

広田三輪方程式の八面体構造

首都大学東京 弓林 司

E-mail: yumibayashi-tsukasa@ed.tmu.ac.jp

弦理論の可積分性と双対関係にある広田三輪方程式の三角圏構造について紹介する。本論文は主に共同研究者の齋藤暁氏（首都大）の論文 [1] のレビューである。

1 弦理論/可積分系対応

弦理論における弦の遷移振幅は CFT により記述され、摂動論的には任意の種数のリーマン面に対応付けられる。任意の種数のリーマン面は、ショットキー問題の解決により τ 関数により特徴付けられることが知られている。従って、弦の遷移振幅も τ 関数を用いて表される事が判る。

また、 τ 関数は可積分系の親玉とも言われる KP 階層を記述する広田三輪方程式 [3]、 $a_{12}a_{34}f(p_1 + 1, p_2 + 1, p_3, p_4)f(p_1, p_2, p_3 + 1, p_4 + 1) - a_{13}a_{24}f(p_1 + 1, p_2, p_3 + 1, p_4)f(p_1, p_2 + 1, p_3, p_4 + 1) + a_{23}a_{14}f(p_1 + 1, p_2, p_3, p_4 + 1)f(p_1, p_2 + 1, p_3 + 1, p_4) = 0$ を満たす [2]。

つまり以上の関係から、我々は弦理論の研究を τ 関数を通すことで可積分系の研究に置き換えることができる。この対応を弦理論/可積分系対応と呼ぶことにしよう。

2 広田三輪方程式と八面体

広田三輪方程式は四次元格子空間 \mathbb{Z}^4 上で定義される。一つの広田三輪方程式の 6 つの引数、 $(p_1 + 1, p_2 + 1, p_3, p_4)$, $(p_1 + 1, p_2, p_3 + 1, p_4)$, $(p_1 + 1, p_2, p_3, p_4 + 1)$, $(p_1, p_2 + 1, p_3 + 1, p_4)$, $(p_1, p_2 + 1, p_3, p_4 + 1)$, $(p_1, p_2, p_3 + 1, p_4 + 1)$ を結ぶと正八面体ができる。

この正八面体を新しい変数 $t := p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2$, $k_a := \epsilon^{abc} \frac{p_a - p_b - p_c + p_4}{2}$, $(a, b, c = 1, 2, 3)$ に書き換え、 $t = const$ の三次元超平面を考える。これにより、先ほど定義した正八面体を基本構造とする三次元空間内の八面体の埋め尽くしを表現することができる。

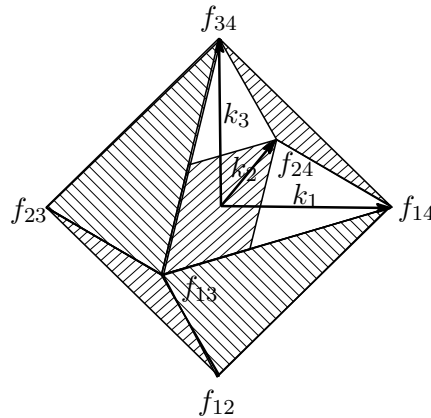


Fig. 1

3 外差分作用素と Bäcklund 変換

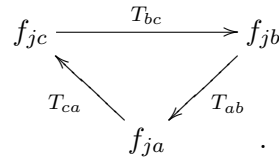
差分作用素 D_j を $D_j f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p} + \delta_j)$ で定義する。また、外差分作用素 d_B を通常の外微分と同様に定義する。

広田三輪方程式は 2 階の外差分形式の成分の行列式を用いて表現できる。また、広田三輪方程式の一つの解が得られたとき、外差分形式による条件を解くことで新しい解を無限に構成できる。この構成を Bäcklund 変換という [4]。

4 三角系列と八面体公理

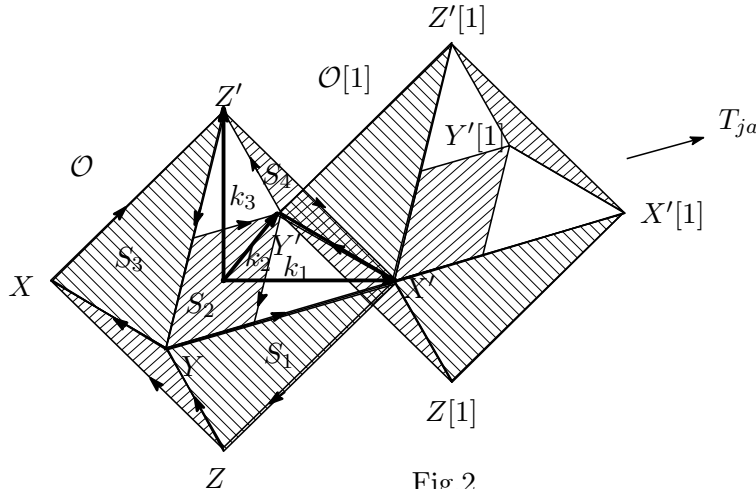
広田三輪方程式に三角圏を定義するには、具体的にいわゆる三角公理、八面体公理を満たす射の構成が必要である。しかし広田三輪方程式は既に見たように八面体構造を持つ。従って、八面体上の頂点移動作用素 $T_{ij} := D_i D_j^{-1}$, $i \neq j$ が射となる。

この射により、八面体の各面を構成する三角形、



を構成する。これが三角系列を成す。

また、この射は八面体の移動、



も構成する。これが加法的自己同型関手、

$$\mathcal{O} := (\tilde{S}_j, S_j) \xrightarrow{T_{ja}} \mathcal{O}[1] := (\tilde{S}_j[1], S_j[1])$$

を作る。

5 写像化

以上の議論の見通しを良くする為に移動の方向を T_{43} 方向に制限する。つまり、新しい変数 $q := k_1 - k_2 = p_1 - p_2$ を定義し、これの発展を見る。

また、この移動と垂直方向の移動も見る。これは、 $k_1 + k_2 \propto p_4$ より、 p_4 の発展を追えば良い。そこで、 $n := p_4 = \frac{3}{2}(k_1 + k_2 + k_3)$ と置く。

また、三角系列を表現すべく、条件 $\tau_{q+3}^{(n)} = \tau_q^{(n)}$, $q = 1, 2, 3$ を置く。この Notation の下で、

$$\tilde{S}_4 = (X, Y, Z) := (\tau_1^{(n-1)}, \tau_2^{(n-1)}, \tau_3^{(n-1)}) \quad (1)$$

$$S_4 = (X', Y', Z') := (\tau_3^{(n)}, \tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}) \quad (2)$$

と書くことが出来る。但し、 $\tau_q^{(n)} := f_4(\mathbf{p})$ と置いた。こうする事により、八面体の移動 T_{43} は写像、

$$(\tau_1^{(n-1)}, \tau_2^{(n-1)}, \tau_3^{(n-1)}) \rightarrow (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)}) \quad (3)$$

と解釈する事が出来る。この条件は KP 階層の Lotka-Volterra 方程式への reduction に対応する [5]。

つまり我々は広田三輪方程式の成す三角圏を写像を用いて調べる事が出来る。

References

- [1] S. Saito, "Octahedral Structure of the Hirota Miwa Equation", JNMP (to be published).
- [2] S. Saito, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1798,
S.Saito and R.Sato JHEP11(2003)008.
R.Sato and S.Saito JHEP11(2004)047.
- [3] R.Hirota, J. Phys. Soc. Jpn **50** (1981) 3787,
T.Miwa, Proc. Japan Acad. A **58** (1982) 9.
- [4] Nobuhiko Shinzawa and Satoru Saito (1998) J. Phys. A: Math. Gen. 31 4533
- [5] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, "Difference Scheme of Soliton Equations", in *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, ed. by P.L.Christiansen et al., p.7 Plenum Press, New York, (1993).
R. Hirota, and S. Tsujimoto, J.Phys.Soc.Jpn. **64** 3125-3127 (1995).