# Central Charges for BCFTs and Holography

基礎物理学研究所
素粒子論グループ
野崎　雅弘

YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

高柳 匡氏と 宇賀神 知紀氏との共同研究
(arXiv:1205.1573, JHEP 1206 (2012) 066)に基づく。

2012/7/27 基研研究会「場の理論と弦理論」

- Holography原理に基づいて、物性理論や量子情報理論等への応用が盛んに行われている。
- 様々な系に対して、AdS/CFT対応が調べられてきている。

しかし、

- Holography原理自体はまだ良く理解されていない。

- 境界を持つCFT(BCFT)に対応する重力双対を考える。

  その様な対応があるのか？、重力双対の構成法等

- この様な境界を持つCFTを考える意義

  物性系への応用(Topological 絶縁体)

  Holography 原理の深い理解

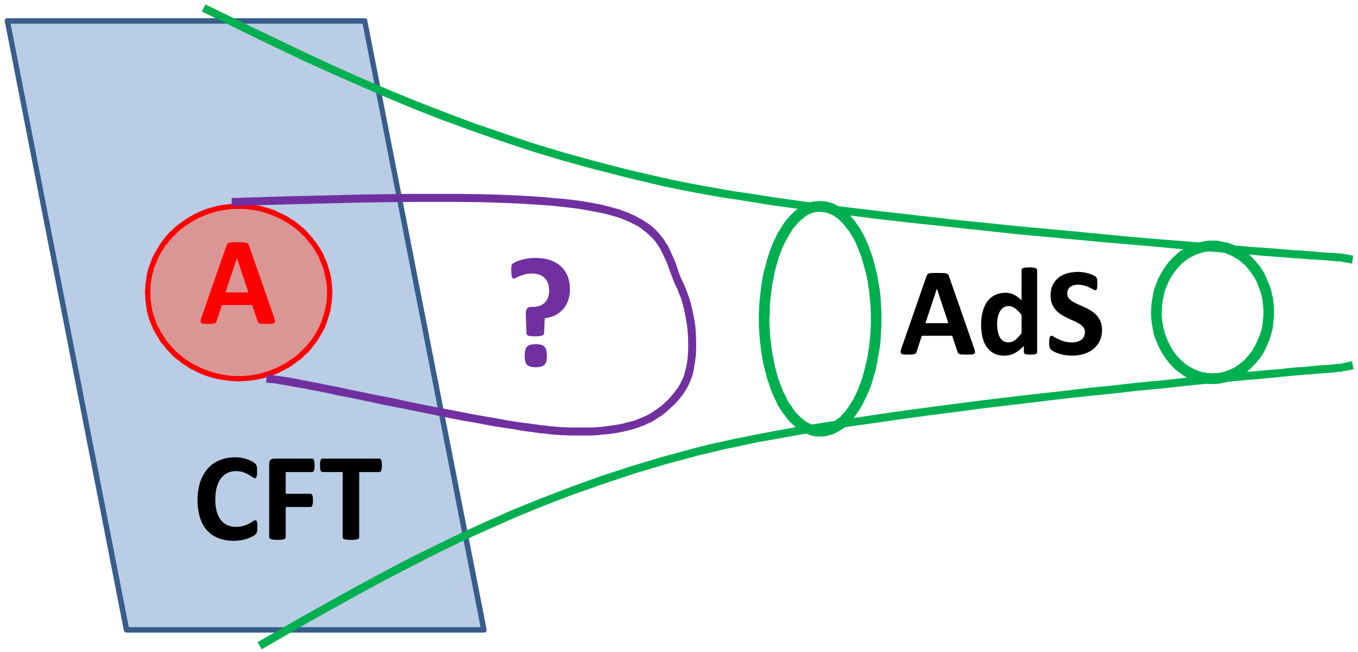
境界を持つBCFTとその重力双対との対応への理解

⬇

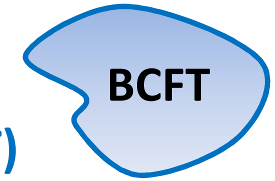
| CFTのある部分の情報 | ⟷ 対応 | 重力双対のある部分の情報 | への理解 |
|---|---|---|---|

⬇

Holography原理の更なる理解につながるのでは?



## • BCFTについて




境界を持つ多様体M上のCFT ＝ **BCFT (Boundary CFT)**

偶数次元、特に二次元CFTでは、その分配関数 $Z$ の対数関数には、

$$\boxed{-\log Z = \frac{c}{6}\chi(M)\cdot\log\frac{L}{\epsilon}}$$

という対数発散の項が現れる。

$\left(\begin{array}{l} L\text{: 系の大きさ、}\epsilon\text{ : 短距離の UVカットオフ} \\ c\text{: central charge、}\chi(M)\text{: Euler数} \end{array}\right)$

$$\boxed{\text{対数発散の係数} \propto \chi(M)}$$

BCFTでは境界があるため、一般にこれを反映して $\chi(M)$ は変更されると期待される:

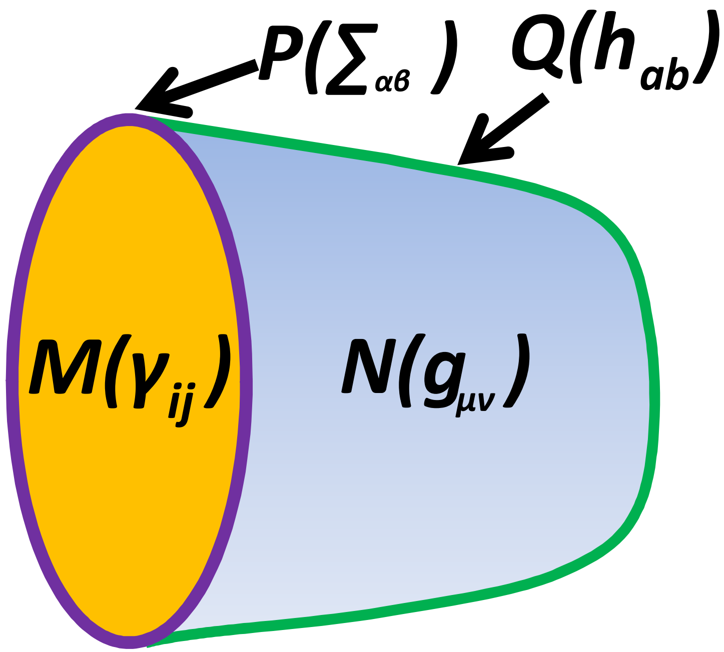
$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_M \sqrt{g}R + 2\underbrace{\int_{\partial M}\sqrt{h}K}_{\text{境界の効果による項}}\right)$$

**AdS/BCFT対応**においても、この様に境界の効果による項が現れる事を確かめた。

- ***AdS/BCFT対応について***

境界Pを持つ多様体M →

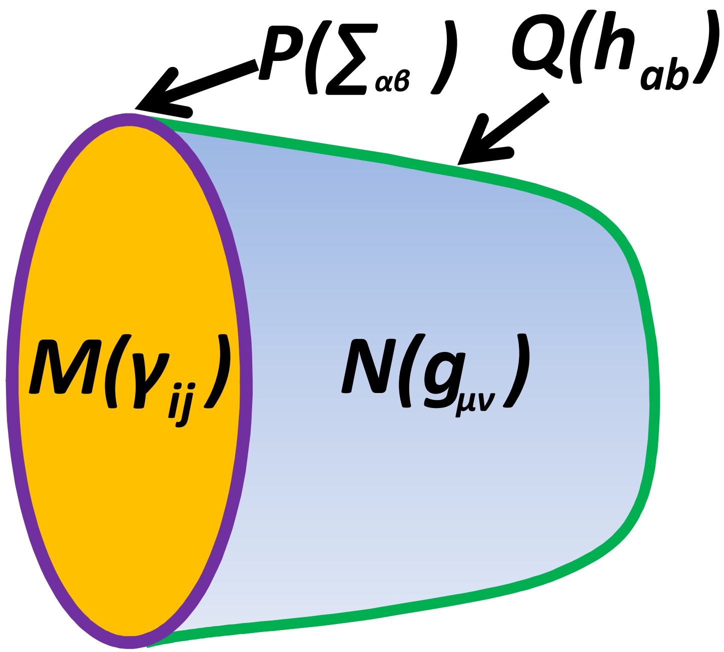
境界Pを持つ多様体M上のCFT(BCFT) →



- ***AdS/BCFT対応について***

境界Pを持つ多様体M → AdSの境界上で境界Pで制限された領域M

境界Pを持つ多様体M上のCFT(BCFT) → AdS時空上で境界Qにより制限された領域N上の重力理論



- ***AdS/BCFT対応について***

境界Pを持つ多様体M

AdSの境界上で境界Pで
制限された領域M

境界Pを持つ多様体M上のCFT(BCFT)

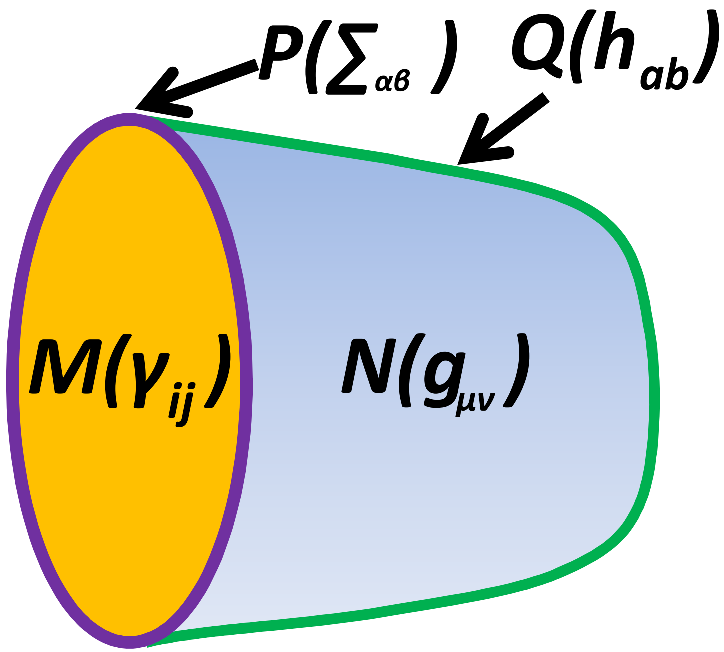
AdS時空上で境界Qにより
制限された領域N上の重力理論

1. 境界Qで境界条件が必要

2. ***INPUT***= CFTの情報(計量、Pの形状)

||

AdSの境界上の情報



- ***AdS/BCFT対応について***

境界Pを持つ多様体M → AdSの境界上で境界Pで制限された領域M

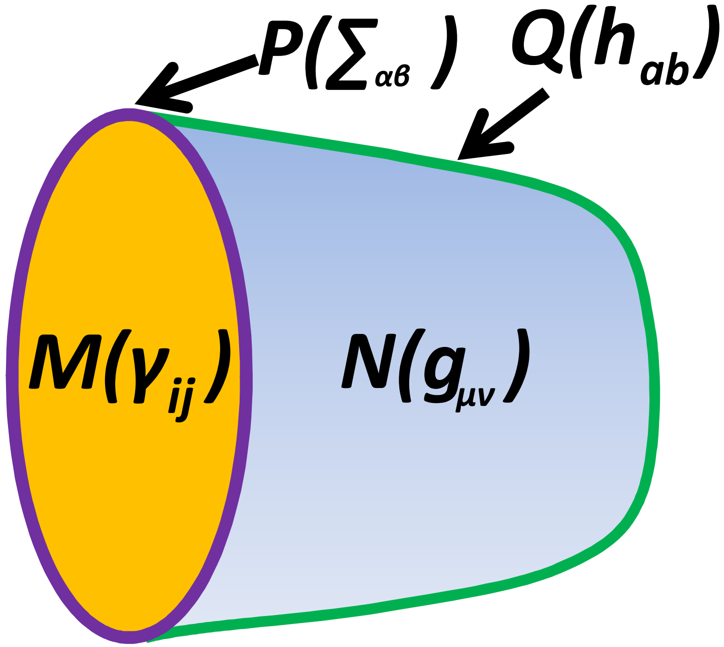
境界Pを持つ多様体M上のCFT(BCFT) → AdS時空上で境界Qにより制限された領域N上の重力理論

1. 境界Qで境界条件が必要
2. ***INPUT***= CFTの情報(計量、Pの形状)

||

AdSの境界上の情報

境界Qで**Neumann境界条件**を課す。



- ***AdS/BCFT対応について***

境界Pを持つ多様体M

dSの境界上で境界Pで

**AdS/BCFT対応**

境界Pを持つ多様体M上のCFT(BCFT) $\overset{\text{等価}}{=}$ 境界Q上でNeumann境界条件が課され、境界Qによって制限されたAdS時空N上の重力理論

[Takayanagi 2011]

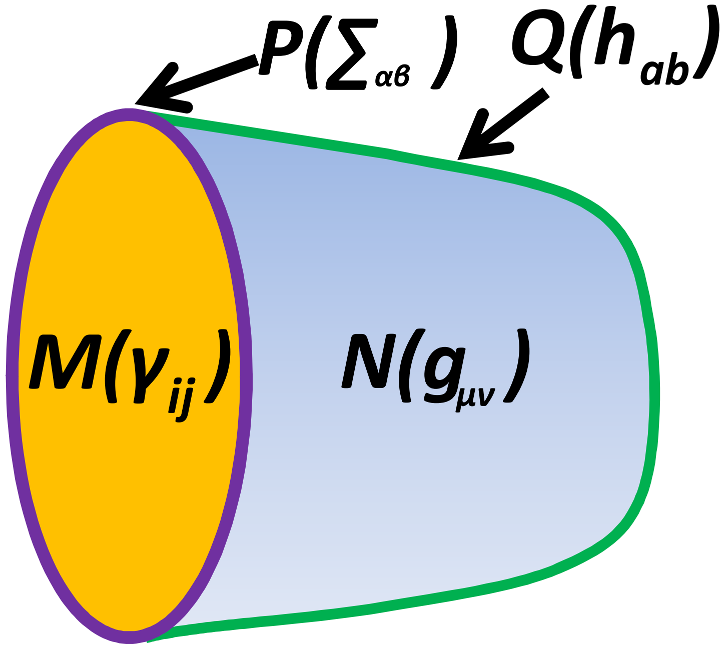
1. 境界Qで境界条件が必要
2. ***INPUT***= CFTの情報(計量、Pの形状)

||

AdSの境界上の情報

⇩

境界Qで**Neumann境界条件**を課す。



Mに対するBoundary Term

•作用

$$I_E=-\frac{1}{16\pi G_N}\int_N\sqrt{g}(R-2\Lambda)-\frac{1}{8\pi G_N}\underline{\int_Q\sqrt{h}(K+L_Q)}-\frac{1}{8\pi G_N}\underline{\int_M\sqrt{\gamma}K}$$

境界Qを持つAdS時空を考える為、この様な作用を考える。

Qに対するBoundary Term + Q上のmatter term

•外曲率: $K_{ab}=\nabla_a n_b$ ( $n$ )

境界Q上にこの外曲率が定義できる。

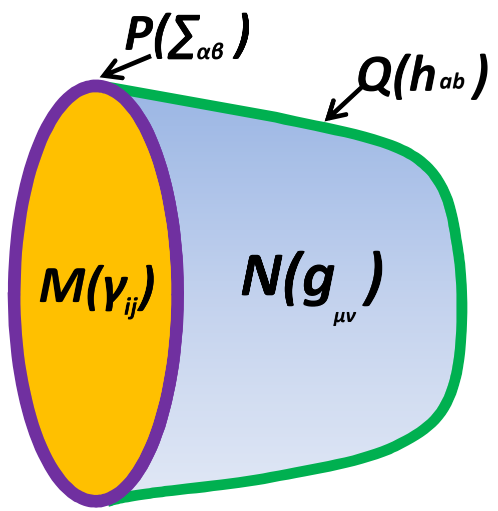
Neumann境界条件

$$\boxed{K_{ab}-h_{ab}K=8\pi G_N T^Q_{ab}}$$ (Q上で)

境界Qの形状が決まる。

$$I_Q=-\frac{1}{8\pi G_N}\int_Q\sqrt{h}L_Q$$

$$T^Q_{ab}=-\frac{2}{\sqrt{-h}}\frac{\delta I_Q}{\delta h^{ab}}$$



•作用

$$I_E = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_N \sqrt{g}(R-2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}(K+L_Q) - \underline{\frac{1}{8\pi G_N}\int_M \sqrt{\gamma}K}$$

境界Qを持つAdS時空を考える為、この様な作用を考える。

•外曲率: $K_{ab} = \nabla_a n_b$ ( $n$ はQの法線ベクトルである。)

境界Q上にこの外曲率が定義できる。

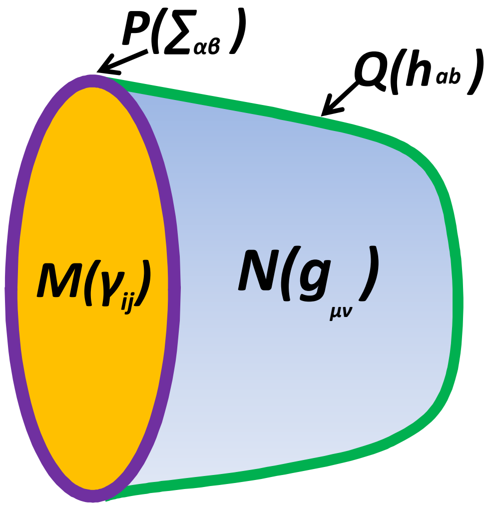
**Neumann境界条件**

$$\boxed{K_{ab} - h_{ab}K = 8\pi G_N T^Q_{ab}}$$ (Q上で)

**境界Qの形状が決まる。**

$$I_Q = -\frac{1}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}L_Q$$

$$T^Q_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-h}}\frac{\delta I_Q}{\delta h^{ab}}$$



- この対応の正当性はまだまだ確かめられていないところがある。

1.任意の境界を持つBCFTに対する解は存在するのか？

2.BCFTの結果と一致するのか？

- 私たちはこの**AdS/BCFT対応**の正当性を
  より確かなものにする二つの**結果**を得た。

⇩

- 任意の形状をした境界を持つ二次元BCFTと、三次元BCFTに対応する解が存在することを摂動論を用いて確かめられた。

- 二次元BCFTに対応する三次元AdSの分配関数を評価すると
対数発散する項の係数が二次元BCFTの様に境界による効果を反映していることを確かめた。

# 解析結果. 1

$\mathrm{AdS}_3$で Fefferman-Graham 座標系($ds^2 = \frac{L^2}{4\rho^2}d\rho^2 + \frac{1}{\rho}g_{ij}(x,\rho)dx^i dx^j$)において、ρ = 0(境界近傍)のまわりでρに関する摂動論を用いて解析を行った。

⇩

少なくともρ の低次のオーダーでは任意の境界を持つ$\mathrm{BCFT}_2$に対して対応する解が存在する事が確かめられた。

⇩

この重力双対の作用を評価すると対数発散の係数が$\mathrm{BCFT}_2$の持つ性質を再現する事が確かめられた。

## Setup

作用: $$I_E = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_N \sqrt{g}(R-2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}(K-\underline{T}) - \frac{1}{8\pi G_N}\int_M \sqrt{\gamma}K$$

$\downarrow$

**Neumann境界条件:** $K_{ab} = (K-T)h_{ab}$

座標系:Fefferman-Graham 座標系 $ds^2 = \frac{L^2}{4\rho^2}d\rho^2 + \frac{1}{\rho}g_{ij}(x,\rho)dx^i dx^j$

**境界Q:** $x = x(y,\rho)$

ρ=0で $g_{ij}(x,y,\rho)$と $x(y,\rho)$ に対してρに関する摂動展開

$\downarrow$

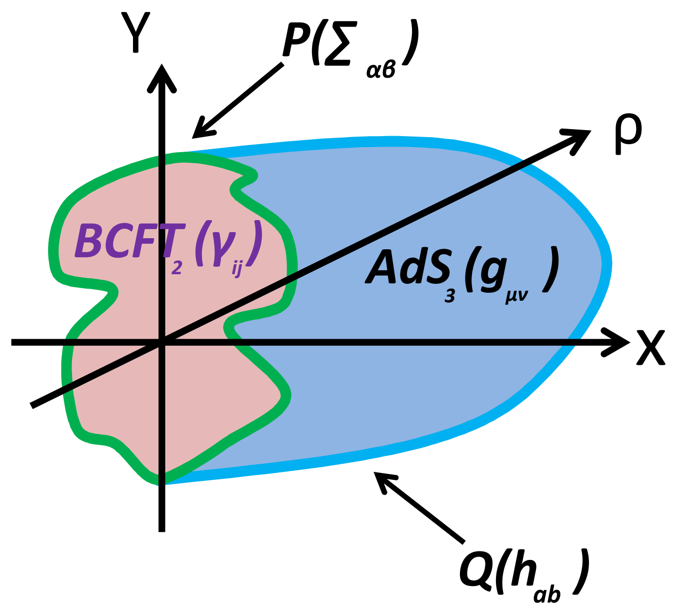
***INPUT***

BCFT$_2$の計量： $g^{(0)}_{ij}(x,y) = \delta_{ij}$

境界Pの形状： $x^{(0)}(y)$

$\downarrow$ 任意の形状

ρのfirst orderとsecond orderでは、
Einstein方程式とNeumann境界条件を
満たす解が無矛盾に存在する。



## *Setup*

作用: $I_E = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_N \sqrt{g}(R-2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}(K-\underline{T}) - \frac{1}{8\pi G_N}\int_M \sqrt{\gamma}K$

**Neumann境界条件:** $K_{ab} = (K-T)h_{ab}$

座標系:Fefferman-Graham 座標系 $ds^2 = \frac{L^2}{4\rho^2}d\rho^2 + \frac{1}{\rho}g_{ij}(x,\rho)dx^i dx^j$

**境界Q:** $x = x(y,\rho)$

ρ=0で$g_{ij}$

BCFT₂の境界 $x^{(0)}(y)$ に対してEinstein方程式、Neumann境界条件を満たす解が存在する。

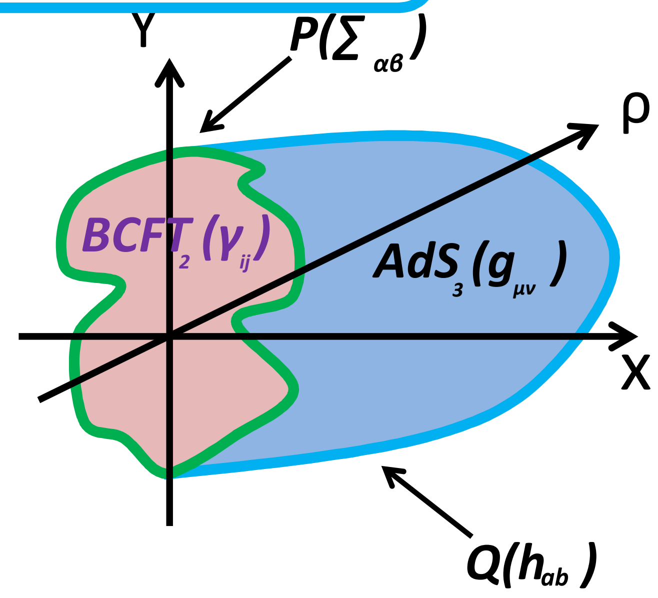
***INPUT***

BCFT₂の計量： $g_{ij}^{(0)}(x,y) = \delta_{ij}$

境界Pの形状： $x^{(0)}(y)$

任意の形状

ρのfirst orderとsecond orderでは、Einstein方程式とNeumann境界条件を満たす解が無矛盾に存在する。



これらの解を用いて分配関数を評価する。

AdS/BFCT対応より、

$-\log Z_{BCFT} = I_E$ である。( $I_E = -\frac{1}{4\pi L^2 G_N}\int_N \sqrt{g} + \frac{T}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}$ )

$$K = -\frac{\partial_y^2 x^{(0)}(y)}{(1+(\partial_y x^{(0)}(y))^2)^{\frac{3}{2}}}、\ c = \frac{3L}{2G_N}$$ として

$$-\log Z_{BCFT} = I_E$$

$$= \log\epsilon \cdot \underline{\frac{c}{12\pi}\int_{\partial M}\sqrt{h}K}$$

境界Pによるオイラー数 $\chi(M)$ へ の寄与

これらの解を用いて分配関数を評価する。

AdS/BFCT対応より、

$-\log Z_{BCFT} = I_E$ である。( $I_E = -\frac{1}{4\pi L^2 G_N}\int_N \sqrt{g} + \frac{T}{8\pi G_N}\int_Q \sqrt{h}$ )

BCFT$_2$に対応する重力解の作用を評価した結果、
境界Pによるオイラー数 $\chi(M)$ へ の寄与が再現される事
が確かめられた。

$$-\log Z_{BCFT} = I_E$$

$$= \log\epsilon \cdot \underline{\frac{c}{12\pi}\int_{\partial M}\sqrt{h}K}$$

境界Pによるオイラー数 $\chi(M)$ へ の寄与

# 解析結果. 2

$\mathrm{AdS}_4$ では Gaussian 標準座標系 $ds^2 = d\eta^2 + \frac{\cosh^2\eta}{z^2}(dz^2 + dx^2 + dy^2)$ において、摂動論を用いて解析を行った。

↓

少なくとも低いオーダーでは任意の境界を持つ$\mathrm{BCFT}_3$に対して対応する重力双対が存在する事が確かめられた。

## *Setup*

Gaussian 標準座標系: $ds^2 = d\eta^2 + \underline{\frac{\cosh^2\eta}{z^2}\left(dz^2 + dx^2 + dy^2\right)}$

$\mathrm{AdS}_3$

境界Q: $\eta = \eta_*$ に存在。

境界Q上の外曲率: $K_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ab}(\eta_*, u)}{\partial \eta}$

・境界Qによって

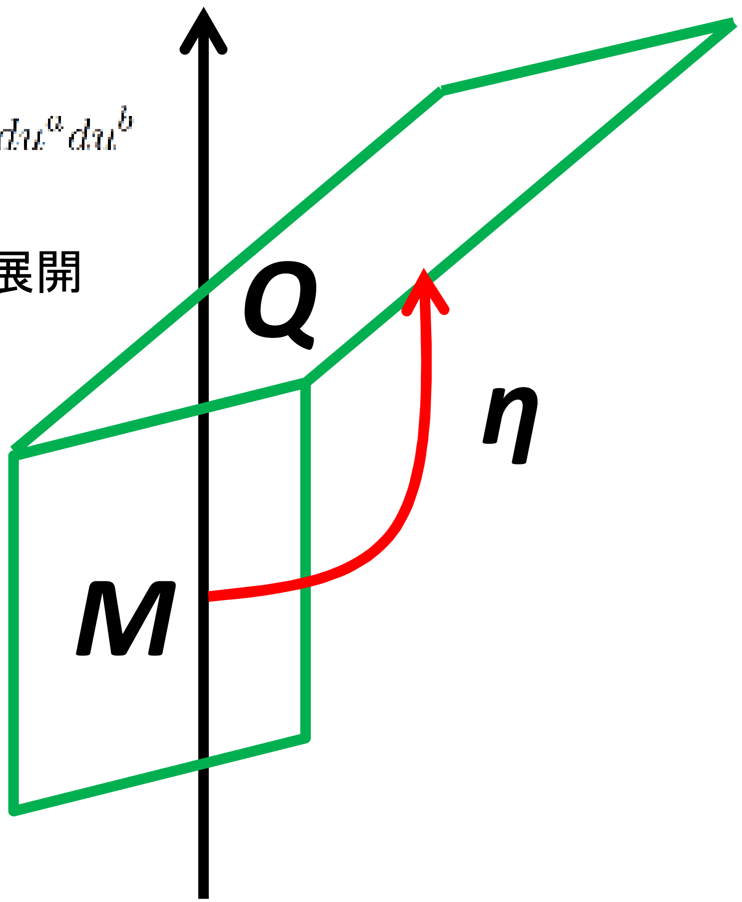
$$ds^2 = d\eta^2 + \frac{\cosh^2\eta}{z^2}\left(dz^2 + dx^2 + dy^2\right) \rightarrow ds^2 = d\eta^2 + h_{ab}(\eta, u)du^a du^b$$

・境界Qによる計量への寄与が小さいとしてZ=0で摂動展開

$$h_{ab}(\eta, x, y, z) = \frac{\cosh^2\eta}{z^2}\delta_{ab} + \delta h_{ab}(\eta, x, y, z)$$

$\delta h_{ab}(\eta, x, y, z) = \delta h_{ab}(\eta, z, k) \cdot e^{ikx}$ を行った。

・Zに関してfirst order, second orderでは
Einstein方程式、Neumann境界条件を満たす
無矛盾な解が存在する



## *Setup*

Gaussian 標準座標系: $ds^2 = d\eta^2 + \underline{\frac{\cosh^2\eta}{z^2}\left(dz^2 + dx^2 + dy^2\right)}$

$\mathrm{AdS}_3$

境界Q: $\eta = \eta_*$ に存在。

境界Q上の外曲率: $K_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ab}(\eta_*, u)}{\partial \eta}$

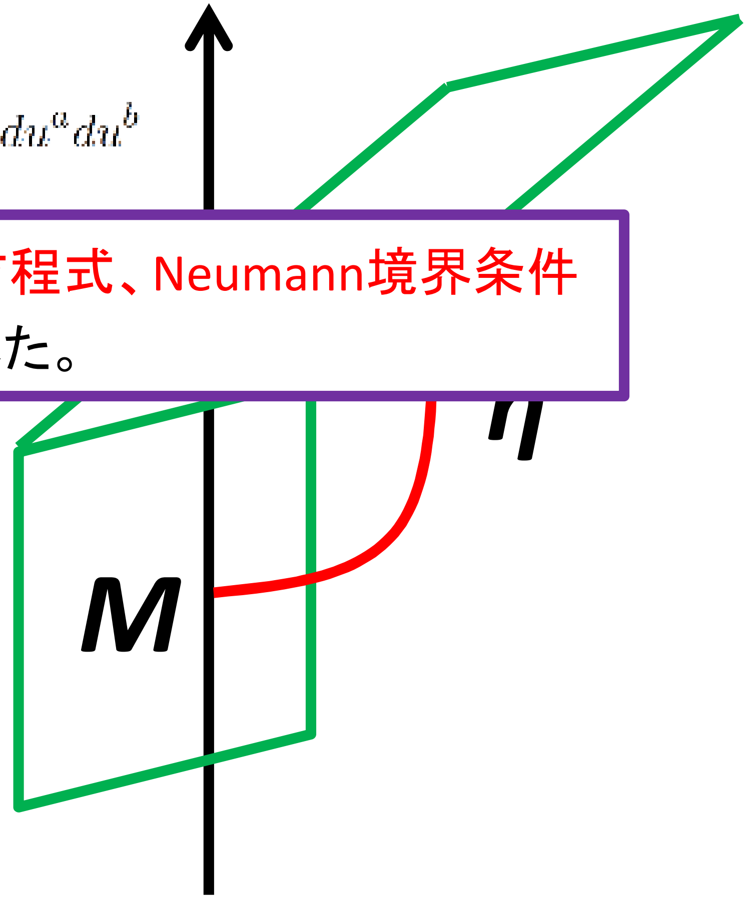
・境界Qによって

$ds^2 = d\eta^2 + \frac{\cosh^2\eta}{z^2}\left(dz^2 + dx^2 + dy^2\right) \rightarrow ds^2 = d\eta^2 + h_{ab}(\eta, u)du^a du^b$

任意の境界を持つ平坦な$\mathrm{BCFT}_3$に対してEinstein方程式、Neumann境界条件を満たす解が存在することが摂動的に確かめられた。

$\delta h_{ab}(\eta, x, y, z) = \delta h_{ab}(\eta, z, k) \cdot e^{ikx}$ を行った。

・Zに関してfirst order, second orderでは
Einstein方程式、Neumann境界条件を満たす
無矛盾な解が存在する



## •他の結果

・三次元球 $B_3$ 上のBCFT ⟶ 境界:二次元球面 $S^2$ ( $B_3$ の半径: $r_B$ )

・分配関数: $\log Z \sim \underline{\frac{c_{bdy}}{3}} \log \frac{r_B}{\epsilon}$ ( $\epsilon$: 短距離の UVカットオフ )

境界からの効果

・**Boundary Central Charge**: $c_{bdy} \longrightarrow \; c_{bdy}(r_B) = 3 r_B \frac{d \log Z}{d r_B}$

Holographicな予言

$$\frac{d c_{bdy}(r_B)}{d r_B} \leq 0$$

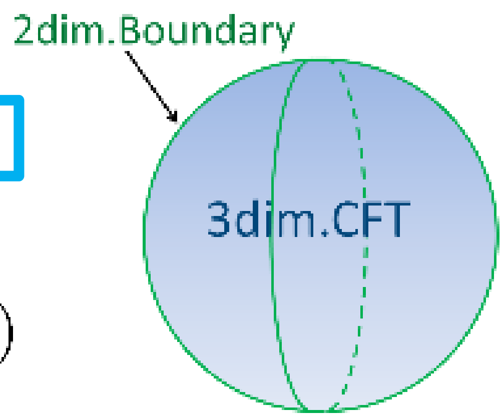
RG flowで単調減少

[Takayanagi- Fujita-Tonni 2011]

場の理論の解析から摂動論を用いて成立することを確かめた。

具体例 : 自由スカラー場

$c_{bdy}(UV) = \frac{7}{16}, c_{bdy}(IR) = -\frac{1}{16}$、 $c_{bdy}(UV) > c_{bdy}(IR)$



## •他の結果

・三次元球 $B_3$ 上のBCFT ⟶ 境界:二次元球面 $S^2$ ( $B_3$ の半径: $r_B$ )

・分配関数: $\log Z \sim \underline{\frac{c_{bdy}}{3}} \log \frac{r_B}{\epsilon}$ （ $\epsilon$ : 短距離の UVカットオフ ）

境界からの効果

・**Boundary Central Charge:** $c_{bdy} \longrightarrow c_{bdy}(r_B) = 3 r_B \frac{d \log Z}{d r_B}$

摂動論を用いて、RG flowで $c_{bdy}(r_B)$ が単調減少する事を証明した。

$dr_B$

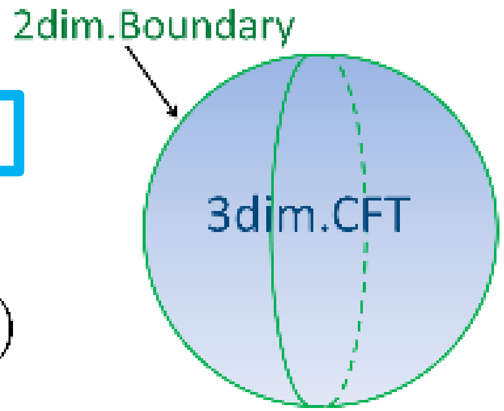
**RG flowで単調減少**

[Takayanagi- Fujita-Tonni 2011]

場の理論の解析から摂動論を用いて成立することを確かめた。

具体例 : 自由スカラー場

$c_{bdy}(UV) = \frac{7}{16}, c_{bdy}(IR) = -\frac{1}{16}$、 $c_{bdy}(UV) > c_{bdy}(IR)$



# まとめと展望

・私たちはこの**AdS/BCFT対応**の正当性を立証する二つの結果を得た。

1.$\mathrm{BCFT}_2$ ,$\mathrm{BCFT}_3$ に対応する重力双対が存在することを摂動論を用いて示した。

2.重力理論の解析から$\mathrm{BCFT}_2$の対数発散の係数の性質を再現することを確かめた。

・場の理論の解析から、摂動的に高次元の g-theoremが成り立つ事を示した。

⇩

1. 摂動論を使わず、BCFTに対する重力双対が無矛盾に存在するか確かめる。
2. AdS/BCFT対応に基づいて有限温度系のBCFTに対して重力双対が構成できるか調べてみる。
3. AdS/BCFT対応に基づいて時間発展するBCFTの解析を行ってみる。