

カスプを持つ Wilson ループと AdS/CFT 対応

初田泰之 (東工大)

共同研究者

伊藤克司氏 (東工大)

酒井一博氏 (京大基研)

佐藤勇二氏 (筑波大)

この講演のテーマ

- ゲージ理論における Wilson ループが **カusp** (尖り) を持つ場合に
 - ▶ 光的多角形 Wilson ループとグルーオン散乱振幅との関係
 - ▶ カusp異常次元の厳密な計算
- の2点について考える
- 特に、4次元最大 (N=4) 超対称 Yang-Mills 理論における上記の問題を、**AdS/CFT 対応** と呼ばれるゲージ・重力双対性や、**可積分性** との関係を絡めながら、レビューする

1. Introduction

動機

- ゲージ・重力双対性の重要性

d次元ゲージ理論 \equiv d+1次元重力理論

- AdS/CFT 対応のようなゲージ・重力双対性では、特にゲージ理論の**強結合領域**は、重力理論の**弱結合領域**に対応する（強結合・弱結合型双対性）
- ゲージ・重力双対性を利用すれば、ゲージ理論の強結合領域の物理を重力理論の弱結合領域の物理によって解析できる

- **AdS/CFT 対応**：(超) 共形場理論 (CFT) は AdS 時空上の弦理論と等価

- 具体例

Maldacena '97

4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称

Yang-Mills 理論

vs.

$AdS_5 \times S^5$ 上の

IIB 型超弦理論

- パラメータ間の関係

$$\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N = 4\pi g_s N = \frac{R^4}{\alpha'^2}$$

強結合・弱結合型双対性

- AdS/CFT 対応は強結合・弱結合型双対性
- 一般に両理論の比較は困難
- 理論に高い対称性がある場合、ゲージ理論のいくつかの物理量は結合定数に依らず、厳密に計算できる場合がある
 - ▶ BPS 演算子の共形次元 ← 非繰り込み定理
 - ▶ 円形 Wilson loop の期待値 ← 局所化
 - ▶ Wilson ループのカस्प異常次元 ← 可積分性
- このような場合は弦理論側の結果と直接比較可能

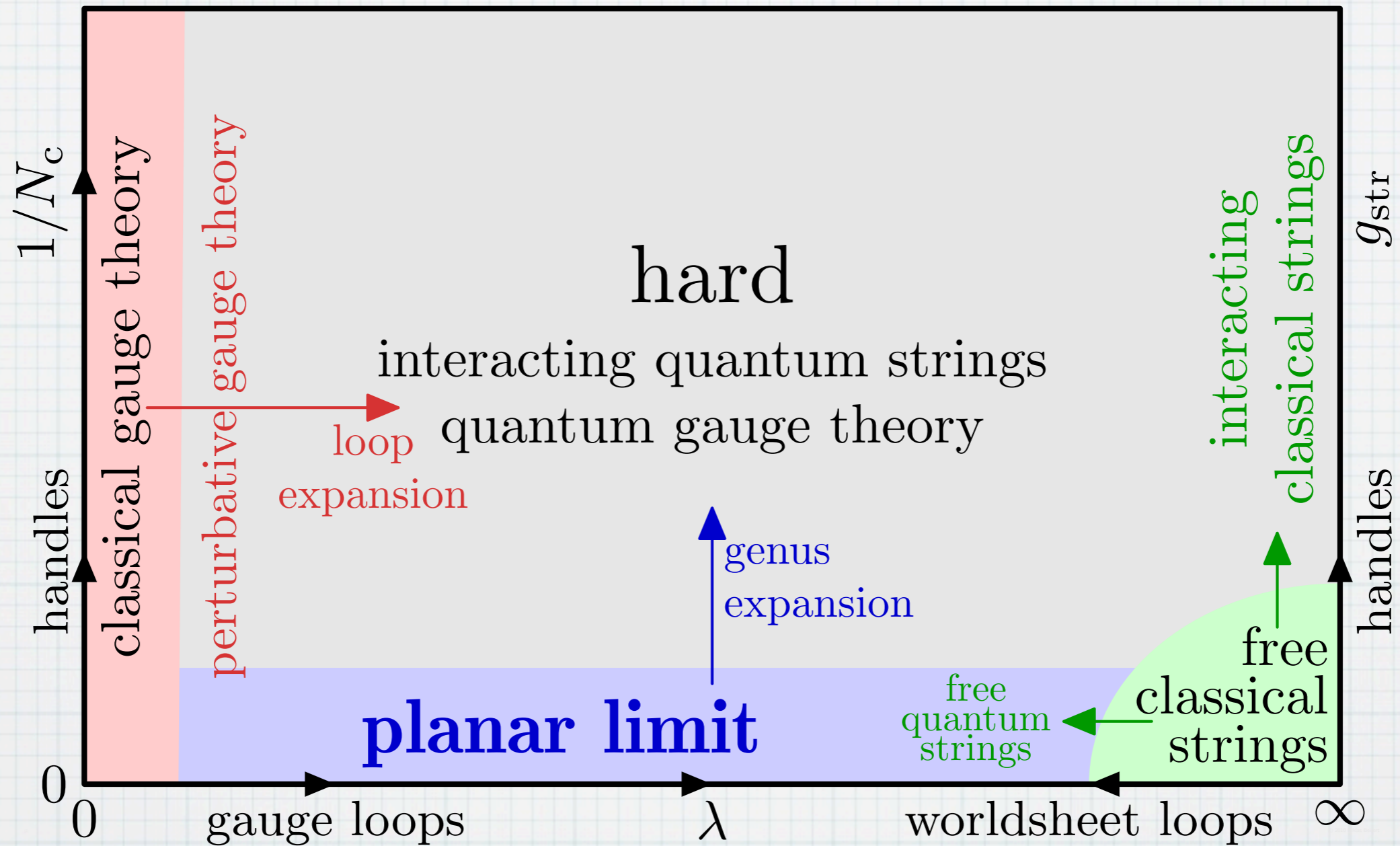


Figure 2: Map of the parameter space of $\mathcal{N} = 4$ SYM or strings on $AdS_5 \times S^5$.

Beisert et al.,
 “Review of AdS/CFT Integrability: An Overview”
 arXiv: 1012.3982 [hep-th] より引用

研究の目標

- より多くの物理量に対して弱結合から強結合に至る全結合領域での振る舞いを理解したい
- そのために理論の持つ超対称性や可積分性を最大限利用する
- 前半の光的多角形 Wilson ループ・グルーオン散乱振幅の話は、まだこのような理解に達していない
- 後半のカस्प異常次元は理解されつつある

目次

1. Introduction

2. グルーオン散乱振幅と光的多角形

Wilson ループ

3. 最近の進展

4. カस्प異常次元の厳密な計算

5. まとめ

2. グルーオン散乱振幅と 光的多角形 Wilson ループ

グルーオン散乱振幅

- N=4 SYM 理論は共形不変ゆえに漸近状態は定義できない
- 散乱振幅は ill-defined
- 散乱振幅の定義には IR cut-off が必要
- 通常は次元正則化を行う
- 弦理論の言葉では Dp-brane ($p = 3 - 2\epsilon$) を考えることに相当

弦理論における散乱

- グルーオンは開弦に対応する

- AdS5 の計量

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^\mu dx_\mu + dz^2}{z^2}$$

- 散乱振幅は vertex operator が挿入された作用の saddle point 近似で評価される

$$A \sim e^{iS_{\text{classical}}}$$

- AdS 空間でこのような開弦の配位を求めるのは難しい
- Flat 空間の場合 : Gross, Mende '87

- Alday と Maldacena は以下のような ‘T-dual’ 変換を考えることで、このような作用の評価が数学的に単純化されることを見出した Alday, Maldacena '07

$$\partial_\alpha y^\mu = i \frac{R^2}{z^2} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta x^\mu$$

- 新たな変数の計量もまた AdS5 空間となる

$$ds^2 = R^2 \frac{dy^\mu dy_\mu + dr^2}{r^2} \quad r = \frac{R^2}{z}$$

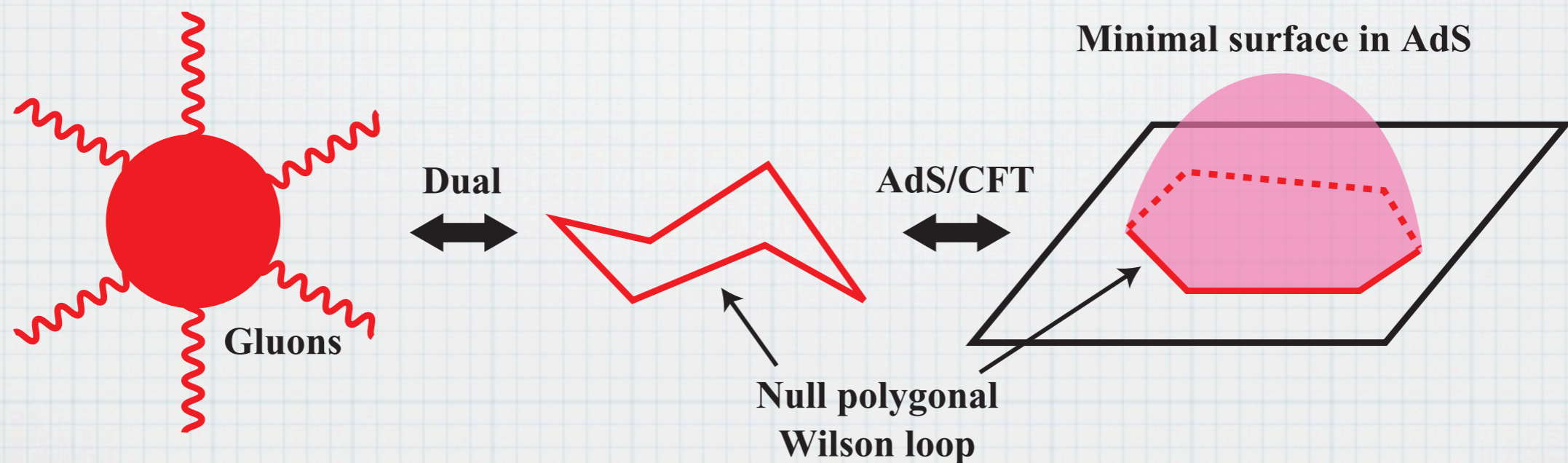
- 境界条件は以下のように読みかえられる

$$\Delta y_{\text{boundary}}^\mu = 2\pi k^\mu$$

- 運動量保存 → 閉じたループ

- 元の座標の境界条件は IR regime: $z \gg 1$ で課される
- 新たな座標では AdS の境界に対応 $r \sim 0$
- 問題は閉じた polygonal loop を境界にもつ AdS 空間中の極小曲面を求めること

$$A \sim e^{iS_{\text{classical}}^{\text{dual}}} = e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} (\text{Area})_{\text{dual}}}$$



4点振幅

- 4-cusp 解は具体的に求まる

Alday, Maldacena '07

$$r = \frac{a}{D(u_1, u_2)}, \quad y_0 = \frac{a\sqrt{1+b^2} \sinh u_1 \sinh u_2}{D(u_1, u_2)}$$

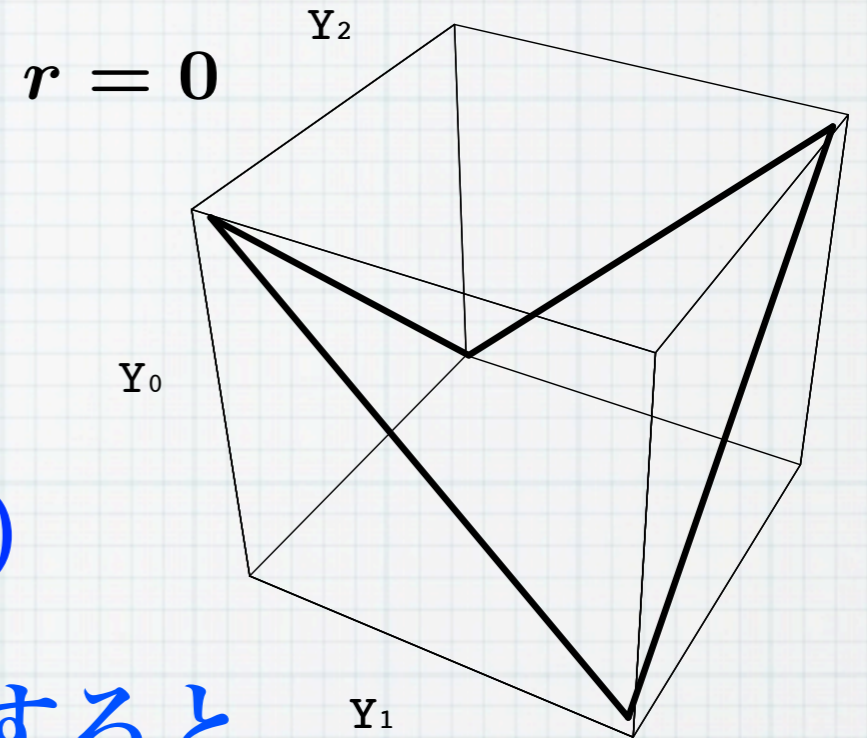
$$y_1 = \frac{a \sinh u_1 \cosh u_2}{D(u_1, u_2)}, \quad y_2 = \frac{a \cosh u_1 \sinh u_2}{D(u_1, u_2)}$$

$$D(u_1, u_2) = \cosh u_1 \cosh u_2 + b \sinh u_1 \sinh u_2$$

- a と b は Mandelstam 変数と関係付けられる

$$s = -\frac{8a^2/(2\pi)^2}{(1-b)^2}, \quad t = -\frac{8a^2/(2\pi)^2}{(1+b)^2}$$

- この解を作用に代入する
- そのままでは発散する
- 正則化：D3 \rightarrow Dp ($p = 3 - 2\epsilon$)
- この正則化のもとで作用を評価すると



$$\mathcal{A} = e^{iS} = \exp \left[iS_{\text{div}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi} \log^2 \left(\frac{s}{t} \right) + \tilde{\mathcal{C}} \right]$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} + 2 \log 2 - \log^2 2 \right)$$

ゲージ理論との比較 (BDS 予想)

Bern, Dixon, Smirnov '05

- Bern, Dixon, Smirnov はゲージ理論の摂動論の計算から厳密な 4 点振幅の形を予想した

カスプ異常次元

$$\mathcal{A}_{4\text{-point}} = \mathcal{A}_{\text{tree}} \mathcal{A}_{\text{div}} \exp \left[\frac{f(\lambda)}{8} \left(\log^2 \left(\frac{s}{t} \right) + \frac{4\pi^2}{3} \right) + C(\lambda) \right]$$

- カスプ異常次元はよく理解されている (→ 後半)

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} + \dots \quad (\lambda \gg 1) \quad \text{Gubser, Klebanov, Polyakov '02}$$

- 弦理論からの結果

$$\mathcal{A}_{4\text{-point}}^{\text{string}} = e^{iS_{\text{div}}} \exp \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi} \left(\log^2 \left(\frac{s}{t} \right) + \frac{4\pi^2}{3} \right) + \hat{C}(\lambda) \right]$$

$$\hat{C}(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \left(-\frac{\pi^2}{3} + 2 \log 2 - \log^2 2 \right)$$

ここまでのまとめ

- 4点振幅（四角形 Wilson loop）の場合は、具体的な弦の解が構成でき、極小曲面の面積を評価することが可能
- 結果は BDS 予想で強結合極限をとったものと一致
- より多点の振幅の場合はどうか？

3. 最近の進展

多点振幅

- BDS 予想は一般の n 点振幅に対してなされている
- ただし、6 点以上に対しては正しい振幅と BDS 予想にはズレがあることが確認されている
 - ▶ 強結合で $n \rightarrow \infty$ の場合 Alday, Maldacena '07
 - ▶ 2-loop における 6 点振幅 Bern et al. '08; Drummond et al. '08
- ズレの部分は remainder 関数と呼ばれている

$$\log \mathcal{A}_{n \geq 6}(\lambda) = \log \mathcal{A}_{\text{BDS}}(\lambda) + \underline{R(\lambda)}$$

Remainder function

強結合における振幅

- Remainder function を結合定数の全領域で知ることが目標だが難しい
- まずは強結合領域について考える
- 強結合領域における散乱振幅を計算するためには、light-like polygon を境界にもつ極小曲面の面積を知る必要がある
- n 点振幅については特殊な場合 (regular polygon) を除き、このような解は構成されていない
- 実は解を具体的に知らなくても、面積を計算することは可能

極小曲面と積分方程式

- $2n$ 点振幅に対応する AdS3 内の極小曲面の面積は以下の積分方程式を解くことで計算できる

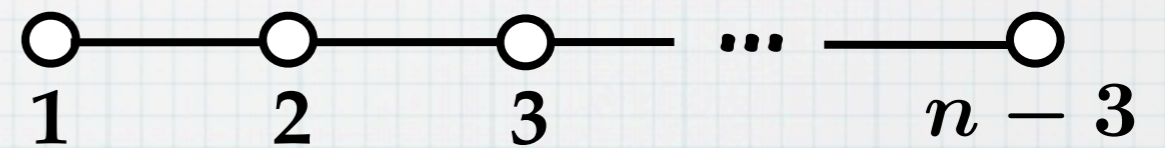
Alday, Maldacena, Sever, Vieira '10

YH, Ito, Sakai, Satoh, arXiv: 1002.2941

$$\log Y_s(\theta) = -m_s \cosh \theta + K * \log(1 + Y_{s-1})(1 + Y_{s+1})$$

$$Y_0(\theta) = Y_{n-2}(\theta) = 0 \quad (s = 1, \dots, n-3)$$

$$K(\theta) = \frac{1}{2\pi \cosh \theta},$$



$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' f(\theta - \theta')g(\theta')$$

- 流れ：

パラメータ m_s ➡ 積分方程式から $Y_s(\theta)$ を決める
(Polygon の形を決める)

➡ 面積は $Y_s(\theta)$ を用いて表される

- 積分方程式を数値的に解くことは可能だが、解析的に解くことは難しい

- パラメータ m_s が小さい時には **2次元 CFT** のテクニックを用いて remainder 関数の解析的表式を得ることが可能

YH, Ito, Sakai, Satoh, arXiv: 1005.4487, 1102.2477

YH, Ito, Satoh, arXiv: 1109.5564

- 実は散乱振幅に対する積分方程式は **homogeneous sine-Gordon 模型** と呼ばれる既知の可積分系に対する TBA 方程式と同一

YH, Ito, Sakai, Satoh, arXiv: 1002.2941

4. カスタブ異常次元の厳密な計算

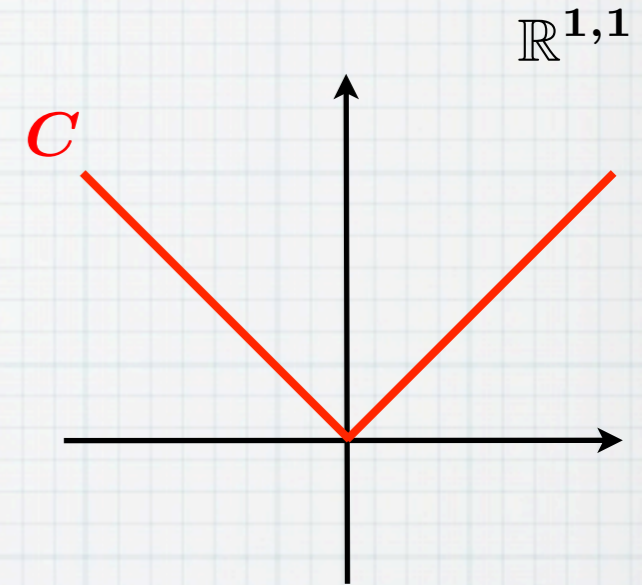
カスプ異常次元

- Wilson ラインがカスプを持つとき、その期待値は \log 型の発散を持つ

$$\log \langle W_C \rangle = -f(\lambda) \log \left(\frac{L_{\text{IR}}}{\epsilon_{\text{UV}}} \right) + \dots$$

カスプ異常次元

- $N=4$ SYM 理論におけるカスプ異常次元は**厳密に決定する方程式が知られている**



Beisert, Eden, Staudacher '06

カusp異常次元と共形次元

- 実はカusp異常次元は、ツイスト演算子と呼ばれるクラスの演算子の共形次元にも現れる

$$\mathcal{O} = \text{Tr}(D^S Z^2) + \dots$$

$$\Delta - S = f(\lambda) \log S + \dots \quad (S \rightarrow \infty)$$

- N=4 SYM 理論における単トレース演算子の共形次元は、あるスピン鎖模型のハミルトニアンを対角化することと等価であることが知られている

Minahan, Zarembo '02 etc.

- このようなハミルトニアンの対角化には Bethe 仮説法が利用できる

積分方程式 (BES 方程式)

- Beisert-Eden-Staudacher は Bethe 仮説方程式から出発して、カusp異常次元を決定する方程式を具体的に書き下した

Beisert, Eden, Staudacher '06

$$\hat{\sigma}(t) = \frac{t}{e^t - 1} \left[\hat{K}(2gt, 0) - 4g^2 \int_0^\infty dt' \hat{K}(2gt, 2gt') \hat{\sigma}(t') \right]$$

$$f(\lambda) = 16g^2 \hat{\sigma}(0) \quad g = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}$$

- 積分核は Bessel 関数によって表される (複雑)
- この積分方程式は任意の結合定数で正しい結果を与えると信じられている

- 積分方程式から決定されるカスプ異常次元の振る舞い

Beisert, Eden, Staudacher '06

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi^2} - \frac{\lambda^2}{96\pi^2} + \frac{11}{23040\pi^2}\lambda^3 - \frac{1}{4096\pi^8} \left(\frac{73\pi^6}{630} + 4\zeta(3)^2 \right) \lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5) & (\lambda \ll 1) \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} - \frac{3 \log 2}{\pi} - \frac{K}{\pi\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{3 \log 2}{\pi} K + \frac{27\zeta(3)}{32\pi} \right) \frac{1}{\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-3/2}) & (\lambda \gg 1) \end{cases}$$

Catalan 定数

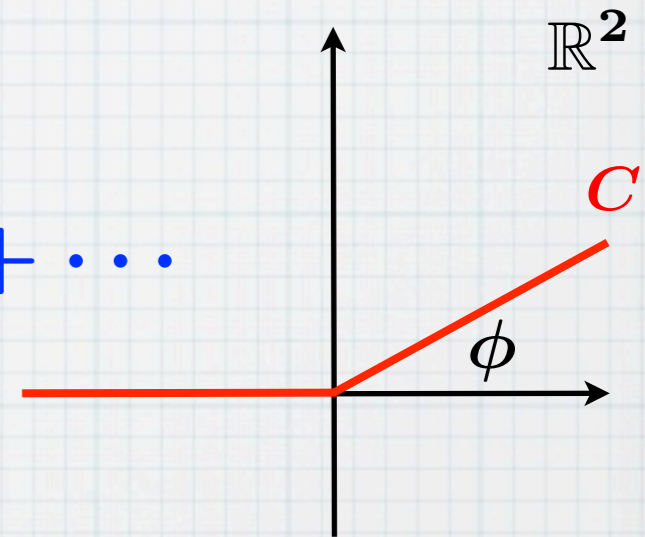
Basso, Korchemsky, Kotanski '07

- これらの結果はゲージ理論側・弦理論側で知られている結果を完全に再現した

最近の進展

- これまでは光的 Wilson ラインに現れるカusp異常次元について考えてきた
- より一般の Wilson ラインについてもカusp異常次元は定義される

$$\log \langle W_C \rangle = -\Gamma_{\text{cusp}}(\phi; \lambda) \log \left(\frac{L_{\text{IR}}}{\epsilon_{\text{UV}}} \right) + \dots$$



- 最近、このような一般化されたカusp異常次元を決定する積分方程式が予想された

Correa, Maldacena, Sever '12

- 以下では、簡単のため角度が小さい場合について解説する

Correa, Henn, Maldacena, Sever '12

一般化されたカスプ異常次元

- 角度が小さいとき $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi; \lambda)$ は以下のように振る舞う

$$\Gamma_{\text{cusp}}(\phi; \lambda) = -B(\lambda)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4)$$

- Maldacena たちは係数 $B(\lambda)$ が、円形 Wilson ループの期待値と関係づくことを発見した

Correa, Henn, Maldacena, Sever '12

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \lambda \partial_\lambda \log \langle W_\circ \rangle$$

- 円形 Wilson ループの期待値は**局所化**の方法により厳密に計算されている

Erickson, Semenoff, Zarembo '00

Drukker, Gross '00

Pestun '07

- 円形 Wilson ループの期待値：

$$\langle W_{\circ} \rangle = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda})$$



$$B(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sqrt{\lambda} I_2(\sqrt{\lambda})}{I_1(\sqrt{\lambda})}$$

- 弱結合・強結合極限での振る舞い

$$B(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{16\pi^2} - \frac{\lambda^2}{384\pi^2} + \frac{\lambda^3}{6144\pi^2} - \frac{\lambda^4}{92160\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^5) & (\lambda \ll 1) \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} - \frac{3}{8\pi^2} + \frac{3}{32\pi^2\sqrt{\lambda}} + \frac{3}{32\pi^2\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-3/2}) & (\lambda \gg 1) \end{cases}$$

- これらの結果はゲージ理論の摂動計算 [Correa, Henn, Maldacena, Sever '12] 及び、弦理論側からの予言 [Drukker, Gross, Ooguri '99] ときちんと一致した

コメント

Correa, Maldacena, Sever '12

- Correa-Maldacena-Sever は一般の角度に対するカスプ異常次元を厳密に与える積分方程式を予想した
- 導出はテクニカルなので、アイデアのみ解説する
 - ▶ Wilson ラインのカスプ上に局所演算子を挿入する
 - ▶ その局所演算子の共形次元を考える
 - ▶ 局所演算子の端は Wilson ラインと結合しているの
で、共形次元は開いたスピン鎖の対角化に対応する
 - ▶ 単トレース演算子の場合と同様の手法が利用でき、
共形次元を与える無限個の非線形積分方程式
(TBA 方程式) が得られる Gromov, Kazakov, Vieira '09
 - ▶ 最後に演算子の長さが 0 になる極限を取る

4. まとめと展望

まとめ

- N=4 SYM 理論ではある種の物理量は弱結合から強結合にわたる全領域での振る舞いを知ることが可能
- カスプ異常次元はそのような「良い」物理量の一つ
- グルーオンの散乱振幅は光的多角形 Wilson ループと関係付く
- 強結合における散乱振幅は AdS 空間の極小曲面の面積として与えられ、境界条件はグルーオンの運動量から決まる
- 極小曲面の面積自体は、解の形を知らなくても、ある2次元可積分模型の積分方程式を解くことで計算可能

展望

- 強結合の解析・・・極小曲面が AdS5 にある場合

- ▶ 積分方程式は既知

Alday, Maldacena, Sever, Vieira '10

- ▶ どのような可積分模型が対応するのか不明

- ▶ ホログラフィック相関関数の計算においても、似たような取り扱いが可能

Janik, Wereszczynski '11

Kazama, Komatsu '11

小松さんの講演

- 最終的な目標

$$\log \mathcal{A}_{n \geq 6}(\lambda) = \log \mathcal{A}_{\text{BDS}}(\lambda) + R(\lambda)$$

結合定数に依らず決定する方程式を見つけない