

修士論文 2015年度

$AdS_5 \times T^{1,1}$  空間における

弦のフォス运动的運動

京都大学 理学研究科  
物理学・宇宙物理学専攻 素粒子論研究室

京野 秀紀

2016年1月

## 概要

近年、素粒子論における研究の中でカオスが注目を集めつつある。カオスとは非線形系に現れる非常に複雑な運動のことを指す。カオスは日常にありふれたものであり、気象現象の予測不可能性のことを指した「バタフライ効果」などで有名である。素粒子論分野では、ブラックホールの情報喪失問題や熱化過程をカオスを使って説明しようという試みが近年なされている [1]。ブラックホールについては、そのエントロピーの微視的な起源など理解されていないことが多く、その解明は微視的なスケールでの重力理論の理解に繋がると考えられている。

一方、超弦理論において最も盛んに研究されている対象の一つに AdS/CFT 対応がある [2]。AdS/CFT 対応とは超弦理論とゲージ理論の等価性を主張するものである。この対応を利用して、重力の微視的な性質をゲージ理論によって解析できると期待されている。AdS/CFT 対応に関わる重要な研究として、 $AdS_5 \times S^5$  空間上の超弦理論において Penrose 極限と呼ばれる極限をとった時の弦の状態と、ゲージ理論の演算子に具体的な対応関係を与えたものがある [3]。 $AdS_5 \times S^5$  空間上の超弦理論は  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論に双対であり、文献 [3] では、Penrose 極限によって両理論の一部分を切り出して対応関係が調べられた。さらに、 $AdS_5 \times S^5$  空間上の超弦理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論は共に可積分構造を持っており、可積分性を用いて対応関係を一般化する試みが行われてきた。

可積分構造を持ち合わせない AdS/CFT 対応も知られている。 $AdS_5 \times T^{1,1}$  空間上の弦理論は  $\mathcal{N} = 1$  超共形ゲージ理論に双対であると考えられており [4]、 $AdS_5 \times T^{1,1}$  空間上の弦の運動にはカオスが現れる [5]。このとき、弦のカオス的運動がゲージ理論側とどのように対応しているのかは知られていない。そこで、ゲージ理論との対応を考えやすい Penrose 極限をとってもカオスが現れるかどうかは興味深い問題である。我々は論文 [6] において、 $AdS_5 \times T^{1,1}$  空間の Penrose 極限で二次の補正項まで取り入れたものでも、カオスが現れることを示した。本修士論文はこの論文 [6] に関わる先行研究のレビューと [6] の結果をまとめたものである。

# 目次

第1章	Introduction	3
第2章	AdS/CFT 対応	6
2.1	AdS 空間	6
2.2	AdS/CFT 対応への動機	8
2.2.1	開弦的な描像	9
2.2.2	閉弦的な描像	11
2.2.3	二つの描像からの予想	12
2.3	BMN 対応	14
2.3.1	pp-wave 背景	15
2.3.2	pp-wave 背景上での弦理論	16
2.3.3	$\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論と BMN 対応	20
第3章	古典力学系におけるカオス	25
3.1	カオスの特徴	25
3.2	KAM トーラス	27
3.3	Poincaré 断面	30
3.4	Hénon-Heiles 系での例	31
第4章	$\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$ 空間上の弦理論	34
4.1	$\text{T}^{1,1}$ 空間	34
4.2	AdS/CFT 対応	40
4.3	$\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$ 空間上の弦の運動	41
第5章	near Penrose 極限と弦の運動	46
5.1	near Penrose 極限をとった $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$ 空間上の弦の運動	46
5.1.1	一般の時空上の light-cone Hamiltonian	46
5.1.2	near Penrose 極限と ansatz	48

5.1.3	Poincaré 断面 . . . . .	52
5.2	$\text{AdS}_5 \times S^5$ の場合 . . . . .	55
5.2.1	near Penrose 極限と ansatz . . . . .	55
5.2.2	Poincaré 断面 . . . . .	57
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>59</b>
付録 A	cone の Ricci 平坦性について	62

# 第1章 Introduction

素粒子論分野では、より単純な法則と基本的な構成要素から宇宙を説明することを目的に研究が進められてきた。その中で場の量子論は大きな成功を収めており、素粒子標準模型においては現在加速器で実現できる高エネルギー領域まで実験との矛盾は確認されていない。標準模型では自然界における基本的な力とされるもののうち、重力を除く、電磁気力、強い力、弱い力が含まれている。一つの枠組みから全てを説明したいという立場をとると、重力を含めた単一の理論を目指すのは自然である。しかし、重力の量子化は困難であり場の量子論での統一には成功していない。

重力を含めた統一理論の候補として超弦理論は大きな注目を集めている。超弦理論では弦が理論の基本的な構成要素であり、弦の振動 mode に応じて重力場を含めた様々な場が現れる。また、この弦は Planck scale に近い大きさであるとされ、超弦理論では現在行われている実験よりも非常に高いエネルギー領域において統一が実現していると考えている。

1974年に't Hooft は  $U(N)$  ゲージ理論において  $N$  の大きな極限をとったものと弦理論の間の類似性を指摘した [7]。この等価性は Maldacena による  $AdS_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論の対応の発見によって具体化された [2]。内部空間は  $S^5$  だけでなく、他の多様体  $X$  でも同じような対応が得られる例が知られており、いずれも  $AdS \times X$  空間上の弦理論と共形場理論 (CFT) との対応になることからこの対応は AdS/CFT 対応と総称されている。この対応は非自明なものであり、なぜ対応が成立するのかはよくわかっていない。また超弦理論は重力を含んでおり、重力理論が場の理論と対応していることは非常に興味深い。

その発見以降 AdS/CFT 対応は精力的に研究されてきた。AdS/CFT 対応に関わる重要な研究として、 $AdS_5 \times S^5$  空間上の弦のうち  $S^5$  の赤道方向に光速で運動する弦の状態と、ゲージ理論の演算子の間の具体的な対応関係を提示した Berenstein, Maldacena, Nastase による研究がある [3]。この対応関係は、弦の励起 spectrum と演算子の scaling dimension が対応していることから、これらの計算結果の一致に

よって確認される。AdS/CFT 対応では AdS 空間の半径  $R$  と  $N$  が大きいところでのゲージ理論の結合定数  $\lambda$  が

$$\frac{R^4}{\alpha'} = \lambda \quad (1.0.1)$$

と関係しており、ゲージ理論で摂動論が有効な  $\lambda$  が小さい領域は、強く曲がった半径の小さい AdS 空間に対応し弦理論側での計算は難しくなる<sup>1</sup>。一方、 $R$  が大きな平坦に近い空間上の弦理論は  $\lambda$  の大きなゲージ理論に対応しゲージ理論側の計算が難しくなってしまう。この事情から AdS/CFT 対応は strong/weak duality と呼ばれ対応の検証を困難にしていた。

Berenstein らは大きな角運動量を持った弦を考えることによって、摂動的な parameter が

$$\lambda' \equiv \frac{\lambda}{J^2} \quad (1.0.2)$$

と現れることを示した。 $\lambda'$  は極限をうまくとることで小さくすることができ、両側での摂動的な計算が可能となった。弦の励起 spectrum は Penrose 極限 [8]  $R^2 \sim J \rightarrow \infty$  をとった  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間上の弦を量子化することで求められる。このとき現れるのは pp-wave と呼ばれる時空であるが、弦の運動は pp-wave 背景上では調和振動子の Hamiltonian で記述されるため、量子化して spectrum を求めることができる。ゲージ理論側では loop 計算を行って scaling dimension の  $\lambda'$  展開を求めていくことになる。一方で  $1/J$  展開についても  $1/J$  の order では対応が成り立つことが確認されている [9, 10]。

Berenstein らの研究の後、ゲージ理論側の一部の sector での scaling dimension の計算は Heisenberg spin chain のエネルギー固有値を求める問題と等価であることが指摘された [11]。さらにこの問題は可積分であり Bethe ansatz を用いて、 $\lambda'$  の高次での計算が可能であることがわかった。また  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間上の弦理論にも可積分構造が見つかり [12]、両側での可積分構造を用いた、対応の検証に向けた研究が行われている。

一方非可積分領域での AdS/CFT 対応も知られており、 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦理論と  $\mathcal{N} = 1$  超共形ゲージ理論の対応はその例である [4]。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦の運

---

<sup>1</sup> $\alpha'$  は弦の tension を表す弦理論の parameter である。

動にはカオスが現れることが示されている [5]。カオスとは非可積分な非線形系に現れる非常に複雑な運動であり、弦のカオス的状態がゲージ理論側とどのように対応しているのかは知られていない。そこで、ゲージ理論との対応を考えやすい Penrose 極限  $J \rightarrow 0$  をとってカオスが現れるかどうかは興味深い問題である。この極限の  $J^0$  order は pp-wave 上の弦理論になり可積分であるためカオスは現れないが、 $1/J$  order では可積分かどうかはわからない。我々は論文 [6] において、弦理論において  $1/J$  order の補正を加えてもカオスが現れることを示した。

本修士論文の構成は以下の通りである。

まず第 2 章は AdS/CFT 対応についてのレビューである。ここでは AdS/CFT の発見的な説明と Berenstein, Maldacena, Nastase によって提案された対応関係について説明する。第 3 章ではカオスについて議論する。そこでカオスと KAM 理論についての簡単な説明と、またカオスの検証方法として Poincare 断面を紹介し、実際にカオスが現れる例として Hénon-Heiles 系を扱う。第 4 章では非可積分な領域での AdS/CFT 対応を与える  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間について説明を行う。まず  $\text{T}^{1,1}$  空間について説明し、この空間を使った AdS/CFT 対応を考える。また  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦の運動にカオスが現れることを示した研究 [5] のレビューを行う。第 5 章では論文 [6] に基づいて、 $1/J$  order の補正を加えた near Penrose 極限での  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦理論を解析し、カオスが現れることを示す。また near Penrose 極限での解析を  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間についても行い、カオスが現れないという一つの例を提示する。

## 第2章 AdS/CFT対応

AdS/CFT 対応とは 1997 年に Maldacena によって予想された、AdS $\times$ X 空間上の超弦理論と、その境界に存在する共形場理論の対応を指している [2]。ここで X は compact 化された内部空間とする。この対応関係は弦理論でホログラフィー原理を実現する具体例とみなせる。ホログラフィー原理とは 't Hooft らによって提唱された、ある空間  $V$  で定義された重力を含む理論はその境界  $\partial V$  で定義された重力を含まない理論と等価であると主張するものである [13]。ホログラフィーという概念はブラックホールの物理に起源を持つ。1970 年代にブラックホールの熱力学的な側面についての研究が盛んに行われ、ブラックホールのエントロピーがその体積ではなく、表面積に比例していることが示唆された [14]。これは奇妙な結果であり、ブラックホールの自由度は表面積に比例した分だけしかないことを意味している。この結果を一般化して生まれたのがホログラフィーという考え方である。

超弦理論は重力理論を含んだ統一理論と期待されているものであり、この枠組みの中でもホログラフィー的に重力が現れることは非常に興味深い。この章では AdS/CFT 対応の概要の説明と、具体的な対応関係を提唱した Berenstein-Maldacena-Nastase による研究 [3] を紹介する。またこの章の内容については文献 [15, 16, 17, 18, 19] を参考にした。

### 2.1 AdS 空間

最初に、後の解析で重要となる AdS 空間について説明する。AdS $_d$  空間は  $d+1$  次元の空間中で以下の式

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (X^i)^2 - (X^{d+1})^2 = -R^2 \quad (2.1.1)$$



によって定義される AdS 半径  $R$  を parameter に持つ曲面で、計量

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dX^i)^2 - (dX^{d+1})^2 \quad (2.1.2)$$

を持つ空間である。また以下では  $d > 2$  とする。

この計量を  $d$  個の変数で表すため以下の座標をとる。

$$X^0 = R \cosh \rho \cos t, \quad X^{d+1} = R \cosh \rho \sin t, \quad X^i = R \sinh \rho d\Omega^i. \quad (2.1.3)$$

ここで  $\Omega^i$  ( $i = 1, \dots, d-1$ ) は  $d-1$  次元球面を極座標表示した時の  $i$  番目の座標である。 $\rho$  は  $0 \leq \rho$  の範囲をとることにする。 $t$  については一価性のために  $0 \leq t < 2\pi$  をとるのが普通だが、以下では、AdS 空間を無限個つなぎ合わせて  $-\infty < t < \infty$  を動くとする。

この座標変換により、計量 (2.1.2) は

$$ds^2 = R^2 \left( -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-2}^2 \right) \quad (2.1.4)$$

と与えられる。この計量は  $\text{AdS}_d$  空間の global な計量と呼ばれる。次に、もう一つ重要な計量として、Poincaré 計量を紹介する。 $\text{AdS}_d$  空間の Poincaré 計量は (2.1.2) の各変数について、以下の座標変換を行うことで得られる。

$$\begin{aligned} X^0 &= \frac{z}{2} \left( 1 + \frac{R^2 + \sum_{i=1}^{d-2} (x^i)^2 - (x^0)^2}{z^2} \right), & X^{d+1} &= R \frac{x^0}{z}, \\ X^{d-1} &= \frac{z}{2} \left( 1 - \frac{R^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (x^i)^2 + (x^0)^2}{z^2} \right), & X^i &= R \frac{x^i}{z}. \quad (i = 1, \dots, d-2) \end{aligned}$$

これらを (2.1.2) に代入することで、以下の計量を得る。

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left( -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2 + dz^2 \right) \quad (2.1.5)$$

これが、 $\text{AdS}_d$  空間の Poincaré 計量である。注意として、この座標変換は  $z = 0$  で singular であり、ここでは  $z > 0$  の場合のみを考えることにする。よって Poincaré 計量で表されるのは AdS 空間のちょうど「半分」の領域のみである。他の座標  $x^0$ 、 $x^i$  は  $-\infty < x^0, x^i < \infty$  をとることとする。

制約 (2.1.1) から、この空間は  $SO(2, d-1)$  の isometry を持っていることがわかる。また、この時空は負の宇宙定数を入れた時の Einstein 方程式の真空解でもある。

## 2.2 AdS/CFT 対応への動機

Maldacena による  $AdS_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論の対応について、対応を予想するに至る動機を紹介する。動機の一つとして、ある IIB 型超弦理論の setup の低エネルギー極限を二つの側面で捉えた時に、 $AdS_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論が現れるという考察がある。

まず、10次元の Minkowski 空間上の IIB 型超弦理論を考える。IIB 型超弦理論は、低エネルギーでは IIB 型超重力理論で記述され、超重力理論には D-brane と呼ばれる charge を持った soliton 解が存在する。超弦理論において D-brane は、その上に開弦が端を持つことができる物体として導入され、D-brane 上の開弦の運動が D-brane の励起を表していると考えられている。

D-brane は空間的広がりを持った物体であり、その次元に応じて  $Dp$ -brane という呼び方をする ( $p$  は brane が広がる空間方向の次元)。特に IIB 型超重力理論は、空間方向への広がり次元  $p$  が奇数の  $Dp$ -brane 解を持ち、IIB 型超弦理論にも、それらの D-brane が含まれると考えられる。

ここで  $N$  枚の重なった D-brane を考える。このとき、開弦の端をどの D-brane にもつか  $N$  通りの選び方が存在する。両端の組み合わせを考えると  $N^2$  の選び方があり、各弦は  $N^2$  個のラベルを持つことになる。D-brane 上に両端を持つ開弦の低エネルギー理論は  $U(N)$  ゲージ理論であることが知られており、弦の端の配位の取り方が  $N^2$  コであることと場の数が対応している。さらに、 $U(N)$  ゲージ理論は  $SU(N)$  と  $U(1)$  ゲージ理論に decouple し、この  $U(1)$  ゲージ場と couple するスカラー場の値が、重なった D-brane の位置を決めている。

以上を踏まえて、10次元の Minkowski 空間上に  $N$  枚の D3-brane が存在するときの低エネルギー有効理論について考察する。ここで  $N$  を大きい値に固定し、弦の結合定数  $g_s$  を変化させて、 $g_s N$  が大きい場合と小さい場合を考え、その時に現れる二つの描像の比較から対応関係を予想する。

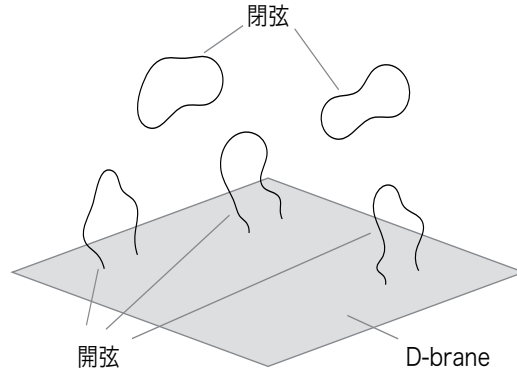


図 2.1: 閉弦、開弦、D-brane のイメージ図

### 2.2.1 開弦的な描像

まず、 $g_s N$  が小さい場合から考察する。

以下の議論では低エネルギー極限をとることがあるが、この極限について初めに説明する。弦理論の基本的な parameter として、長さの次元を持つ  $l_s \equiv \sqrt{\alpha'}$  がある。 $l_s$  は弦の長さを特徴づける parameter である。ここで、弦理論における低エネルギー極限は、 $E$  を系のエネルギーとして  $E \ll 1/\sqrt{\alpha'}$  と書くことができる。 $E$  を固定する立場からすると  $\alpha' \rightarrow 0$  をとることで低エネルギー極限をとれる。弦理論では弦の振動モードから様々な場が出てくるが、低エネルギー極限の下ではこのうち massless 場の励起しか現れないと考えられる。

D-brane はエネルギーを持った物体であり、D-brane の存在によって時空の曲がりが生じる。ここで、 $g_s N \ll 1$  とした時の重力の効果について大雑把な見積もりをする。D $p$ -brane の張力  $T_{Dp}$  は

$$T_{Dp} \sim \frac{1}{g_s (\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (2.2.1)$$

と与えられる。これより  $N$  枚の D $p$ -brane の質量  $M$  は D3-brane の体積を  $V_{Dp}$  として

$$M \sim N T_p V_{Dp} \sim N \frac{V_{Dp}}{g_s (\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (2.2.2)$$

となる。一方、 $D (> 3)$  次元での重力 potential は  $D$  次元での Newton 定数を  $G^{(D)}$  として

$$V^{(D)} = -\frac{G^{(D)}M}{r^{D-3}} = -\frac{R_{(D)}^{D-3}}{r^{D-3}} \quad (2.2.3)$$

と与えられる<sup>1</sup>。ここで重力の特徴的なスケール  $R_{(D)} \equiv (G^{(D)}M)^{\frac{1}{D-3}}$  を導入した。 $R$  は時空の曲がり具合を測る量であり、 $R$  が大きいほど重力が強いことを意味する。 $D$  次元空間中の  $N$  枚の  $D_p$ -brane の場合には、重力は brane に垂直な  $(D-p)$  次元の空間方向に働くことを考えると、

$$R_{(D-p)}^{D-p-3} \sim G^{(D-p)}N \frac{V_{Dp}}{g_s(\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \sim G^{(D)}N \frac{1}{g_s(\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \quad (2.2.4)$$

とかける。ここで  $D$  次元と  $(D-p)$  次元の Newton 定数の関係  $G^{(D-p)} = G^{(D)}/V_p$  を用いた。さらに、Newton 定数  $G$  と弦の結合定数  $g_s$  の間には  $G^{(D)} = g_s^2(\sqrt{\alpha'})^{D-2}$  という関係があることが知られており、これを用いると

$$\left(\frac{R_{(D-p)}}{\sqrt{\alpha'}}\right)^{D-p-3} \sim g_s N \quad (2.2.5)$$

という関係式が得られる。10 次元 Minkowski 空間中の D3-brane を考える場合、 $g_s N \ll 1$  のときには重力の効果は弱く、D3-brane が存在することによる時空の曲がりは無視できる。この極限の下では、D3-brane が平坦な時空の上に存在するとして扱える。

考えるべき系全体の低エネルギー有効理論  $\mathcal{S}_{all}$  は

$$\mathcal{S}_{all} = \mathcal{S}_{closed} + \mathcal{S}_{open} + \mathcal{S}_{int} \quad (2.2.6)$$

という形をしており、 $\mathcal{S}_{closed}$  は 10 次元 Minkowski 空間中の閉弦の理論、 $\mathcal{S}_{open}$  は  $N$  枚の D3-brane 上の開弦の理論、 $\mathcal{S}_{int}$  はこれら二つの理論の間の相互作用を表す。まず、 $\mathcal{S}_{closed}$  は低エネルギー極限では massless 場だけからなる IIB 型の超重力理論である。その相互作用の強さは  $G^{(10)}$  で表されるが、関係式  $G^{(10)} \sim g_s^2 \alpha'^4$  より  $\alpha' \rightarrow 0$  で自由な理論となることがわかる。D-brane 上の理論の部分  $\mathcal{S}_{open}$  と  $\mathcal{S}_{int}$  について、その有効理論は Dirac-Born-Infeld 作用から導かれる。 $\alpha' \rightarrow 0$  の下では、 $\mathcal{S}_{open}$  は  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論となり<sup>2</sup>、 $\mathcal{S}_{int}$  は  $G^{(10)}$  に比例するため消えてしまう。以上

<sup>1</sup>ここでの  $D$  次元空間は時間 1 次元、空間  $D-1$  次元の空間を指す。

<sup>2</sup>この際にゲージ理論の結合定数  $g_{YM}$  は  $g_{YM}^2 \sim g_s$  と読み取ることができる。

より、 $g_s N \ll 1$ とした時には、互いに相互作用しない、自由な 10 次元の閉弦の理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論が得られることが分かる。

## 2.2.2 閉弦的な描像

次に、 $g_s N \gg 1$ とした状況について考える。この場合上記の考察により、重力の効果が強くなることがわかる。 $N$  枚の D3-brane は IIB 型超重力理論の解として、

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + f(r)^{\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ F_5 &= (1 + *)dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge d\left(\frac{1}{f(r)}\right) \\ f(r) &= 1 + \frac{R^4}{r^4} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

と書ける。 $F_5$  は IIB 型超重力理論に含まれる、Ramond-Ramond 4 形式についての self-dual<sup>3</sup> な場の強さであり、 $*$  は Hodge 作用素を表す。この計量は  $r \sim 0$  に horizon があり、brane に垂直な空間方向からは extremal なブラックホールのように見える。このような解は広がりを持った extremal ブラックホール解であり、black brane 解とも呼ばれる。

$R$  は brane の持つエネルギーから決まる重力の特徴的なスケールであり、(2.2.5) から

$$R^4 \sim G^{(10)} T_{D3} \sim N g_s \alpha'^2 \tag{2.2.8}$$

という依存性を持つ。ここで古典重力理論が有効であるための条件について考察しておく。重力の量子効果が無視できるためには、 $R$  が 10 次元の Planck 長  $l_P^{(10)}$  よりも十分長くないといけない。次元解析より  $l_P^{(10)}$  は  $(l_P^{(10)})^4 \sim (G^{(10)})^{\frac{1}{2}} \sim g_s \alpha'^2$  とかくことができ、条件  $R \gg l_P^{(10)}$  が満たされるためには  $N \gg 1$  でないといけないことがわかる。これが初めに  $N \gg 1$  と固定した理由である。

$g_s N \gg 1$  では二つの理論が存在する。まず  $r \sim \infty$  とした領域では (2.2.7) は平坦になる。低エネルギー極限では、この理論は自由な閉弦の massless な励起モードだけからなる理論となる。一方  $r \ll R$  となる horizon に近い領域では、時空の計量は

---

<sup>3</sup> $F_5 = *F_5$  を満たすことを指す。

$f(r) \sim R^4/r^4$  となることから

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + \frac{R^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\
&= \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2 \\
F_5 &= -4 \frac{R^4}{z^5} (1 + *) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dz
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

とかける。ここで  $z = R^2/r^2$  とした。計量 (2.2.9) の 5 次元部分は 2.1 で扱った  $\text{AdS}_5$  空間の Poincaré 計量そのものであり、残りの部分は 5 次元球面  $S^5$  の計量を表している。また  $R$  は  $\text{AdS}_5$  空間と  $S^5$  空間の共通の半径である。よって horizon 付近  $r \ll R$  には  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論が存在することがわかる。この理論について低エネルギー極限をとることを考える。horizon 付近ではどれだけ高エネルギーの励起があっても、重力赤方偏移の効果によって遠方では、低エネルギーであるように見える。よって低エネルギー極限をとっても、この  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の理論にはあらゆる励起が含まれると考えられる。

また遠方での平坦時空上の理論と  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の理論は低エネルギー極限では前と同様の理由により decouple する。こうして  $g_s N \gg 1$  とした時の低エネルギー有効理論は互いに独立な  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論と 10 次元 Minkowski 時空上の IIB 型超重力理論であることが分かった。

### 2.2.3 二つの描像からの予想

$N$  枚の D3-brane 系に対するここまでの考察から、 $g_s N \ll 1$ 、 $g_s N \gg 1$  それぞれの場合の低エネルギー有効理論として以下の図 2.2 のものが得られることが分かった。

10 次元 Minkowski 時空上の IIB 型超重力理論はどちらの描像からも共通して得られており、もう一方の理論とは decouple している。注目すべきは、もう一方の理論が二つの描像で異なることである。 $g_s N$  の極限の両極端に現れる異なる低エネルギー有効理論を、parameter  $g_s N$  について内挿し、任意の  $g_s N$  で二つの理論が等しいと予想するのが AdS/CFT 対応である。以上の考察から Maldacena は 4 次元の  $\mathcal{N} = 4$  超共形  $SU(N)$  Yang-Mills 理論と  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間中の IIB 型超弦理論が等価であることを予想した。ここで対応するゲージ理論のゲージ群を  $U(N)$  ではなく  $SU(N)$  としたことを注意しておく。 $SU(N)$  から decouple した  $U(1)$  の理論は重力理論側では singleton と呼ばれるものに対応すると考えられており、この場合は AdS 空間の boundary に局

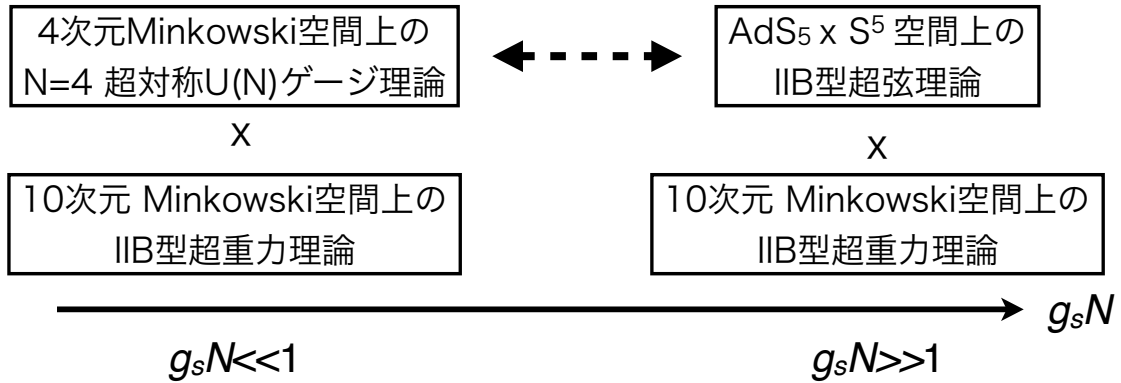


図 2.2:  $g_s N$  の両極限で現れる有効理論

在し bulk の理論には影響しない。

次に、対応する理論が持つ対称性について調べる。まず、ゲージ理論側は共形場理論であり、4次元の conformal group  $SO(2, 4)$  の対称性を持つ。さらに  $\mathcal{N} = 4$  の超対称性理論でもあり、 $SO(6)$  の R-symmetry を持つ。これらのゲージ理論側での対称性は、弦理論側では  $AdS_5$  空間と  $S^5$  空間が持つ isometry  $SO(2, 4)$  と  $SO(6) \sim SU(4)$  にちょうど対応している。これらの対称性の一致は対応を予想する上での動機のひとつになっている。

最後に AdS/CFT 対応における理論の parameter の関係について述べる。 $SU(N)$  Yang-Mills 理論は二つの無次元 parameter をもち、それらはゲージ群の大きさ  $N$  と結合定数  $g_{YM}$  である。一方、弦理論側にも二つの無次元 parameter があり、それらは弦の結合定数  $g_s$  と  $AdS_5 \times S^5$  空間の半径を無次元化したもの  $R/\sqrt{\alpha'}$  である。これまでの考察からこれらの parameter の間には以下の関係があることが分かっている。

$$g_s \sim g_{YM}^2, \quad \frac{R^4}{\alpha'^2} \sim g_s N \quad (2.2.10)$$

$N$  が大きい極限では  $SU(N)$  ゲージ理論の有効結合定数が、次で定義される 't Hooft

coupling  $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$  になることが知られている。 $\lambda$  を用いると上記の関係式は

$$g_s \sim \frac{\lambda}{N}, \quad \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \sim \lambda^{\frac{1}{4}} \quad (2.2.11)$$

と書ける。この関係式からゲージ理論側での摂動論が有効な  $\lambda$  が小さい領域では、弦の結合定数  $g_s$  も小さいことがわかる。しかし、 $\lambda$  が小さいと弦理論側では  $R$  の小さくなり、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間の曲がりが強くなるため計算が困難になる。よってゲージ理論で計算しやすい領域は弦理論では計算が難しく、反対に弦理論で計算がしやすい領域では、ゲージ理論が強結合となってしまふ。この事情が AdS/CFT 対応の検証を難しくしている要因である。しかし一方で、AdS/CFT 対応が完全に正しいと認める立場に立つと、本来計算が難しかった強結合のゲージ理論の問題を弦理論の比較的簡単な計算から求められる可能性がある。このように、AdS/CFT 対応は双対な理論について相補的な対応関係であるとも言える。

## 2.3 BMN 対応

前節では AdS/CFT の概要について説明した。この対応関係が提示されてから多くの検証が行われてきたが、先に述べたように半径の大きな  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の弦理論は強結合のゲージ理論に対応しており両側での比較は困難であった。

ここでは、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の弦の状態と対応するゲージ理論の operator を調べた Berenstein、Maldacena、Nastase による研究 [3] と関連するその後の研究を紹介する。彼らは、 $S^5$  空間で赤道方向に大きな角運動量  $J$  をもつ高速で回る弦の状態を考えた。このときには、ゲージ理論の有効的な結合定数が

$$\lambda' = \frac{\lambda}{J^2} \quad (2.3.1)$$

と表せることがわかり、大きな  $J$  を考えることで  $\lambda'$  は小さくとることができ、摂動論が有効になる。このような状況で対称性の議論により、高速で  $S^5$  空間を回る弦の状態と対応するゲージ理論の operator の関係を予想した。この対応は彼らの名前から、BMN 対応と呼ばれており、後に可積分性を用いた研究によって、摂動のより高次での検証が行われた。

まず 2.3.2 で  $S^5$  空間を高速回る弦の状態について考察する。次に、2.3.3 でその状態に対応するゲージ理論側の operator について考察し、弦のエネルギー spectrum と operator の anomalous dimension の一致について説明する。



### 2.3.1 pp-wave 背景

まず  $\text{AdS}_5 \times S^5$  の Penrose 極限を考え pp-wave 背景を得ることから始める。 $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間の計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(ds_{\text{AdS}_5}^2 + ds_{S^5}^2), \\ ds_{\text{AdS}_5}^2 &= -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2, \\ ds_{S^5}^2 &= \cos^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega'_3{}^2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

と与えられる。ここで  $\phi$  方向に光速で動く粒子を考えるために以下のような light-cone coordinate をとる。

$$\tilde{x}^\pm = \frac{t \pm \phi}{2} \quad (2.3.3)$$

さらにこの light-like な軌跡に近い軌道を考えるために rescaling を行い、

$$x^+ = \tilde{x}^+, \quad x^- = R^2 \tilde{x}^-, \quad r = R\rho, \quad y = R\theta \quad (2.3.4)$$

とする。このときに  $R \rightarrow \infty$  をとることで、pp-wave 背景を得ることができる<sup>4</sup>。

$$ds^2 = -4dx^+ dx^- - (\vec{r}^2 + \vec{y}^2)(dx^+)^2 + d\vec{r}^2 + d\vec{y}^2 \quad (2.3.5)$$

また後の議論のために  $x^- \rightarrow x^-/2\mu$ ,  $x^+ \rightarrow \mu x^+$  と rescaling して mass parameter  $\mu$  を入れておく。さらに  $x^i = (\vec{r}, \vec{y})$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) と書くことにして計量は

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - \mu^2 (x^i)^2 (dx^+)^2 + (dx^i)^2 \quad (2.3.6)$$

と与えられる。また、この背景は Ricci 平坦ではなく、non-zero な flux を入れることで IIB 型超重力理論の解となる。non-zero の場の強さは

$$F_5 = \mu dx^+ \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8) \quad (2.3.7)$$

と与えられる。

---

<sup>4</sup>ここで  $\vec{r} = (r^1, r^2, r^3, r^4)$ ,  $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$  はそれぞれ  $(\rho, \Omega_3)$  と  $(\theta, \Omega'_3)$  をデカルト座標で書いたものである。

### 2.3.2 pp-wave 背景上での弦理論

以下では、この背景上の弦理論を考える。R-R fluxが入っているため、正確な議論のためには Green-Schwartz 形式を用いる必要がある。ここでは簡単のために bosonic 部分のみを考察の対象とし、以下の Polyakov 作用を考える<sup>5</sup>。

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma h^{ab} g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \quad (2.3.8)$$

ここで  $g_{\mu\nu}$  は target space の計量を表し、今は pp-wave 背景 (2.3.6) の場合を考える。但し、 $\mu = (+, -, 1, \dots, 8)$  をとるものとする。 $h^{ab}$  は world sheet の計量  $\gamma_{ab}$  を使って  $h^{ab} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab}$  と表せられる対称テンソルである<sup>6</sup>。また  $a, b, \dots$  は world sheet の座標  $\sigma^a = (\tau, \sigma)$  をとるものとし、 $\sigma$  は  $0 \sim 2\pi$  の値をとる。ここでは閉弦を考えるため、 $x^\mu$  は周期条件  $x^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$  を満たすものとする。

この作用で記述される系は world sheet の座標に関する一般座標変換

$$\gamma'^{ab}(\tau', \sigma') = \frac{\partial \sigma'^a}{\partial \sigma^c} \frac{\partial \sigma'^b}{\partial \sigma^d} \gamma^{cd}(\tau, \sigma), \quad x'^\mu(\tau', \sigma') = x^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.3.9)$$

と計量の局所的なスケール変換 (Weyl 変換)

$$\gamma'^{ab}(\tau, \sigma) = e^{\omega(\tau, \sigma)} \gamma^{ab}(\tau, \sigma) \quad (2.3.10)$$

に対する対称性を持つ。これらの変換で結びつく配位は物理的には等価なものであり、この自由度を使って計量を  $h^{ab} = \text{diag}(-1, 1)$  と conformal ゲージに固定することができる。

このように world sheet の計量を選んでも、まだ world sheet の共形変換の自由度

$$\gamma'^{ab}(\tau', \sigma') = \Lambda(\tau, \sigma) \gamma^{ab}(\tau, \sigma), \quad x'^\mu(\tau', \sigma') = x^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.3.11)$$

が残っている。残っている自由度を詳しく見るために  $\sigma^\pm \equiv (\tau \pm \sigma)/2$  を導入し、 $\sigma'^\pm = f^\pm(\sigma^+, \sigma^-)$  なる変換を考える。このとき、 $f^\pm(\sigma^+, \sigma^-)$  が共形変換 (2.3.11) であるためには、

$$\frac{\partial f^\pm}{\partial \sigma^+} \frac{\partial f^\pm}{\partial \sigma^-} = 0 \text{ (複合同順)}, \quad \frac{\partial f^+}{\partial \sigma^+} \frac{\partial f^-}{\partial \sigma^-} + \frac{\partial f^+}{\partial \sigma^-} \frac{\partial f^-}{\partial \sigma^+} = \Lambda(\tau, \sigma) \quad (2.3.12)$$

<sup>5</sup>fermionic sector を含めた詳細な議論は [20] でされている

<sup>6</sup>ここで  $\gamma$  は  $\gamma \equiv \det(\gamma_{ab})$  と定義し、 $\gamma^{ab}$  は  $\gamma_{ab}$  の逆行列として定義した。

を満たせばよいが、例えば  $f^+(\sigma^+, \sigma^-) = f^+(\sigma^+)$ ,  $f^-(\sigma^+, \sigma^-) = f^-(\sigma^-)$  はこれを満たす。よって任意の関数  $f^+, f^-$  を用いて

$$\tau' = \frac{1}{2}\{f^+(\tau + \sigma) + f^-(\tau - \sigma)\}, \quad \sigma' = \frac{1}{2}\{f^+(\tau + \sigma) - f^-(\tau - \sigma)\} \quad (2.3.13)$$

と変換する自由度がまだ残っていることがわかる。

一方 conformal ゲージでの Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'}(-2\dot{x}^+\dot{x}^- - \mu^2(\dot{x}^+)^2(x^i)^2 + (\dot{x}^i)^2 + 2x'^+x'^- + \mu^2(x'^+)^2(x^i)^2 - (x'^i)^2)$$

と与えられる。ここで、 $\dot{x}^\mu = \partial_\tau x^\mu$ ,  $x'^\mu = \partial_\sigma x^\mu$  とした。このとき  $x^-$  方向への運動方程式は波動方程式  $(\partial_\tau - \partial_\sigma)x^+ = 0$  を与え、一般解は  $x^+(\tau, \sigma) = \tilde{f}^+(\tau + \sigma) + \tilde{f}^-(\tau - \sigma)$  となることがわかる。これは (2.3.13) と同じ形をしており、 $\tau$  を適当に変換することで  $x^+$  を  $\tau$  に比例した形にすることができる。そこで

$$x^+ = \alpha' p^+ \tau \quad (2.3.14)$$

と light-cone ゲージをとることにする。このとき  $x^+ \sim \tau$  より  $p^+ = -p_-/2 \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^-$  は定数であることに注意されたい。

また  $h^{ab}$  はこの作用 (2.3.8) においては未定乗数であり、 $h_{ab}$  についての変分から、以下の Virasoro constraint を得る。

$$T_{ab} \equiv \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c x^\mu \partial_d x^\nu g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.15)$$

特に今の場合には、

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2}(-2\alpha' p^+ \dot{x}^- + (\dot{x}^i)^2 - (\alpha' \mu p^+)^2 (x^i)^2 + (x'^i)^2) = 0 \\ T_{01} &= -2\alpha' p^+ x'^- + \dot{x}^i x'^i = 0 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

となる。

今、高速で動く弦を考えたが、重心系での運動は light-cone Hamiltonian (density)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{lc} &\equiv -\alpha' p^+ p_+ = -\alpha' p^+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^+} \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \{(2\pi\alpha')^2 p_i^2 + (x'^i)^2 + (\alpha' p^+ \mu)^2 (x^i)^2\} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

で記述される。ここで  $p_i \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^i$  とし、拘束条件 (2.3.16) を使って  $\dot{x}^-$  を消去した。この Hamiltonian は調和振動子と同じ形をしており、量子化することができる。 $x^i$  についての運動方程式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + (\alpha'p^+\mu)^2 \right) x^i(\tau, \sigma) = 0 \quad (2.3.18)$$

と与えられる。 $x^i$  は  $\sigma$  方向に周期的であるため  $x^i = \sum_n c_n^i(\tau)e^{in\sigma}$  と展開できる。この展開式を使って  $c_n^i$  についての運動方程式を解くと

$$x^i(\tau, \sigma) = \sum_n \left( a_n^i e^{i\omega_n\tau + in\sigma} + b_n^i e^{-i\omega_n\tau + in\sigma} \right) \quad (2.3.19)$$

となる。ここで  $\omega = \sqrt{n^2 + \tilde{\mu}^2}$ , ( $\tilde{\mu} \equiv \alpha'p^+\mu$ ) を導入し、 $a_n^i$ ,  $b_n^i$  は積分定数とした。 $(x^i)^* = x^i$  であることから  $a_n^i = (b_{-n}^i)^*$  が従い、また新たに定数  $x_0^i$ ,  $p_0^i$  を導入して、

$$x^i(\tau, \sigma) = x_0^i \cos \tilde{\mu}\tau + \frac{p_0^i}{\tilde{\mu}} \sin \tilde{\mu}\tau + \sum_{n>0} \left( a_n^i e^{i\omega_n\tau + in\sigma} + b_n^i e^{-i\omega_n\tau + in\sigma} + (b_n^i)^* e^{i\omega_n\tau - in\sigma} + (a_n^i)^* e^{-i\omega_n\tau - in\sigma} \right)$$

と書ける。ここで、量子化した際に正しいエネルギーの表式を出すように各係数を以下のように読み替える。

$$a_n^i = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \alpha_n^i, \quad b_n^i = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \alpha_{-n}^i, \quad (a_n^i)^* = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \bar{\alpha}_{-n}^i, \quad (b_n^i)^* = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \bar{\alpha}_{-n}^i \quad (n > 0)$$

こうして  $x^i$  について以下の表式を得る。

$$x^i(\tau, \sigma) = x_0^i \cos \tilde{\mu}\tau + \frac{p_0^i}{\tilde{\mu}} \sin \tilde{\mu}\tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \left( \alpha_n^i e^{i\tilde{\omega}_n\tau + in\sigma} + \bar{\alpha}_n^i e^{i\tilde{\omega}_n\tau - in\sigma} \right) \quad (2.3.20)$$

ここで  $\tilde{\omega}_n \equiv \text{sgn}(n)\sqrt{n^2 + \tilde{\mu}^2}$  とした。 $x^i$  の展開に right-moving な mode  $\alpha$  と left-moving な mode  $\bar{\alpha}$  が現れるのが閉弦の特徴である。この表式における係数  $\alpha^i$ ,  $\bar{\alpha}^i$  に適当な交換関係

$$\begin{aligned} [\alpha_n^i, \alpha_{-m}^j] &= \delta^{ij} \delta_{mn}, & [\bar{\alpha}_n^i, \bar{\alpha}_{-m}^j] &= \delta^{ij} \delta_{mn} \quad \text{for } n, m \geq 0 \\ [\alpha_n^i, \bar{\alpha}_m^j] &= 0 & & \text{for all } n \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

を課すことで、量子化することができる。このときの Hamiltonian は (2.3.17) を用

いて

$$\begin{aligned}
H_{\text{lc}} &= \frac{1}{p^+} \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{H}_{\text{lc}} \\
&= \mu \alpha_0^i \alpha_0^i + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{n^2}{\tilde{\mu}^2}} (\alpha_n^i \alpha_{-n}^i + \bar{\alpha}_n^i \bar{\alpha}_{-n}^i)
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

と与えられる。ここで  $n = 0$  の mode に関して、

$$\alpha_0^i = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\mu}}} (p_0^i + i \frac{x_0^i}{\tilde{\mu}}) \tag{2.3.23}$$

を導入した。

以上の議論から light-cone Hamiltonian の mode 展開の表式を導いたが、その固有状態には Virasoro 拘束条件から、ある制限がつくことを以下で確かめる。(2.3.16) の二つ目の式を  $\sigma = 0 \sim 2\pi$  で積分すると、 $x'^-$  を含む項は周期条件より落ちて

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} d\sigma T_{01} \\
\Rightarrow 0 &= \sum_{n,m \neq 0} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{\sqrt{\omega_n \omega_m}} (i\omega_n \alpha_n^i e^{i\omega_n \tau + i n \sigma} + i\omega_n \bar{\alpha}_n^i e^{i\omega_n \tau - i n \sigma}) \\
&\quad \times (i m \alpha_m^i e^{i\omega_m \tau + i m \sigma} - i m \bar{\alpha}_m^i e^{i\omega_m \tau - i m \sigma}) \\
\Rightarrow 0 &= \sum_{n>0} n (\alpha_n^i \alpha_{-n}^i - \bar{\alpha}_n^i \bar{\alpha}_{-n}^i)
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

となり、level matching condition  $\sum_n n \mathcal{N}_n = \sum_n n \bar{\mathcal{N}}_n$  が得られる。ここで  $\mathcal{N}_n \equiv \alpha_n^i \alpha_{-n}^i$  ( $\bar{\mathcal{N}}$  についても同様に定義する) とした。この条件を満たす状態が物理的な状態として許されるものである。

ここまで弦の bosonic part のみに注目してきたが、fermionic part も考慮すると、 $\mathcal{N}_n, \bar{\mathcal{N}}_n$  は

$$\mathcal{N}_n = (\alpha_n^i \alpha_{-n}^i + \text{fermions}), \quad \bar{\mathcal{N}}_n = (\bar{\alpha}_n^i \bar{\alpha}_{-n}^i + \text{fermions}) \tag{2.3.25}$$

のように fermion part の励起による寄与が入れて修正される。以上から pp-wave 背

景上の弦のスペクトルは

$$E_{\text{lc}} = \mu \mathcal{N}_0 + \mu \sum_{n>0} (\mathcal{N}_n + \bar{\mathcal{N}}_n) \sqrt{1 + \frac{n^2}{\tilde{\mu}^2}} \quad (2.3.26)$$

で与えられることがわかった。

最後に低エネルギーにはどのような固有状態が現れるかを列挙しておく。まず、基底状態を定義する。基底状態は単一の parameter  $p^+$  で label され、これを  $|0, p^+\rangle$  と書くことにする<sup>7</sup>。次に現れる状態として  $\alpha_0^{i\dagger}$  を基底状態にかけた  $\alpha_0^{i\dagger}|0, p^+\rangle$  がある。これは  $E_{\text{lc}} = \mu$  なる状態である。また  $\alpha_0^{i\dagger}$  を次々にかけることで  $\mu$  の整数倍のエネルギー状態が得られる。次に、 $\alpha_{-n}^i$  あるいは  $\bar{\alpha}_{-n}^i$  をかけて得られる状態を考える。この場合、level matching condition によって初めて現れる状態は  $\alpha_{-n}^i \bar{\alpha}_{-n}^i |0, p^+\rangle$  という形のものである。この状態はエネルギー  $E_{\text{lc}} = 2\mu\sqrt{1 + n^2/\tilde{\mu}^2}$  を持つ。次節ではこれらの弦の状態に対応するゲージ理論の operator について考察していく。

### 2.3.3 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論と BMN 対応

はじめに  $R \rightarrow \infty$  とした極限がゲージ理論側ではどのように現れるかを考察する。まず light-cone coordinate を用いることでエネルギー  $E = i\partial_t$ ,  $\psi$  方向の角運動量  $J = -i\partial_\psi$  と  $x^\pm$  方向の generator は以下のように関係する。

$$\begin{aligned} H_{\text{lc}} \equiv 2P^- &= i\partial_{x^+} = i\mu(\partial_t + \partial_\psi) = \mu(E - J) \\ 2P^+ &= i\partial_{x^-} = \frac{i}{\mu R^2}(\partial_t - \partial_\psi) = \frac{E + J}{\mu R^2} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$R \rightarrow \infty$  と極限をとったときに、 $p^+, p^-$  が有限になるためには  $E \sim J \sim R^2$  となることが必要であることがわかる。また対称性の議論から時間方向の generator は、共形変換の群  $SO(2, 4)$  の dilatation に対応しており、 $E$  の値は scaling dimension  $\Delta$  対応していることがわかる。 $J$  は  $SO(6)$  の generator であり、R-symmetry  $SO(6)$  のうちの  $U(1)$  charge みなせると考えられる。また  $H_{\text{lc}}$  は上で求めた light-cone Hamiltonian である。こうして、弦理論の light-cone energy はゲージ理論での scaling dimension  $\Delta$ 、R-charge  $J$  と

$$\frac{H_{\text{lc}}}{\mu} = \Delta - J \quad (2.3.28)$$

<sup>7</sup>基底状態は  $\alpha_0^i, \alpha_n^i, \bar{\alpha}_n^i$  ( $n > 0$ ) の作用によって消える状態として定義される。

という関係にあると予想される。これは BMN 対応における重要な関係式である。

また関係式 (2.2.5) より極限  $R \rightarrow \infty$  はゲージ理論側では  $N \rightarrow \infty$  として実現できることがわかる。よってゲージ理論側での極限をまとめると

$$N \rightarrow \infty, \quad J \sim \sqrt{N}, \quad g_{\text{YM}} : \text{fixed} \quad (2.3.29)$$

となる。これを BMN 極限と呼ぶことにする。通常の t' Hooft による large  $N$  は't Hooft coupling  $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$  を固定しながら  $N \rightarrow \infty$  をとるものであったが、極限 (2.3.29) では coupling  $\lambda$  は発散してしまっている。よってゲージ理論側の摂動論は全くダメになっているように思えるが、実は弦理論側で finite な light-cone energy を与える  $\Delta \sim J$  を満たす operator のみに着目すると摂動的な parameter として

$$\lambda' = \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{J^2} \quad (2.3.30)$$

が現れることがわかり、これは BMN 極限の下では有限値である。依然として、一般の operator についての議論では摂動論が破綻してしまうが、以下では上に挙げたような、特別な sector に限った議論によって対応を確かめる。

AdS/CFT 対応において  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の IIB 型超弦理論と対応していると考えられるのは  $\mathcal{N} = 4$  の超共形  $SU(N)$  Yang-Mills 理論であった。この理論の Euclid 化された作用は次のように与えられる。

$$S = \frac{2}{g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \text{Tr} \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i)^2 - \frac{1}{4} ([\phi_i, \phi_j])^2 + \frac{1}{2} \bar{\chi} \Gamma^\mu D_\mu \chi - \frac{i}{2} \bar{\chi} \Gamma_i [\phi_i, \chi] \right]$$

この理論に現れる場は

ゲージ場  $A_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ), scalar 場  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), spinor 場  $\chi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 16$ )

であり、これらはすべて  $N \times N$  の Hermite 行列で、 $SU(N)$  の adjoint 表現である。各場の scaling dimension は

$$\Delta_A = 1, \quad \Delta_\phi = 1, \quad \Delta_\chi = \frac{3}{2} \quad (2.3.31)$$

と与えられる。また  $D_\mu$  と  $F_{\mu\nu}$  は

$$D_\mu = \partial_\mu - i[A_\mu, \star], \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \quad (2.3.32)$$

と定義した。 $\Gamma$  については  $(\Gamma_\mu, \Gamma_i)$  が 10 次元の  $16 \times 16$  の gamma 行列になるようにとった。この作用では  $\phi$  と  $\chi$  に回転として作用する  $SO(6)$  の R-symmetry が見やすい形となっている。また、ゲージ場  $A_\mu$  はこの  $SO(6)$  の作用に対して singlet である。

$S^5$  空間の isometry と R-symmetry が対応していたことから、 $S^5$  の  $\psi$  方向の回転が  $\phi_5, \phi_6$  の R-symmetry による回転と対応しているとする。そこで、このことが見やすいように

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4), \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_5 + i\phi_6) \quad (2.3.33)$$

を導入する。このようにとると、 $Z$  が今考えるべき  $U(1)$  charge  $J = 1$  を持つことがわかる。また 16 個の fermionic operator のうち、8 個は  $J = 1/2$  であり、一方の 8 成分が  $J = 1/2$  を持つ。これらをそれぞれ  $\psi^A, \tilde{\psi}^A$  と書くことにする。これらの場の scaling dimension と  $J$ -charge を表 2.1 にまとめた。

	$Z$	$\bar{Z}$	$\phi^{i=1,2,3,4}$	$A_\mu$	$\psi^A$	$\tilde{\psi}^A$
$\Delta$	1	1	1	1	3/2	3/2
$J$	1	-1	0	0	1/2	-1/2
$\Delta - J$	0	2	1	1	1	2

表 2.1: 各場の  $\Delta$  と  $J$  の値

それでは前節に得た弦の状態に対応するゲージ理論側の operator を考察していく。まず  $\Delta - J = 0$  の場合から考える。この場合は弦理論側では  $H_{lc} = 0$  つまり ground state に対応している。ゲージ理論側では弦の状態にはゲージ不変な single trace operator が対応していると考えられるが、 $\Delta - J = 0$  とすると unique に  $\text{Tr}[Z^J]$  に決まる。そこで以下の対応が得られる。

$$H_{lc} = 0, \quad |0, p^+ \rangle \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{JN^J}} \text{Tr}[Z^J] \quad (2.3.34)$$

ここで operator には 2 点関数が規格化されるように factor をつけた。またこの operator は chiral primary (BPS state) であり scaling dimension  $\Delta$  が任意の coupling  $\lambda'$  で変わらない (protected) という性質を持っている。この事実は、弦理論側で  $\lambda'$  によらず  $E_{lc} = 0$  であることと consistent である。

次に  $\Delta - J = 1$  の場合を考える。弦理論側の状態は  $E_{lc} = \mu$  であり、考えられる



状態は

$$\alpha^{\dagger\mu}_0 |0, p^+\rangle, \quad \alpha^{\dagger i}_0 |0, p^+\rangle, \quad \theta^{\dagger A}_0 |0, p^+\rangle \quad (2.3.35)$$

が挙げられる。ここで  $\theta^{\dagger A}_0$  は fermionic な mode の生成 operator とした。一方ゲージ理論側では  $\text{Tr}[Z^J]$  に  $\Delta - J = 1$  なる operator  $D_\mu Z$ ,  $\phi_i$ ,  $\psi$  を挿入したものが対応していると考えられる。こうして以下の対応関係が予想される。

$$\begin{aligned} H_{\text{lc}} = \mu, \quad \alpha^{\dagger i}_0 |0, p^+\rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N^J}} \text{Tr}[\phi_i Z^J] \\ \alpha^{\dagger\mu}_0 |0, p^+\rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N^J}} \text{Tr}[D_\mu Z Z^{J-1}] \\ \theta^{\dagger A}_0 |0, p^+\rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N^J}} \text{Tr}[\psi_A Z^{J-1}] \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

上に現れたゲージ理論側の operator はすべて protected であり、 $\lambda'$  によらず  $\Delta - J = 1$  である。この事実の弦理論側での対応も再び  $\lambda'$  によらず  $H_{\text{lc}} = \mu$  であることから確認できる。

この対応はより高次の  $H_{\text{lc}} = N\mu$ , ( $N \in \mathbb{N}$ ) の場合にも拡張され、弦の  $n = 0$  の operator をかけた状態は、対応する operator  $D_\mu Z$ ,  $\phi_i$ ,  $\psi$  を挿入したものに 대응することがわかる。この類の、 $Z$  をたくさん並べて trace をとり、そこにいくつか operator を挿入して作られる operator を BMN operator と呼ばれる。

ここまでは  $n = 0$  の operator をかけた supergravity mode について考察したが、stringy mode ( $n \neq 0$ ) をかけて得られる状態との対応を考察する。ここまでに、 $\alpha^{\dagger i}_0$  をかけることは  $\phi^i$  の挿入に対応することをみた。では  $\alpha^{\dagger i}_{-n}$  をかけることはどのような操作に対応するだろうか。Berenstein-Maldacena-Nastase は対応する operator が

$$\alpha^{\dagger i}_{-n} |0, p^+\rangle \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{JN^J}} \sum_{l=1}^J \text{Tr}[Z^l \phi^i Z^{J-l}] e^{\frac{2\pi i n l}{J}} \quad (2.3.37)$$

であると予想した。この対応が  $n \rightarrow 0$  で supergravity mode での対応に戻ることは確かに確認できる。しかし、この operator は trace の cyclicity によって 0 になることがわかる。この事実は弦理論側での状態が level matching condition によって除外されていることとうまく対応している。

level matching condition によって最初に現れる stringy mode での対応は

$$H_{\text{lc}} = 2\mu\sqrt{a + \frac{n^2}{(\alpha'p^+\mu)^2}}, \quad \alpha_{-n}^i \bar{\alpha}_{-n}^j |0, p^+\rangle \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{JN^J}} \sum_{l=1}^J \text{Tr}[\phi^i Z^l \phi^j Z^{J-l}] e^{\frac{2\pi i n l}{J}}$$

であると考えられる。この operator についての scaling dimension を摂動的に計算し  $\Delta - J$  を求めると

$$\Delta = J + 2 + \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{J^2} n^2 + \mathcal{O}(g_{\text{YM}}^3) \quad (2.3.38)$$

となることがわかる<sup>8</sup>。

弦理論の light-cone energy と比較するため parameter の関係をまとめると、(2.3.27) と  $E \sim J$  より

$$p^+ = \frac{J}{\mu R^2} \quad (2.3.39)$$

であることがわかる。さらに  $R^4 = g_{\text{YM}}^2 \alpha'^2 N$  であったから

$$\frac{1}{\tilde{\mu}^2} = \frac{1}{(\alpha'p^+\mu)^2} = \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{J^2} \equiv \lambda' \quad (2.3.40)$$

となることがわかる。よって弦理論の light-cone energy  $E_{\text{lc}}$  も  $\lambda'$  によって展開され、

$$\frac{E_{\text{lc}}}{\mu} = 2\sqrt{1 + \lambda' n^2} = 2 + \lambda' n^2 + \mathcal{O}(\lambda'^2) \quad (2.3.41)$$

となる。これは (2.3.38) に  $\mathcal{O}(\lambda')$  で一致しており、確かに 1-loop order で  $E_{\text{lc}}/\mu = \Delta - J$  が成り立っていることがわかる。

---

<sup>8</sup>この詳しい計算は文献 [3, 18] を参照してほしい。

## 第3章 古典力学系におけるカオス

この章では、後の議論の準備として、古典力学系におけるカオスについて扱う。今日カオスと呼ばれる現象を最初に発見したのは Henri Poincaré とされている。彼は、天体の3体運動が保存量の不足のために解析的には解けないことを示し、その解軌道は非常に複雑になることを発見した。このように少数の自由度から、非常に複雑な運動が現れるのがカオスの特徴の一つである。

系にカオスが起こるかどうかを調べるには、数値計算に頼らざるを得ない。また、数値計算をただけでは軌道がカオス的かどうかを判断しづらいため、視覚的にカオスを判別できるように Poincaré 断面を用いる。まず 3.1 でカオスの特徴について簡単に説明し 3.2 では [21] に基づき、非線形な相互作用を持つ系の軌道の様子を一般的に調べた Kolomogorov, Arnold, Moser らによる議論を紹介する [22, 23, 24]。3.3 では文献 [25, 26] に基づき、カオスと Poincaré 断面の説明を行う。3.4 ではカオスを示す例として Hénon-Heiles 系 [27] を紹介し Poincaré 断面を計算する。

### 3.1 カオスの特徴

カオスを一般的に定義することは難しく、ここでは古典力学系におけるカオスの持つ特徴として以下の4つを挙げておく。

- 決定論的
- 初期値鋭敏性
- 非周期性
- 有界性

まず条件に挙げたのは、系が決定論的であるということである。つまり、ランダムな変数や確率過程などとは無関係な系から、系の持つ非線形効果のみによって複雑な運動が生じている。また系は決定論的だが、解析的に解を求めることができず、

次に説明する初期値鋭敏性のために僅かに初期値をずらすと大きく結果が異なってしまう。この意味でカオスは予測不可能な運動と言える。

次に初期値鋭敏性について説明する。相空間内で二つの微小に離れた初期値の点を置き、それぞれを時間発展させることを考える。この時、初めは微小な距離だけ離れていた二点がある有限時間後には指数関数的に離れて現れる性質を初期値鋭敏性と呼ぶ。この「鋭敏性」を測る指標として Lyapunov 指数がある。初めに時刻  $t = 0$  に置いた二つの初期値を  $q(0), q(0) + \delta q(0)$  とする<sup>1</sup>。ここで、 $\delta q(0)$  は微小量であるとする。有限時間経った  $t = T$  では二つの点が  $q(T), q(T) + \delta q(T)$  と発展する。この時 Lyapunov 指数  $\lambda$  は次のように定義される。

$$\lambda \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( \lim_{\delta q(0) \rightarrow 0} \frac{\|\delta q(T)\|}{\|\delta q(0)\|} \right) \quad (3.1.1)$$

この定義より  $\lambda$  が有限値をとる場合には、時刻  $t = T$  での二点間の距離が  $\delta q(T) \sim q(0)e^{\lambda T}$  と振る舞うことになる<sup>2</sup>。 $\lambda > 0$  とすると、これはまさに微小な二点間の距離が指数関数的に離れていく初期値鋭敏性を表している。 $\lambda < 0$  は初期値の指数関数的な収縮を意味しており、それ以外の場合は  $\lambda = 0$  をなる。 $\lambda > 0$  となることはカオス的な系の特徴であり、数値計算によって Lyapunov 指数が正になることを示して、カオスが存在することの証拠とすることも多い。しかし、以下ではカオスの存在証明は後で説明する Poincaré 断面を見ることに留める。

三つ目の条件として非周期性を挙げた。これは系の振る舞いが長時間経っても、固定点や周期運動、準周期運動に落ち着かないことを意味している。この性質もカオスが予測不可能であることに関連している。

最後に有界性という条件も付け加える<sup>3</sup>。これは系の運動が任意の時刻で有限に収まっていることを意味する。有界性を課した理由として、これまでに挙げた非周期性までの三つの特徴を満たすが自明に解けてしまう次の例がある。

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}x^2 \quad (3.1.2)$$

これは調和振動子の potential の前の符号を反転させた系である。またこの系は可

<sup>1</sup>ここで、 $q$  は相空間内の点の座標である。例えば Hamilton 系なら  $q(t)$  は  $q(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  である

<sup>2</sup> $\delta q(T) \sim q(0)e^{\lambda T}$  を (3.1.1) に代入することで確かめられる。

<sup>3</sup>この条件は無限遠を一点に同一視してしまえば三つ目の非周期性に含まれるが、ここでは別の概念として挙げておく。

積分であり、簡単に解軌道が求められる。ここで、 $t = 0$  での二つの初期値として  $x_+(0) = \epsilon/2$  と  $x_-(0) = -\epsilon/2$  で静止したものを考える。すると  $t = 0$  では二つの初期値は微小な距離  $\epsilon$  だけ離れているが、時間発展によってその間の距離は指数関数的に増大する。よってこの場合の Lyapunov 指数は正となる。またこれらの運動は非周期的であり、これまでに挙げた有界性以外のカオスの性質を全て満たす。しかし、この軌道は何ら複雑ではなく簡単に解けてしまうため、このような運動はカオスとは呼び難い。そこで、有界性を課すことによってこのような例を排除した。

以上がカオスが持つ特徴である。注意として、これらの概念は系に対してではなく、軌道に対して定義されているものであることを挙げておく。後の例で見るように、カオスは系と初期値をうまく決めた時に現れるものであり、非可積分な系がいつでもカオス的な振る舞いをするわけではない。

## 3.2 KAM トーラス

可積分な Hamiltonian に微小な摂動を加えたときの解の振る舞いについての Kolmogorov-Arnold-Moser による一連の議論 [22, 23, 24] を簡単に紹介する。可積分である系では、解軌道があるトーラスの上に乗っていることがわかる。摂動を加えた場合、ある条件下では、解軌道が元のトーラスを少し変形したトーラスの上に乗っていることを示すことができる。この定理は Kolmogorov によって予想がされ [22]、その後 Arnold [23]、Moser [24] によって証明が与えられたため、彼らの頭文字をとって KAM 定理と呼ばれている。

ここでは文献 [21] の議論を参考に二次元調和振動子を例にとって、この系に摂動を加えたときの解軌道の振る舞いについて議論する。

二次元の調和振動子の Hamiltonian  $H_0$  を考える。

$$H_0(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i q_i^2) \quad (3.2.1)$$

ここで、 $\omega_i$  は各振動子の振動数とする。次に、作用角変数

$$J_i = \int \frac{dq_i}{2\pi} p_i = \int \frac{dq_i}{2\pi} \sqrt{2E_i - \omega_i^2 q_i^2} = \frac{E_i}{\omega_i} \quad (3.2.2)$$

とを導入して、Hamiltonian  $H_0$  を

$$H_0(J_1, J_2) = \sum_{i=1}^2 J_i \omega_i \equiv H_0(J_1, J_2) \quad (3.2.3)$$

と書き直す。ここで  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) は定数である<sup>4</sup>。この書き換えは力学変数  $(p_i, q_i)$  から  $(J_i, \phi_i)$  への正準変換とみなすことができ、 $J_i$  とそれに共役な  $\phi_i$  の運動方程式は以下で与えられる。

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} = \omega_i \quad (3.2.4)$$

これより、系の解軌道は  $J_1, J_2$  で特徴付けられるトーラスの上に存在することがわかる。(図. 3.1 参照) この性質は可積分な系に特徴的なものであり、保存量が十分存在すれば作用角変数使った同様の議論によってトーラスの存在を示すことができる。

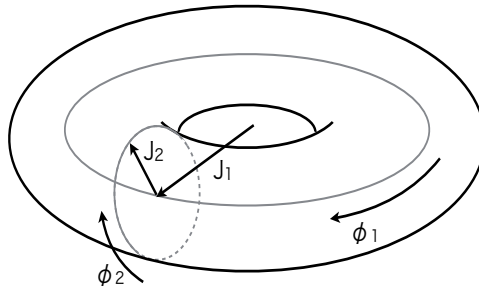


図 3.1: 作用角変数  $J_1, J_2$  で特徴づけられる 2次元トーラス

この可積分な Hamilton 系  $H_0$  に相互作用項を加えることを考える。相互作用項は

<sup>4</sup> $E_i = \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i q_i^2)$  とした。  $E_i$  が定数であることは Hamiltonian が変数分離型であることから簡単に示せる。

トーラスの周期条件から Fourier 展開した形で

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f_{mn}(J_1, J_2) \cos(m\phi_1 + n\phi_2) \quad (3.2.5)$$

と書く<sup>5</sup>。 $\epsilon$  はオーダー  $\mathcal{O}(1)$  の数としておく。この Hamiltonian (3.2.5) を正準変換  $(J_1, J_2) \rightarrow (J'_1, J'_2)$  によって、相互作用のない Hamiltonian  $H_0(J'_1, J'_2)$  として書くことを考える。

このような正準変換の母関数として、以下のものを考える。

$$F(J'_i, \phi_i) = \sum_{i=1}^2 J_i \phi_i + \epsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} g_{mn}(J'_1, J'_2) \sin(m\phi_1 + n\phi_2) \quad (3.2.6)$$

この母関数によって与えられる変換は

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{\partial F(J'_i, \phi_i)}{\partial \phi_i} = J'_i + \epsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m\delta_{i1} + n\delta_{i2}) g_{mn} \cos(m\phi_1 + n\phi_2) \\ \phi'_i &= \frac{\partial F(J'_i, \phi_i)}{\partial J'_i} = \phi_i + \epsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_{mn}}{\partial J'_i} \sin(m\phi_1 + n\phi_2) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

である。新しい力学変数  $(J'_i, \phi'_i)$  を Hamiltonian (3.2.5) に代入し、 $\epsilon$  の冪ごとに書くと

$$H = H_0(J'_1, J'_2) + \epsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \{(m\omega_1 + n\omega_2) g_{mn} + f_{mn}\} \cos(m\phi'_1 + n\phi'_2) \quad (3.2.8)$$

となる。このとき、すべての  $m, n$  について  $|f_{m,n}| \ll |m\omega_1 + n\omega_2|$  が成り立っているとすると、

$$g_{m,n} = -\frac{f_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_2} \ll 1 \quad (3.2.9)$$

と選ぶと Hamiltonian の  $\epsilon$  の一次についての項を消すことができる。この操作は  $\epsilon$  の高次についても同様に行うことができ、Hamiltonian は無限回の変換ののち

$$H = H_0(J_1^{(\infty)}, J_2^{(\infty)}) \quad (3.2.10)$$

と与えられる。こうして、軌道は変形されたトーラスの上に乗っていることがわか

<sup>5</sup>ここで、相互作用項は後で議論がし易い形に限定した。

る。この変形されたトーラスはKAMトーラスと呼ばれる。

一方、 $m\omega_1 + n\omega_2 \sim 0$ となる場合には  $g_{m,n}$  が大きくなってしまい、摂動展開が破綻して議論が成り立たない。この場合は「共鳴」のために新しいトーラスが形成されることが保証されない。この問題は「小さい分母」の問題として知られており、トーラスの崩壊に伴うカオス発生の原因になると考えられている。

後で Hénon-Heiles 系を例にとって、ここで説明したトーラスの崩壊を数値計算によって観察する。このとき高次元の軌道の振る舞いを観察するには、Poincaré 断面を取ると便利であるため次の節ではこれを説明する。

### 3.3 Poincaré 断面

ここでは Poincaré 断面について説明する。Poincaré 断面は高次元の相空間内での複雑な軌道の情報を二次元平面にプロットするものである。Poincaré 断面を用いることで視覚的に高次元の軌道の様子を捉えることができ、カオスが起こっているかどうかを調べられる。

以下では、自律的な(時間に陽に依存しない)Hamilton 系を念頭に置いて説明する。ある系のある初期値について、数値計算などによって相空間の軌道が得られたとする。この時、図 3.2 のように、この軌道と交わるように相空間内に平面を置く。そしてその平面上に交った点の印をつけていく。この方法で高次元の軌道から、二次元平面の点の集合を取り出すことができる。例えば運動が周期的であれば、その周期に応じた数の点が平面上に記録される。また準周期運動の場合には、同じ点に戻ることはないが、軌道は一度通った点のすぐ近くをしばらくしてからまた通る。こうして、十分時間がたった後には平面上には点が一次的に並んだものが出来上がる。点が一次的に並ぶ理由として、可積分な系では十分な数の保存量の存在によって系の運動は作用角変数を使って書き表せる。また、このときの軌道は相空間内でトーラスの上に乗っていることが示される。準周期運動は各角変数についての周期の比が無理数となるときに起こるものであり、いずれにせよトーラスの上で運動している。このような場合に軌道に垂直に断面を取ることでトーラスが輪切りにされ、断面上の点は一次的に並ぶことになる。

以上の理由から、周期運動の場合は十分時間を追うと断面上に、有限個の点の集まりが現れ、準周期運動の場合には、一次的に並んだ無限個の点の集まりが現れる。

一方、運動がカオス的になっている場合には、上で説明したようなトーラスが壊れ、軌道は相空間内を埋め尽くすような振る舞いをする。この時、Poincaré 断面を取



ると、点が二次元的に無秩序に散らばったものが得られる。このような Poincaré 断面がカオスの証拠となる。次の節では、この実例として Hénon-Heiles 系での Poincaré 断面を見ることにする。

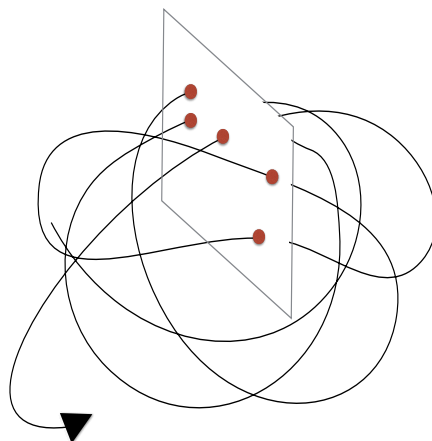


図 3.2: ポアンカレ断面  
軌道と交差する度に平面に図の赤い点のように印をつけていく。

### 3.4 Hénon-Heiles 系での例

この節ではカオスを示す簡単な例として、Hénon-Heiles 系 [27] を扱う。Hénon-Heiles 系は次の Hamiltonian で定義される Hamilton 系である。

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2) \\
 U(q_1, q_2) &= \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

$U(q_1, q_2)$  の第二項、第三項を除くとこの系は、二次元の調和振動子系に等しい。Hénon-Heiles 系は二次元の調和振動子系にこのような非線形項を加えたものである。この系は Hénon と Heiles が銀河の周りの星の運動を調べる際に初めて導入された。彼らは Poincaré 断面を用いた解析によって、この系の運動がカオス的になることを確認している。ここでは Poincaré 断面を使ったカオスの検出の例として、彼らと同様の数値計算を行うことにする。

まずこの系の典型的な振る舞いを観察することから始める。式 (3.4.1) の potential  $U(q_1, q_2)$  の形とその上での典型的な軌道は以下のようなものである。

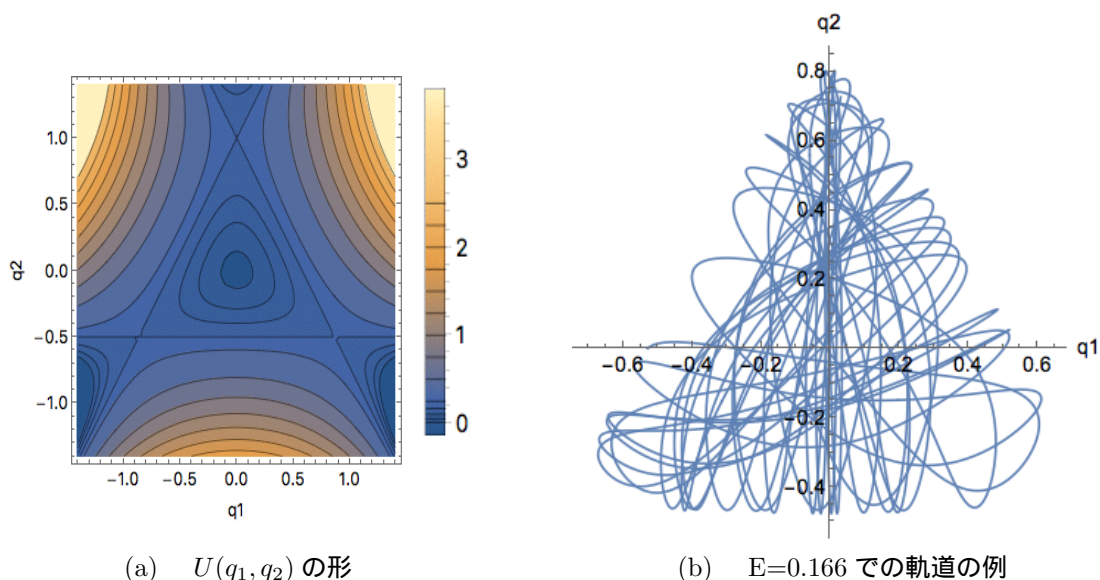


図 3.3: Hénon-Heiles 系の potential と軌道

potential の等高線を図に記したが、 $E=1/6$  の時に等高線が三角形が成している。一般に  $E>1/6$  の場合には、系の運動は有界ではなくなり potential の外側に転がり落ちてしまう。また、 $q_1 = q_2 = 0$  の中心のくぼみの底は  $E=0$  である。よって以下では  $0<E<1/6$  として、運動が図の中心のくぼみに収まっている場合のみを考える。

$E\sim 0$  の場合、粒子が感じる potential は調和振動子に近く、準周期的な運動をする。一方、 $E\sim 1/6$  の場合には粒子は potential の歪みを感じるようになり、三角形の枠の中でビリヤードのように運動する。この運動の様子を (図 3.3) の (b) に記した。

(b) の運動はカオス的になっているが、軌道を二次元に plot した絵ではその判断がしづらく、特に準周期運動との見分けがつかない。そこで、Poincaré 断面をとってこの運動を調べる。以下の (図 3.4) に  $E=0.01, 0.05, 0.1, 0.166$  の場合の Poincaré 断面を書いた。ここで断面は  $q_1 = 0, p_1 > 0$  の場合に  $q_2-p_2$  平面にとるものとする。色の違いは初期値の違いを表す。(図 3.4)-(a) では点は全て一次的に並び円を成している。このような断面は準周期運動の特徴的なものである。つまりエネルギーの低い場合には、計算した全ての初期値が準周期運動になったことがわかる。(b) は (a) から円の形が変わっただけで、まだ点は一次的にしか広がっていない。(c) では (b) での線がぶつかったところから点が二次元的に広がっていることがわかる。このエネルギー帯では、ある初期値の運動はカオス的になっていると言える。(d) の

$E=0.166$  までエネルギーを上げると、ほとんどの初期値に対して点は二次元的に広がっており、トーラスを保っているのは、ほんの一部の初期値の島だけになっていることがわかる。

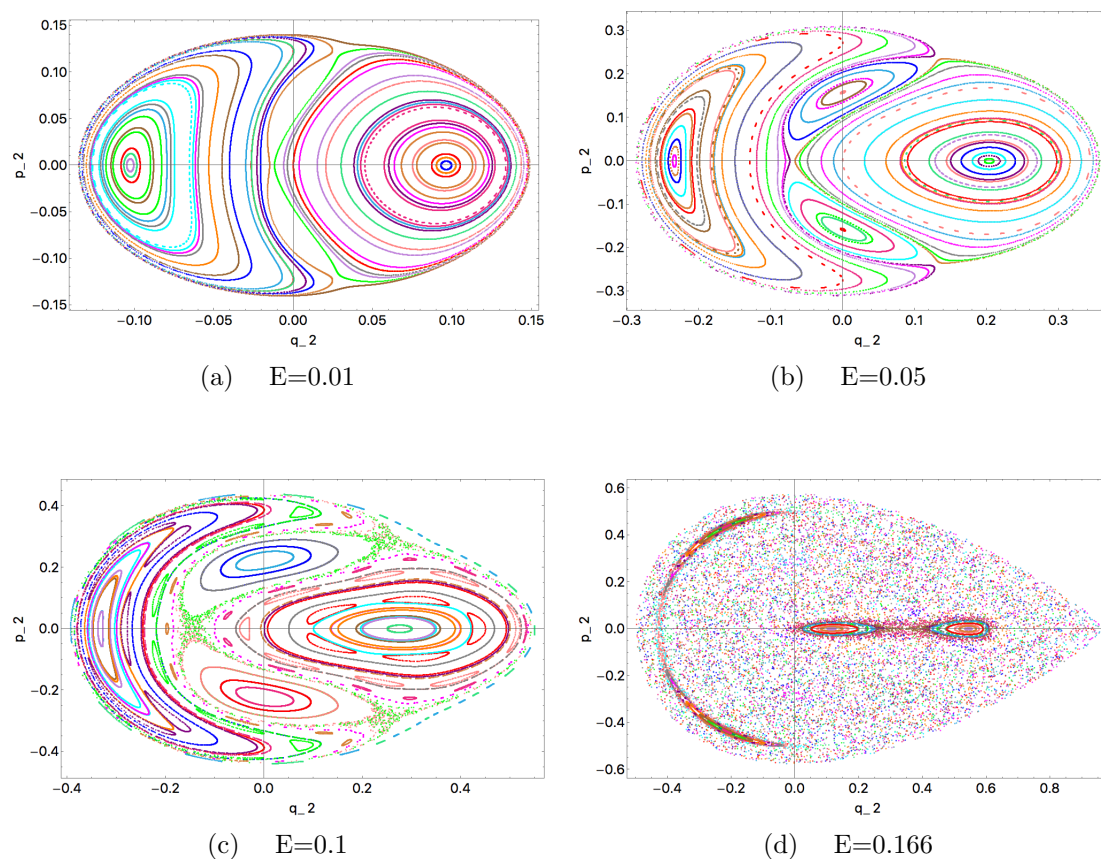


図 3.4: 各エネルギーでの Poincaré 断面

以上のように、Poincaré 断面を使えばカオスが存在するかどうかを視覚的に判断することができる。この後の議論でも Poincaré 断面をとってカオスの存在の証明を行うことにする。

## 第4章 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$ 空間上の弦理論

この章では  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の説明を行う。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間は超弦理論に無矛盾な 10 次元空間である。また、AdS/CFT の文脈では、この空間上の超弦理論は  $\mathcal{N} = 1$  超共形ゲージ理論に対応していると考えられている [4]。さらに、 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦理論は非可積分であり弦の運動がカオスを示すことが知られている [5]。まず、4.1 では  $\text{T}^{1,1}$  空間がどのような空間であるかを説明する。次に 4.2 で  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の超弦理論とある  $\mathcal{N} = 1$  超共形ゲージ理論の AdS/CFT 対応を紹介する。最後に 4.3 では文献 [5] に基づいて、 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦の運動の解析を行う。

### 4.1 $\text{T}^{1,1}$ 空間

ここでは  $\text{T}^{1,1}$  空間がどのような空間であるかを説明する。以下の議論では文献 [28] を参考にした。 $\text{T}^{1,1}$  空間を説明するにあたって、まず以下の式で与えられる四次元複素空間  $\mathbb{C}^4$  中の実 6 次元の cone を考える。

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

ここで  $z_i \in \mathbb{C}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とした。この方程式は実 8 次元の  $\mathbb{C}^4$  に対し実 2 成分の条件を与えているので、得られる曲面は実 6 次元である。また、各  $z_i$  を実定数  $\lambda$  倍;  $z_i \rightarrow \lambda z_i$  したのものによっても方程式 (4.1.1) は満たされる。この意味で、この式で定義される曲面は cone と呼ばれる。

次にこの cone の動径方向を正の実数  $R$  によって以下のように parametrize する。

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = R^2 \quad (4.1.2)$$

$R = 0$  が cone の原点に対応しており、 $R > 0$  と  $R$  を大きくしていくと原点から cone に沿って広がっていく。この時、 $R$  を固定して cone 周りの多様体を考える。 $\text{T}^{1,1}$  空間はこの cone の周りの空間のうち性質の良い計量を持つ 5 次元の Riemann 多様体

であり、佐々木-Einstein 多様体と呼ばれるクラスに属する。

$z_i = x_i + i y_i$  とすると、式 (4.1.1)、(4.1.2) は以下のように書き換えられる。

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \frac{R^2}{2}, \quad \sum_{i=1}^4 y_i^2 = \frac{R^2}{2}, \quad \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 0 \quad (4.1.3)$$

ここで (4.1.3) の第一式は実 8 次元空間中の半径  $R/\sqrt{2}$  の 3 次元球面  $S^3$  を表す。次に、第 2 式と第 3 式はこの  $S^3$  を底空間とする、 $S^2$  ファイバー束を表している。また、 $S^3$  上のファイバー束は自明束であることが知られており<sup>1</sup>、この空間のトポロジーは大域的に  $S^3 \times S^2$  となっているとわかる。

次にこの空間上の計量を考える。まず以下のような行列  $\tilde{Z}$  を導入する。

$$\tilde{Z} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^4 z_i \sigma^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_3 + i z_4 & z_1 - i z_2 \\ z_1 + i z_2 & -z_3 + i z_4 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

ここで  $\sigma^i = (\vec{\sigma}, \mathbb{1})$  とした。 $\vec{\sigma}$  は Pauli 行列である。 $\tilde{Z}$  を用いると条件 (4.1.1)、(4.1.2) はそれぞれ以下のように書ける。

$$\det \tilde{Z} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0 \quad (4.1.5)$$

$$\text{Tr}(\tilde{Z}^\dagger \tilde{Z}) = \sum_{i=1}^4 |z_i|^2 = R^2 \quad (4.1.6)$$

ここで  $Z \equiv \tilde{Z}/R$  と規格化して、上の条件は

$$\det Z = 0, \quad \text{Tr}(Z^\dagger Z) = 1 \quad (4.1.7)$$

と書ける。これらの条件を満たす簡単な行列として、

$$Z_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

がある。この  $Z_0$  を用いて条件 4.1.7 を満たす一般の行列を以下のようにして構成できる。

$$Z = L Z_0 R^\dagger, \quad (L, R \in \text{SU}(2)) \quad (4.1.9)$$

<sup>1</sup>詳しくは [ ] を参照されたい。

通常、行列の特異値分解定理から、二つの unitary 行列を用意し、 $L Z_0 R^\dagger$  with  $L, R \in U(2)$  とすることで一般解を構成できるが、今の場合は以下の理由により  $L, R \in SU(2)$  としてよい。  $U(2)=U(1) \times SU(2)$  とした時、  $U(1)$  部分の  $Z_0$  に対する作用は

$$e^{i\theta} Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

のように  $SU(2)$  の元  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$  を使って書き直せる。よって  $Z_0$  から  $Z$  を (4.1.9) のように作る際に、  $U(1)$  の自由度は必要がないことがわかる。次に  $SU(2)$  の元  $L, R$  を以下のように parametrize する。

$$L = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} k & -\bar{l} \\ l & \bar{k} \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

ここで  $a, b, k, l$  は、  $|a|^2 + |b|^2 = 1$   $|k|^2 + |l|^2 = 1$  を満たす複素数であり、

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{1}{2} \theta_1 e^{\frac{1}{2} i (\psi_1 + \phi_1)}, & b &= \sin \frac{1}{2} \theta_1 e^{\frac{1}{2} i (\psi_1 - \phi_1)}, \\ k &= \cos \frac{1}{2} \theta_2 e^{\frac{1}{2} i (\psi_2 + \phi_2)}, & l &= \sin \frac{1}{2} \theta_2 e^{\frac{1}{2} i (\psi_2 - \phi_2)} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

と parametrize しておく。また、

$$L = \Theta, \quad R = \Theta^\dagger, \quad \Theta \equiv \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

とした時、この  $L, R$  の作用によって  $Z_0$  は不変であり、  $Z_0 = L Z_0 R^\dagger$  を満たす。よってこの表示にはまだ余分な自由度があり、  $L, R$  の自由度から  $\Theta$  による  $U(1)$  の自由度を割る必要がある。そこで以下のような同一視をする<sup>2</sup>。

$$(L, R) \sim (L\Theta, R\Theta^\dagger) \quad (4.1.14)$$

以下では、  $\Theta$  をうまく選んで (4.1.12) において  $\psi_1 = \psi_2$  となるような代表元を取ってくることにする。上の議論から、  $L, R$  は  $Z$  に対し推移的に作用し、また固定部分群として  $\Theta$  の  $U(1)$  自由度があることがわかる。よってこの空間は等質空間とし

<sup>2</sup> $T^{1,1}$  空間の “1,1” の由来はここにある。ここで  $(L, R) \sim (L\Theta^q, R\Theta^{p\dagger})$  と同一視したものは  $T^{p,q}$  と呼ばれ、  $T^{1,1}$  空間はこの特別な場合である。

て以下のような表式を持つ。

$$T^{1,1} = \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)} \quad (4.1.15)$$

条件 (4.1.1)、(4.1.2) に対して  $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$  が推移的に作用し、 $z_i \rightarrow e^{i\theta} z_i$  なる  $U(1)$  変換で条件が不変であることから、(4.1.15) は理解できる。次に  $T^{1,1}$  空間の計量について考える。計量の  $Z$  を用いた表式で、実であること、 $\Theta$  による  $U(1)$  の作用で不変であることから自然な形として

$$ds^2 = C_1 \text{Tr}(dZ^\dagger dZ) + C_2 |\text{Tr}(Z^\dagger dZ)|^2 \quad (4.1.16)$$

のようにかける。ここで  $C_1$ 、 $C_2$  は実の定数とする。ここで計量が Einstein 計量になることを課す。計量が Einstein であるとは、

$$\text{Ric}(g)_{\mu\nu} = k g_{\mu\nu}, \quad k = \text{const.} \quad (4.1.17)$$

のように計量テンソルがその Ricci テンソルと比例する時のことを指す。この条件下で非自明な 5 次元の metric となるものは  $C_1 = \frac{2}{3}$ 、 $C_2 = -\frac{2}{9}$  の時である<sup>3</sup>。そのときの計量を (4.1.12) を用いて、かつ  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$  として書くと

$$ds_{T^{1,1}}^2 = \frac{1}{9} [d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2]^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 [d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2] \quad (4.1.18)$$

となる。これが  $T^{1,1}$  空間の計量である。

次に  $T^{1,1}$  空間が持つ性質について説明していく。まず、 $T^{1,1}$  空間は Einstein 多様体であることを課したが、計量 (4.1.18) は特に

$$\text{Ric}(g^{T^{1,1}})_{\mu\nu} = 4 g_{\mu\nu}^{T^{1,1}} \quad (4.1.19)$$

を満たす。

ここで、ある  $n$  次元の cone の線素  $ds_{\text{cone}}^2$  とその周りの空間の線素  $ds_{\text{arround}}^2$  を

$$ds_{\text{cone}}^2 = dR^2 + R^2 ds_{\text{arround}}^2 \quad (4.1.20)$$

<sup>3</sup>他に非自明なものとして  $C_1 = 1$ 、 $C_2 = -1$  がある。この場合には四次元空間  $S^2 \times S^2$  の計量となる。

のように書く。このとき、元の  $n$  次元の cone の計量  $g^{\text{cone}}$  が Ricci 平坦であることと cone 周りの計量  $g^{\text{around}}$  が Einstein 計量で

$$\text{Ric}(g^{\text{around}})_{\mu\nu} = (n - 2)g_{\mu\nu}^{\text{around}} \quad (4.1.21)$$

を満たすことは同値となる<sup>4</sup>。また、(4.1.20) のような計量を持つ cone を、cone 周りの空間の metric cone と呼ぶ。

$T^{1,1}$  空間についての metric cone を考えると、cone の計量  $g^{\text{cone}}$  は

$$ds_{\text{cone}}^2 = g_{\mu\nu}^{\text{cone}} dx^\mu dx^\nu = dR^2 + R^2 ds_{T^{1,1}}^2 \quad (4.1.22)$$

となる。上で述べたことから、 $T^{1,1}$  空間の計量が (4.1.20) を満たすことは cone の Ricci 平坦性を保証する。cone が Ricci 平坦であることは、次節で AdS/CFT 対応を考える際に重要となる。

次に、 $T^{1,1}$  空間は佐々木多様体であることについて述べる。ある多様体が佐々木であるとは、その多様体の metric cone が Kähler 多様体であることを指す。以下では、6 次元の cone で Ricci 平坦かつ Kähler である計量を求め、その cone を metric cone に持つ計量として、 $T^{1,1}$  空間の計量を再導出する。

まず、実 6 次元の cone の Kähler 計量について考える。Kähler 多様体では、その計量を Kähler potential  $\mathcal{K}$  を用いて局所的に以下のように書くことができる。

$$ds^2 = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu d\bar{z}^{\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\mu}} \mathcal{K} dz^\mu d\bar{z}^{\bar{\nu}} \quad (4.1.23)$$

ここで、 $\partial_\mu = \partial/\partial z^\mu$ 、 $\partial_{\bar{\mu}} = \partial/\partial \bar{z}^{\bar{\mu}}$  ( $\mu, \bar{\mu} = 1, 2, 3$ ) とした<sup>5</sup>。

計量が  $SU(2) \times SU(2)$  の作用の元で不変であることを仮定し、 $\mathcal{K}$  は  $r^2$  のみに依存するとする。 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(r^2)$  とすると、上記の計量は

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \mathcal{K}'(\partial_\mu \partial_{\bar{\mu}} r^2) + \mathcal{K}''(\partial_\mu r^2 \partial_{\bar{\mu}} r^2) \quad (4.1.24)$$

と書ける。ここでプライム記号は  $r^2$  についての微分を意味する。さらに  $r^2 = \text{Tr} \tilde{Z}^\dagger \tilde{Z}$

<sup>4</sup>証明は付録 A に与えた

<sup>5</sup>以下では、条件 (4.1.1) によって  $z^4$  方向の成分は消去して考える。



を使って、

$$ds^2 = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu d\bar{z}^{\bar{\nu}} = \mathcal{K}' \text{Tr} d\tilde{Z}^\dagger d\tilde{Z} + \mathcal{K}'' |\text{Tr} \tilde{Z}^\dagger d\tilde{Z}|^2 \quad (4.1.25)$$

と書ける。

Kähler 多様体の Ricci テンソルは、一般に

$$\text{Ric}(g)_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \log G \quad (4.1.26)$$

と与えられる。ここで  $G \equiv \det(g_{\mu\bar{\nu}}) = \sqrt{g}$  とした。そこで計量 (4.1.25) について、条件 (4.1.1) によって  $z^4$  方向の成分を消去し、 $g_{\mu\bar{\nu}}$  の determinant を計算すると、

$$G = \frac{1}{|z^4|^2} (r^2 \mathcal{K}'^3 + r^4 \mathcal{K}'^2 \mathcal{K}'') = \frac{(\gamma')^3}{3r^2 |z^4|^2} \quad (4.1.27)$$

となる。ここで  $\gamma = r^2 \mathcal{K}'$  と置いた。このとき、 $\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \log |z^4|^2 = 0$  より、

$$(\gamma')^3 = \alpha r^2 \quad (4.1.28)$$

が Ricci 平坦であるための条件であるとわかる。 $\alpha$  は任意の定数であり、この選び方は計量の overall の係数に関わるものとなる。そこで、以下では式が簡単になるように  $\alpha = 2$  と選ぶことにする。この式を積分して、

$$\gamma = (r^4 + \beta)^{\frac{1}{3}} \quad (4.1.29)$$

となる。 $\beta$  は積分定数である。ここで、計量が homogeneous であること<sup>6</sup>を要請すると、 $\beta$  は  $\beta = 0$  と決まる。よって、 $\mathcal{K}$  の微分が

$$\mathcal{K}' = r^{-\frac{2}{3}}, \quad \mathcal{K}'' = -\frac{1}{3} r^{-\frac{8}{3}} \quad (4.1.30)$$

ときまる。これより計量 (4.1.25) は、parametrization (4.1.12)、 $\tilde{Z} = r L Z_0 R^\dagger$  を用いて

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left( \frac{1}{9} [d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2]^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 [d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2] \right)$$

<sup>6</sup>計量が homogeneous であるとは、座標の scaling  $x \rightarrow \lambda x$  に対して  $g(x) \rightarrow |\lambda|^2 g(x)$  となることを指す。

と求まる。ここで変数  $r$  について

$$r \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \rho^{\frac{3}{2}} \quad (4.1.31)$$

と rescale した。

以上の議論より、 $T^{1,1}$  空間の metric cone は Kähler 多様体であること、つまり  $T^{1,1}$  空間が佐々木多様体であることがわかった。さらに上の導出から、metric cone が homogenous かつ Ricci 平坦であることまで要請すると一意的に  $T^{1,1}$  空間が現れることもわかる。次節では、佐々木-Einstein 多様体としての  $T^{1,1}$  空間と AdS/CFT 対応の関わりについて調べる。

## 4.2 AdS/CFT 対応

ここでは、この理論に双対なゲージ理論について説明する。 $\text{AdS}_5 \times T^{1,1}$  空間上の弦理論についての AdS/CFT 対応は Klebanov と Witten によって初めて考えられた [4]。第 2 章において AdS/CFT の概略を説明したが、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論の対応は、10 次元の Minkowski 空間に置かれた D3-brane についての考察から得られたものであった。ここで始めの空間を 10 次元 Minkowski 空間でなく別の空間で代用することを考える。そこで 4 次元の Minkowski 空間  $M_4$  と前節で考えた 6 次元の cone  $C_6$  を合わせた空間を考えてみる。この  $M_4 \times C_6$  空間は Ricci 平坦であり超重力理論の解であることが保証されている。

$M_4 \times C_6$  空間において、 $C_6$  空間の原点 (cone の先) に D3-brane を置くことを考える。このとき D3-brane は  $M_4$  方向に広がっているものとする。このような状況で 2.2 と同じような議論を試みる。

$g_s N \ll 1$  では、前と同様に brane 上のゲージ理論と 10 次元の自由な閉弦の理論が現れる。一方で  $g_s N \gg 1$  の場合には時空の計量が

$$ds^2 = f(r)^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + f(r)^{\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2 g_{ij}^{T^{1,1}} dx^i dx^j)$$

$$f(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad (4.2.1)$$

と変形される。2.2 と同様に  $r \ll R$  での理論を調べるために、計量において  $r \rightarrow 0$  の極限をとってみると、 $\text{AdS}_5 \times T^{1,1}$  空間の計量が現れる。こうして、 $M_4 \times C_6$  空間の

cone の先に D3-brane を置いた系からは  $\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$  空間上の弦理論と 4 次元のゲージ理論の対応が得られることがわかる。

次に対称性について考察する。 $\text{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$  空間の対称性のうち  $\text{AdS}_5$  空間の isometry  $SO(2, 4)$  はゲージ理論側では共形対称性と対応していた。この対応は今回も変わらず存在し、対応するゲージ理論は共形場理論であると考えられる。

一方で  $\text{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$  空間の対称性のうち  $\mathbb{S}^5$  空間の isometry  $SO(6)$  はゲージ理論側では R-symmetry に対応していた。今回の内部多様体は  $\mathbb{T}^{1,1}$  空間であり、この空間は  $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$  対称性を持っていた。また、 $\mathbb{T}^{1,1}$  空間は佐々木多様体であったが、この性質によって  $\mathcal{N} = 1$  の超対称性があることが保証される [29]。

こうして、対応するゲージ理論は  $\mathcal{N} = 1$  の超共形ゲージ理論であると予想される。また内部対称性として  $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$  対称性を持つと考えられるが、この理論には  $SU(2)$  doublet な二つの場  $A_i, B_i$  があり、 $SU(2) \times SU(2)$  部分はそれぞれこれらの対称性に対応する。また残った  $U(1)$  部分がちょうど R-symmetry に対応すると考えられる。以上が  $\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$  空間と対応するゲージ理論の簡単な説明である。

### 4.3 $\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$ 空間上の弦の運動

ここでは [5] に従い、 $\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$  空間上の弦の  $\mathbb{T}^{1,1}$  空間のある方向への運動がカオスを示すことを確認する。 $\mathbb{T}^{1,1}$  空間での弦の運動がカオスを示すということは  $\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$  上の弦理論が非可積分であることを示唆している。

$\text{AdS}_5 \times \mathbb{T}^{1,1}$  空間の計量は以下のように書ける。

$$ds^2 = R^2(ds_{\text{AdS}_5}^2 + ds_{\mathbb{T}^{1,1}}^2), \quad (4.3.1)$$

$$ds_{\text{AdS}_5}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\zeta^2) \quad (4.3.2)$$

$$ds_{\mathbb{T}^{1,1}}^2 = \frac{1}{9} [d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2]^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 [d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2]. \quad (4.3.3)$$

$\text{AdS}_5$  空間あるいは  $\mathbb{T}^{1,1}$  の半径  $R$  は以下の解析において重要ではないので  $R = 1$  と置くことにする。

弦理論としては bosonic 部分のみを扱うことにして、通常の Polyakov 作用を考える。

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2 \sigma \gamma^{ab} g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (4.3.4)$$

ここで world sheet 計量  $\gamma^{ab}$  は conformal gauge をとって  $\gamma^{ab} = \text{diag}(-1, 1)$  とする。 $X^\mu(\tau, \sigma)$  は target space の座標であり、 $X^\mu = (t, \rho, \theta, \phi, \zeta, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \psi)$  をとる。 $g_{\mu\nu}$  は (4.3.1) の計量とする。作用 (4.3.4) の world sheet 計量  $\gamma^{ab}$  の変分から次の Virasoro 拘束条件が得られる。

$$g_{\mu\nu}(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu) = 0, \quad g_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu = 0 \quad (4.3.5)$$

ここで弦の運動を考えるにあたって、以下の ansatz を置くことにする。

$$\begin{aligned} t &= t(\tau), & \theta_1 &= \theta(\tau), & \theta_2 &= \theta_2(\tau), \\ \phi_1 &= \alpha_1 \sigma, & \phi_2 &= \alpha_2 \sigma, & \psi &= \psi(\tau) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

ここで  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $\Phi_i$  方向への巻きつきを表す整数である。この ansatz のもとで  $X^\mu$  についての運動方程式を考えると、 $t$  方向、 $\psi$  方向の運動方程式からそれぞれ  $\dot{t} = E$ 、 $\dot{\psi} = J$  が得られる。ここで  $E$ 、 $J$  は定数であり、エネルギー、 $\psi$  方向の角運動量に対応する。この ansatz のもとでの弦の運動のイメージ図を図 4.1 に描いた。弦はこの図のように  $T^{1,1}$  空間の二つの  $S^2$  部分に巻きついて運動している。

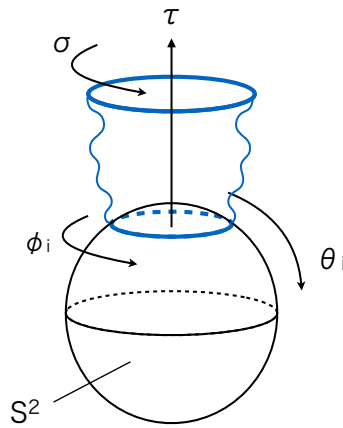


図 4.1: (4.3.6) の下での弦の運動のイメージ図

ansatz(4.3.6) の下で (4.3.5) の拘束条件は、以下のように書ける。

$$0 = -E^2 + \frac{1}{9}J^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{6}\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{9}\alpha_i^2 + \frac{1}{18}\alpha_i^2 \sin^2 \theta_i \right) + \frac{2}{9}\alpha_1\alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$0 = J \sum_{i=1}^2 \alpha_i \cos \theta_i \quad (4.3.7)$$

(4.3.7) の第二式は  $J = 0$  であれば恒等的に満たされる。以下では  $J = 0$  として考える。

以上の仮定の下で非自明な運動方程式は

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 \sin \theta_1 (\alpha_1 \cos \theta_1 - 2\alpha_2 \cos \theta_2) = 0,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{3}\alpha_2 \sin \theta_2 (\alpha_2 \cos \theta_2 - 2\alpha_1 \cos \theta_1) = 0 \quad (4.3.8)$$

のみであり、残った拘束条件は (4.3.7) の第一式のエネルギー保存の式である。

$$E^2 = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{6}\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{9}\alpha_i^2 + \frac{1}{18}\alpha_i^2 \sin^2 \theta_i \right) + \frac{2}{9}\alpha_1\alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (4.3.9)$$

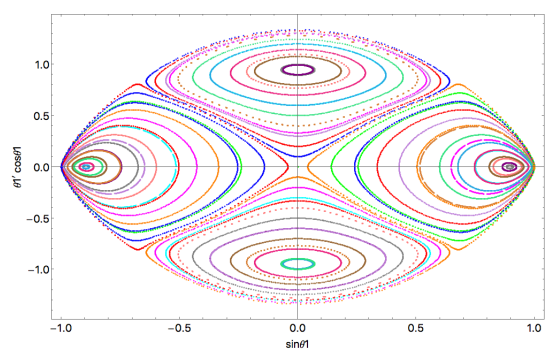
これら (4.3.8)、(4.3.9) の3つの式で決定される系の運動を数値計算によって解析する。

図.4.2 (a)-(h) に  $E = 0.3, 0.32, 0.33, 0.34, 0.35, 0.4, 0.5, 1, 3, 10$  の時の Poincaré 断面を載せた。数値計算において、各 parameter は  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  とした。また断面は [5] に従って、 $\sin \theta_2 = 0$ 、 $\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 > 0$  にとった。

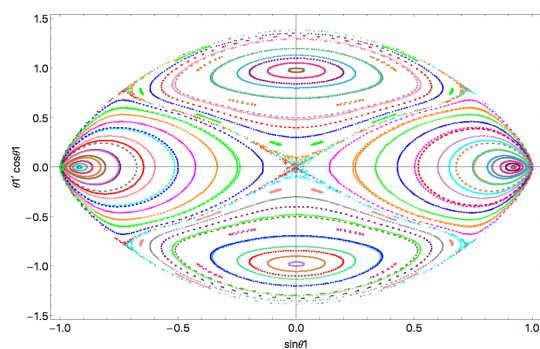
まず、エネルギーが低い図.4.2 (a) ではカオス的な軌道は見られない。このとき軌道は準周期運動をしており、KAM トーラスを輪切りにした絵が見てとれる。エネルギーが上がるにつれて、トーラスが崩壊していく様子が (b)-(f) からわかる。またさらにエネルギーを上げると再びトーラスが形成されている (g)-(j)。この系では、あるエネルギー帯でしかカオスは現れない。これもまた、カオスが持つ一般的な特徴の一つである。

最後に、今回は佐々木-Einstein 多様体  $T^{1,1}$  を考えたが、他の佐々木-Einstein 多様体、例えば  $Y^{p,q}$  と呼ばれる多様体でも同様の解析が行える。AdS<sub>5</sub> × Y<sup>p,q</sup> 上の弦理論もまた非可積分であることが知られており [30]、この多様体上の弦理論にもカオス

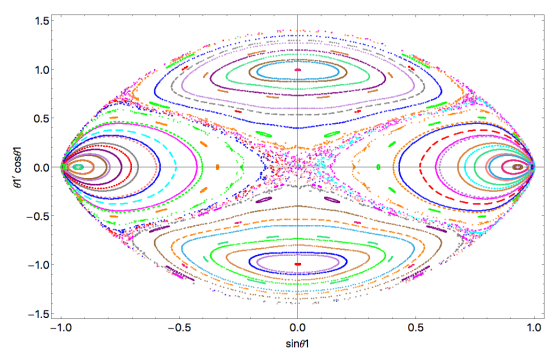
が存在することを示せると考えられる。



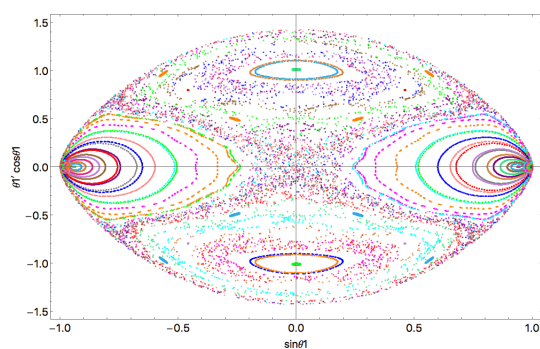
(a)  $E = 0.3$  での Poincaré 断面



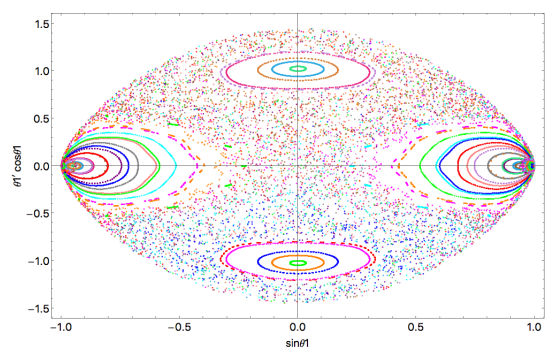
(b)  $E = 0.32$



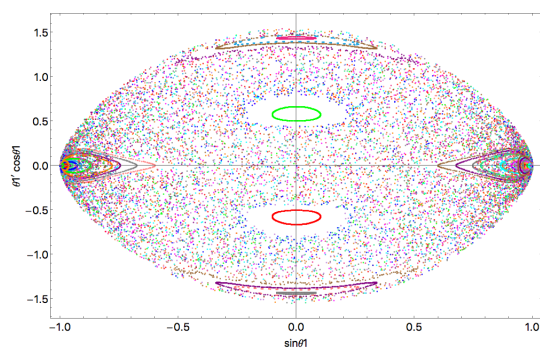
(c)  $E = 0.33$



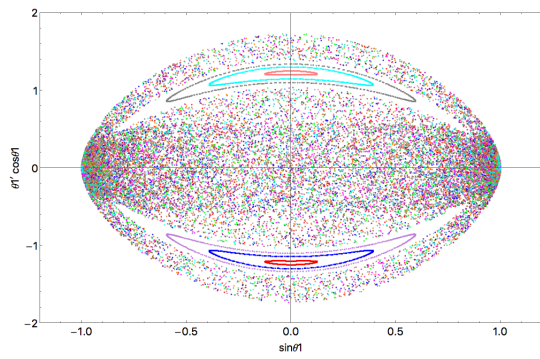
(d)  $E = 0.34$



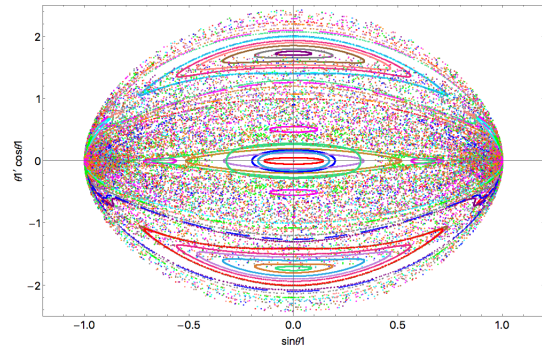
(e)  $E = 0.35$



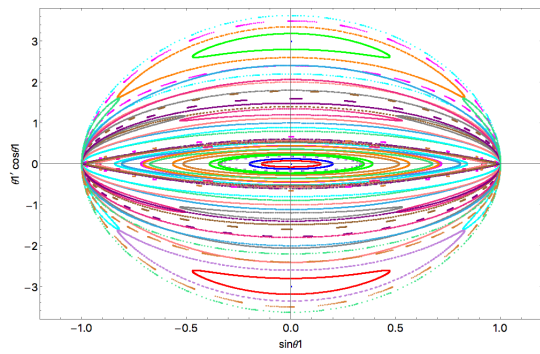
(f)  $E = 0.4$



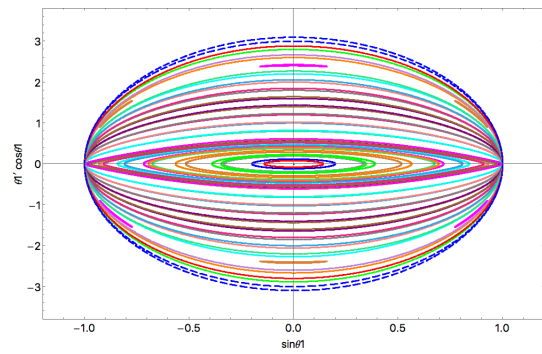
(g)  $E = 0.5$



(h)  $E = 1$



(i)  $E = 3$



(j)  $E = 10$

図 4.2: 各エネルギーでの Poincaré 断面

# 第5章 near Penrose 極限と弦の運動

ここでは near Penrose 極限をとった  $\text{AdS}_5 \times \mathbf{T}^{1,1}$  空間と  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の弦の運動について調べる。この章の内容は論文 [6] に基づいている。

## 5.1 near Penrose 極限をとった $\text{AdS}_5 \times \mathbf{T}^{1,1}$ 空間上の弦の運動

### 5.1.1 一般の時空上の light-cone Hamiltonian

この章で行う解析の準備として、まず以下の条件

$$g_{+I} = g_{-I} = 0 \quad (I = 1, \dots, 8) \quad (5.1.1)$$

を満たす計量を持つ一般の時空上の弦理論の light-cone Hamiltonian を求めておく。ここで計量  $g$  の足は  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = +, -, 1, \dots, 8$ ) とする。なお、以下の議論は文献 [10] を参考とした。

考えるべき bosonic 部分の弦の作用は

$$\mathcal{S}_B = \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} \quad (5.1.2)$$

と与えられる。ここでは、dilaton は一定であるとし、NS-NS 2-form は 0 であるとした。world sheet は  $\tau$  と  $\sigma$  で parametrize されており、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  が弦の dynamics を記述する力学変数である。 $h^{ab}$  ( $a, b = \tau, \sigma$ ) は次のように定義される量である。

$$h^{ab} \equiv \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab}, \quad \gamma \equiv \det(\gamma_{ab})$$

ここで  $\gamma_{ab}$  は world sheet の計量である。

作用 (5.1.2) の light-cone Hamiltonian を求めるために、正準運動量  $p_\mu$  を以下の



ように定義しておく。

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau x^\mu)} = h^{\tau a} \partial_a x^\nu g_{\mu\nu} \quad (5.1.3)$$

式 (5.1.3) を  $\dot{x}^\mu$  について解くことで  $p_\mu$  と  $\dot{x}^\mu$  について以下の関係式を得る。

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{h^{\tau\tau}} g^{\mu\nu} p_\nu - \frac{h^{\tau\sigma}}{h^{\tau\tau}} x'^\mu \quad (5.1.4)$$

ここで

$$\dot{x}^\mu \equiv \partial_\tau x^\mu, \quad x'^\mu \equiv \partial_\sigma x^\mu$$

とした。

次に Virasoro 拘束条件について考える。作用 (5.1.2) を  $h_{ab}$  について変分することで、以下のように、エネルギー運動量テンソルについての条件を得る。

$$T^{ab} = h^{ac} h^{bd} \partial_c x^\mu \partial_d x^\nu g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{ab} h^{cd} \partial_c x^\mu \partial_d x^\nu g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.1.5)$$

式 (5.1.4) を用いて、 $\dot{x}$  を式 (5.1.5) から消去する。こうして拘束条件は (5.1.5) は  $p_\mu$  と  $x'^\mu$  を用いて以下のように書き直される。

$$p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} + x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} = 0, \quad (5.1.6)$$

$$p_\mu x'^\mu = 0 \quad (5.1.7)$$

ここで light-cone gauge をとる。

$$x^+ = \tau, \quad p_- = \text{constant}$$

このとき、light-cone Hamiltonian  $\mathcal{H}_{lc}$  は以下のように定義される。

$$\mathcal{H}_{lc} \equiv -p_+.$$

上記の拘束条件を用いて、light-cone Hamiltonian  $\mathcal{H}_{lc}$  の一般的な表式を求めていく。まず拘束条件 (5.1.7) を  $x'^-$  についてとくことで以下の式を得る。

$$x'^- = -\frac{x'^I p_I}{p_-} \quad (5.1.8)$$

次に拘束条件 (5.1.6) を  $p_+$  について解き、(5.1.8) を代入することで  $\mathcal{H}_{lc}$  について以

下の表式を得ることができる。

$$\mathcal{H}_{\text{lc}} = -\frac{p_- g^{+-}}{g^{++}} - \frac{1}{g^{++}} \sqrt{p_-^2 g - g^{++} \left( g_{--} \left( \frac{p_I x'^I}{p_-^2} \right)^2 + p_I p_J g^{IJ} + x'^I x'^J g_{IJ} \right)} \quad (5.1.9)$$

ここで  $g$  は以下のように定義した。

$$g = (g^{+-})^2 - g^{++} g^{--}$$

また注意として、上の導出では  $g_{--} \neq 0$  であることを仮定した。pp-wave 背景のように  $g_{--} = 0$  となる時空については、上と同様の方法で light-cone Hamiltonian  $\mathcal{H}_{\text{lc}}$  を求めると以下のような表式になる。

$$\mathcal{H}_{\text{lc}} = -\frac{p_- g^{--}}{2g^{+-}} - \frac{1}{2g^{+-} p_-} \left( p_I p_J g^{IJ} + x'^I x'^J g_{IJ} \right) \quad (5.1.10)$$

式 (5.1.9)、(5.1.10) を使えば、与えられたほぼ任意の計量について light-cone Hamiltonian を機械的に求められるようになるため、後の解析においてこれらの式は大変便利である。

## 5.1.2 near Penrose 極限と ansatz

次に near Penrose 極限をとった  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の計量を導出する。さらに前節で導いた公式を使って、その背景の上での light-cone Hamiltonian を求める。また、 $\text{T}^{1,1}$  方向の運動に着目するため ansatz をとり、ansatz によって簡単化された light-cone Hamiltonian を求める。

まず、 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の near Penrose 極限を考える。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の計量は以下の形であった。

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 (ds_{\text{AdS}_5}^2 + ds_{\text{T}^{1,1}}^2), \\ ds_{\text{AdS}_5}^2 &= -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\zeta^2), \\ ds_{\text{T}^{1,1}}^2 &= \frac{1}{9} [d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2]^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 [d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2] \quad (5.1.11) \end{aligned}$$

ここで次の座標変換を行う。

$$\begin{aligned}\tilde{x}^+ &\equiv t, & \tilde{x}^- &\equiv -t + \frac{1}{3}(\psi + \phi_1 + \phi_2), \\ \Phi_1 &\equiv \phi_1 - t, & \Phi_2 &\equiv \phi_2 - t\end{aligned}\tag{5.1.12}$$

さらに、いくつかの座標について、次のようにスケール変換しておく。

$$\tilde{x}^+ = x^+, \quad \tilde{x}^- = \frac{x^-}{R^2}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \theta_i = \sqrt{6} \frac{r_i}{R}\tag{5.1.13}$$

これらの変換によって元々の  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の座標  $(t, \rho, \Omega_3, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi)$  は  $(x^+, x^-, r, \Omega_3, r_1, r_2, \Phi_1, \Phi_2)$  で記述される。なお、座標変換の係数は文献 [31] を参考にして、次に Penrose 極限をとる際に leading term に pp-wave 背景がうまく出てくるように選んである。

この時に  $R \rightarrow \infty$  なる極限を考え  $\mathcal{O}(R^{-2})$  のオーダーの項まで残すことで、 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の near Penrose 極限が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}ds^2 &= ds_0^2 + \frac{1}{R^2} ds_2^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right), \\ ds_0^2 &= 2dx^+ dx^- - (r^2 + r_1^2 + r_2^2) (dx^+)^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \\ &\quad + dr_1^2 + r_1^2 d\Phi_1^2 + dr_2^2 + r_2^2 d\Phi_2^2, \\ ds_2^2 &= \left(-\frac{1}{3}r^4 + 2r_1^2 r_2^2\right) (dx^+)^2 - 2(r_1^2 + r_2^2) dx^+ dx^- + (dx^-)^2 + \frac{1}{3}r^4 d\Omega_3^2 \\ &\quad + r_1^2 (-r_1^2 + 2r_2^2) dx^+ d\Phi_1 + r_2^2 (-r_2^2 + 2r_1^2) dx^+ d\Phi_2 - 2r_1^2 dx^- d\Phi_1 \\ &\quad - 2r_2^2 dx^- d\Phi_2 + 2r_1^2 r_2^2 d\Phi_1 d\Phi_2 - r_1^4 d\Phi_1^2 - r_2^4 d\Phi_2^2\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

次に、得られた  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  の near Penrose 極限をとった計量 (5.1.14) に対して、light-cone Hamiltonian の公式 (5.1.9) を適用する<sup>1</sup>。公式 (5.1.9) の中に出てくる各項は、計量 (5.1.14) に対して次のような  $R$  の幕展開を持つ。

$$\begin{aligned}-p_- \frac{g^{+-}}{g^{++}} &= R^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right), \\ p_-^2 g &= 1 + \frac{a_2}{R^2} + \frac{a_4}{R^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right), \\ -g^{++} g_{--} \left(\frac{p_I x^{II}}{p_-^2}\right)^2 &= \frac{b_4}{R^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right),\end{aligned}$$

<sup>1</sup>light-cone Hamiltonian について  $\mathcal{O}(R^{-2})$  の項までを出すには、計量 (5.1.14) について  $\mathcal{O}(R^{-4})$  の項までを知る必要がある。しかしここではその具体形は割愛する。

$$\begin{aligned}
-g^{++}(p_I p_J g^{IJ} + x^I x^J g_{IJ}) &= \frac{c_2}{R^2} + \frac{c_4}{R^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right), \\
-\frac{1}{g^{++}} &= R^2 + d_0 + \frac{d_2}{R^2} + \frac{d_4}{R^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad (5.1.15)
\end{aligned}$$

ここで、各係数は

$$\begin{aligned}
a_2 &= -r^2 + r_1^2 + r_2^2, \quad a_4 = \frac{2}{3}r^4 + r_1^4 + r_2^4 - r^2(r_1^2 + r_2^2), \\
b_4 &= (p_r r' + p_{r_1} r'_1 + p_{r_2} r'_2 + p_\theta \theta' + p_\phi \phi' + p_\zeta \zeta' + p_{\Phi_1} \Phi'_1 + p_{\Phi_2} \Phi'_2)^2, \\
c_2 &= p_r^2 + p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_{\Phi_1}^2}{r_1^2} + \frac{p_{\Phi_2}^2}{r_2^2} + r'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + r^2 \theta'^2 + r_1^2 \Phi_1'^2 + r_2^2 \Phi_2'^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \csc^2 \theta (p_\phi^2 + p_\zeta^2 \csc^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta (\phi'^2 + \zeta'^2 \sin^2 \phi), \\
c_4 &= -r^2 \left( p_r^2 + p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + r'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + \frac{p_{\Phi_1}^2}{r_1^2} + \frac{p_{\Phi_2}^2}{r_2^2} + r_1^2 \Phi_1'^2 + r_2^2 \Phi_2'^2 \right) \\
&\quad - \frac{4}{3} p_\theta^2 - \frac{2}{3} r^4 \theta'^2 + (p_{\Phi_1} - p_{\Phi_2})^2 - (r_1^2 \Phi_1' - r_2^2 \Phi_2')^2 \\
&\quad - \frac{4}{3} \csc^2 \theta (p_\phi^2 + p_\zeta^2 \csc^2 \phi) - \frac{2}{3} r^4 \sin^2 \theta (\phi'^2 + \zeta'^2 \sin^2 \phi), \\
d_0 &= r^2, \quad d_2 = \frac{1}{3} r^4, \quad d_4 = \frac{2}{45} r^6 \quad (5.1.16)
\end{aligned}$$

である。

これらの展開式を用いると  $\mathcal{H}_{\text{lc}}$  は (5.1.16) の各係数を用いて

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{lc}} &= R^2 + \left( R^2 + d_0 + \frac{d_2}{R^2} + \frac{d_4}{R^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right) \right) \\
&\quad \times \left( 1 + \frac{1}{R^2} (a_2 + c_2) + \frac{1}{R^4} (a_4 + b_4 + c_4) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^6}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2R^2 + \frac{1}{2} (a_2 + c_2) + d_0 \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \left( d_2 + \frac{1}{2} d_0 (a_2 + c_2) + \frac{1}{2} (a_4 + b_4 + c_4) - \frac{1}{8} (a_2 + c_2)^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right)
\end{aligned}$$

と書ける。係数 (5.1.16) を代入することで、この背景の場合の  $\mathcal{H}_{\text{lc}}$  が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{lc}} &= \mathcal{H}_0 + \frac{1}{R^2} \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right), \\
\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \left( p_r^2 + p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_{\Phi_1}^2}{r_1^2} + \frac{p_{\Phi_2}^2}{r_2^2} + \frac{1}{r^2} \csc^2 \theta (p_\phi^2 + p_\zeta^2 \csc^2 \phi) + r^2 + r_1^2 + r_2^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + r^2\theta'^2 + r_1^2\Phi_1'^2 + r_2^2\Phi_2'^2 + r^2 \sin^2 \theta(\phi'^2 + \zeta'^2 \sin^2 \phi) \Big), \\
\mathcal{H}_{\text{int}} = & -\frac{1}{8} \left( p_r^2 + p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + \frac{p_\theta}{r^2} + \frac{p_{\Phi_1}^2}{r_1^2} + \frac{p_{\Phi_2}^2}{r_2^2} + \frac{1}{r^2} \csc^2 \theta (p_\phi^2 + p_\zeta^2 \csc^2 \phi) - r^2 + r_1^2 + r_2^2 \right. \\
& + r'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + r^2\theta'^2 + r_1^2\Phi_1'^2 + r_2^2\Phi_2'^2 + r^2 \sin^2 \theta(\phi'^2 + \zeta'^2 \sin^2 \phi) \Big)^2 \\
& + \frac{1}{2} (p_{\Phi_1} - p_{\Phi_2})^2 - \frac{1}{2} (r_1^2\Phi_1' - r_2^2\Phi_2')^2 + \frac{1}{6}r^4 + \frac{1}{2} (r_1^4 + r_2^4) \\
& - \frac{1}{6} (p_\theta^2 + \csc^2 \theta (p_\phi^2 + p_\zeta^2 \csc^2 \phi)) + \frac{1}{6}r^4 (\theta'^2 + \sin^2 \theta(\phi'^2 + \zeta'^2 \sin^2 \phi)) \\
& + \frac{1}{2} (p_r r' + p_{r_1} r_1' + p_{r_2} r_2' + p_\theta \theta' + p_\phi \phi' + p_\zeta \zeta' + p_{\Phi_1} \Phi_1' + p_{\Phi_2} \Phi_2')^2 \tag{5.1.17}
\end{aligned}$$

ここで定数  $p_-$  は  $p_- = 1$  とし、 $R^2$  の項は定数であるので落とした。また、 $\mathcal{O}(1/R^4)$  のオーダーも無視する。

得られた Hamiltonian (5.1.17) の leading term  $\mathcal{H}_0$  は調和振動子の Hamiltonian であり、この項は計量の展開 (5.1.14) の pp-wave 背景の部分の寄与から得られる。next leading term  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  は、それ以外の背景の寄与から得られる、非線形な相互作用項となっている。この相互作用項は運動量  $p$  の 4 乗の項を含み、見慣れないものである。以下では、数値計算によって、この Hamiltonian にカオス的な運動が含まれることを示す。

まず、以下の ansatz を置いて、Hamiltonian (5.1.17) を 2 体の Hamiltonian に簡略化する。

$$\begin{aligned}
r = 0, \quad \theta = \pi, \quad \phi = \pi, \quad \zeta = 0, \quad r_1 = r_1(\tau), \quad r_2 = r_2(\tau), \quad \Phi_1 = \alpha_1 \sigma, \quad \Phi_2 = \alpha_2 \sigma, \\
p_r = 0, \quad p_\theta = 0, \quad p_\phi = 0, \quad p_\zeta = 0, \quad p_{r_1} = p_{r_1}(\tau), \quad p_{r_2} = p_{r_2}(\tau), \quad p_{\Phi_1} = 0, \quad p_{\Phi_2} = 0
\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

ここで  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $\Phi_i$  方向への巻きつきを表す整数である。この ansatz は元の Hamiltonian の解軌道のうち、 $T^{1,1}$  空間のみを動く軌道に focus するためのものであり、残されている変数は  $p_{r_1}(\tau)$ 、 $p_{r_2}(\tau)$ 、 $r_1(\tau)$ 、 $r_2(\tau)$  のみである。また、この ansatz は運動方程式と矛盾しない。つまり、ansatz を置く前の Hamiltonian (5.1.17) から得られる Hamilton 方程式に、この ansatz(5.1.18) を代入すると  $p_{r_1}$ 、 $p_{r_2}$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  方向の運動方程式以外は自明に満たされる<sup>2</sup>。これより、ansatz をおいて得られた解は元の系の解の一部であることが保障されている。

<sup>2</sup>その詳細な計算については、ここでは立ち入らないことにする。

ansatz (5.1.18) によって Hamiltonian (5.1.17) は以下のように書きかわる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \left[ p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + (1 + \alpha_1^2) r_1^2 + (1 + \alpha_2^2) r_2^2 \right], \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= -\frac{1}{8} \left[ p_{r_1}^2 + p_{r_2}^2 + (1 + \alpha_1^2) r_1^2 + (1 + \alpha_2^2) r_2^2 \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\alpha_1 r_1^2 - \alpha_2 r_2^2)^2 + \frac{1}{2} (r_1^4 + r_2^4)\end{aligned}\tag{5.1.19}$$

ここで ansatz によって力学変数は  $r_1$ 、 $r_2$  だけとなり、 $\tau$  のみに依存している。以下ではこの系の運動を数値計算で解析する。そして Poincaré 断面を使ってカオス的な振る舞いをすることを確認する。

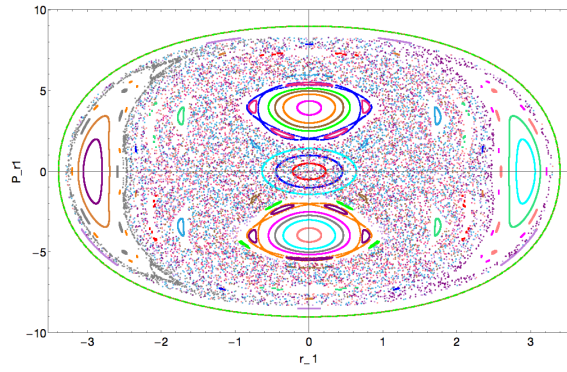
### 5.1.3 Poincaré 断面

前節で得た系 (5.1.19) の  $E = 1.0, 5.0$  and  $10$  での Poincaré 断面を図. 5.1 (a)-(c) に書いた。断面は条件  $r_2 = 0, p_{r_2} > 0$  の元で  $r_1$ - $p_1$  平面に射影したものである。<sup>3</sup>。AdS の半径  $R$  と winding number  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  はそれぞれ  $R = 5.0$ 、 $\alpha_1 = 2.0$ 、 $\alpha_2 = 1.0$  とした。図. 5.1 (a)-(c) より、各エネルギー帯にカオスが存在することがわかる。これは  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の near Penrose limit もまた非可積分であることを意味している。

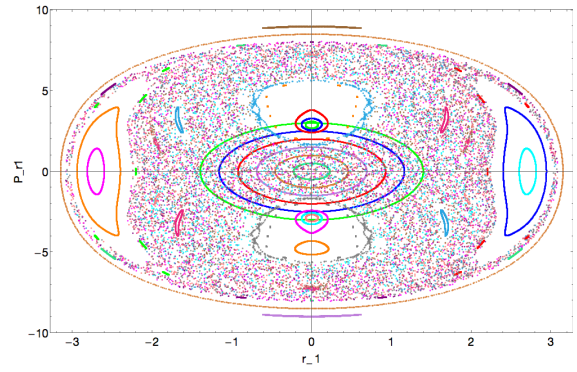
ここで Poincaré 断面の定性的な振る舞いについて述べておく。図. 5.1 (d)-(f) に二次元平面に射影した Hamiltonian(5.1.19) の振る舞いを書いた。図中の線はエネルギーの等高線である。いずれの変数についても、4 次の項の係数は負であり、どの図においても 4 次の項の効果によって原点から十分離れるとエネルギーは負の値に落ち込んでいく構造をしている。しかし、エネルギー保存から無限遠に飛んでいく軌道は許されない。

原点周りでは  $E \sim 0$  であり、どの図においてもエネルギーの peak は  $E \sim 12$  程度である。原点周りは、どの方向にも等高線が円状になっており、低いエネルギーで原点周りにある運動は調和振動子的に振る舞うことがわかる。一方で図. 5.1 (a) より、低いエネルギー  $E = 1.0$  では KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser) トーラス [22, 23, 24] を表す島とカオスが現れていることがわかる。確かに原点付近には原点を中心とした準周期運動を示す島が存在するが、原点付近にはカオス的な運動も同時に存在している。これは Poincaré 断面上の点が相空間内の点と一対一対応していないためである。

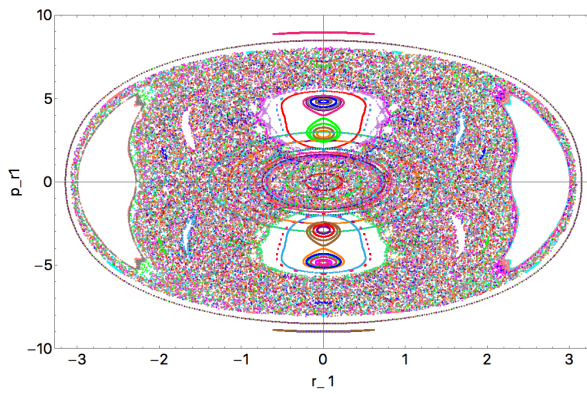
<sup>3</sup>今の場合、この取り方では、断面上の点は相空間内の点と一対一対応しない。この問題については後で詳しく述べる。



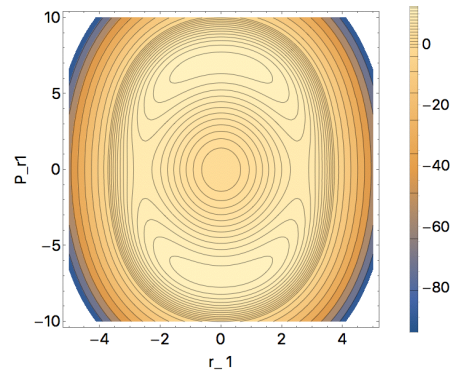
(a)  $E = 1.0$  での Poincaré 断面



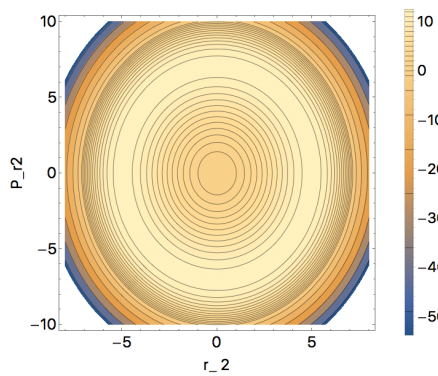
(b)  $E = 5.0$  での Poincaré 断面



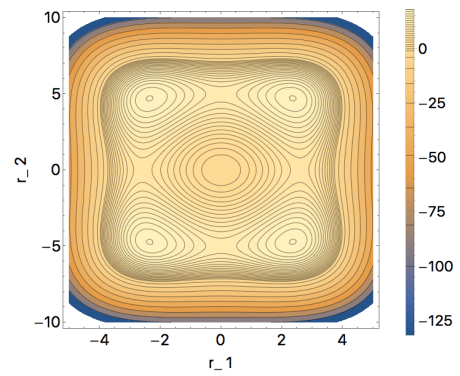
(c)  $E = 10$  での Poincaré 断面



(d)  $r_1$ - $p_{r1}$  平面での Hamiltonian の値



(c)  $r_2$ - $p_{r2}$  平面での Hamiltonian の値



(d)  $r_1$ - $r_2$  平面での Hamiltonian の値

図 5.1: 各エネルギーでの Poincaré 断面と Hamiltonian(5.1.19) の振る舞い

今の場合、運動量  $p_{1,2}$  の 4 次の項が存在するため、断面を  $r_2 = 0$ 、 $p_{r_2} > 0$  をとっただけでは断面上の 1 点から相空間内の 1 点を決めることができない。この点で、今の断面の取り方は幾らか不適切だが、カオスの存在を示すには十分である。

この節の最後に図. 5.1 の Poincaré 断面のより良い取り方について議論する。Hamiltonian (5.1.19) について、 $r_2 = 0$  として  $p_{r_2}$  について解くと、

$$E = \mathcal{H} \quad \text{with } r_2 = 0$$

$$\Rightarrow p_{r_2} = \pm \sqrt{2R^2 - p_{r_1}^2 - (1 + \alpha_1^2)r_1^2 \pm 2\sqrt{R^2(R^2 - 2E) + (1 - \alpha_1^2)r_1^4}}$$
(5.1.20)

となる (複合任意)<sup>4</sup>。この式より、条件  $p_{r_2} > 0$  だけでは二つの解が含まれてしまうことがわかる。 $p_{r_2} > 0$  に加えて、条件

$$p_{r_2} \geq \sqrt{2R^2 - p_{r_1}^2 - (1 + \alpha_1^2)r_1^2} \quad (5.1.21)$$

まで課すと解を一つに絞ることができる。図 (5.2) に、 $E = 10$  の場合に、条件  $r_2 = 0$  かつ  $0 < p_{r_2} < \sqrt{2R^2 - p_{r_1}^2 - (1 + \alpha_1^2)r_1^2}$ 、 $r_2 = 0$  かつ  $\sqrt{2R^2 - p_{r_1}^2 - (1 + \alpha_1^2)r_1^2} < p_{r_2}$  での Poincaré 断面をそれぞれ書いた。その他の parameter  $R$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  は前と同じく、それぞれ  $R = 5.0$ 、 $\alpha_1 = 2.0$ 、 $\alpha_2 = 1.0$  とした。

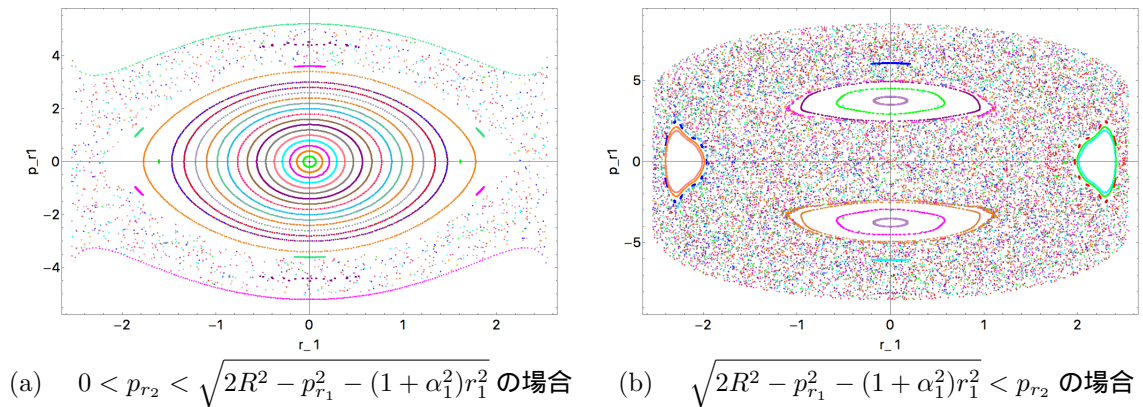


図 5.2: 条件を変えた  $E = 10$  での Poincaré 断面

図. 5.2 と図. 5.1 (c) を比べると条件 (5.1.21) を課すことで、解を分離している様子がよくわかる。図. 5.2 (a)、(b) にはそれぞれ軌道の重なりはなく、トーラスの中に

<sup>4</sup>今は  $R$  を十分大きく取っているため二つ目の root の中は正であることを仮定する。



カオス的な軌道が入り込んでいる様子も見られない。図.5.2 (a)、(b) を重ねたものが図.5.1 (c) に一致することもわかる。

## 5.2 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ の場合

ここまでは  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間の場合について議論してきたが、ここでは  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間の場合について議論する。 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間上の sigma model はすでに可積分であることが知られている [12]。しかし、near Penrose 極限をとった際にも可積分であるかどうかは、自明ではない。ここでは  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間の場合に near Penrose 極限をとって、前節と同様の解析を行う。

### 5.2.1 near Penrose 極限と ansatz

まず  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間において near Penrose 極限を取り、light-cone Hamiltonian を求め、運動方程式と矛盾しない ansatz をおいて系を簡単化する。 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間の計量は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(ds_{\text{AdS}_5}^2 + ds_{\text{S}^5}^2), \\ ds_{\text{AdS}_5}^2 &= -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2, \\ ds_{\text{S}^5}^2 &= \cos^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_3'^2. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

ここで、 $R$  は  $\text{AdS}_5$  空間と  $\text{S}^5$  空間の半径である。後の議論のために、以下の座標変換を行って  $\rho$  と  $\theta$  を  $\tilde{z}$  と  $\tilde{y}$  に書き換える。

$$\cosh \rho = \frac{1 + \tilde{z}^2/4}{1 - \tilde{z}^2/4}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tilde{y}^2/4}{1 + \tilde{y}^2/4}. \quad (5.2.2)$$

この座標変換によって計量は次のように書き変わる。

$$ds_{\text{AdS}_5}^2 = -\left(\frac{1 + \tilde{z}^2/4}{1 - \tilde{z}^2/4}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{1 - \tilde{y}^2/4}{1 + \tilde{y}^2/4}\right)^2 d\phi^2 + \frac{d\tilde{z}^2 + \tilde{z}^2 d\Omega_3^2}{(1 - \tilde{z}^2/4)^2} + \frac{d\tilde{y}^2 + \tilde{y}^2 d\Omega_3'^2}{(1 + \tilde{y}^2/4)^2}. \quad (5.2.3)$$

この計量の表式 (5.2.3) では  $SO(4) \times SO(4)$  isometry が明示的になる。

次に、文献 [9] に従って light-cone coordinates を以下のように取る。

$$\tilde{x}^+ = t, \quad \tilde{x}^- = -t + \phi. \quad (5.2.4)$$

さらに以下の rescaling を行う。

$$\tilde{x}^+ = x^+, \quad \tilde{x}^- = \frac{x^-}{R^2}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{R}, \quad (5.2.5)$$

このとき、 $R \rightarrow \infty$  なる極限において計量の  $\mathcal{O}(R^{-2})$  のオーダーまで取ると次の表式を得る。

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_0^2 + \frac{1}{R^2} ds_2^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right), \\ ds_0^2 &= 2dx^+ dx^- - (z^2 + y^2)(dx^+)^2 + dz^2 + z^2 d\Omega_3'^2 + dy^2 + y^2 d\Omega_3'^2, \\ ds_2^2 &= -2y^2 dx^+ dx^- + \frac{1}{2}(y^4 - z^4)(dx^+)^2 + (dx^-)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}z^2 (dz^2 + z^2 d\Omega_3'^2) - \frac{1}{2}y^2 (dy^2 + y^2 d\Omega_3'^2). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

この計量の展開式は元々、文献 [9] で議論されている。

計量を得られたので、式 (5.1.9) を使って light-cone Hamiltonian  $\mathcal{H}_{\text{lc}}$  を求めることができる。 $p_- = 1$  として、以下の Hamiltonian  $\mathcal{H}_{\text{lc}}$  を得る。

$$\mathcal{H}_{\text{lc}} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{R^2} \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad (5.2.7)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left( (p_A)^2 + (x'^A)^2 + (x^A)^2 \right), \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{1}{4} \left( z^2(p_y^2 + y'^2 + 2z'^2) - y^2(p_z^2 + z'^2 + 2y'^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left( ((x^A)^2)^2 - ((p_A)^2 + (x'^A)^2)^2 \right) + \frac{1}{2} (p_A x'^A)^2, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

ここで  $x^A = (z, y)$ 、 $p_A = (p_z, p_y)$  とした。また、定数項は落とし、計量の  $d\Omega_3'^2$  と  $d\Omega_3'^2$  に関わる部分の寄与も落としした。これは、 $\text{AdS}_5$  と  $S^5$  に含まれる  $S^3$  の一点に留まり続ける解を選ぶことに対応する。またオーダー  $\mathcal{O}(1/R^4)$  以上の項についても無視した。

Hamiltonian が得られたので、この系 (5.2.7) の運動を数値計算によって解析する。まず ansatz を置いて系を簡単化しておく。

ここでは以下のような ansatz を考える。

$$y = y(\tau), \quad p_y = p_y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad p_z = p_z(\tau). \quad (5.2.10)$$

この ansatz は  $\text{AdS}_5$ 、 $S^5$  の動径方向の運動に着目するためのものである。この ansatz の下で、Hamiltonian(5.2.7) は以下のように簡略化される。

$$\mathcal{H}_{\text{lc}} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{R^2} \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad (5.2.11)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left( (p_A)^2 + (x^A)^2 \right), \quad (5.2.12)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{4} (z^2 p_y^2 - y^2 p_z^2) + \frac{1}{8} \left( ((x^A)^2)^2 - ((p_A)^2)^2 \right). \quad (5.2.13)$$

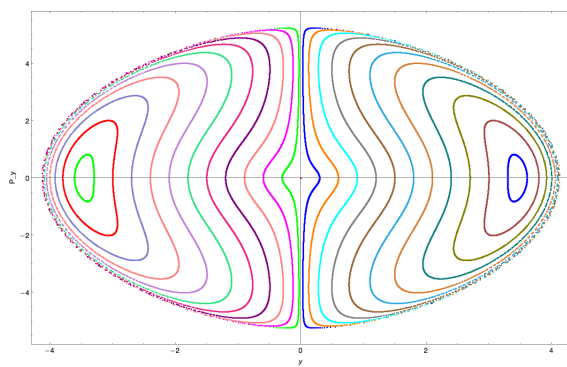
次節では、Hamiltonian(5.2.13) の運動の様子を Poincaré 断面をとって観察し、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間が near Penrose 極限をとっても可積分であることの傍証を与える。

## 5.2.2 Poincaré 断面

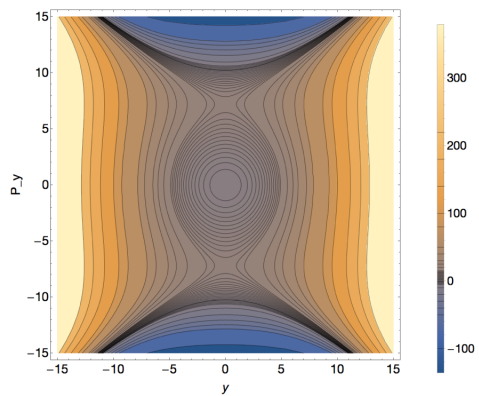
Hamiltonian(5.2.13) についての Poincaré 断面を図. 5.3 (a) に与えた。断面は  $E = 10$  with  $R = 5.0$  の場合に、条件  $z = 0$  with  $p_z > 0$  の下で  $y$ - $p_y$  平面にとった。図. 5.3 (a) から ansatz(5.2.10) の下では  $E = 10$  でもカオスは現れていないことがわかる。また図. 5.3 (b) に  $z = p_z = 0$  とした時の、 $y$ - $p_y$  平面上での Hamiltonian の振る舞いを書いた。 $p_y$  方向には potential は bound されていないことがわかる。ここで初期値によっては無限遠に飛んでいく軌道が現れるが、そのような軌道は3章で述べたように、カオスとは無関係であるので取り除いた。

図. 5.3 (a) は一例であり、その他のエネルギーでも KAM トーラスは残り続ける。今回計算をした限りでは、カオスの onset は見られなかった。この結果は near Penrose 極限とった  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の弦理論が可積分であることを支持するものである。

near Penrose 極限とった  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間が、元々  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間が持っている可積分構造 [12] を保持しているということは十分に考えられる。実際に可積分であることを示すには Lax 対を構成するなどして、無限個の保存量を作る必要がある。しかし、今回の Hamiltonian は運動量  $p$  の 4 次の項を含むなど、複雑な形をしているため、保存量を見つける作業は困難であるように思われる。



(a)  $E = 10$  での Poincaré 断面



(b)  $y-p_y$  平面でのエネルギーの値

図 5.3: ansatz (5.2.10) を置いたときの Poincaré 断面

## 第6章 結論

本修士論文では、AdS/CFT 対応のレビューから始め、Berenstein, Maldacena, Nastase (BMN) により提唱された対応関係とその検証の一部を確認した。AdS/CFT 対応は strong/weak duality であるため、対応の直接的な検証は難しいと考えられていた。しかし、Berenstein らは光速で重心運動する弦と、演算子を長く連らねて得られる複合演算子 (BMN operator) に限った議論では両理論において  $\lambda' = g_{\text{YM}}^2 N/J^2$  が摂動展開の parameter となることを指摘し、直接的な対応の検証方法を提案した。この際には

$$E_{\text{lc}} = \mu(\Delta - J) \tag{6.0.1}$$

という関係式に基づいて対応関係を予想し、両辺の計算は確かに  $\lambda'$  による展開で得られることがわかった。またこの両理論は可積分構造を持つことがのちに指摘され、この性質を用いて非摂動的な対応の検証が行われている。

後半ではカオスに着目し、弦理論においてカオスが現れる例として  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦理論を調べた。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上弦理論は対応するゲージ理論がわかっており、非可積分な領域で AdS/CFT 対応の具体的な検証が行えると考えられる。特に第5章では、BMN らの議論よりゲージ理論側との対応が見易いと考えられる near Penrose 極限をとった  $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間上の弦の運動を解析し、そこでもカオスが残っていることがわかった。

第2章で確認した BMN 対応は  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間上の弦理論と  $\mathcal{N} = 4$  超共形ゲージ理論の AdS/CFT 対応でのものであった。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間を用いた AdS/CFT 対応でも同様のことが成り立つだろうか。 $\text{AdS}_5 \times \text{T}^{1,1}$  空間でも Penrose 極限の leading term は pp-wave となるので、 $J \rightarrow \infty$  では同様の議論ができると思われる。 $1/J$  の補正を加えると、どうなるだろうか。 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  空間の場合には Schwartz らによって  $R^{-2} \sim J^{-1}$  の補正を入れた light-cone Hamiltonian が対角化され、その固有状態とゲージ理論側での演算子の対応が与えられた。このとき、Hamiltonian が対角化

できたことには  $\text{AdS}_5 \times S^5$  空間上の弦理論が持つ可積分性が働いていると思われる。

素朴な予想として、今回 near Penrose 極限をとって見つかった弦のカオス的な運動はゲージ理論側の何らかの“カオスの演算子”と対応していると思われる。第5章で見たように古典的な弦の運動は、その初期値によってカオス的軌道あるいは準周期的軌道になっていた。もし演算子との対応がつくのであれば、弦のカオス的狀態、準周期的狀態に応じて、“カオスの演算子”と“準周期的演算子”が存在するはずである。しかし一見したところ、演算子側にはカオスと準周期のような顕著な違いは現れないように思われる。

また、初期値で決まるエネルギーは演算子の scaling dimension と対応していたが、初期値そのものはどのように対応するのかわからない。

さらに、演算子との対応は弦を量子化した際に与えられたものであった。よって今回もカオスを量子化したものと対応していると考えられる。しかし量子カオスは一般にその定義さえもよくわかっていないものである。以上のような問題を解決していくのが今後の課題である。

## 謝辞

本修士論文の執筆にあたって、多くの方のお世話になりましたので、ここで感謝の意を述べたいと思います。

論文の内容について議論をしてくださった、共同研究者の吉田健太郎氏、浅野侑磨氏、川井大輔氏に感謝します。特に吉田氏には非常に多くの議論に付き合ってもらい、本文の内容についてご指導をして下さいました。心より感謝いたします。

川合光氏は文章の推敲に付き合っただき、研究の内容、方向性についてのご指導、助言をして下さいました。感謝いたします。

また、本修士論文の内容について議論をしてくださった、研究室のスタッフである畑浩之氏、福間将文氏、津村浩二氏に感謝いたします。私を励ましてくださった、素粒子論研究室の皆様、基礎物理学研究所素粒子論グループの院生を始めとする方々に感謝いたします。特に佐藤さんと坂本君には文章の内容や文献について、多くのアドバイスを頂きました。感謝いたします。

## 付録A coneのRicci平坦性について

ここでは4.1で述べた cone が Ricci 平坦であることと cone 周りの計量が (4.1.21) を満たすことが同値であることを示す。また cone の計量は (4.1.19) の形を仮定し、その計量テンソル、Riemann テンソル、Ricci テンソルをそれぞれ  $\tilde{g}$ 、 $\tilde{R}$ 、 $\tilde{Ric}$  と書く。一方、cone 周りの計量については“~”なしのものを用いることにする。つまり計量テンソル  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  と、その逆行列  $\tilde{g}^{\mu\nu}$  については

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 g_{ij} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} g^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.1})$$

なる形をしており、その足  $\mu, \nu, \dots$  は  $\mu = (r, 1, 2, \dots, n-1)$  を走るとする。また  $g_{ij}$  の足  $i, j, \dots$  は  $i = (1, 2, \dots, n-1)$  を走るとする。

まず、 $\tilde{g}$  についての Levi-Chivita 接続  $\tilde{\Gamma}$  のうち non-zero な成分は

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^r = -R g_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_{rj}^i = \frac{1}{R} \delta_j^i, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i \quad (\text{A.0.2})$$

である。ここで  $g_{ij}$  についての Levi-Chivita 接続を  $\Gamma_{jk}^i$  とした。このとき Ricci テンソル  $\tilde{Ric}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}_{\mu\nu} &= \tilde{R}^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \\ &= \partial_\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \tilde{\Gamma}_{\lambda\rho}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\rho \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda \\ &= \partial_r \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^r + \partial_i \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^i - \partial_r \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^r - \partial_i \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^i + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^r \tilde{\Gamma}_{ir}^i + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^i \tilde{\Gamma}_{ji}^j - \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^r \tilde{\Gamma}_{r\nu}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^i \tilde{\Gamma}_{i\nu}^\lambda \\ &= (2-n)g_{\mu\nu} + \partial_i \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^i - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{i\mu}^i + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^i \tilde{\Gamma}_{ji}^j - \tilde{\Gamma}_{j\mu}^i \tilde{\Gamma}_{i\nu}^j \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

と書ける。ここで、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$



とした。cone の Ricci テンソル  $\tilde{Ric}_{\mu\nu}$  の  $(r, r)$ 、 $(r, i)$ 、 $(i, j)$  成分はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
(r, r) \quad \tilde{Ric}_{rr} &= -\partial_r \tilde{\Gamma}_{ir}^i - \tilde{\Gamma}_{jr}^i \tilde{\Gamma}_{ir}^j \\
&= \frac{n-1}{R^2} - \frac{n-1}{R^2} = 0 \\
(r, i) \quad \tilde{Ric}_{ri} &= \partial_j \tilde{\Gamma}_{ri}^j - \partial_i \tilde{\Gamma}_{jr}^j + \tilde{\Gamma}_{ri}^j \tilde{\Gamma}_{kj}^k - \tilde{\Gamma}_{kr}^j \tilde{\Gamma}_{ji}^k \\
&= \partial_j \left( \frac{1}{R} \delta_j^i \right) - \partial_i \left( \frac{1}{R} \delta_j^j \right) + \frac{\delta_i^j}{R} \tilde{\Gamma}_{kj}^k - \frac{\delta_k^j}{R} \tilde{\Gamma}_{ji}^k = 0 \\
(i, j) \quad \tilde{Ric}_{ij} &= (2-n)g_{ij} + \partial_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \partial_j \tilde{\Gamma}_{ki}^k + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{\Gamma}_{lk}^l - \tilde{\Gamma}_{li}^k \tilde{\Gamma}_{kj}^l \\
&= (2-n)g_{ij} + Ric_{ij}
\end{aligned} \tag{A.0.5}$$

これより cone が Ricci 平坦であること  $\tilde{Ric}_{\mu\nu} = 0$  を要求すると、cone 周りの計量は Einstein 計量で  $Ric_{ij} = (n-2)g_{ij}$  を満たす必要があることがわかる。また逆に、cone 周りの計量が  $Ric_{ij} = (n-2)g_{ij}$  を満たす場合には、元の cone は Ricci 平坦となることがわかる。以上より、cone が Ricci 平坦であることと、cone 周りの計量が  $Ric_{ij} = (n-2)g_{ij}$  を満たすことが同値であることが示された。

## 参考文献

- [1] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, “A bound on chaos,” arXiv:1503.01409 [hep-th]. J. Polchinski, “Chaos in the black hole S-matrix,” arXiv:1505.08108 [hep-th]. G. Gur-Ari, M. Hanada and S. H. Shenker, “Chaos in Classical D0-Brane Mechanics,” arXiv:1512.00019 [hep-th].
- [2] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113]. [arXiv:hep-th/9711200].
- [3] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena and H. S. Nastase, “Strings in flat space and pp waves from N=4 super Yang-Mills,” JHEP **0204** (2002) 013 [arXiv:hep-th/0202021].
- [4] I. R. Klebanov and E. Witten, “Superconformal field theory on three-branes at a Calabi-Yau singularity,” Nucl. Phys. B **536** (1998) 199 [arXiv:hep-th/9807080].
- [5] P. Basu and L. A. Pando Zayas, “Chaos Rules out Integrability of Strings in  $AdS_5 \times T^{1,1}$ ,” Phys. Lett. B **700** (2011) 243 [arXiv:1103.4107 [hep-th]].
- [6] Y. Asano, D. Kawai, H. Kyono and K. Yoshida, “Chaotic strings in a near Penrose limit of  $AdS_5 \times T^{1,1}$ ,” JHEP **1508** (2015) 060 [arXiv:1505.07583 [hep-th]].
- [7] G. 't Hooft, “A planar diagram theory for strong interactions,” Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- [8] R. Penrose, “Any spacetime has a plane wave as a limit,” Differential geometry and relativity, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 271-275. R. Güven, “Plane Wave Limits and T-duality,” Phys. Lett. B **482** (2000) 255 [hep-th/0005061].

- [9] C. G. Callan, Jr., H. K. Lee, T. McLoughlin, J. H. Schwarz, I. Swanson and X. Wu, “Quantizing string theory in  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ : Beyond the pp wave,” Nucl. Phys. B **673** (2003) 3 [hep-th/0307032].
- [10] I. Swanson, “Superstring holography and integrability in  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ ,” hep-th/0505028.
- [11] J. A. Minahan and K. Zarembo “The Bethe-ansatz for  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills,” JHEP **03** (2003) 013 [arXiv:hep-th/0212208].
- [12] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, “Hidden symmetries of the  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  superstring,” Phys. Rev. D **69** (2004) 046002 [hep-th/0305116].
- [13] G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” Salamfest 1993:0284-296 [gr-qc/9310026]. L. Susskind, “The World as a hologram,” J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995) [hep-th/9409089].
- [14] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [15] M. Ammon, “Gauge/gravity duality foundations and applications,” Cambridge University Press, (2015) .
- [16] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].
- [17] B. Zwiebach, “A first course in string theory,” Cambridge University Press, (2009)
- [18] J. Plefka, “Lectures on the plane wave string / gauge theory duality,” Fortsch. Phys. **52**, 264 (2004) [hep-th/0307101].
- [19] J. Plefka, “Spinning strings and integrable spin chains in the AdS/CFT correspondence,” Living Rev. Rel. **8**, 9 (2005) [hep-th/0507136].
- [20] R. R. Metsaev, “Type IIB Green-Schwarz superstring in plane wave Ramond-Ramond background,” Nucl. Phys. B **625** (2002) 70 [hep-th/0112044].
- [21] 中村 勝弘, “量子物理学におけるカオス,” 岩波書店 (1998).

- [22] A. N. Kolmogorov, “The conservation of conditionally periodic motion with a small variation in the Hamiltonian,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954) 527.
- [23] V. I. Arnold, “Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian,” *Russian Math. Surveys* **18** (1963), 9-36.
- [24] J. Moser, “On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus,” *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1962) 1.
- [25] S. H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering,” Westview Press (1994).
- [26] 吉田 善章, “非線形とは何か,” 岩波書店 (2008).
- [27] M. Hénon and C. Heiles, “The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments,” *Astron. J.* 69 (1964) 73.
- [28] P. Candelas and X. C. de la Ossa, “Comments on conifolds,” *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 246-268.
- [29] D. R. Morrison and M. R. Plesser, “Nonspherical horizons. 1.,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 1 [hep-th/9810201].
- [30] P. Basu and L. A. Pando Zayas, “Analytic Non-integrability in String Theory,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 046006 [arXiv:1105.2540 [hep-th]].
- [31] L. A. Pando Zayas and J. Sonnenschein, “On Penrose limits and gauge theories,” *JHEP* **0205** (2002) 010 [hep-th/0202186].