Renormalization group approach to matrix models via noncommutative space[1]

立教大学理学部物理学科 黒木経秀

E-mail: tkuroki@rikkyo.ac.jp

$N \times N$ 行列模型の large-N 極限の新しい解析法として、非可換幾何を用いて行列成分にエネルギーの概念を付与し、それに基づき高エネルギー成分を積分して $(N-1)\times(N-1)$ 行列模型を得る手続きを繰り込み群と見なし、その固定点の解析によって large-N 極限での臨界指数等を得る手法を提案する。この手法により、fuzzy sphere 上、あるいは非可換平面上の場の理論に対し、ガウス固定点の他に非自明な固定点の存在、およびそこでの非自明な臨界次元が予言されることを示す。

量子重力理論は large-N ゲージ理論ないし large-N 行列模型によって非摂動的に定式化されると広く信じられており、実際いくつかの提案がなされている [2]-[5]。しかしこれらの模型は厳密な意味ではまだ定義されていない。$N \to \infty$ 極限を取る際、理論の結合定数 g を N とともにどのように臨界点 g_c に近づけたら良いか、いわゆる double scaling limit の取り方が分かっていないからである。特に弦理論の結合定数 g_s に関し非摂動的に理論を定義する極限の取り方が判明していない。この理由の一つに、複数個の $N \times N$ 行列を持つ理論の large-N 極限の解析法の乏しさがある。しかし例えば double scaling limit の取り方を知るには、2 次元重力などの経験によれば string susceptibility のような、ある種の臨界指数が分かればよいと期待される。このような臨界指数を知るには模型を完全に解く必要はなく、何らかの繰り込み群的なアプローチによって情報が得られることが期待される。そのような新しい手法を開発することがこの研究の目的である。

このような手法として、$N \times N$ 行列模型に対し、1 行 1 列を積分し、その結果を改めて $(N-1)\times(N-1)$ 行列模型として表す変換を繰り込み群と見なし、その変換の固定点の解析によって、2 次元重力の臨界指数などが求まることが知られている [6] 。このようなアプローチは large-N 繰り込み群と呼ばれている。しかし臨界弦理論の非摂動的定式化として近年提唱された行列模型 [2]-[5] においては、行列は明確な時空解釈を持っている。例えば行列の対角成分は時空の点、非対角成分はそれをつなく open string の自由度を表している。そこで単に 1 行 1 列でなく、行列成分の時空解釈に基づきエネルギーの概念を付与し、それに従って高エネルギー成分から積分して繰り込み群を構成するアプローチの方が、このような行列模型の large-N 極限の解析には適していると考えられる。一旦このような定式化ができれば、構成から繰り込み変換がある意味で局所的であり、性質のよいものになっていることが期待される。

この動機に基づき、fuzzy sphere の構造を用いて $N \times N$ 行列成分に対しエネルギーの概念を付与し、高エネルギー成分から積分する新しい large-N 繰り込み群を提唱する。具体例として、$N \times N$ one-matrix model

$$S_N = \frac{\rho_N^2}{N} \mathrm{tr}_N \left(-\frac{1}{2\rho_N^2}[L_i, \phi]^2 + \frac{m_N^2}{2}\phi^2 + \frac{g_N}{4}\phi^4 \right), \tag{1}$$

[1] 河本祥一氏、富野弾氏との共同研究 [1].

を考える。ここで L_i $(i = 1 \sim 3)$ は $SU(2)$ の spin $L = \frac{N-1}{2}$ 表現であり、S_N は S^2 上の ϕ^4 理論の行列正則化と見なせる。ρ_N は S^2 の半径に相当する。我々の新しい large-N 繰り込み群のポイントは、$N \times N$ 行列の空間に、正規直交基底 T_{lm} $(0 \le l \le 2L = N-1, -l \le m \le l)$ が存在し、

$$\phi = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-l}^{l} \phi_{lm} T_{lm}, \tag{2}$$

と展開できることである。これは S^2 上の関数を球面調和関数によって展開できる事実の行列版であり、実際 $N \times N$ 行列 T_{lm} は球面調和関数を x^i $(i = 1 \sim 3)$ で展開し、各 x^i をそれぞれ (1) に現れた spin L 表現の角運動量演算子 L_i に置き換えることによって得られる。この空間は座標 x^i が L_i に置き換わっており非可換空間であり、$N \to \infty$ 極限で通常の S^2 上の関数の空間を再現するため、fuzzy sphere と呼ばれている。半径 ρ の fuzzy sphere は $x^i = \alpha L_i$、ただし $\alpha = \rho\sqrt{\frac{4}{N^2-1}}$ とすれば ${x^i}^2 = \rho^2$ として実現され、このとき $[x^i, x^j] = i\alpha\epsilon_{ijk}x^k$ より α が fuzzy sphere の持つ非可換性と解釈される。すると上に述べた展開 (2) により、行列成分に対し角運動量 l, 磁気量子数 m の概念が自然に付与されることが分かる。従って高エネルギーモード、すなわち運動項 $[L_i, \phi]^2$ に関し最大値を持つ $\phi_{2L\,m}$ $(-2L \le m \le 2L)$ のみ積分し、得られた結果を $(N-1) \times (N-1)$ 行列として書き直す、という新しい large-N 繰り込み群が構成できる:

$$S_{N-1}(m_{N-1}^2, g_{N-1}) = -\log \int \prod_{m=-2L}^{2L} d\phi_{2L\,m}\, e^{-S_N(m_N^2, g_N)}, \tag{3}$$

この結果得られた変換 $(m_N^2, g_N) \to (m_{N-1}^2, g_{N-1})$ は局所的で性質が良く、その固定点の情報により、(1) の large-N 極限での臨界指数など普遍的な量が得られると期待される。これが我々の提唱する新しい large-N 繰り込み群である。

この変換 (3) を具体的に実行すると、以下のような著しい性質を持つことが分かった:

1. 非可換性は繰り込まれる。(3) 右辺を実行した結果が、改めて $(N-1) \times (N-1)$ 行列の自然な積や trace で表されることは必ずしも自明ではない。非可換性 $\alpha \sim \frac{2\rho}{N}$ は vertex に入っている。実際 $\mathrm{tr}_N \phi^4$ vertex を成分で表すと、entry に $2L = N-1$ を持つ $6j$-symbol が現れる。しかし少なくとも低エネルギー成分 $l \ll 2L$ に関する限り、$6j$-symbol における L 依存性をすべて $2(L - \frac{1}{2}) = N-2$ で表すことができる。すなわち $\mathrm{tr}_{N-1}\widetilde{\phi}^4$ の形に表すことができる。ここで $\widetilde{\phi}$ はもとの ϕ のうち積分されずに残った $l < 2L$ の成分を改めて $(N-1) \times (N-1)$ 行列にまとめ直したもの: $\widetilde{\phi} = \sum_{l=0}^{N-2} \sum_{m=-l}^{l} \phi_{lm} \widetilde{T}_{lm}$ である。ここで $\widetilde{T}_{lm}$ は spin $L - \frac{1}{2}$ 表現での fuzzy sphere の generator である。

2. 一般には double trace operator が生成される。例えば (3) の $\mathcal{O}(g_N^2)$ の寄与から double trace operator が出ることが容易に分かる。場の理論の繰り込み群でもこのオーダーで一般には bilocal interaction $g^2 \int dx \int dy \phi^2(x) \phi^2(y) \Delta(x-y)^2$ が生じる。しかし我々が知っていることは、もし $\Delta(x-y)$ が十分高エネルギーの propagator ならば、$x - y$ が大きくなるとすみや

かに減衰するため、y を x の周りで展開できることが正当化され、この項は local interaction およびその微分展開として表されることである。実は我々の large-N 繰り込み群においても、低エネルギー $l \ll 2L$ では $6j$-symbol の漸近展開から同様のことが成立する。すなわち double trace operator は single trace operator およびその「微分展開」の和で書けることが示される。ここで微分展開は fuzzy sphere が回転対称性を保っていることを反映してすべて $[L_i, [L_i, \cdot]]$ の形で現れる。すなわち行列の空間においても微分展開のような展開を持つ。

3. nonplanar diagram は行列の空間における"nonlocal" operation を含む項を生成する。$\mathcal{O}(g_N^2)$ までに現れるすべての nonplanar diagram を $(N-1)\times(N-1)$ 行列模型として表すと、行列 ϕ に対する"antipode"変換

$$\phi = \sum_{l,m} \phi_{lm} T_{lm} \quad \mapsto \quad \phi^A \equiv \sum_{l,m} (-1)^l \phi_{lm} T_{lm}, \tag{4}$$

によって得られる"antipode"行列 ϕ^A を用いないと表せない項が生じる。これは球面調和関数では対蹠点に移る変換 $Y_{lm}(\theta,\varphi) \mapsto (-1)^l Y_{lm}(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\pi-\theta, \varphi+\pi)$ に相当しており、nonlocal な変換である。このことは高エネルギー成分の積分によって nonlocal な項が生成されることを意味しており、UV/IR mixing の一つの表れと見なせる.。

さらに large-N 繰り込み群の固定点における operator の scaling 次元を同定した。通常の繰り込み群では block spin 変換後、元の lattice spacing を回復させるために $b=\sqrt{2}$ 倍のエネルギースケール変換を行う。また、固定点の周りの operator の scaling 次元は、繰り込み変換を固定点近傍で線形化したときの固有値が b の何乗になるかで決まる。これと同様に、(3) によって fuzzy sphere の非可換性 $\alpha_N \simeq \frac{2\rho_N}{N}$ が $\frac{N}{N-1}$ 倍されるので、元の非可換性が回復するよう、$\rho_{N-1} = (1-\frac{1}{N})\rho_N$ とする。すなわち $b = 1+\frac{1}{N}$ となる。$b^d \simeq 1+\frac{d}{N}$ だから、large-N 繰り込み群の固定点近傍での固有値の 1 からの $\mathcal{O}(1/N)$ のずれを見ることにより、その固定点で存在する operator の scaling 次元が読み取れると思われる。これが我々が提唱する新しい large-N 繰り込み群における scaling 次元の読み取り方である。また、非可換平面上の場の理論は $\theta = \frac{2\rho^2}{N}$ を固定して $N\to\infty$ 極限を取ることにより得られることが知られているので [7]、$\frac{\rho_{N-1}^2}{N-1} = \frac{\rho_N^2}{N}$、すなわち $b = 1+\frac{1}{2N}$ となる。

我々が得た繰り込み群方程式は

$$\begin{aligned}
&m_{N-1}^2 = b_N^2 \left(m_N^2 + g_N B_1(N,m_N^2) - \rho_N^2 g_N^2 B_1(N,m_N^2) B_2(N,m_N^2)\right),\\
&g_{N-1} = b_N^2 (g_N - \rho_N^2 g_N^2 B_2(N,m_N^2)),\\
&B_1(N,m_N^2) = 2(2N-1)P_N, \quad B_2(N,m_N^2) = 2(2N-1)P_N^2, \quad P_N = \frac{1}{N(N-1)+\rho_N^2 m_N^2},
\end{aligned} \tag{5}$$

である。ただし nonplanar diagram の寄与は必ず元の action になかった antipode 行列を含むため、これらの寄与はすべて無視した。Gaussian fixed point $m_* = g_* = 0$ は当然存在し、その周りの繰り込み変換 (5) の固有値はともに b^2 となって、我々の proposal によると m^2, g の scaling 次元は 2 となって、2 次元場の理論の canonical dimension が得られる。これは Gaussian fixed point では

Laudau 理論、ないし平均場近似の結果が厳密であることを実現している。また、Wilson-Fisher 的な nontrivial fixed point も存在することが分かる:

$$m_*^2 = -\frac{N(N-1)}{\rho_N^2}\frac{b_N^2(\frac{c(N)}{c(N-1)}b_N^2-1)}{\frac{c(N)}{c(N-1)}b_N^4-1}, \quad g_* = \frac{N^2(N-1)^2}{2(2N-1)}\frac{\frac{c(N)}{c(N-1)}b_N^2-1}{c(N)\rho_N^2}\left(\frac{b_N^2-1}{\frac{c(N)}{c(N-1)}b_N^4-1}\right)^2, \tag{6}$$

ここで nontrivial fixed point ではもとの行列 ϕ が非自明な scaling dimension を持ちうるため、その kinetic term が canonical になるように (3) の large-N 繰り込み群を行ったとする: $S_{N-1} = \frac{\rho_{N-1}^2}{N}\mathrm{tr}_{N-1}\left(-\frac{1}{2\rho_{N-1}^2}[\widetilde{L}_i,\widetilde{\phi}]^2+\cdots\right)$, その代わり g_N が nontrivial な N 依存性を持ちうることを考慮に入れ、$g_N \to c(N)g_N \sim cN^a g_N$ とした。この時 a は有限の固定点が得られるように定める。そうすると fuzzy sphere 上の場の理論極限 $\rho_N^2 \simeq N^2\alpha^2/4$ では $a=0$ として固定点が $(m_*^2, g_*) = (-\frac{2}{\alpha^2}, \frac{1}{2c\alpha^2})$ となり、その周りの scaling 次元は $\delta m^2 : 0$, $\delta g : -2$ となる。一方非可換平面上の場の理論極限 $\rho_N^2 = N\theta/2$ では $a=1$ として固定点が $(m_*^2, g_*) = (-\frac{4N}{3\theta}, \frac{1}{9c\theta})$ となり、m_*^2 は $N\to\infty$ で発散するものの、g_* は有限にとどまる。また、scaling 次元は $\delta m^2 : -2$, $\delta g : -4$ となることが分かり、非常に非自明な結果が得られた。しかしこれらは antipode matrix を含む寄与、すなわち nonplanar diagram の寄与をすべて落とした下での結果であることに注意する。また、特に large-ρ_N^2 limit では (6) から

$$m_*^4 = \frac{2(2N-1)}{b_N^2-1}\frac{g_*}{\rho_N^2}, \tag{7}$$

の関係があることが分かり、これらは fixed point がなす関係式であり、何らかの phase transition line を表していることが予想されるが、実際 disordered-matrix phase transition line [8] に非常に良く一致しており、我々の large-N 繰り込み群の正しさを支持している。

References

[1] S. Kawamoto, T. Kuroki and D. Tomino, arXiv:1206.0574 [hep-th] to appear in JHEP.

[2] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55** (1997) 5112.

[3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498** (1997) 467.

[4] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500** (1997) 43.

[5] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

[6] E. Brezin and J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B **288**, 54 (1992).

[7] C. -S. Chu, J. Madore and H. Steinacker, JHEP **0108**, 038 (2001).

[8] X. Martin, JHEP **0404** (2004) 077.