

# 原子核基礎論B

京大基研 大西 明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 核力・特に非中心力や3体力 (1回)
2. 原子核構造を記述するための種々のモデルの最近の進展 (2回)
3. 最近の中性子過剰核の物理の最近の進展 (2回)
4. 原子核構造における異なる状態の混合や競合 (2回) 板垣

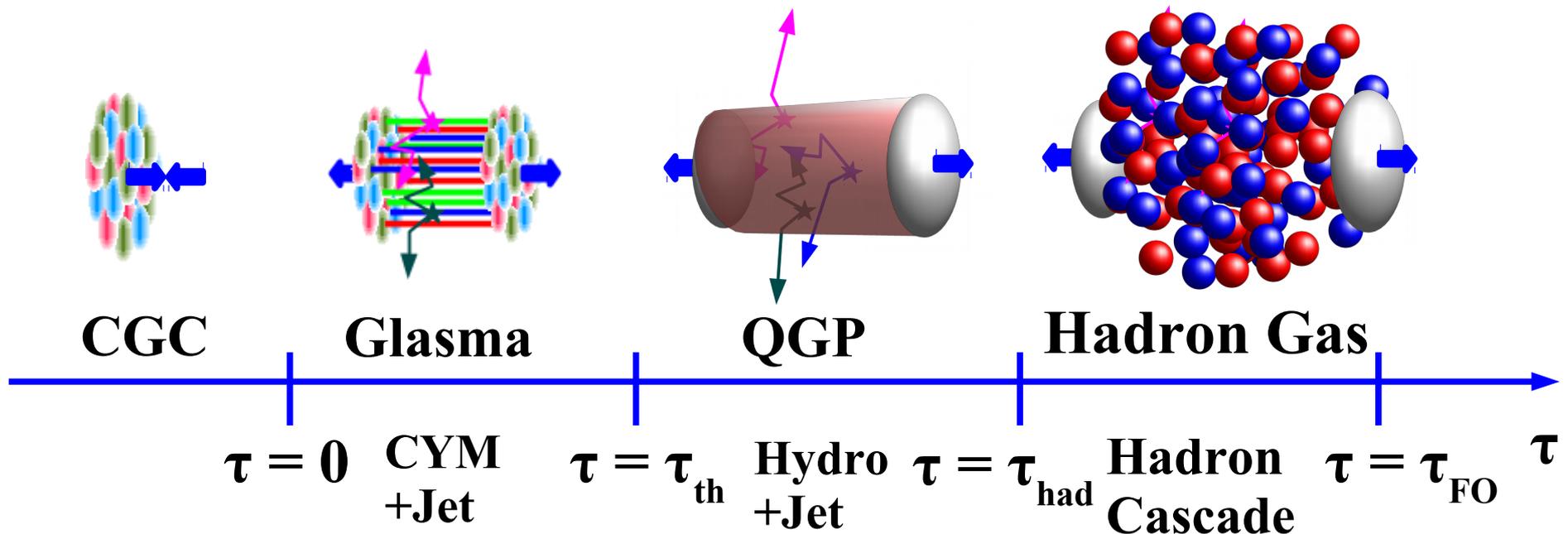
5. 高温・高密度核物質概観 (1回)
6. 有限温度・密度における場の理論入門 (2回)
7. QCD 有効モデルにおける相転移と相図 (2回)
8. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1回)

9. 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論 (2回)

大西

# 高エネルギー重イオン衝突における時間発展

- 反応前: カラーグラス凝縮 (Color Glass Condensate; CGC)  
あるいは核子の集合 (比較的低いエネルギーの場合)  
反応直後: 古典グルーオン場、ジェット  
→ グルーオン場の理論
- Quark Gluon Plasma (QGP)  
→ 流体力学
- ハドロン気体  
→ ボルツマン方程式



# *HIC Transport Models: Five Major Origins*

---

## ■ *Nuclear Mean Field Dynamics*

- **Basic Element of Low Energy Nuclear Physics**
- **TDHF  $\rightarrow$  Vlasov  $\rightarrow$  BUU**

## ■ *NN two-body (residual) interaction*

- **Main Source of Particle Production**
- **Boltzmann equation  $\rightarrow$  Intranuclear Cascade Models**

## ■ *Partonic Interaction and String Decay*

- **Main Source of high pT Particles at Collider Energies**
- **JETSET + (previous) PYTHIA (Lund model)  $\rightarrow$  (new) PYTHIA**

## ■ *Relativistic Hydrodynamics*

- **Most Successful Picture at RHIC**

## ■ *Classical Field Dynamics*

- **Classical Gluon Field = Initial condition of Hydro. at Collider Energies**

# 相対論的流体力学

## ■ 流体力学 = 各時空点での熱力学量と流れにより状態を記述

- 高温・高密度状態では平均自由行程が短いと期待
- 局所熱平衡に達していれば、  
各時空点で流体静止系の状態は少数の熱力学量で記述可能
- 運動方程式 = 保存則

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

$T^{\mu\nu}$  = エネルギー運動量テンソル、 $J^{\mu}$  = (4元) 保存カレント

- 4元速度ベクトル

$$u^{\mu} = \gamma(1, \boldsymbol{v}), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$$

# 完全流体(1)

## ■ 静止系でのエネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x) & & & \\ & P(x) & & \\ & & P(x) & \\ & & & P(x) \end{pmatrix}$$

## ■ 完全流体のエネルギー運動量テンソル、保存カレント

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad J^\mu = n u^\mu$$

- $T^{\mu\nu}$  のテンソル構造が  $u^\mu, g^{\mu\nu}$  のみで作られているとすると

$$T^{\mu\nu} = a u^\mu u^\nu + b g^{\mu\nu}$$

静止系  $u^\mu = (1, 0)$  を考えて  $a, b$  が定まる。

- $T^{\mu\nu}, J^\mu$  が 4 元速度ベクトルの微分を含まない！

# 完全流体(2)

## ■ 運動方程式

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

## ■ $u^\mu$ 方向 → エントロピー保存

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= u^\mu \partial_\mu \varepsilon + (\varepsilon + P)(\partial_\mu u^\mu) \\ &= u(T \partial_\mu s + \mu \partial_\mu n) + (Ts + \mu n)(\partial_\mu u^\mu) \\ &= T \partial_\mu (s u^\mu) + \mu \partial_\mu J^\mu \\ &= T \partial_\mu (s u^\mu) = 0 \end{aligned}$$

## ● 熱力学関係式 (s: エントロピー密度)

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn, \quad \varepsilon + P = Ts + \mu n$$

## ● $u^\mu u_\mu = 1$ より $\partial_\nu (u^\mu u_\mu) = u^\mu \partial_\nu u_\mu = 0$

完全流体ではエントロピーは保存する！

# 完全流体(3)

## ■ $u^\mu$ に垂直な方向 $\rightarrow$ オイラー方程式

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$$

$$\Delta_{\mu\nu} \partial_\rho T^{\rho\nu} = -\partial_\mu P + u_\mu u^\nu \partial_\nu P + (\varepsilon + P) u^\mu \partial_\mu u_\nu = 0 \quad (*)$$

## ● $u^\mu \partial_\mu \sim$ ラグランジュ微分 ( $D_t$ )

$$u^\mu \partial_\mu = \gamma (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) = \gamma D_t$$

## ● (\*) 式の空間成分 (N.R. : $\varepsilon \gg P$ , $D_t P \sim 0$ )

$$-\gamma [\nabla P + \mathbf{v} D_t P + (\varepsilon + P) D_t \mathbf{v}] = 0$$

$$\text{N.R.} \rightarrow \varepsilon \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P$$

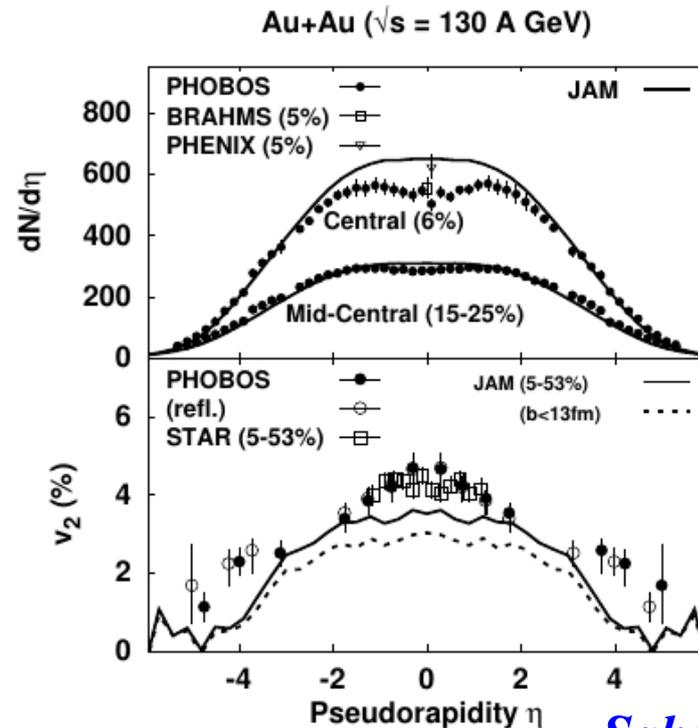
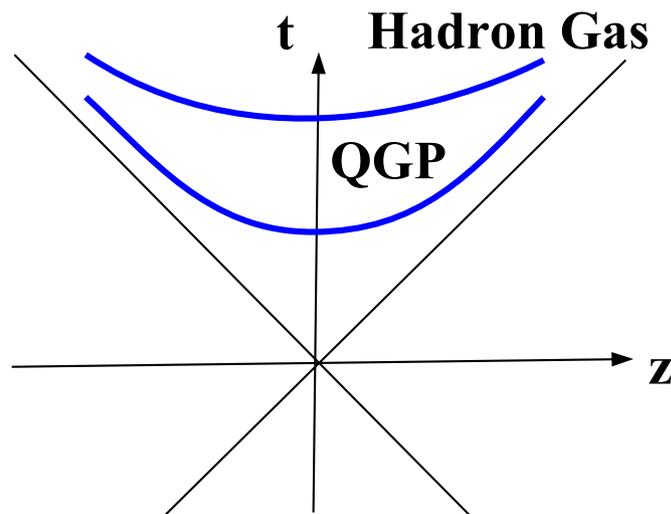
オイラー方程式: 流体素片の受ける力は圧力勾配が与える

# Bjorken flow (1)

- 高エネルギー反応の mid-rapidity 領域では近似的に boost invariant な物質が生成されていると期待される。

$$\frac{dN}{dy} \simeq \text{const.}, \quad y = \frac{1}{2} \log \left( \frac{E + P_z}{E - P_z} \right)$$

( $y = \text{rapidity}$ ,  $z$  軸方向の boost に対して定数だけ変化する”速度”)



*Sahu+ (2006)*

# Bjorken flow (2)

## ■ Bjorken flow = boost 不変な完全流体解

- 流体素片は  $v_z = z/t =$  一定の線に沿って1次元膨張すると仮定

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v_z) = (t/\tau, 0, 0, z/\tau) = (\cosh \eta, 0, 0, \sinh \eta)$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \log \left( \frac{t+z}{t-z} \right)$$

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta$$

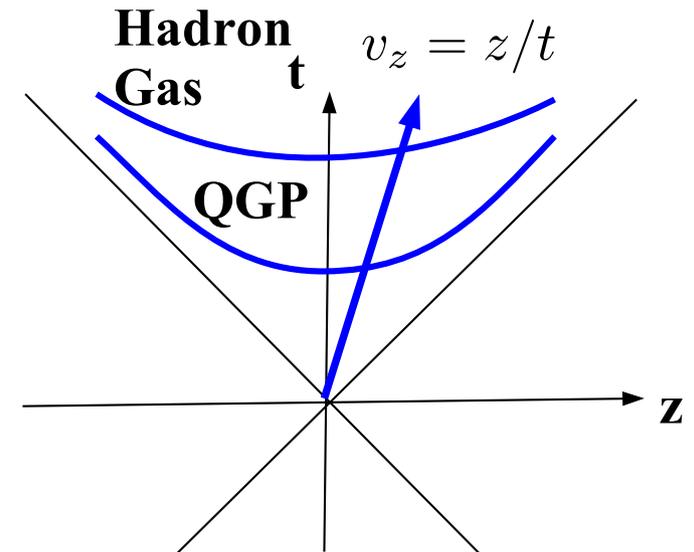
$$\rightarrow u^\mu \partial_\mu = \partial_\tau, \quad \partial_\mu u^\mu = 1/\tau$$

- 完全流体

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0 \rightarrow s(\tau) = \frac{\tau_0}{\tau} s(\tau_0)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon + P}{\tau} = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon(\tau) = \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1+\lambda} \varepsilon(\tau_0) \quad (P = \lambda \varepsilon)$$



# Bjorken flow (3)

## ■ 観測量との比較

- 完全流体描像が正しければ、QGP 生成後エントロピーはほぼ保存
- 質量0の自由粒子では、エントロピー / 粒子数  $\sim 4$

$$S \simeq \xi N \quad (\xi \simeq 4), \quad \frac{dS}{dy} = \underbrace{\pi R^2 \tau_f}_{\text{volume}} s(\tau_f) \simeq \xi \pi R^2 \tau_f n(\tau_f) = \xi \frac{dN}{dy}$$

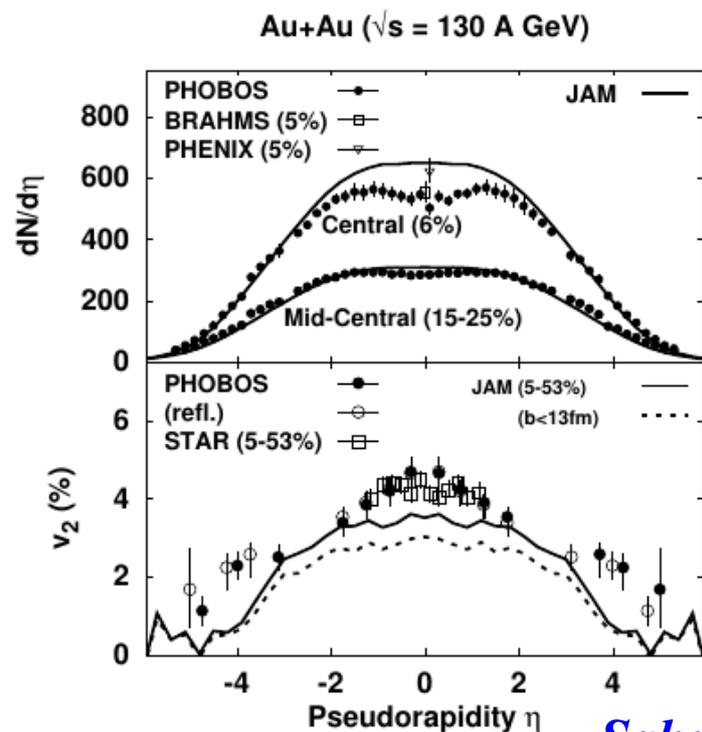
(  $\tau_f =$  凍結時間 ) 観測量

- 高エネルギー重イオン衝突での生成粒子数  $\sim 1000$  / one rapidity  
 $\rightarrow dS/dy \sim 4000$

## ■ 流体模型による分析

$\rightarrow$  熱化時間  $\tau_{th} = (0.6-1.5) \text{ fm/c}$

- 摂動論の結果  $(3-5) \text{ fm/c}$  より有意に短い。
- $\tau_{th}$  での大きなエントロピー密度は初期の高温物質の存在を示す。



*Sahu+ (2006)*

# Boltzmann 方程式 (1)

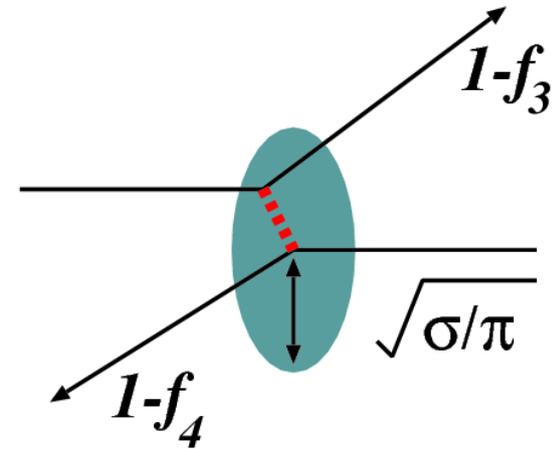
- 平均自由行程の長い低密度状態では、局所平衡が保証されない  
→ 非平衡輸送モデルが必要 (Boltzmann Eq. はその代表)
- Boltzmann equation (classical particle)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = I_{\text{coll}}$$

$$I_{\text{coll}} = - \int \frac{d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^9} w_{12 \rightarrow 34} [f_1 f_2 - f_3 f_4]$$

$$= - \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega [f_1 f_2 - f_3 f_4]$$

- $f =$  位相空間分布関数,  $w =$  遷移確率



# Boltzmann 方程式 (2)

## ■ 平衡分布

$$f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \log f_1 + \log f_2 = \log f_3 + \log f_4$$

### ● 2体衝突での保存量 = Energy & Momentum

$$\log f = -\beta(x)u_\mu(x)p^\mu + C \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \exp(-\beta(x)u_\mu(x)p^\mu + C)$$

### ● $\beta(\mathbf{x})=1/T(\mathbf{x})$ , $u_\mu(\mathbf{x})=4$ 元速度流とすると、静止系でボルツマン分布

## ■ エントロピーの増加 (H 定理)

$$S = - \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \log f$$

$$\frac{dS}{dt} = - \int \frac{d\mathbf{x}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\partial f}{\partial t} \log f = \int d\Gamma \log f_1 (f_1 f_2 - f_3 f_4)$$

$$= \int d\Gamma \frac{1}{4} \log(f_1 f_2 / f_3 f_4) (f_1 f_2 / f_3 f_4 - 1) f_3 f_4 \geq 0$$

$$d\Gamma = w_{12 \rightarrow 34} d\mathbf{x} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 / (2\pi)^{12}$$

$$(X - 1) \log X \geq 0$$

# Boltzmann 方程式 (3)

## ■ Fermion, Boson の Boltzmann Eq. (量子統計)

$$I_{\text{coll}}^{F,B} = - \int \frac{dp_2 dp_3 dp_4}{(2\pi)^9} w_{12 \rightarrow 34} [f_1 f_2 (1 \mp f_3)(1 \mp f_4) - f_3 f_4 (1 \mp f_1)(1 \mp f_2)]$$

## ■ 平衡分布

$$f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4) = f_3 f_4 (1 - f_1)(1 - f_2)$$

$$\rightarrow \log \frac{f_1}{1 - f_1} + \log \frac{f_2}{1 - f_2} = \log \frac{f_3}{1 - f_3} + \log \frac{f_4}{1 - f_4}$$

$$\rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{\exp([\beta(x)u_\mu(x)p^\mu - \beta(x)\mu(x)] + 1)}$$

# TDHF and Vlasov Equation

- **Time-Dependent Mean Field Theory (e.g., TDHF)**  $i\hbar \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = h\phi_i$

- **Density Matrix**

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i^{\text{Occ}} \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad \rightarrow \rho_W = f \text{ (phase space dist.)}$$

- **TDHF for Density Matrix**

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [h, \rho] \quad \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \{h_W, f\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

- **Wigner Transformation and Wigner-Kirkwood Expansion**  
(Ref.: Ring-Schuck)

$$A_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d^3s \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}/\hbar) \langle \mathbf{r} + \mathbf{s}/2 | A | \mathbf{r} - \mathbf{s}/2 \rangle$$

$$(AB)_W = A_W \exp(i\hbar\Lambda/2) B_W$$

$$\Lambda = \nabla'_r \cdot \nabla_p - \nabla'_p \cdot \nabla_r \quad (\nabla' \text{ acts on the left})$$

$$[A, B]_W = 2i A_W \sin(\hbar\Lambda/2) B_W = i\hbar \{A_W, B_W\}_{P.B.} + \mathcal{O}(\hbar^3)$$

# Test Particle Method

## ■ Vlasov Equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \{h_W, f\}_{P.B.} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot v \cdot \nabla_r f - \nabla U \cdot \nabla_p f = 0$$

## ■ Classical Hamiltonian

$$h_W(r, p) = \frac{p^2}{2m} + U(r, p)$$

## ■ Test Particle Method (C. Y. Wong, 1982)

$$f(r, p) = \frac{1}{N_0} \sum_i^{AN_0} \delta(r - r_i) \delta(p - p_i) \quad \rightarrow \quad \frac{dr_i}{dt} = \nabla_p h_w, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\nabla_r h_w,$$

*Mean Field Evolution can be simulated*

*by Classical Test Particles*

*→ Opened a possibility to Simulate High Energy HIC  
including Two-Body Collisions in Cascade*

# BUU (Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck) Equation

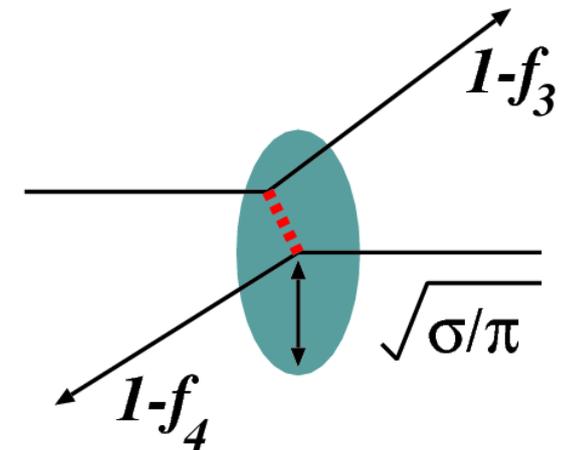
- **BUU Equation** (Bertsch and Das Gupta, Phys. Rept. 160( 88), 190)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f - \nabla U \cdot \nabla_p f = I_{coll}[f]$$

$$I_{coll}[f] = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ \times [f f_2 (1-f_3)(1-f_4) - f_3 f_4 (1-f)(1-f_2)]$$

- **Incorporated Physics in BUU**

- Mean Field Evolution
- (Incoherent) Two-Body Collisions
- Pauli Blocking in Two-Body Collisions



○ *One-Body Observables (Particle Spectra, Collective Flow, ..)*

✗ *Event-by-Event Fluctuation (Fragment, Intermittency, ...)*

# *HIC Transport Models: Five Major Origins*

---

## ■ *Nuclear Mean Field Dynamics*

- **Basic Element of Low Energy Nuclear Physics**
- **TDHF  $\rightarrow$  Vlasov  $\rightarrow$  BUU**

## ■ *NN two-body (residual) interaction*

- **Main Source of Particle Production**
- **Boltzmann equation  $\rightarrow$  Intranuclear Cascade Models**

## ■ *Partonic Interaction and String Decay*

- **Main Source of high pT Particles at Collider Energies**
- **JETSET + (previous) PYTHIA (Lund model)  $\rightarrow$  (new) PYTHIA**

## ■ *Relativistic Hydrodynamics*

- **Most Successful Picture at RHIC**

## ■ *Classical Field Dynamics*

- **Classical Gluon Field = Initial condition of Hydro. at Collider Energies**

# Relativistic Hydrodynamics

## ■ EOM: Conservation Laws

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  Energy Momentum Conservation

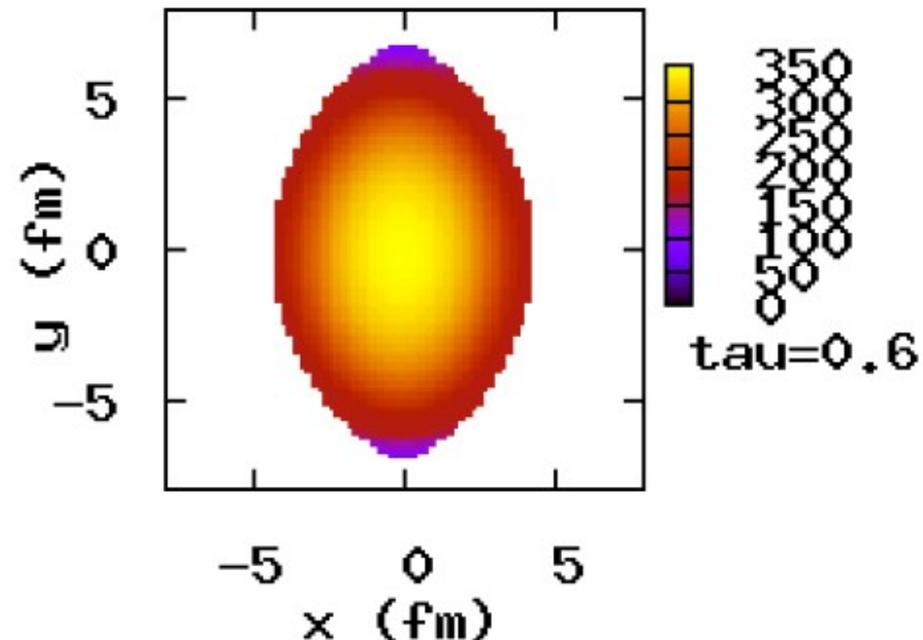
$\partial_\mu (n_i u^\mu) = 0$  Conservation of Charge (Baryon, Strangeness, ...)

$$T^{\mu\nu} = (e + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}$$

$e$  : energy density,  $P$ : pressure,

$u^\mu$  :four velocity  $\gamma(1, \mathbf{v})$ ,

$n_i$  :number density

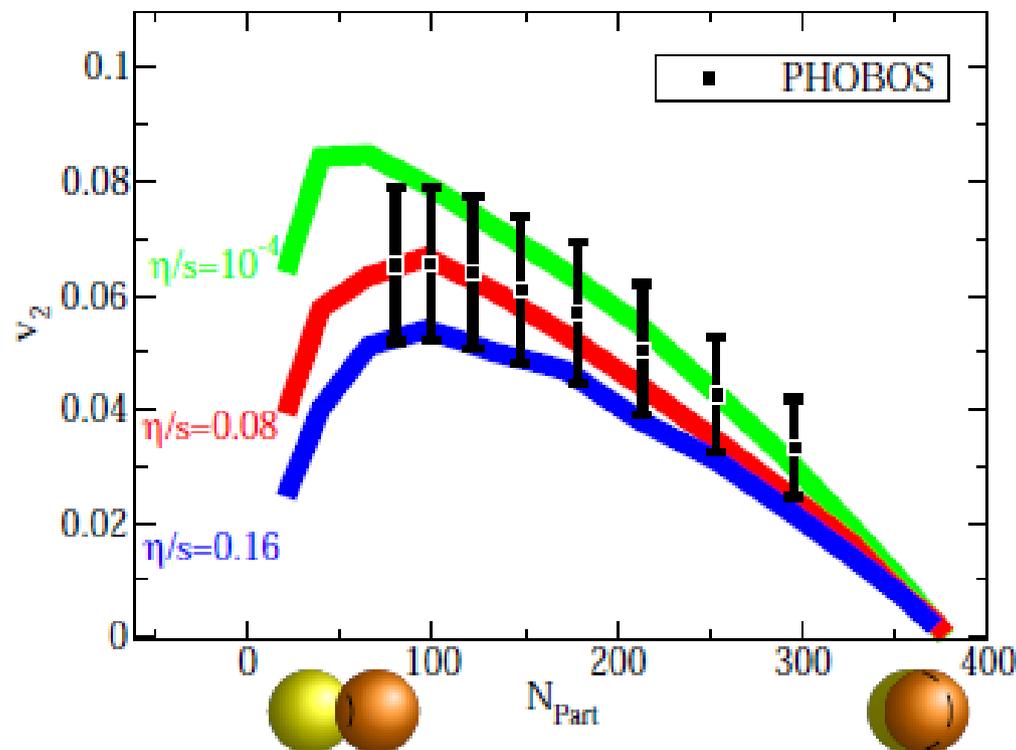


*T. Hirano, Y. Nara, NPA743, 305 (2004)*

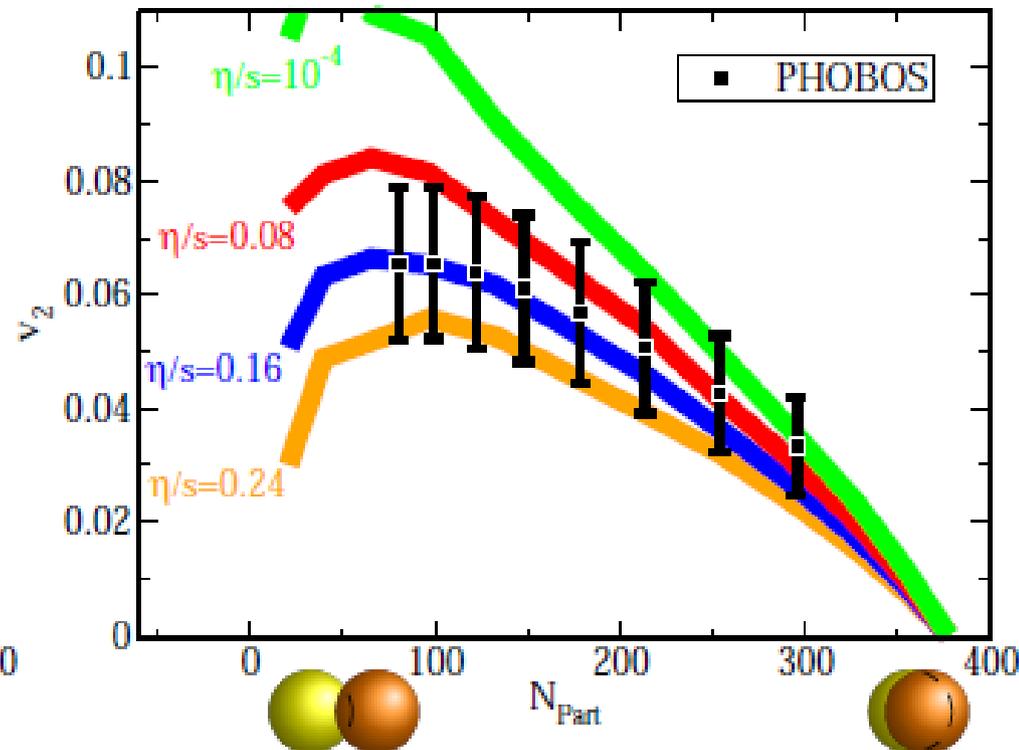
*T. Hirano, K. Tsuda, PRC 66, 054905(2002)*

$\eta/s$  FROM FLOW (HISTORICAL)

“Glauber” initial conditions



“CGC” initial conditions

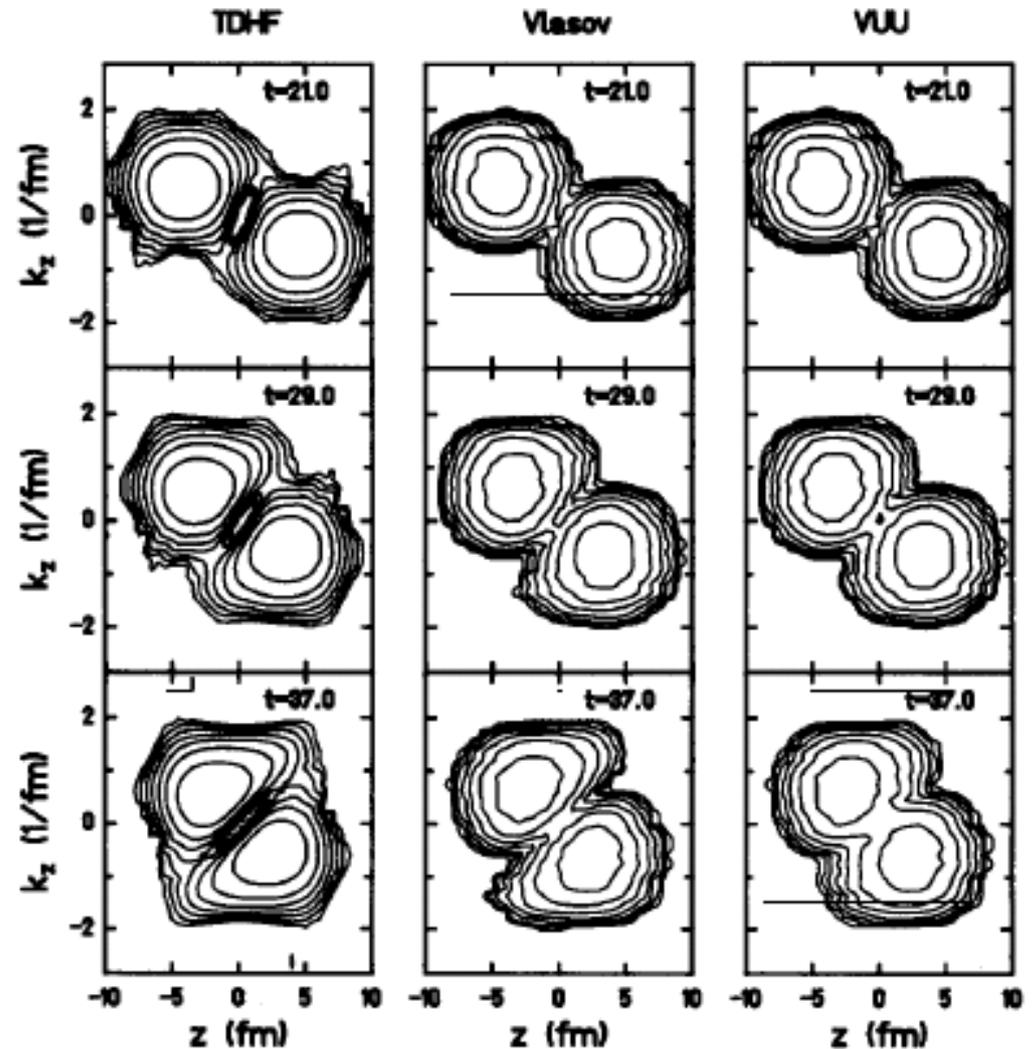


(ML & Romatschke, *Phys.Rev. C78* (2008) 034915)

- Best extraction of  $\eta/s$  by comparing viscous hydro to flow data
- Largest uncertainty from unknown initial condition

# Comarison of TDHF, Vlasov and BUU(VUU)

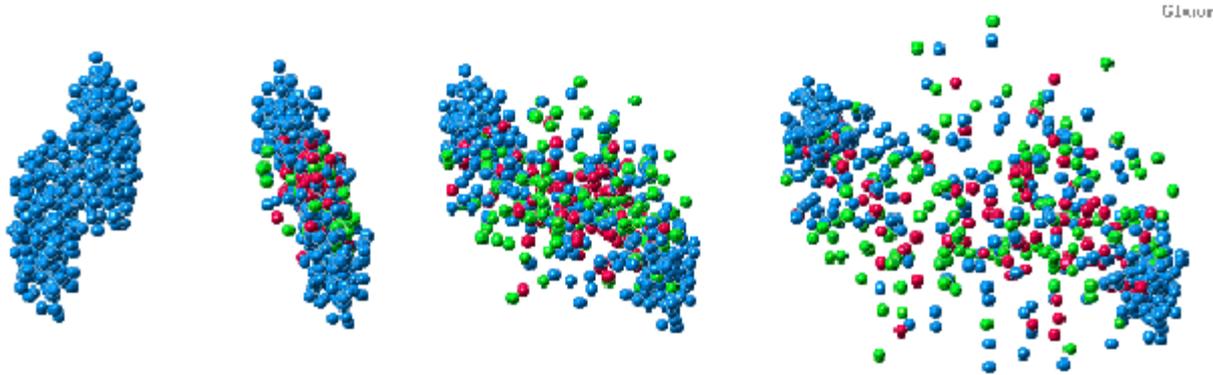
- Ca+Ca, 40 A MeV  
(Cassing-Metag-Mosel-Niita, Phys. Rep. 188 (1990) 363).



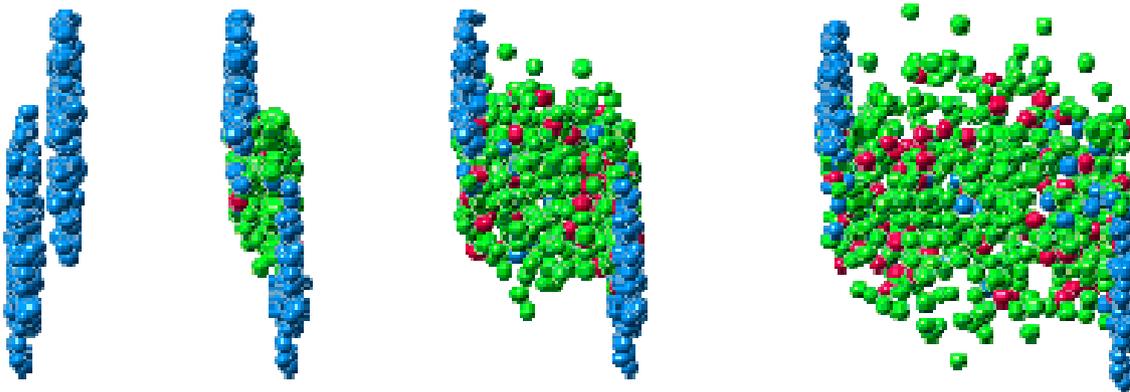
# Heavy-Ion Collisions at $E_{\text{inc}} \sim (1-100) A \text{ GeV}$

- Study of Hot and Dense Hadronic Matter  
→ Particle Yield, Collective Dynamics (Flow), EOS, .....

AGS



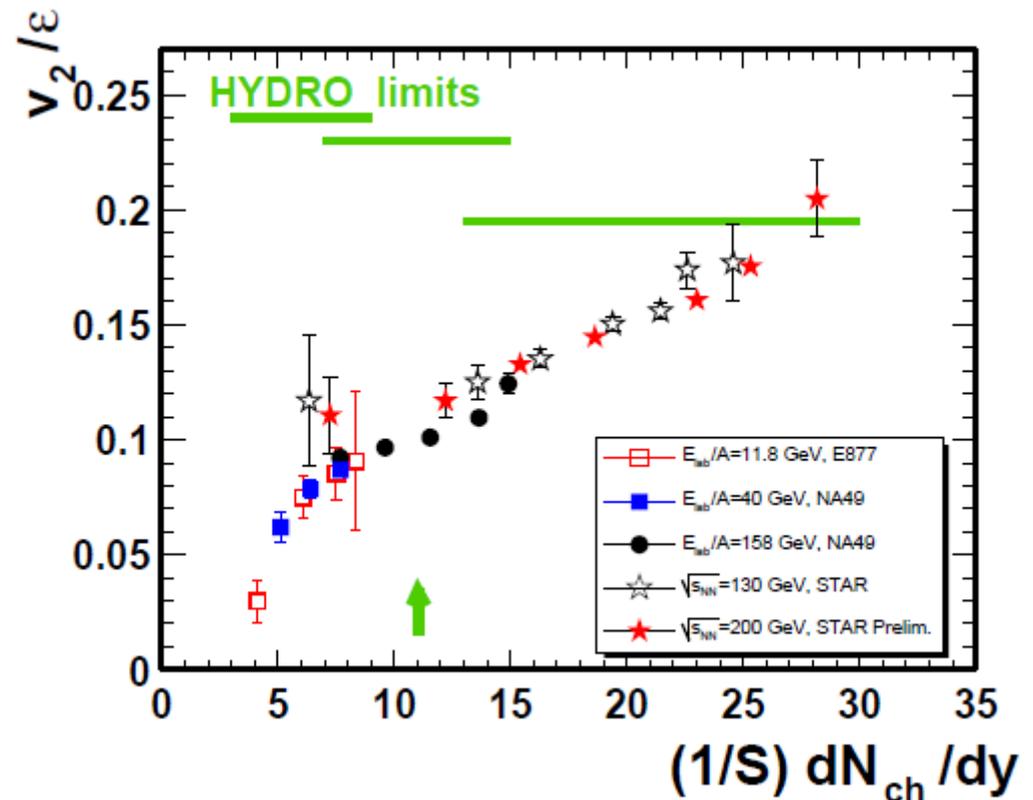
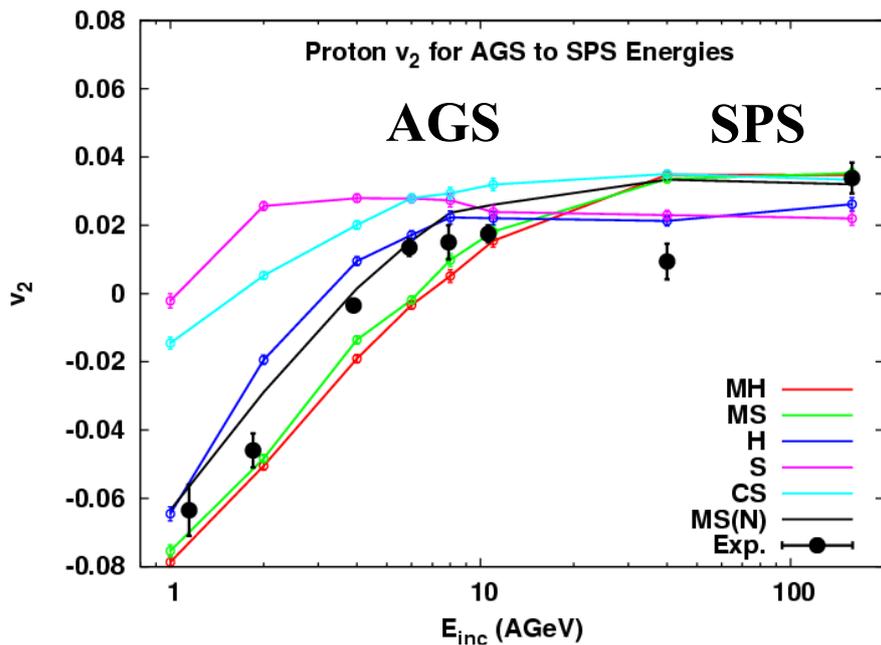
SPS



JAMming on the Web, linked from <http://www.jcprg.org/>

# Hydrodynamics vs Transport

- $\sqrt{s_{NN}} < 20$  GeV  $\rightarrow$  Transport model calculation seems to explain  $v_2$  data.
- RHIC (& LHC)  $\rightarrow$  Hydrodynamics is successful.



M. Isse, AO, N. Otuka, P.K. Sahu, Y. Nara,  
 PRC72 ('05) 064908 [nucl-th/0502058]

U. W. Heinz, AIP Conf.Proc. 739 ('05) 163  
 [nucl-th/0407067]

# レポート(3)

- 全部で9-10問程度出します。3問程度以上レポートを出してください。レポート(3)の〆切は **1月30日**。

- Rep.6: Bjorken 解では内部エネルギーは減少する。

$$\frac{\partial(\tau\varepsilon)}{\partial\tau} = -P \quad [\text{or } d(\tau\varepsilon)\Delta y = -Pd\tau\Delta y]$$

第一式を導出し、その意味を述べよ。

- Rep.7: 球対称で3次元的に膨張する流れ  $u^\mu = (t, x, y, z)/\tau$  のもとで完全流体のエントロピー密度は  $\tau = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}$  の関数としてどのようにふるまうか? ( $\varepsilon, P$  は  $\tau$  のみの関数とする。)

- Rep.8: Boltzmann 方程式において粒子数とエネルギー

$$N = \int \frac{dx dp}{(2\pi)^3} f(x, p, t), \quad E = \int \frac{dx dp}{(2\pi)^3} f(x, p, t) \frac{p^2}{2m}$$

が保存することを示せ。

- Rep. 9: 分布関数  $f$  を用いてフェルミオン系のエントロピーを定義し、フェルミ統計を含む衝突項による時間発展において、エントロピーが増加することを示せ。