{x_0} \cdots \gamma_\mu^{x_\mu+1} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x+\hat{\mu}) \\ &= \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \gamma_3^{x_3} \cdots \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \gamma_\mu^{2x_\mu+2} \gamma_{\mu+1}^{x_{\mu+1}} \cdots \gamma_3^{x_3} \chi(x+\hat{\mu}) = \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \chi(x+\hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_0+x_1+\cdots+x_{\mu-1}}$$

- Lattice action with staggered Fermion

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

Fermion の 4 成分が全て等価。1 成分のみを考えてよい。

→ 16 個のダブラーが、(Dirac Fermion で) 4 つのダブラーとなる。

- カイラル変換： χ, χ^{bar} について同じ、隣り合った χ で逆の位相

$$\chi_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \chi_x, \quad \bar{\chi}_x \rightarrow \exp(i\theta \varepsilon(x)) \bar{\chi}_x, \quad \varepsilon(x) = (-1)^{x_0+x_1+x_2+x_3}$$

→ 厳密なカイラル対称性をもつ

Lattice QCD with staggered Fermion

■ Lattice QCD action with (unrooted) staggered Fermion

$$S_{LQCD} = S_F + S_G$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x U_{x, \mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} U_{x, \mu}^+ \chi_x \right] + \sum_x m \bar{\chi}_x \chi_x$$

$$S_G = -\frac{1}{g^2} \sum_{\text{plaq.}} \text{tr} \left[U_P + U_P^+ \right]$$

- Spinor 構造が simple(無い) $\rightarrow$ 解析的・数値的な計算が簡単
- $m=0$ (chiral limit) で厳密な chiral 対称性をもつ
 $\rightarrow$ カイラル相転移の議論が可能
- 連続領域 ($g \rightarrow 0, a \rightarrow 0$) では $N_f=4$ だが、有限の a ではフレーバー対称性は破れている。
- Chiral anomaly ($U(1)_A$) については controversial

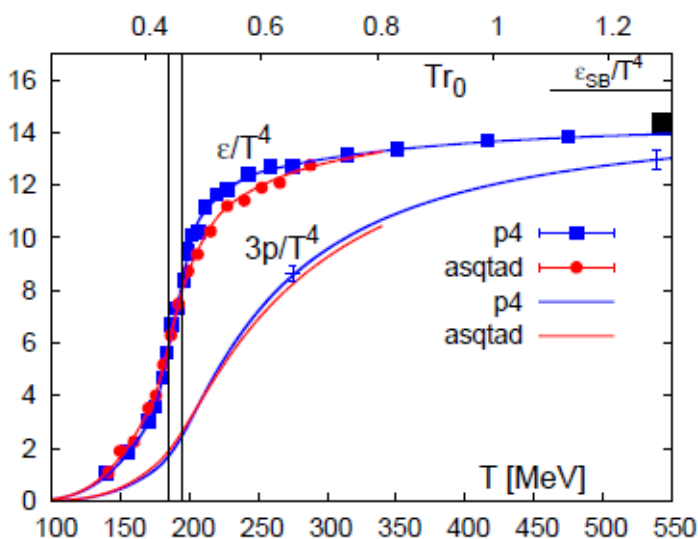
Monte-Carlo simulation in Lattice QCD

■ 分配関数 (or 生成汎関数)

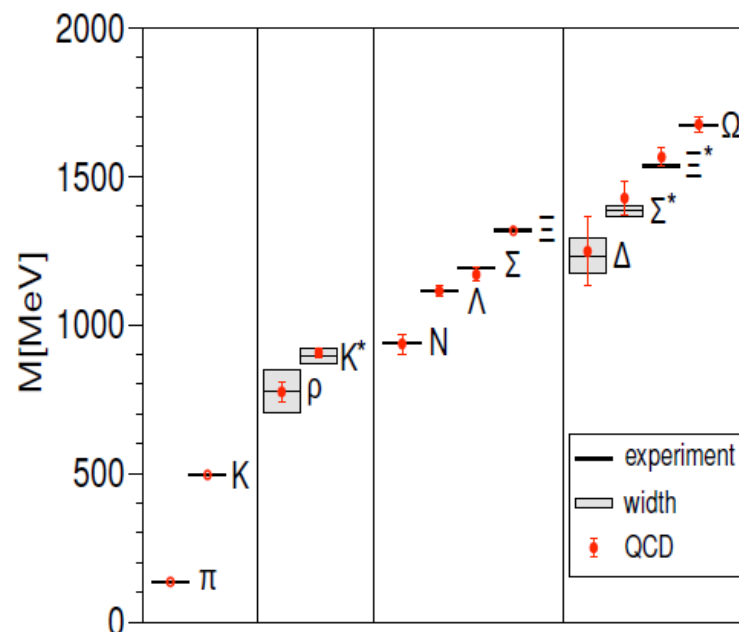
$$S = S_G(U) + \bar{q} D q, \quad Z[J] = \int DU \det D(U) \exp[-S_G(U) + J \hat{O}]$$

$$\rightarrow \langle O \rangle = \frac{\int DU \det D(U) O(U) \exp[-S_G(U)]}{\int DU \det D(U) \exp[-S_G(U)]} = \frac{\delta Z[J]}{\delta J}$$

- Monte-Carlo 法では、通常先に Fermion determinant を評価し、リンク変数の配位を MC 法で求める。クォークを含む演算子の場合には、propagator をあらわに評価。



Hot QCD (2009)



BMW collaboration, Science 322(2008)1224

■ 格子 QCD

- リンク変数の導入により、完全なゲージ対称性を保持。
- グルーオン作用 : Plaquette (プラケット) 作用 (or its improved ver.)
→ 連続極限 ($a \rightarrow 0$) で連続理論のゲージ作用
- クォーク作用 : リンク変数を用いてゲージ対称性を保てる。

■ Monte-Carlo simulation

- 非摂動的 QCD を厳密に解く第一原理計算。
- 大きな成功 : カラーの閉じ込め、ハドロン質量、QCD 相転移 ($\mu=0$)
- カイラル対称性には多少の問題あり
 - ◆ Staggered fermion: Fast, but ugly ($N_f=4 \rightarrow$ quarter root, anomaly, ...)
 - ◆ Wilson fermion: Explicit chiral symmetry breaking at finite a .
 - ◆ DW/Overlap fermion: large numerical cost.

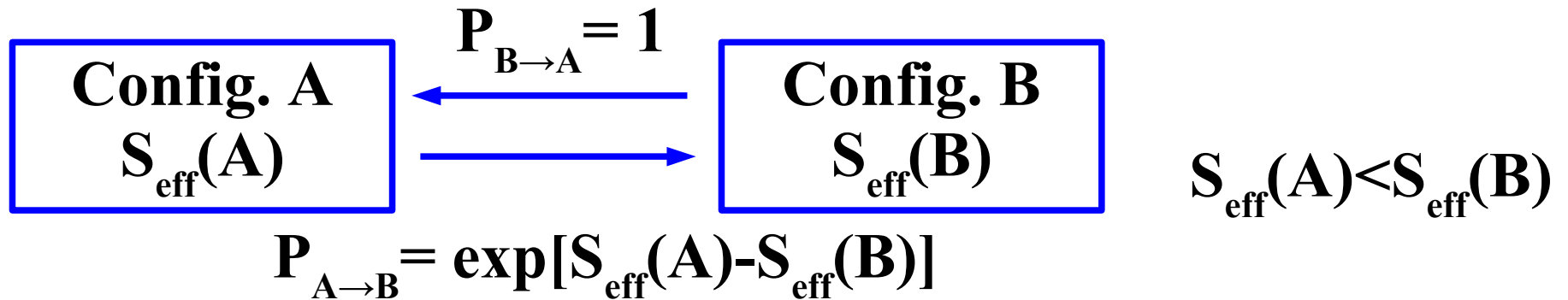
■ 有限密度での格子 QCD MC simulation は残された大きな問題。

- 「大学院生や postdoc に与えてはいけないテーマ」(青木さん)

Monte-Carlo Integral: Importance Sampling

■ Metropolis sampling

= One of the typical (popular) method of importance sampling



● Trial prob.: $P_{A \rightarrow B}^{\text{try}} = P_{B \rightarrow A}^{\text{try}}$ (detailed balance)

● Pickup prob.: According to S_{eff} .

● In equilibrium, $P(A) P_{A \rightarrow B} = P(B) P_{B \rightarrow A} \rightarrow P(A) \propto \exp[-S_{\text{eff}}(A)]$

Approaches to Finite Density QCD

The Sign Problem

- When the action is complex, strong cancellation occurs in the Boltzmann weight at large volume. = **The Sign Problem**

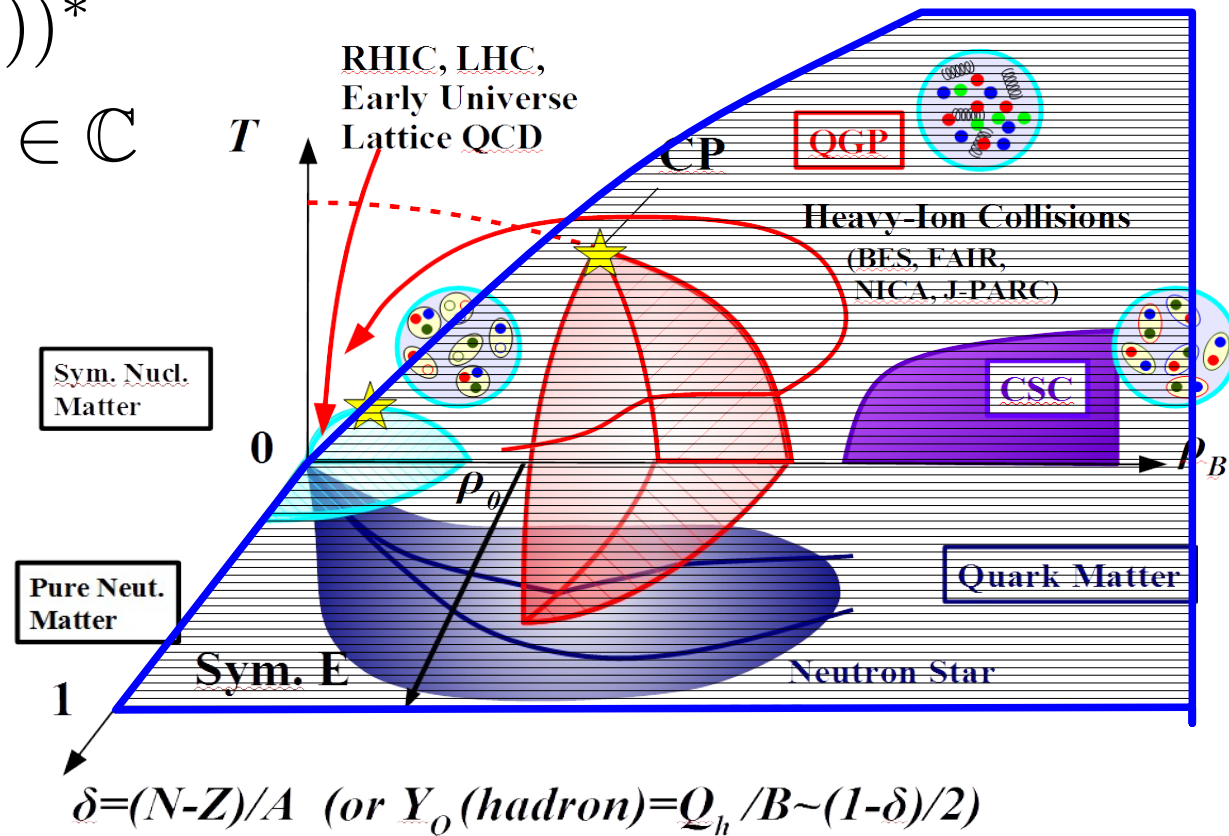
$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}x e^{-S(x)} (S(x) \in \mathbb{C}) \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

- Fermion det. is complex at finite density

$$\det D(\mu) = (\det D(-\mu^*))^*$$

$$\rightarrow S_{\text{eff}} = S - \log \det D \in \mathbb{C}$$

- Difficulty in studying finite density in LQCD**
 $\rightarrow$ Heavy-Ion Collisions,
 Neutron Star,
 Binary Neutron
 Star Mergers,
 Nuclei, ...



Approaches to the Sign Problem in Lattice 2018

■ Standard approaches

- Taylor expansion
- Imaginary μ (Analytic cont. / Canonical)
- Strong coupling

→ *Mature, Practically useful, but cannot reach cold dense matter*

■ Integral in Complexified variable space

- Lefschetz thimble method
- Complex Langevin method
- Path optimization method
- Action modification

→ *Premature, but Developing !*

■ Other Approaches

Integral in Complexified Variable Space

- Phase fluctuations can be suppressed by shifting the integration path in the complex plain.

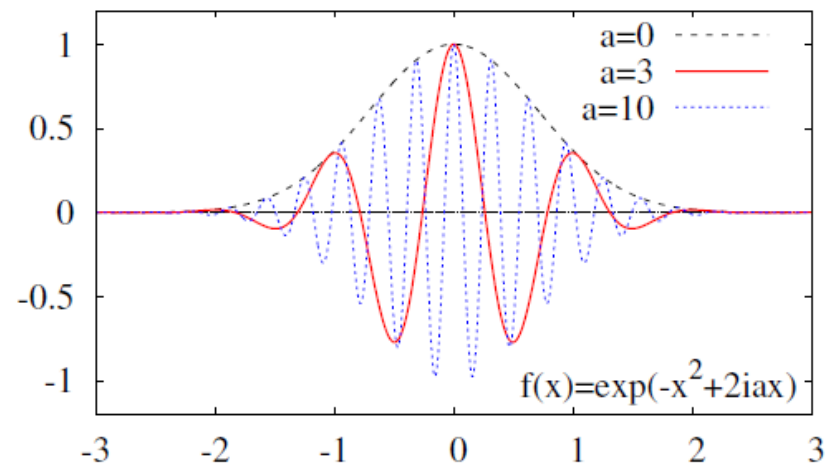
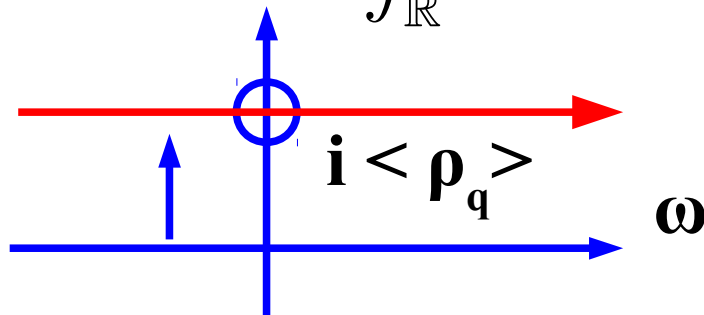
$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}} \mathcal{D}x e^{-S(x)} = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}z e^{-S(z)} = \int_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}} \mathcal{D}x J e^{-S(z(x))}$$

- Simple Example: Gaussian integral (bosonized repulsive int.)

Mori, Kashiwa, AO ('18b)

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega e^{-\omega^2/2 + i\omega\rho_q} = \int_{\mathbb{R} + i\rho_q} d\omega e^{-\underbrace{(\omega - i\rho_q)^2}_{\substack{\downarrow \\ z}}/2 - \rho_q^2/2}$$

$$= \exp(-\rho_q^2/2) \int_{\mathbb{R}} dz e^{-z^2/2}$$

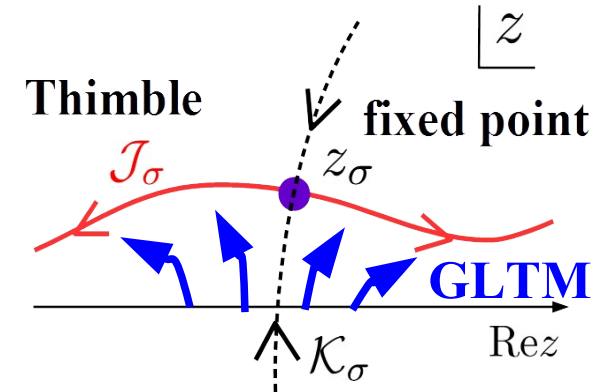


- Lefschetz thimble / Complex Langevin / Path Optimization

Lefschetz thimble method

*E. Witten ('10), Cristoforetti et al. (Aurora) ('12),
Fujii et al. ('13), Alexandru et al. ('16); [Zambello (Mon)]*

- Solving the flow eq. from a fixed point σ
→ Integration path (thimble)
Note: $\text{Im}(S)$ is constant on one thimble

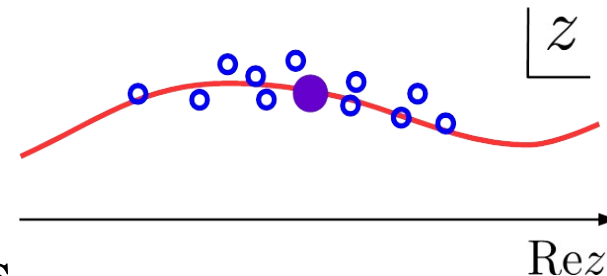


$$\mathcal{J}_\sigma : \frac{dz_i(t)}{dt} = \overline{\left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)} \rightarrow \frac{dS}{dt} = \sum_i \left| \frac{\partial S}{\partial z_i} \right|^2 \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{C} = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

- Problem:
 - Phase from the Jacobian (residual. sign pr.),
 - Different Phases of Multi-thimbles (global sign pr.),
 - Stokes phenomena, ...

Complex Langevin method

*Parisi ('83), Klauder ('83), Aarts et al. ('11),
Nagata et al. ('16); Seiler et al. ('13), Ito et al. ('16);
[Sinclair, Tsutsui, Attanasio, Ito, Joseph (Mon)]*



■ Solving the complex Langevin eq. → Configs.

$$\frac{dz_i}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial z_i} + \eta_i(t) (\eta_i : \text{White noise}), \quad \langle \mathcal{O}(x) \rangle = \langle \mathcal{O}(z) \rangle$$

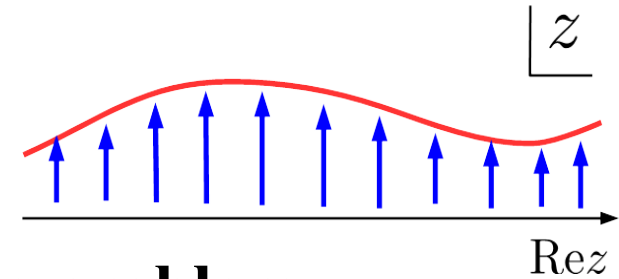
■ No sign problem.

■ Problem:

- CLM can give converged but wrong results,
and we cannot know if it works or not in advance.

Path optimization method

*Mori et al. ('17), AO, Mori, Kashiwa (Lattice 2017),
Mori et al. ('18), Kashiwa et al. ('18);
Alexandru et al. ('17 (Learnifold), '18 (SOMMe), '18),
Bursa, Kroyter ('18), [Lawrence, Warrington, Lamm (Mon)]*



- Integration **path** is **optimized** to evade the sign problem, i.e. to enhance the average phase factor.

$$\text{APF} = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{pq}} = \int dx e^{-S} / \int dx |e^{-S}| = \mathcal{Z} / \mathcal{Z}_{\text{pq}}$$

Sign Problem → Optimization Problem

- Cauchy(-Poincare) theorem: the partition fn. is invariant if
 - the Boltzmann weight $W=\exp(-S)$ is holomorphic (analytic),
 - and the path does not go across the poles and cuts of W .
- At Fermion det.=0, S is singular but W is not singular
 - Problem: quarter/square root of Fermion det.

Cost Function and Optimization

- **Cost function:** a measure of the seriousness of the sign problem.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z(x)] &= \frac{1}{2} \int dx \left| e^{i\theta(x)} - e^{i\theta_0} \right|^2 \left| J(x) e^{-S(z(x))} \right| \\ &= |\mathcal{Z}| \left(\left| \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{pq}} \right|^{-1} - 1 \right) = \mathcal{Z}_{\text{pq}} - |\mathcal{Z}| \\ &\quad [\theta = \arg(Je^{-S}), \theta_0 = \arg(\mathcal{Z})]\end{aligned}$$

- **Optimization:** the integration path is optimized to minimize the Cost Function.
(via Gradient Descent or Machine Learning)

- **Example:** One-dim. integral $\rightarrow$ Complete set

$$z(x) = x + iy(x), \quad y(x) = \sum_n c_n H_n(x)$$

$$\mathcal{Z} = \int dx J(x) e^{-S(z(x))}, \quad J(x) = \frac{dz(t)}{dx}$$

Benchmark test: 1 dim. integral

■ A toy model with a serious sign problem

J. Nishimura, S. Shimasaki ('15)

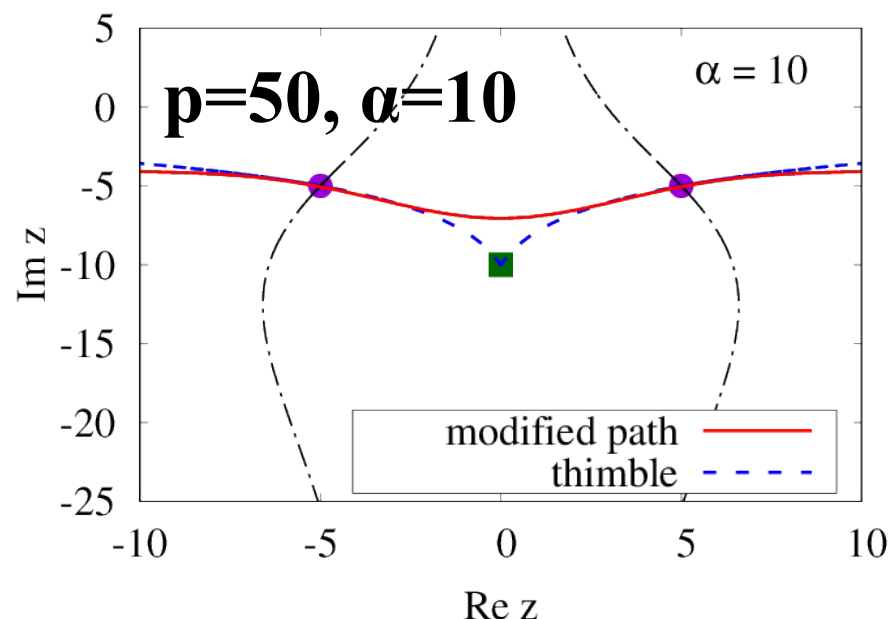
$$\mathcal{Z} = \int dx (x + i\alpha)^p \exp(-x^2/2)$$

- Sign prob. is serious with large p and small $\alpha \rightarrow$ CLM fails

■ Path optimization

$$y(x) = c_1 \exp(-c_2^2 x^2/2) + c_3), \quad J = 1 + i dy/dx$$

- Gradient Descent optimization
- Optimized path ~ Thimble around Fixed Points

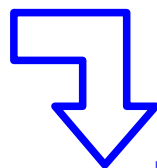
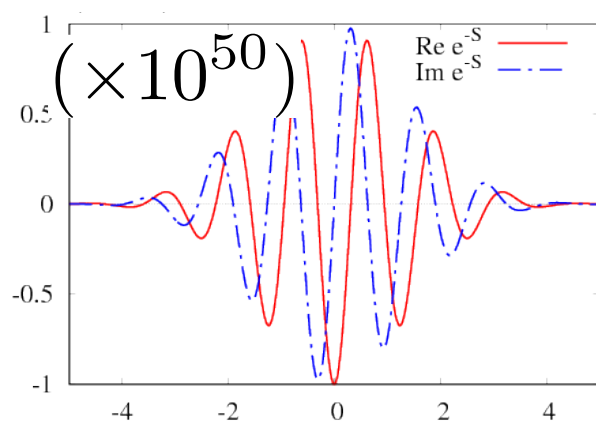


Mori, Kashiwa, AO ('17); AO, Mori, Kashiwa (Lat 2017)

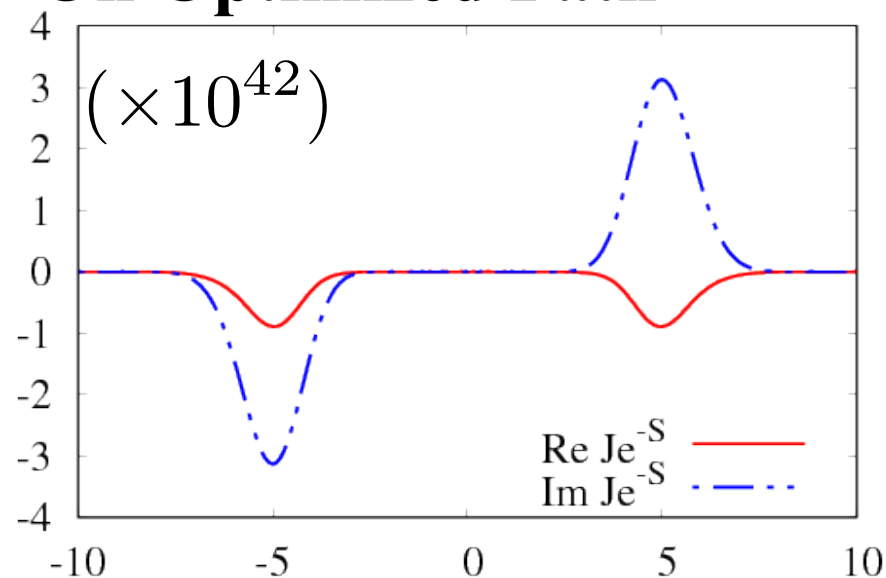
Benchmark test: 1 dim. integral

■ Stat. Weight $J e^{-S}$

On Real Axis

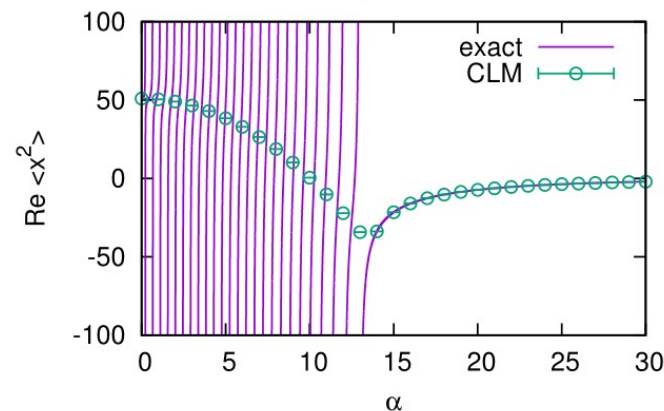


On Optimized Path

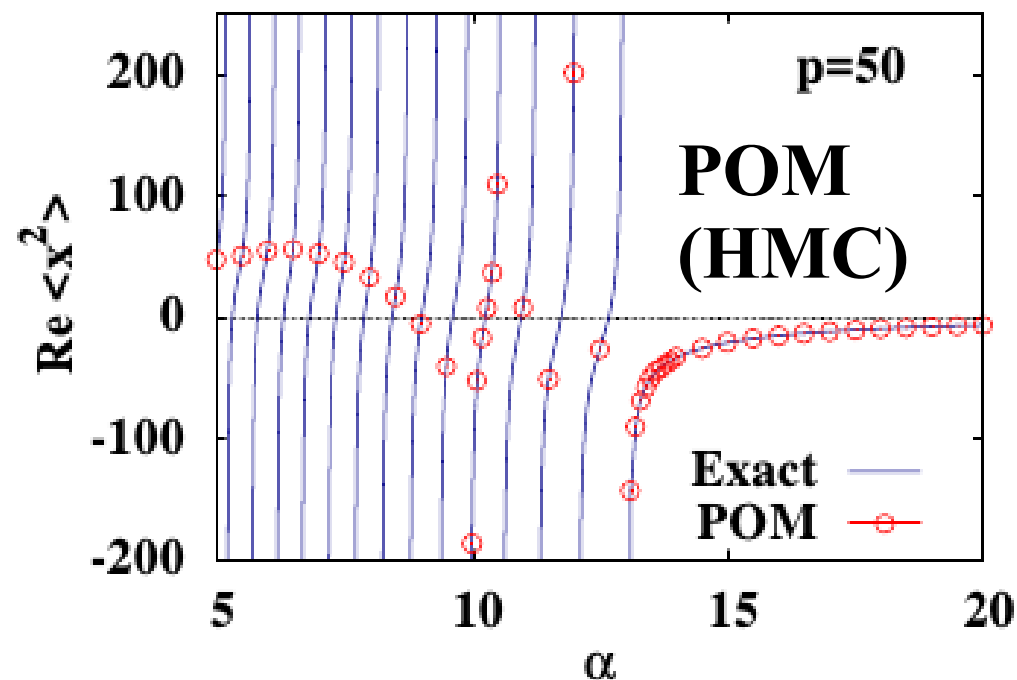


■ Observable

CLM *Nishimura, Shimasaki ('15)*



VS



Re z

Mori, Kashiwa, AO ('17); AO, Mori, Kashiwa (Lat 2017)

レポート(4 回目)

- 全部で 11 問出しました。3 問程度以上レポートを出してください。レポート(4 回目)の〆切は 1/28。直接大西へ、あるいは基研 K407(大西居室)のレポート袋に、あるいはメールで提出。
- Rep.10: リンク積分を利用して、Wilson ループの期待値を強結合領域で求めよ。
余裕があれば、強結合極限での結果に加えて、 $1/g^2$ 補正がどのように与えられるか評価せよ。
(今回の「余裕があれば」は、割と簡単。無理しなくてよいですが、トライの価値はあります。)
- Rep.11: この講義の後半(大西担当分)では、物質論の立場からの原子核物理とそこへの理論的手法のいくつかを学びました。
興味をもった現象、あるいは手法について調べ、考えられる研究の発展の方向を提案せよ。(修論のテーマが関連している場合には、それでも OK。レポート用紙 1 枚程度以上で述べること。)