

# 体積予想と Chern-Simons 理論

名古屋大学理学部物理学教室 藤 博之

E-mail: fuji@th.phys.nagoya-u.ac.jp

色付き Jones 多項式の漸近的振る舞いに関する予想として、体積予想が提唱されている。体積予想は、結び目理論と双曲幾何学との興味深い関係を生み出すのみならず、位相的弦理論や 3 次元超対称ゲージ理論との双対性など、様々な形での応用が近年なされている。本講演では、Chern-Simons ゲージ理論に基づく物理的観点から体積予想の主張とその背景を紹介する。

## 1 イントロダクション -結び目不変量と Chern-Simons ゲージ理論-

結び目ダイアグラムの位相的分類において、結び目不変量は重要な指標である。この中でも、Jones 多項式  $J(K; q)$  は量子不変量と呼ばれるクラスの結び目不変量の中でも最も基本的な不変量である [1]。Jones 多項式は様々な形で定義がなされるが、その中でも最も単純な定義はスケイン関係式を用いたものである：

$$q^{-1}J(K_+; q) - qJ(K_-; q) = (q^{1/2} - q^{-1/2})J(K_0; q), \quad (1)$$

$$J(\bigcirc; q) = 1. \quad (2)$$

この関係式を用いると、任意の結び目  $K$  に対して、結び目のダイアグラムを単純化する事がで

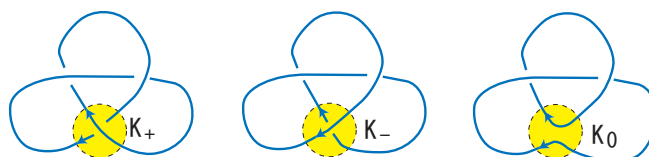


Figure 1: 三葉結び目に対する  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$  の関係

き、最終的に全てのダイアグラムが、互いに絡んでいない自明な結び目に帰着し、Jones 多項式を具体的に求める事ができる。

こうした Jones 多項式は、3次元 Chern-Simons ゲージ理論からも計算できる事が Witten の仕事 [2] によって明らかとなった。具体的には、3次元球面  $S^3$  上にゲージ群  $G = SU(2)$  を持つ Chern-Simons ゲージ理論を考える：

$$S_{CS}[A; S^3] = \frac{k}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (3)$$

Chern-Simons ゲージ理論は 3次元多様体の計量よらない位相的場の理論であるが、特にその物理量として結び目  $K$  に沿った Wilson ループ演算子  $W_R[A; K]$  を考えると、その量子論的期待値は結び目の位相不変量を与える：

$$Z_{CS}(S^3; K_R) = \int [dA] W_R[A; K] e^{iS_{CS}[A; S^3]}. \quad (4)$$

ただし,  $R$  はスピン  $j$  表現を表す. Witten の主張は, スピン  $j = 1/2$  の表現  $R = \square$  を持つ Wilson ループ演算子の期待値と Jones 多項式との等価性を示した:

$$J(K; q) = Z_{\text{CS}}(\mathbb{S}^3; K_{\square}) / Z_{\text{CS}}^{SU(2)}(\mathbb{S}^3; \square), \quad q := e^{\frac{2\pi i}{k+2}}. \quad (5)$$

さらに一般のスピン  $j$ -表現  $R = (2j)$  の Wilson ループ演算子の期待値から定められる結び目不変量は  $n$  色付き Jones 多項式  $J_n(K; q)$  に対応する ( $n = 2j + 1$ ):

$$J_n(K; q) = Z_{\text{CS}}(\mathbb{S}^3; K_{(2j)}) / Z_{\text{CS}}^{SU(2)}(\mathbb{S}^3; (2j)). \quad (6)$$

体積予想は, この色付き Jones 多項式の漸近極限  $n \rightarrow \infty$  を論じた予想である [3, 4]:

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |J_n(K; q = e^{\frac{2\pi i}{n}})| = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K). \quad (7)$$

この極限では, Chern-Simons ゲージ理論のレベル  $k$  を  $k + 2 = n$  と選んで二重スケールリング極限を取っており, その結果色付き Jones 多項式は指数的振る舞いをする. この指数の肩に現れる量が, 結び目補空間の完備双曲計量に関する体積と一致するという主張が上記の関係式である.

以下では, この予想の主張に関連した数学的背景を概観し, さらにその一般化に関する研究の発展を紹介する.

## 2 双曲幾何と体積予想

### 2.1 結び目補空間と双曲構造

体積予想の主張 (7) の右辺に現れた, 結び目補空間  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  は下図のように 3次元球面から結び目近傍の管状領域をくり抜くことで構築される. Thurston は結び目補空間に双曲構造が入る (つまり

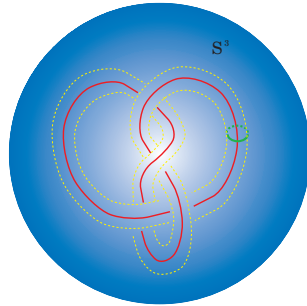


Figure 2: 結び目補空間

完備双曲 3次元多様体になる) 条件を論じ, その結果, トーラス結び目と衛生結び目と呼ばれるクラスの結び目以外は全て双曲多様体となる事を証明した. 例えば Figure 2 にある 8 字結び目  $4_1$  の補空間には完備双曲構造を導入する事ができる.

ここで双曲構造の性質をまとめると, 以下のものが挙げられる:

- 双曲多様体  $M_3$  は、測地的完備な切断的負の定曲率計量  $g_{ij}$  を有する：

$$R_{ij} = -2g_{ij}. \quad (8)$$

- 上記の双曲計量に関する体積  $\text{Vol}(M_3)$  は結び目補空間の基本群  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) =: \pi_1(K)$  に依存する位相不変量である。以下では有限体積を持つ場合を考える。
- 双曲3次元多様体は理想四面体による単体分割が可能である。

3番目の条件に現れた「理想四面体」とは、内部に双曲計量(8)が入った四面体であり、各辺に沿って一定の値を持つ面角  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ) によって特徴づけられる。具体的には、3次元ボール内部にユークリッド版  $AdS_3$  計量を導入し、この計量の無限遠点に対応する2次元球面上に4点を定め、それらを測地線でつなぐことで構築される。さらに共形変換を利用して、このボールの内部を上半空間に写すと、理想四面体の断面に内角が  $(\alpha, \beta, \gamma)$  の三角形が現れる。この三角形を複素平面に置き、2つの頂点を  $0, 1$  に配置すると、3つ目の頂点を表す複素座標  $z$  によって、この理想四面体をパラメトライズする事ができる。この複素パラメータ  $z$  を、形のパラメータ (shape parameter) と呼ぶ。

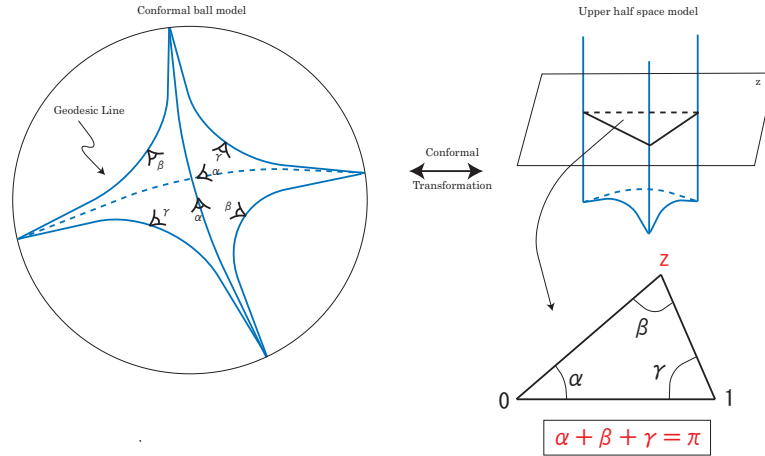


Figure 3: 理想四面体

この理想四面体  $T_{\alpha\beta\gamma}$  の  $AdS_3$  計量に関する体積は初等的計算によって [5]：

$$\text{Vol}(T_{\alpha\beta\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma), \quad (9)$$

$$\Lambda(\theta) := - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt. \quad (10)$$

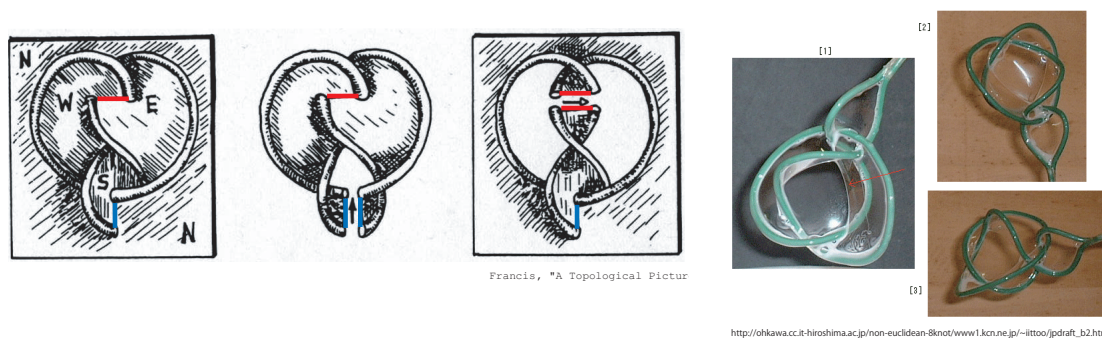
と求められる。尚、関数  $\Lambda(\theta)$  は Lobachevsky 関数と呼ばれている。

双曲幾何の重要な定理の一つとして、Mostow の剛性定理がある。この定理の主張を利用すると双曲多様体  $M_3$  の基本群  $\pi_1(M_3)$  によって、単体分割を一つ定めるとその貼り合わせに現れる理想四面体の面角が一意的に定まるという事が帰結される。つまり、双曲幾何においては、体積  $\text{Vol}(M_3)$  は多様体のトポロジーによって決定されるのである。

## 2.2 結び目補空間の構成

体積予想の主張に現れた、結び目補空間の場合を Figure 2 の 8 字結び目  $4_1$  を例にとって、構成される様子を概観したい。

まず、8 字結び目の補空間を理想四面体でなく、トポロジカルな四面体によって単体分割する方法を考える。そこで、下図のように [6, 7] 結び目を境界とする膜を張り、四面体の各面を構築することから始めよう。これらの膜に切り込みを二カ所入れ、分割した各膜の四つピースを、Figure



4 の要領で各頂点に押し込めるよう変形すると、4 つの三角形を作り出す事ができる。これらの三角形を貼り合わせると、 $S^3$  に 1 点を加えた  $\mathbb{R}^3$  の片側の領域を囲むような四面体を作り上げられる。同様の手続きでもう片一方の領域を囲むような四面体も構築すると、今度は逆の向き付けを持つ四面体が得られる。以上の考察により、8 字結び目の補空間はトポロジカルな分割によって 2 つの四面体に分割される事が分かった。

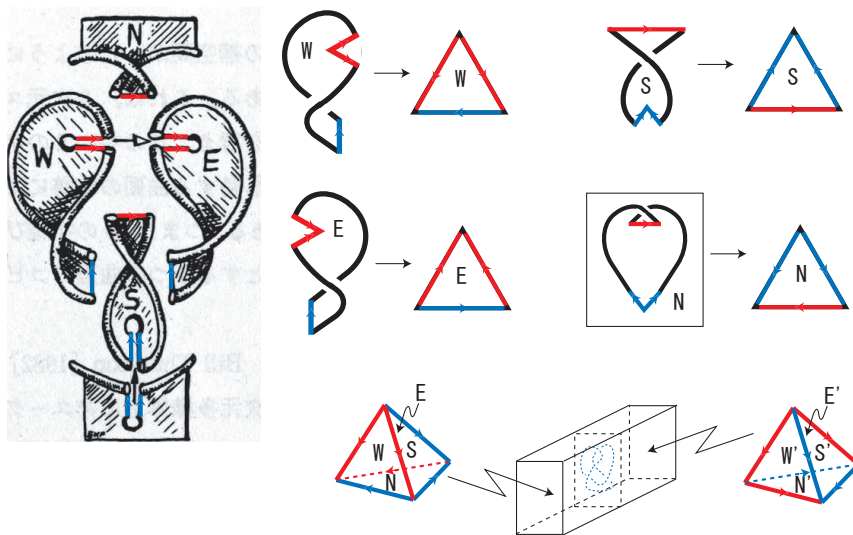


Figure 4: 8 字結び目補空間の四面体による単体分割

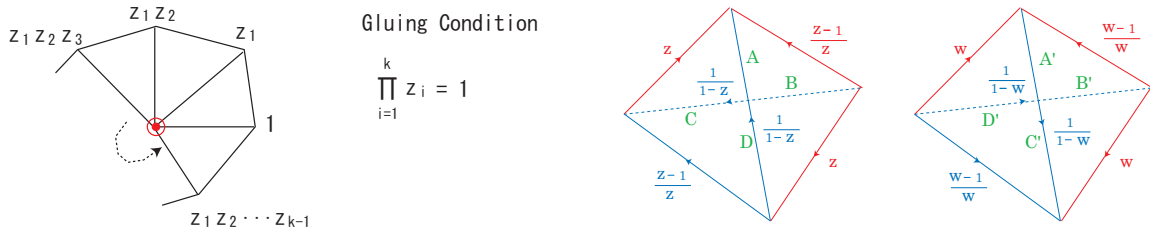
次に、この 2 つのトポロジカルな四面体を理想四面体に置き換えた場合に、無矛盾に貼り合う

ための条件を考える事にする。前述の通り、理想四面体の各辺に沿った面角は一定の値を取る。そこで、理想四面体の貼り合わせを行った結果、欠損角が生じないように面角を調整しなければならない事が分かる。このための条件としては、2通りの条件が考えられる。

1. 各辺に沿った貼り合わせ：

まず、各辺に沿った貼り合わせを考える。トポロジカルな分割では、膜に2つの切れ込みを入れる事で四面体の各辺を構築したので、元来はこの辺に沿って貼り合わせられるはずである。そこで、それぞれの辺を上から眺めると、断面図として三角形がその周りを囲んでいるのだが、三角形の角度がしっかりと調整されていないと辺に沿って欠損角が生じる。そこで、欠損角が生じないための条件は、各辺の面角を偏角とする形のパラメータの積が  $\prod_i z_i = 1$  という条件を満たす事が要請される。実際、今考えている8字結び目補空間の分割に対しては、各辺に沿って2つの条件が課せられる：

$$zw \frac{z-1}{z} \frac{w-1}{w} zw = 1, \quad \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-w} \frac{z-1}{z} \frac{w-1}{w} \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-w} = 1. \quad (11)$$

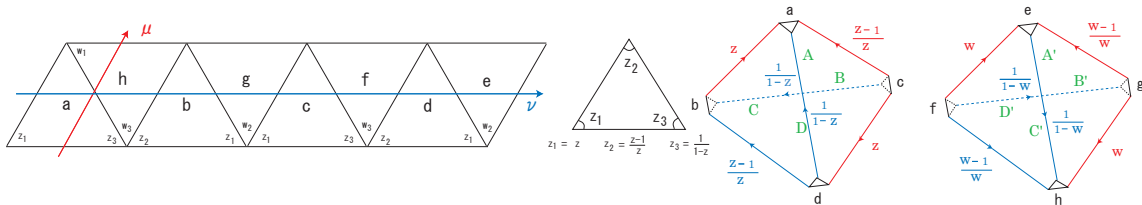


2. 各辺に沿った貼り合わせ：

次に境界トーラスの貼り合わせを考える。結び目補空間は、結び目近傍の solid torus を抜き出す事で構築されるので、トーラスの境界を持つ。上記のように、結び目補空間を単体分割した際、結び目は各四面体の頂点に局在化させた。そこで、この境界トーラスは、四面体の頂点近傍の小さな四面体を切り取り、そこに現れる8つの小さな三角形を貼り合わせる事によって構築できる。この三角形の内角もまた、四面体の面角によって定められるので、トーラスとして辺を同一視する際に、三角形が欠損角無しに貼り合うための条件として、以下の2つの平行性条件を得る：

$$\text{Meridian } \mu : \frac{w_1}{z_3} = w(1-z) = 1. \quad (12)$$

$$\text{Longitude } \nu : (z_1 z_2 z_3)^2 (z_1)^2 (w_2 w_3)^2 = (z/w)^2 = 1. \quad (13)$$



8字結び目補空間の双曲軽量に関する体積：

貼り合わせ条件 (11), (12), (13) を連立させると三角形条件  $0 < \arg z, \arg w < \pi$  を満たす解は

$$z = w = e^{\pi i/3}. \quad (14)$$

と一意的に定まる. この解を理想四面体の体積公式 (9) に代入すると, 体積の値が

$$\text{Vol}(S^3 \setminus \mathbf{4}_1) = 6\Lambda(\pi/3)2,0298832\dots, \quad (15)$$

のように, 一意的に決定された.

### 2.3 色付き Jones 多項式の漸近極限

体積予想の右辺に現れる双曲計量に関する体積が計算されたので, いよいよ体積予想の主張 (7) を検証しよう. 8字結び目に対する色付き Jones 多項式の明示式として, 以下の公式が知られている [8]:

$$J_n(\mathbf{4}_1, q) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=1}^k (q^{(n+j)/2} - q^{-(n+j)/2})(q^{(n-j)/2} - q^{-(n-j)/2}). \quad (16)$$

この表式の極限  $n \rightarrow \infty, q = e^{\hbar} \rightarrow 1$  ( $\hbar n := 2\pi i$ ) を考えたい. そこで,  $k\hbar := \log z$  を固定して, 和  $\sum_k$  を積分  $\int dz$  で近似する. この際,  $(x; q)_k = \prod_{i=1}^k (1 - xq^{i-1}) \sim e^{\frac{1}{\hbar}(\text{Li}_2(x) - \text{Li}_2(xz))}$  を用いると,

$$J_n(\mathbf{4}_1; e^{2\pi\sqrt{-1}/n}) \sim \int dz \exp\left[\frac{1}{\hbar}\widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(z)\right], \quad \widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(z) = -\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(z^{-1}), \quad (17)$$

と近似される.  $\hbar \rightarrow 0$  極限でこの積分に最も効くのは鞍点からの寄与であるので, 鞍点条件  $0 = \frac{\partial \widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(z)}{\partial z} = \frac{\log(1-z) + \log(1-\frac{1}{z})}{z}$  を解くと,  $z = e^{\pi i/3}$  という解が得られる. この解を代入すると,

$$2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |J_n(\mathbf{4}_1; q = e^{2\pi\sqrt{-1}/n})|}{n} = 2\text{Im}[\text{Li}_2(z_0)] = 2,0298832\dots = \text{Vol}(S^3 \setminus \mathbf{4}_1). \quad (18)$$

と評価され, 確かに結び目補空間の双曲計量に関する体積が得られる事が確かめられ, 体積予想の主張を検証する事ができた.

## 3 体積予想の一般化と A-多項式

### 3.1 双曲 Dehn 埋め込み問題

結び目補空間に対して, 再びソリッドトーラスを埋め込むと, コンパクトな多様体を得られる. この際, ソリッドトーラスの境界の  $(1, 0)$  サイクルと, 結び目補空間の境界トーラスの  $(p, q)$  サイクルを同一視しながら埋め込みを行うと,  $(p, q)$  の値に応じて様々なトポロジーを持つ多様体を得られる. こうした手術の操作を Dehn 埋め込みと呼ぶ. W.Thurston は, こうした埋め込みに対して,  $(p, q)$  が十分に大きな値を取る場合には, Dehn 埋め込みによって双曲計量を持つコンパクトな 3次元多様体を得られる事を示した.



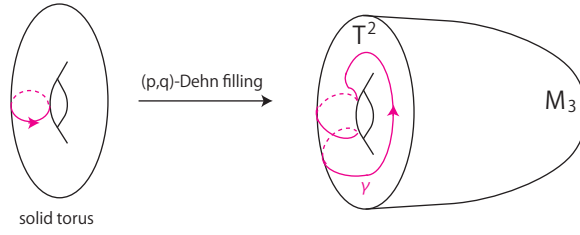


Figure 5: Dehn 埋め込み

Dehn 埋め込みを行うと、結び目補空間の領域に導入されていた完備双曲計量は変形される。実際、ソリッドトーラスを埋め込んだため、補空間の完備性は失われ、双曲構造は一つの複素パラメータ  $x$  によって変形される。この変形により、貼り合わせ条件は以下のように変形される：

$$\text{Bulk} : zw(1-z)(1-w) = 1 \quad (19)$$

$$\text{Meridian} : w(1-z) = x \quad (20)$$

$$\text{Longitude} : (z/w)^2 = (y/x)^2. \quad (21)$$

ここで、辺に沿った貼り合わせ条件 (11) は大域的に欠損角が生じないために、保たれる。実際、Dehn 埋め込みによって影響を受けるのは境界トーラス付近のみなので、この条件が変形されないのは自然であろう。一方、完備性が破れるため、境界トーラスに沿った貼り合わせ条件 (12) と (13) は変形され、同一視される 2 つの辺に対応して変形パラメータ  $(x, y)$  が導入される。

しかしながら、この 2 つのパラメータは独立ではなく、実際上記の方程式系から  $z$  と  $w$  を除去すると、 $(x, y)$  に対する制限が得られる：

$$A_{4_1}(x, y) = y + y^{-1} - (x^2 - x - 2 - x^{-1} + x^{-2}) = 0. \quad (22)$$

こうして得られる多項式  $A_K(x, y)$  は A-多項式と呼ばれ、元来、結び目補空間の  $SL(2; \mathbb{C})$  ホロノミー表現  $\text{Hom}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K); SL(2; \mathbb{C}))$  としても定義された結び目不変量の一つである。

この A-多項式を用いると、 $x$  によって変形された非完備な結び目補空間  $\mathbb{S}^3 \setminus K_x$  に対する体積  $\text{Vol}$  と Chern-Simons 不変量  $\text{CS}$  は以下ようになる：

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K_x) + i\text{CS}(\mathbb{S}^3 \setminus K_x) = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) + i\text{CS}(\mathbb{S}^3 \setminus K) + \phi_K(x), \quad (23)$$

$$\phi_K(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} \log y(x). \quad (24)$$

ここで、関数  $\phi_K(x)$  は Neumann-Zagier ポテンシャル関数 [9] と呼ばれ、体積と Chern-Simons 不変量の変形を記述している。

### 3.2 一般化された体積予想

双曲構造の変形に伴う体積公式の変形に対応して、体積予想は以下の一般化が予想されている [10, 11]：

$$2\pi \lim_{n, k \rightarrow \infty} \frac{\log J_n(K; q = e^{2\pi i/k})}{k} = S_0(K; x) \quad (25)$$

$$S_0(K; x) = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) + i\text{CS}(\mathbb{S}^3 \setminus K) + \phi_K(x). \quad (26)$$

ただしここでは、 $x := e^{2\pi i n/k}$  を固定した二重スケーリング極限を考えている。

一般化された体積予想の検証：

$K$  が 8 字結び目の場合に、一般化された体積予想の検証を試みよう。先ほどと同様に、色付き Jones 多項式の明示式 (16) を積分で近似すると、

$$J_n(\mathbf{4}_1; q) \sim \int dz e^{\frac{1}{\hbar} \widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(x,z) + \mathcal{O}(\hbar^0)}, \quad (27)$$

$$\widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(x, z) = \text{Li}_2(x) - \text{Li}_2(xz) + \text{Li}_2(x^{-1}) - \text{Li}_2(x^{-1}z) - \frac{1}{2}(\log z)^2 + \pi i \log z. \quad (28)$$

となる。  $z$  に関する鞍点条件  $z \frac{\partial \widetilde{W}_K}{\partial z} = 0$  から

$$1 = e^{z \partial \widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(x, z_0) / \partial z} = x + x^{-1} - z_0 - z_0^{-1}, \quad (29)$$

の解として  $z = z_0$  が得られ、この解から  $S_0(\mathbf{4}_1; x)$ ：

$$\widetilde{W}_{\mathbf{4}_1}(z_0, x) = S_0(\mathbf{4}_1; x) = \text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbf{4}_1) + i \text{CS}(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbf{4}_1) + \phi_{\mathbf{4}_1}(x), \quad (30)$$

が求められる。特に  $x$  依存性は Neumann-Zagier ポテンシャル関数に現れるので、

$$x \frac{\partial S_0(\mathbf{4}_1; x)}{\partial x} = \log y, \Rightarrow y = \frac{x z_0 - 1}{x - z_0}, \quad (31)$$

という関係が満たされる。条件 (29) と (31) から  $z_0$  を除去すると、 $(x, y)$  に対する制限方程式が得られ、この方程式を処理すると確かに (22) の A-多項式  $A_{\mathbf{4}_1}(x, y)$  が再現される。以上の考察より 8 字結び目に対して、一般化された体積予想の検証を行う事ができた。

### 3.3 量子体積予想と WKB 展開

体積予想は、Chern-Simons ゲージ理論の立場から理解すると、Wilson ループ演算子の半古典極限での振る舞いを考えている。これに対し、量子化された Chern-Simons ゲージ理論を基に、量子体積予想 [10] (別名 AJ 予想 [12]) が提唱された。この予想の主張は、色付き Jones 多項式に対する、以下の  $q$  差分方程式の存在である：

$$\hat{A}_K(\hat{x}, \hat{y}; q) J_n(K; q) = 0, \quad \hat{y} \hat{x} = q \hat{x} \hat{y}, \quad (32)$$

$$\hat{y} f(n) = f(n+1), \quad \hat{x} f(n) = q^n f(n). \quad (33)$$

ただし、 $\hat{A}_K(\hat{x}, \hat{y}; q)$  は量子 A-多項式と呼ばれ、古典極限  $q \rightarrow 1$  において A-多項式に帰着する：

$$\hat{A}_K(x, y; q \rightarrow 1) = A_K(x, y). \quad (34)$$



実際、8字結び目に対する量子 A-多項式は、以下のように計算される：

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{4_1}(\hat{x}, \hat{y}; q) &= \sum_{j=0}^3 a_j(\hat{x}; q) \hat{y}^j, \\
a_0 &= \frac{t^3(1-\hat{x})(1-q\hat{x})(1-q^2\hat{x}^2)(1-q^3\hat{x}^2)}{q^3(1-\hat{x})(1-\hat{x}^2)(1-q\hat{x})(1-q^{-1}\hat{x}^2)}, \\
a_1 &= \frac{(1-q\hat{x})(1-q^3\hat{x}^2)}{q^3\hat{x}^2(1-\hat{x})(1-q\hat{x})(1-q^{-1}\hat{x}^2)} \\
&\quad \times \left(1-2q\hat{x}-q^{-1}(1+q^3-q-q^2)\hat{x}^2-(q+q^2-1-q^3)\hat{x}^3+2q\hat{x}^4-q^2\hat{x}^5\right), \\
a_2 &= -\frac{(1-q^2\hat{x}^2)}{q^2\hat{x}^2(1-\hat{x}^2)(1-q\hat{x})} \\
&\quad \times \left(1-2\hat{x}+t^2(q+q^2-1-q^3)\hat{x}^2+(1+q^3-q-q^2)\hat{x}^3+2q^3\hat{x}^4-q^3\hat{x}^5\right), \\
a_3 &= 1.
\end{aligned} \tag{35}$$

この量子 A-多項式から得られる  $q$ -差分方程式に下記の展開形

$$J_n(K; q) \sim \exp\left(\frac{1}{\hbar} S_0(K; x) - \frac{1}{2} \delta \log \hbar + \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(K; x) \hbar^n\right), \tag{36}$$

を代入すると、WKB 展開の高次項が逐次的に決定され [13]、色付き Jones 多項式の漸近的振る舞いをより詳細に解析できるのである。

## 4 さらになる予想へ向けて

体積予想とその周辺に現れた色付き Jones 多項式の漸近展開に伴う様々な予想を概観した。こうした予想の物理的応用は様々な形でなされており、興味深い結果 [14] がもたらされている。位相的弦理論との関係 [15, 16, 17] に関しては、A-多項式によって定義されるスペクトル曲線に対し、Eynard-Orantin の位相的再帰関係式を適用する事によって WKB 展開 (36) の全オーダーを再現できるという予想が提唱され、色付き Jones 多項式の新たな定式化へ向けた研究がなされている。

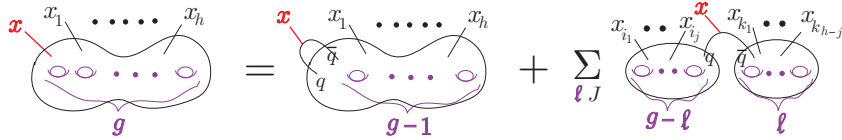


Figure 6: Eynard-Orantin の位相的再帰関係式

こうした研究の進展では、単に結び目不変量の性質を知るという目的を超えて、理論物理学の研究にも様々なフィードバックがもたらされてきている。今後の研究の発展によって、数学者も物理学者も驚くような興味深い関係が、体積予想の周辺からもたらされる事を期待したい。

## References

- [1] V. F. R. Jones, “Index for Subfactors,” *Invent. Math.* **72** (1983) 1-25; “A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra,” *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12** (1983) 103–111; “Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials,” *Ann. Math.* **126** (1987) 335-388.
- [2] E. Witten, “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,” *Commun. Math. Phys.* **121** (3) (1989) 351–399.
- [3] R. M. Kashaev, “The Hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm,” *Lett. Math. Phys.* **39** (1997) 269.
- [4] H. Murakami and J. Murakami, “The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot,” *Acta Math.* **186** (2001) 85 [[math/9905075](http://math/9905075)].
- [5] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes (1980). Available via MSRI: <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [6] G. K. フランシス著, 笠原皓司監訳・宮崎興二訳「トポロジーの絵本」シュプリンガー・フェアラーク東京(株).
- [7] 伊藤忠夫「双曲的非ユークリッドの世界と 8 字ノット」<http://www.iis.it-hiroshima.ac.jp/~ohkawa/non-euclidean-8knot/www1.kcn.ne.jp/~iitto/japanese.htm>
- [8] K. Habiro, “On the colored Jones polynomials of some simple links,” *数理解析研究所考究録* no. **1172** (2000) 34–43.
- [9] W. D. Neumann and D. Zagier, “Volumes of hyperbolic three-manifolds,” *Topology* **24** (1985) 307–332.
- [10] S. Gukov, “Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A polynomial,” *Commun. Math. Phys.* **255** (2005) 577 [[hep-th/0306165](http://hep-th/0306165)].
- [11] H. Murakami and Y. Yokota, “The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces,” *J. Reine Angew. Math.* **607** (2007) 47–68.
- [12] S. Garoufalidis, “Difference and differential equations for the colored Jones function,” *J. Knot Theory. Ramifications*, **17** (2008) 495–510, [arXiv:math/0306229](http://arxiv.org/abs/math/0306229) [[math.GT](http://math.GT)];
- [13] T. Dimofte, S. Gukov, J. Lenells and D. Zagier, “Exact Results for Perturbative Chern-Simons Theory with Complex Gauge Group,” *Commun. Num. Theor. Phys.* **3** (2009) 363 [[arXiv:0903.2472](http://arxiv.org/abs/0903.2472) [[hep-th](http://hep-th)]].
- [14] Y. Terashima and M. Yamazaki, “SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theory on Duality Walls,” *JHEP* **1108** (2011) 135 [[arXiv:1103.5748](http://arxiv.org/abs/1103.5748) [[hep-th](http://hep-th)]]; “Semiclassical Analysis of the 3d/3d Relation,” [arXiv:1106.3066](http://arxiv.org/abs/1106.3066) [[hep-th](http://hep-th)]; T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, “Gauge Theories Labelled by Three-Manifolds,” [arXiv:1108.4389](http://arxiv.org/abs/1108.4389) [[hep-th](http://hep-th)]; “3-Manifolds and 3d Indices,” [arXiv:1112.5179](http://arxiv.org/abs/1112.5179) [[hep-th](http://hep-th)].
- [15] R. Dijkgraaf, H. Fuji and M. Manabe, “The Volume Conjecture, Perturbative Knot Invariants, and Recursion Relations for Topological Strings,” *Nucl. Phys. B* **849** (2011) 166 [[arXiv:1010.4542](http://arxiv.org/abs/1010.4542) [[hep-th](http://hep-th)]].
- [16] M. Aganagic and C. Vafa, “Large N Duality, Mirror Symmetry, and a Q-deformed A-polynomial for Knots,” [arXiv:1204.4709](http://arxiv.org/abs/1204.4709) [[hep-th](http://hep-th)].
- [17] G. Borot and B. Eynard, “All-order asymptotics of hyperbolic knot invariants from non-perturbative topological recursion of A-polynomials,” [arXiv:1205.2261](http://arxiv.org/abs/1205.2261) [[math-ph](http://math-ph)].