On the double-brane solution in open string field theory

東京大学大学院総合文化研究科 増田暢
E-mail: masudatoru@gmail.com

Witten の開弦の場の理論において、村田氏と Schnabl 氏により提案されている多重ブレーン解の正当化を目指す。もっとも簡単な二重ブレーン解をある方法で正則化した場合に、運動方程式が満たされ、D ブレーン 2 枚分のエネルギーが再現された。ところが、ゲージ不変量については期待されているものが得られなかった。

2005 年に Schnabl 氏はタキオン真空を表す厳密解を構成した [1]。このとき氏の用いた手法は、厳密解を構成するための新しい技術をもたらした。特に彼のアイデアを簡略化し大川氏により得られた KBc 部分代数[1]は有用な道具である [2]。これは K, B, c という（それら自身はやや特異な）3 つの弦の場のスター積および和を取ることで作られる弦の場全体からなる。K, B, c は次の簡潔な代数をなす（以下、スター積の記号 $*$ を省略する）：

$$B^2 = c^2 = 0\,, \quad \{B, c\} = 1\,, \quad QB = K\,, \quad Qc = cKc\,, \quad [K, B] = 0\,. \tag{1}$$

これに基本的な相関関数 $\langle e^{Kx} c e^{Ky} c e^{Kz}\rangle$ および $\langle Bce^{Kw} ce^{Kx} ce^{Ky} ce^{Kz}\rangle$ の公式を合わせれば、（たとえばタキオン真空解のエネルギー密度などの）基本的な計算を行うのに十分である。特に、K, B, c のみを用いて次の形式解を書き下すことができる [2]:

$$\Psi = F(K)c(K/G(K))BcF(K), \quad G(K) = 1 - F(K)^2. \tag{2}$$

(1) を用いて、(2) が運動方程式 $Q\Psi + \Psi\Psi = 0$ を満足することが確認できる。ただし、形式解 (2) が物理的なものと見なせるか否かについては $F(K)$ の選び方に応じてそれぞれ議論する必要がある。解が物理的なものであるための基準が完全に理解されているわけではないが、少なくともエネルギーなどの物理量が曖昧さなく有限値に確定することが必要と考えられる。エネルギーの計算を上記の相関関数に基づいて行うために、ここでは $F(K)$ および $K/G(K)$ は e^{Kx} の重ね合わせであると仮定する。

2010 年に村田氏と Schnabl 氏は、解析接続等の議論を用いて (2) の解のエネルギーを一般的に表す公式を導出した [3]。彼らの議論によると、$G(z) = 1 - F(z)^2$ が適当な正則性条件を満たし、$z = 0$ で n 次の零点あるいは $-n$ 位の極をもてば、Ψ のエネルギーは $E = -n/(2\pi^2)$ である。特に、次は D ブレーン 2 枚分のエネルギーをもつと予想される:

$$\Psi = (1/K)c(K^2/(K-1))Bc. \tag{3}$$

ここで $1/K$ は以下の積分（あるいはそれを正則化したもの）とされる:

$$\frac{1}{K} = -\int_0^\infty e^{Kx}. \tag{4}$$

[1]本稿に関連する論文には、大きく分けて Schnabl 氏の notation を用いるもの [1][3][4] と大川氏の notation を用いるもの [2][5][6] の 2 種類がある。本稿は大川氏の notation に基づいている。詳しくは、文献 [2] の第二章冒頭を参照。

しかし、この二重ブレーン解が物理的な解であるかはまだ明らかでない。実際、解析接続などを用いずにそのままエネルギーを評価すると $1/K$ に由来する多重積分は不確定になり、値は定まらない。そこで、畑氏と小路田氏 [4] および村田氏と Schnabl 氏 [3] により提案されたのは、解に含まれる全ての K を $K-\epsilon$ に置き換えるという正則化であった。この方法の下で二重ブレーン解はエネルギーとゲージ不変量については期待された値を再現する。しかし、$Q\Psi+\Psi\Psi \sim (\pi/2)c_1c_0|0\rangle+\ldots$ という形で、運動方程式が破れてしまう [3]。

我々は運動方程式が満たされるように[2]別の正則化を構成した [6]。次のような収束因子を考える。

$$R(\Lambda,x)=1-\log_{\Lambda+1}(x+1) \qquad (0\le x\le \Lambda)$$

部分積分を用いた議論から、被積分関数 $f(x,y)$ が適当な条件[3]を満たす場合に次が成り立つ:

$$2\int_0^\Lambda dxR(\Lambda;x)\int_0^\Lambda dyR(\Lambda;y)f(x,y)=\int_0^\infty dy\left(\int_0^\infty dxf(x,y)\right)+\int_0^\infty dx\left(\int_0^\infty dyf(x,y)\right).$$

右辺の二重積分は 2 つの積分を順に行ったものである。この $R(\Lambda;x)$ を用いて (5) の積分を正則化する。運動方程式の破れは $c_1c_0|0\rangle$, $c_1c_{-1}|0\rangle$ に比例する成分だけ残るが、それも補正項 φ_p を加えることによって消去できる。得られた解 (5) は D ブレーン 2 枚分のエネルギーを再現する。

$$\Psi=-\int_0^\Lambda dxR(\Lambda;x)e^{Kx}c\frac{K^2B}{K-1}c+\varphi_p \tag{5}$$

ところが、このように正則化した解は期待されたゲージ不変量と境界状態を再現しなかった。（文献 [5] 及び野海氏の講演を参照）これは解が D ブレーン 2 枚の背景を表すという主張に矛盾する。ただ、これらの量の計算は多重ブレーン解の場合に正当化できるか明らかではない仮定の下で行われており、また極限操作の微妙な問題も含んでいるため、明確な否定には至っていない。この辺りの問題を整理することが、多重ブレーン解について結論を得るために必要である。

References

[1] M. Schnabl, Adv. Theor. Math. Phys. **10**, 433 (2006) [arXiv:hep-th/0511286].

[2] Y. Okawa, JHEP **0604** (2006) 055 [arXiv:hep-th/0603159].

[3] M. Murata and M. Schnabl, JHEP **1207**, 063 (2012) [arXiv:1112.0591 [hep-th]].

[4] H. Hata and T. Kojita, JHEP **1201**, 088 (2012) [arXiv:1111.2389 [hep-th]].

[5] T. Masuda, T. Noumi and D. Takahashi, arXiv:1207.6220 [hep-th].

[6] T. Masuda, *to appear.*

[2] より正確には、解 (5) は Fock 空間の元および解自身と内積した運動方程式を満足する。

[3] $\partial_x\partial_y F(x,y)=f(x,y)$ なる $F(x,y)$ で、$\hat{F}(a)\equiv\lim_{\Lambda\to\infty}F(\Lambda,a\Lambda)$ が $0\le a\le\infty$ で連続となるものが存在するなどの条件をおく。