Comments on knotted 1/2 BPS Wilson loops

大阪大学　理学研究科物理学専攻　素粒子論研究室 田中章詞
E-mail: akinori@hetmail.phys.sci.osaka-u.ac.jp

よく知られているように、３次元球面（S^3）上の $SU(2)$ pure Chern-Simons ゲージ理論で基本表現の Wilson loop の期待値を計算すると、Wilson loop の軌道の作る結び目の Jones 多項式とみなせる [1]。一方で、近年発展した経路積分の局所化の方法を用いて、$\mathcal{N}=2$ SUSY Chern-Simons ゲージ理論の Wilson loop の期待値を、厳密に経路積分を実行し計算することが可能である。この超対称性理論では、ゲージ場以外の場を積分するともとの pure Chern-Simons ゲージ理論に戻るという性質がある。そのため、局所化の方法で計算した期待値は結び目の Jones 多項式を再現すると期待される。

1　1/2 BPS condition

Squashed S^3 上の超対称性理論を用いる [2]。Squashed S^3 とは以下の計量を入れた S^3 のことを指す：

$$ds^2 = f(\theta)^2 d\theta^2 + l^2\cos^2\theta d\phi^2 + \tilde{l}^2\sin^2\theta d\chi^2, \quad f(\theta) = \sqrt{l^2\sin^2\theta + \tilde{l}^2\cos^2\theta} \tag{1}$$

この空間の上の Wilson loop

$$W_S = \mathrm{Tr}_R \mathcal{P}\exp\Big(\oint_C d\tau (iA_\mu \dot{x}^\mu + \sigma|\dot{x}|)\Big) \tag{2}$$

の期待値を $\exp(ikS_{SCS})$ の重みで計算する。ここで k は整数（level）であり、

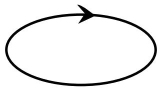
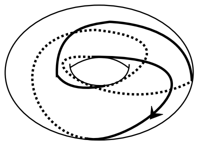
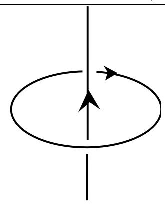
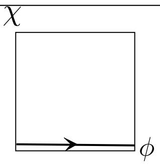
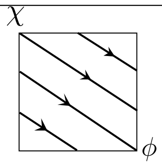
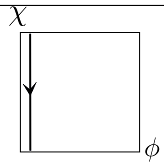
$$S_{SCS} = \int d^3x\ \sqrt{g}\ \mathrm{Tr}\Big[\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}(A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \frac{2i}{3}A_\mu A_\nu A_\lambda) - \overline{\lambda}\lambda + 2D\sigma\Big] \tag{3}$$

である。この理論は $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ [2]。

局所化の方法において期待値を厳密に計算できるのは、局所化に用いた超対称性を保つ演算子のみである。そのため、Wilson loop の経路 $x^\mu(t) = (\theta(t), \phi(t), \chi(t))$ は、次の条件を満たさねばならないことがわかる [3]：

$$\dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{cases} \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{\tilde{l}}\frac{\partial}{\partial\chi} & (\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\phi} & (\theta = 0) \\ -\frac{1}{\tilde{l}}\frac{\partial}{\partial\chi} & (\theta = \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{4}$$

2　局所化の方法による計算結果 $U(2)$ ゲージ理論の場合

	$\theta = 0$	$\theta \neq 0, \pi/2$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0,\, \theta = \pi/2$
(4) を満たす曲線				
$T^2 \subset S^3$ で見た絵				なし
ループの型	unknot	$(l, \tilde{l})$-torus knot	unknot	Hopf link
$\langle W_S \rangle / \langle 1 \rangle$	$e^{-\frac{l}{\tilde{l}}\frac{2\pi i}{k}} J_\circ(q)$	$e^{-l\tilde{l}\frac{2\pi i}{k}} J_{l,\tilde{l}}(q)$	$e^{-\frac{\tilde{l}}{l}\frac{2\pi i}{k}} J_\circ(q)$	$e^{-(2+\frac{\tilde{l}}{l}+\frac{l}{\tilde{l}})\frac{2\pi i}{k}} J_{\mathrm{Hopf}}(q)$

$\langle W_S \rangle / \langle 1 \rangle$ の計算結果にあらわれる q は $q = \exp \frac{2\pi i}{k}$ であり、$J(q)$ はそれぞれ

$$J_\circ(q) = \frac{q - q^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, \quad J_{l,\tilde{l}}(q) = \frac{q^{\frac{1}{2}(l-1)(\tilde{l}-1)}}{1 - q^2}(1 + q^{l+\tilde{l}} - q^{l+1} - q^{\tilde{l}+1})\frac{q - q^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \tag{5}$$

となる。これは unknot の Jones 多項式と、$(l, \tilde{l})$-torus knot の Jones 多項式である。

$\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ のループを同時に挿入した Wilson loop の期待値も計算できる。これは Hopf link と呼ばれる絡み目となり、期待値はやはり Hopf link の Jones 多項式

$$J_{\mathrm{Hopf}}(q) = (q^3 + q^2 + q + 1) \tag{6}$$

に phase を除き一致した。

References

[1] E. Witten, "Quantum Field Theory and the Jones Polynomial," *Commun.Math.Phys.* **121** (1989) 351.

[2] N. Hama, K. Hosomichi, and S. Lee, "SUSY Gauge Theories on Squashed Three-Spheres," *JHEP* **05** (2011) 014, `arXiv:1102.4716 [hep-th]`.

[3] A. Tanaka, "Comments on knotted 1/2 BPS Wilson loops," *JHEP* **1207** (2012) 097, `arXiv:1204.5975 [hep-th]`.