基研研究会「場の理論と弦理論2012」23-27 July 2012 基礎物理学研究所

Virasoro Constraint for Nekrasov partition function

東大理 菅野正一

arXiv:1207.5658

共同研究者 松尾泰、張弘（東大理）

①イントロダクションと要旨

AGT-W関係式

D=4,N=2 ゲージ理論の Nekrasov分配関数 = W代数の 共形ブロック

が特にクイバーの場合に成立するか知りたい

但し今回の対象はSU(N)のみのクイバー

Nekrasov公式は各instantonの寄与の和で書かれる

$$Z^{\rm Nek}=\sum_{\vec{Y}^{(1)},\cdots,\vec{Y}^{(n)}} q_i^{|\vec{Y}^{(i)}|}\bar{V}_{\vec{Y}^{(1)}}\cdot Z_{\vec{Y}^{(1)}\vec{Y}^{(2)}}\cdots Z_{\vec{Y}^{(n-1)}\vec{Y}^{(n)}}\cdot V_{\vec{Y}^{(n)}}$$

$$Z_{\vec{Y}^{(i)}\vec{Y}^{(i+1)}}=Z(\vec{a}^{(i)},\vec{Y}^{(i)};\vec{a}^{(i+1)},\vec{Y}^{(i+1)};\mu^{(i)})=\sqrt{z_{vect}(\vec{a},\vec{Y})z_{vect}(\vec{b},\vec{W})}\,z_{\rm bifund}(\vec{a},\vec{Y};\vec{b},\vec{W};\mu)$$

$$\bar{V}_{\vec{Y}^{(1)}}=Z(\vec{\lambda},\vec{\emptyset};\vec{a}^{(1)},\vec{Y}^{(1)};\mu^{(0)})\qquad V_{\vec{Y}^{(n)}}=Z(\vec{a}^{(n)},\vec{Y}^{(n)};\vec{\lambda}',\vec{\emptyset};\mu^{(n)})$$

Question：CFTの相関関数の展開で

中間状態 $|\vec{Y}\rangle$ の寄与 ⟺ インスタントン $\vec{Y}$ の寄与

となる状態は何か

行ったこと

インスタントンに対応する状態 $|\vec{Y}\rangle$ を与え

$$\langle\vec{Y}|V_{\vec{\kappa}}|\vec{W}\rangle=Z_{\vec{Y}\vec{W}}$$

であることをVirasoro × U(1)のWard恒等式を元に検証

その結果Nekrasov公式に対するVirasoro conatraint

$$\sum_{\vec{Y}',\vec{W}'}(\hat{J}_n)_{\vec{Y},\vec{W}}^{\vec{Y}',\vec{W}'}Z_{\vec{Y}',\vec{W}'}=0\qquad\sum_{\vec{Y}',\vec{W}'}(\hat{L}_n)_{\vec{Y},\vec{W}}^{\vec{Y}',\vec{W}'}Z_{\vec{Y}',\vec{W}'}=0$$

を得た

②W(1+∞)代数の表現と主張の定式化

W(1+∞)代数

高階微分演算子 $z^mD^n(D=z\frac{\partial}{\partial z},\ m\in\mathbb{Z},\ n=0,1,2,\cdots)$ の量子化

z^mD^n に対応する演算子を $W(z^nD^m)$ 　 $W(z^ne^{xD})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}W(z^nD^m)$

交換関係

$$[W(z^ne^{xD}),W(z^me^{yD})]=(e^{mx}-e^{ny})W(z^{n+m}e^{(x+y)D})-C\frac{e^{mx}-e^{ny}}{e^{x+y}-1}\delta_{n+m,0}$$

特に

$J_n=W(z^n)$ 　U(1) カレント

$L_n=-W(z^nD)-\frac{n+1}{2}W(z^n)$ 　中心電荷 C のVirasoro

Free fermion representation (C=N , unitary)

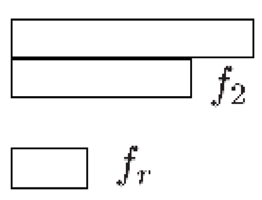
$$W(z^ne^{xD})=\sum_{i=1}^N\oint\frac{dz}{2\pi i}z^n:b^{(i)}(z)e^{xD}c^{(i)}(z):=\sum_{i=1}^N\left(\sum_{r+s=n}e^{x(\lambda_i-s)}\ :b_r^{(i)}c_s^{(i)}:-\frac{e^{\lambda_ix}-1}{e^x-1}\delta_{n,0}\right)$$

$$b^{(i)}(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}b_r^{(i)}z^{-r-\lambda_i-1}\quad c^{(i)}(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}c_r^{(i)}z^{-r+\lambda_i}\quad b^{(i)}(z)c^{(j)}(w)\sim\frac{\delta_{ij}}{z-w}$$

最高ウェイト状態 $b_{r\geq0}^{(i)}|\lambda\rangle=c_{s>0}^{(i)}|\lambda\rangle=0$

Hilbert空間にはYoung図でラベルされる直交基底がある

$Y_i=[f_1^{(i)},\cdots,f_r^{(i)}]\ \ (f_1^{(i)}\geq\cdots\geq f_r^{(i)}\geq1)$ に対し



$$|\vec{Y},\lambda\rangle=\prod_{i=1}^N b_{-\bar{f}_1^{(i)}}^{(i)}b_{-\bar{f}_2(i)}^{(i)}\cdots b_{-\bar{f}_r^{(i)}}^{(i)}c_{-r+1}^{(i)}\cdots c_{-1}^{(i)}c_0^{(i)}|\lambda\rangle$$

$\bar{f}_j^{(i)}=f_j^{(i)}-j-1$

インスタントンに対応する状態

Our proposition

$$\boxed{Z(-\vec{a},\vec{Y};-\vec{b},\vec{W};\mu)=\langle\vec{Y},\vec{a}+\nu\vec{e}|V_\kappa(1)|\vec{W},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle}$$

$\vec{e}=(1,1,\cdots,1)$ 　　ν :任意パラメータ

$V_\kappa(1)$ 　:運動量 $(\kappa,0,\cdots,0)$ に対応する頂点演算子

$$\kappa=\sum_i(b_i-a_i-\mu)$$ 　U(1)チャージ保存

remark

(1)自由場表示を用いているので、相関関数を定義する際に遮蔽演算子

$$S_{pq}=\int_C d\zeta b^{(p)}(\zeta)c^{(q)}(\zeta)$$

を入れる自由度が存在し、等式が成立するためには適切な遮蔽演算子の挿入が必要である。
しかし以下では代数の作用のみに注目するので省略する(遮蔽演算子は全ての生成子と可換)

(2)今回の議論は自由fermion表示を用いているためオメガ背景のパラメータが $\beta=-\epsilon_2/\epsilon_1=1$ の場合しか適用できない

③Virasoro constraintの検証

Ward 恒等式

$$0=(\langle\vec{Y},\vec{a}+\nu\vec{e}|\mathcal{W}(z^nD^p))V_\kappa(1)|\vec{W},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle$$
$$-\langle\vec{Y},\vec{a}+\nu\vec{e}|V_\kappa(1)(\mathcal{W}(z^nD^p)|\vec{W},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle)$$
$$-\langle\vec{Y},\vec{a}+\nu\vec{e}|[\mathcal{W}(z^nD^p),V_\kappa(1)]|\vec{W},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle$$

先のproposalを当てはめてVirasoro × U(1)に対してNekrasov公式が恒等式を満たすかチェックする。

⟶ Nekarasov公式に対するVirasoro constraint

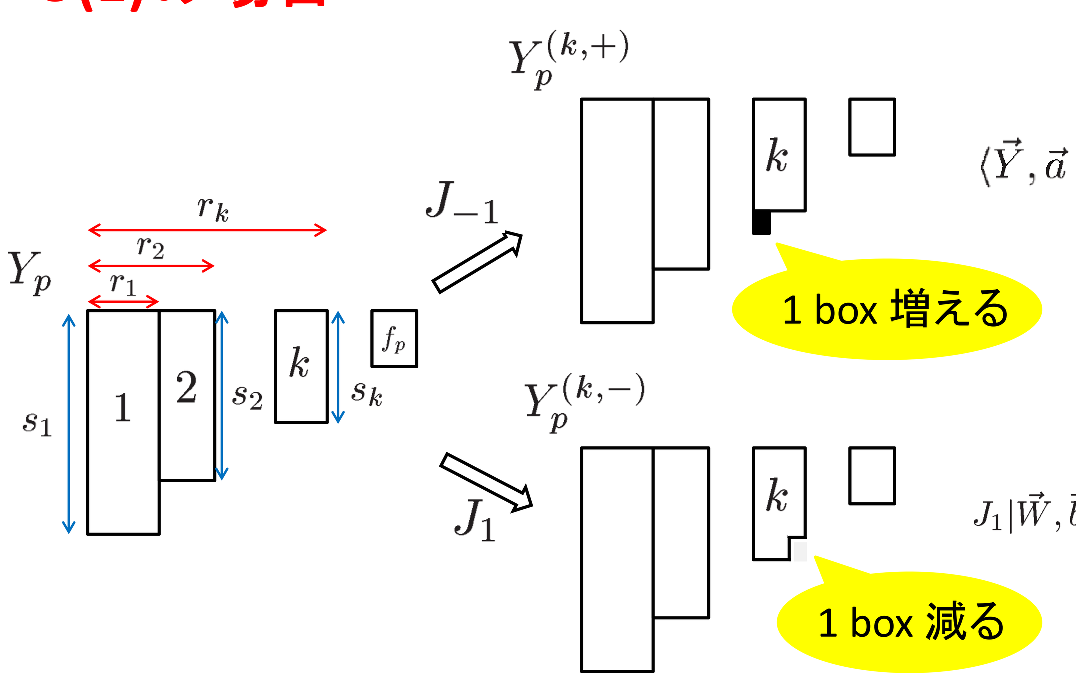
$J_{\pm1}$ $L_{\pm1}$ $L_{\pm2}$ について調べれば十分（他は代数から生成できる）

代数の状態への作用

$W(z^nD^m)$ 　長さ n のフック  を加える(n<0)/減らす(n>0)

● あらゆる可能な増加/減少について和をとる　● m>0では適切な係数がつく

U(1)の場合



$$\langle\vec{Y},\vec{a}+\nu\vec{e}|J_1=\sum_{p=1}^N\sum_{k=1}^{f_p+1}\langle\vec{Y}^{(k,+),p},\vec{a}+\nu\vec{e}|$$

$$[J_1,V_\kappa(1)]=\kappa V(1)$$

$$J_1|\vec{W},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle=\sum_{q=1}^N\sum_{l=1}^{\bar{f}_q}|\vec{W}^{(l,-),q},\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}\rangle$$

J_1 に対するconstraint

$$Q(\vec{Y}',\vec{W}';\vec{Y},\vec{W})\equiv\frac{Z(-\vec{a},\vec{Y}';-\vec{b},\vec{W}';\mu)}{Z(-\vec{a},\vec{Y};-\vec{b},\vec{W};\mu)}$$

$$\sum_{p=1}^N\sum_{k=1}^{f_{p+1}}Q(\vec{Y}^{(k,+),p},\vec{W};\vec{Y},\vec{W})-\sum_{q=1}^N\sum_{k=1}^{\bar{f}_p}Q(\vec{Y},\vec{W}^{(k,-),p};\vec{Y},\vec{W})=\kappa$$

計算すると確かに成立する（ J_{-1} も同様）

Virasoroの場合

L_1 に対する式は以下のようになる。これも成立が確認される

$$-\sum_{p=1}^N\sum_{k=1}^{f_{p+1}}(a_p+\nu+s_k^{(p)}-r_{k-1}^{(p)})Q(\vec{Y}^{(k,+),p},\vec{W};\vec{Y},\vec{W})+\sum_{q=1}^N\sum_{k=1}^{\bar{f}_p}(b_q+\nu-\mu+u_l^{(q)}-t_l^{(q)})Q(\vec{Y},\vec{W}^{(k,-),p};\vec{Y},\vec{W})$$
$$=(\frac{1}{2}|\vec{a}+\nu\vec{e}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{e}|^2+\frac{1}{2}\kappa^2+|\vec{Y}|-|\vec{W}|)$$

L_{-1} $L_{\pm2}$ も同様に示せる(詳しくは論文参照)

補足：U(1)とVirasoroに対するWard恒等式は適当な変数の取り換えでそれぞれ以下の式と等価になる

$$\sum_I\frac{\prod_J x_I+y_J}{\prod_{J\neq I}x_I-y_J}=\sum_I(x_I+y_J)\qquad\sum_I x_I\frac{\prod_J x_I+y_J}{\prod_{J\neq I}x_I-y_J}=\sum_{I<J}y_Iy_J+\sum_{I,J}y_Ix_J+\sum_{I<J}x_Ix_J+\sum_I x_I^2$$

変数の取り方や数はYoung図の形状、対象とした生成子に依存する

④今後の展望

議論をW(1+∞)全体に拡張 ⟵ 交換子の計算に技術的困難あり

任意のオメガ背景への拡張 ⟵ より一般の表現や代数の変形を考える必要性あり