

ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 浜中 真志

E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張はここ約10年の間にさまざまな角度から研究がなされ、多くの成果・知見が得られた。本記事では現状報告を簡単に行い、残された問題や今後の展望についてまとめる。

1 イントロダクション

1.1 動機・目標

場の理論・ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張は、単なる一般化ではなく、物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる。特に、非可換空間上のゲージ場の理論は、背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり、量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた。さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり、新しい物理的対象が現れる。例えば、4次元ゲージ理論の Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM) 方程式の非可換化では、モジュライ空間 (解空間) の特異点解消が起こり、 $U(1)$ インスタントンという非可換特有の物理的配位がもたらされる。ここでは ADHM 構成法がうまく非可換化されることも要となっており、この意味で可積分性といった良い性質も保たれている。D ブレーンとの対応も明快で、多くの知見が与えられた。

この流れを受け、ゲージ理論には (直接) 属さない可積分方程式 (KdV 方程式など) の非可換化の研究も活発になった [17, 18]。ソリトン理論・可積分系研究の新しい方向と対応する物理への応用を目指して、私は戸田晃一氏とともに、非可換空間上の Lax 方程式 (Lax 表示を持つ方程式) の生成法を提唱し、Ward 予想 [47] の非可換版にあたる次の予想を提唱した [25]: 「非可換 Lax 方程式は可積分であり、4次元非可換 ASDYM 方程式の次元還元によって得られるであろう。(次図)」

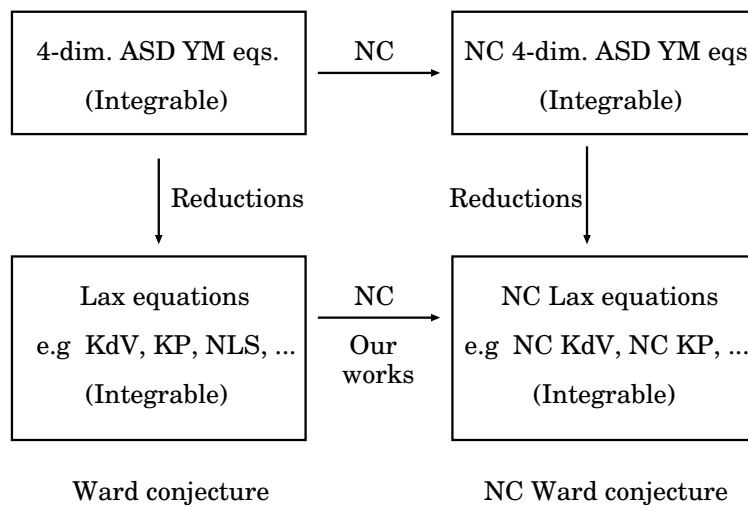


Figure 1: 非可換 Ward 予想 [25]

この予想が成り立てば、KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し、非可換化の意味 (背景フラックスの導入という物理的意味) を持つ。この次元還元に見れる方程式には N=2 弦理論というものが関連し、ソリトン解の解析などを通じて、この理論への直接的応用が可能である。また、幾何学的背景や無限次元対称性の視点から、低次元非可換可積分方程式の統一的理解が深まると期待される。具体的目標・解明したいことは以下の通りである：

- 非可換 Ward 予想の検証 (対応する物理系の存在)
- (N=2) 弦理論への応用 (split 計量)
- 非可換ツイスター理論との関わり [2, 13, 27, 32, 44]
- 非可換可積分階層および無限個の保存量の存在 (ある種の可積分性・無限次元の対称性)
- 非可換可積分系の基礎付け (特に Seiberg- Witten map, normal form. 時間について無限階の微分方程式を処理したい)
- N ソリトン解の存在 (非可換特有の新しい解や新しい振る舞い)
- タウ関数の記述 (非可換佐藤理論の構築)

1.2 非可換空間上の場の方程式

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

ここで、 $\theta^{\mu\nu}$ は反対称な実定数であり、非可換パラメータと呼ばれる。¹ この関係式は、量子力学の正準交換関係 $[q, p] = i\hbar$ に類似しており、「空間の不確定性関係」を導く。このことから非可換空間上では、粒子の位置は完全に決めることができず、ある広がった分布を持つ。その結果、可換な空間上では存在した場の特異点が、非可換空間上では解消されるということが起こりうる。これは素朴な考察に過ぎないが、非可換空間上の (Non-Commutative=NC) 場の理論では特異点の解消が実際一般に起こり、その結果、非可換空間特有の新しい物理的対象が現れる。分布の広がりの幅は大体 $\sqrt{|\theta^{\mu\nu}|}$ に比例し、可換な空間への極限 $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$ で特異性が復活する。

特異な場の配位は内部構造を持たずシンプルではあるが、普通には取り扱えないため可換空間では解析の対象から除外される。これが非可換空間では可能になり、容易な取り扱いから様々な応用がもたらされる。特に非可換空間上のゲージ理論は磁場中のゲージ理論と等価であり、量子ホール系や弦理論の D ブレイン系への応用に威力を発揮した。ここでは非可換ソリトンが重要な役割を果たす。(レビューとして例えば [6, 15, 28, 43] などがある。)

可換空間上の理論から出発して非可換空間上の理論を得るには、もとの可換空間上の理論に見れる場同士の積を全てスター積というものに置き換えればよい。ユークリッド空間を扱う場合は、スター積として Moyal 積をとればよい。

Moyal 積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである [36]：

$$f \star g(x) := \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{(x')}\partial_\nu^{(x'')}\right)f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (1.2)$$

Moyal 積は次の重要な性質を持つ (より詳しい議論は例えば [28] など参照)：

¹非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ は背景磁場に関係し、手で与えられる。非可換パラメータは一般には座標に依存してもよいが、ここでは定数とする。

- 結合則が成り立つ： $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$
- 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現： $[x^\mu, x^\nu]_\star := x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}$
- 可換極限 $\theta^{ij} \rightarrow 0$ で普通の積に戻る。

2 番目の性質から、この積の置き換えが非可換空間上の理論を与えていることが分かる。3 番目の性質を考慮すると、非可換空間上の理論は、もとの可換空間上の理論の一つの変形理論に他ならない。場や座標自身は普通の c 数の関数であるが、それらの積だけが変形されて、非可換空間を実現しているのである。したがって可積分系の非可換空間への拡張は、特別な可積分変形と理解することもできる。

Moyal 積は非可換な積 ($f \star g \neq g \star f$) であり、非線型項がどのような順序で変形されるのかが重要なポイントとなるが、ゲージ理論においては (非可換化された) ゲージ対称性を保つことで、佐藤理論の枠組みでは Lax 形式 (3.1) を出発点とすることで確定する。

具体的な方程式は以下のようなになる。

- (標準的形式の) 非可換 ASDYM 方程式

$$\begin{aligned} F_{wz} &= \partial_w A_z - \partial_z A_w + [A_w, A_z]_\star = 0, & F_{\tilde{w}\tilde{z}} &= \partial_{\tilde{w}} A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_{\tilde{w}} + [A_{\tilde{w}}, A_{\tilde{z}}]_\star = 0, \\ F_{z\tilde{z}} - F_{w\tilde{w}} &= \partial_z A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_z + \partial_{\tilde{w}} A_w - \partial_w A_{\tilde{w}} + [A_z, A_{\tilde{z}}]_\star - [A_w, A_{\tilde{w}}]_\star = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$z, w, \tilde{z}, \tilde{w}$ は 4 次元の実座標を適当に複素に組んだものであり、ユークリッド空間だと $\tilde{z} = \bar{z}, \tilde{w} = -\bar{w}$ である。

- 非可換 KP 方程式 ((2 + 1) 次元, $[x, y]_\star = i\theta$ または $[t, x]_\star = i\theta$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \star u + u \star \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{3}{4} \partial_x^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{3}{4} \left[u, \partial_x^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_\star, \quad (1.4)$$

t は時間座標, x, y は空間座標である。また, $\partial_x^{-1} f(x) = \int^x dx' f(x')$ 。

- 非可換 KdV 方程式 ((1 + 1) 次元, $[t, x]_\star = i\theta$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \star u + u \star \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1.5)$$

2 非可換 Ward 予想

非可換 Ward 予想は、2005 年～2006 年頃、具体例に関して可換空間とほぼ同程度の検証結果が得られた [20, 19]。導出される方程式には、(2 + 1) 次元の非可換 Zakharov 系、非可換トロイダル KdV 方程式 [45]、(1 + 1) 次元の非可換 NLS 方程式、非可換 Toda 方程式 (したがって非可換 sine-Gordon, Liouville も) といった主要な非可換可積分方程式が大体含まれる。(KP 方程式については可換空間同様、無限次元ゲージ群の ASDYM 方程式からの導出しが知られていない [19].) 基本的には可換空間の結果 [34] の非可換変形であるが、具体的に導出されたことにより、非可換 KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し背景フラックスの導入という物理的意味を持つことが明らかにされ、N=2 弦理論への応用の可能性が開かれた。

Split 計量 (+ + - -) の場合は, 座標 z, \bar{z}, w, \bar{w} をすべて実座標と考えることができる [34] ため, リダクションの文脈で現れる ASDYM 方程式は, (2 + 2) 次元上のものを考える. N=2 弦理論は, 標的空間がこの (2 + 2) 次元空間であり, ASDYM 方程式を運動方程式として与える理論である [37]. N=2 弦理論には, 開弦の理論 [33] や B 場を含んだ理論 [31] が存在する. 非可換ゲージ理論と B 場背景のゲージ理論の等価性は世界面上の議論で示される. よって, 非可換空間の設定でも, N=2 弦理論が (2 + 2) 次元空間上の ASDYM 方程式を運動方程式として与える理論であることが言える.

$G = GL(2)$ の非可換 ASDYM 方程式から非可換 KdV 方程式へのリダクションについて紹介する. まず, $X = \partial_w - \partial_{\bar{w}}, Y = \partial_{\bar{z}}$ の方向への次元還元を行い, 残った座標を $t \equiv z, x = w + \bar{w}$ と同一視する. 次に, ゲージ場に対し次のリダクション条件を課す:

$$A_{\bar{w}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u/2 & 0 \end{pmatrix}, A_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, A_z = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u' & -2u \\ u'' + 2u \star u & -u' \end{pmatrix}.$$

($u' = \partial u / \partial x, \dot{u} = \partial u / \partial t$.) このとき, (1.3) の第 1, 2 式は自動的に満たされ, 第 3 式から次の方程式が導かれる:

$$\dot{u} = \frac{1}{4} u''' + \frac{3}{4} (u' \star u + u \star u'). \quad (2.1)$$

これはまさに非可換 KdV 方程式であり, 種々の良い性質を持つ.

3 非可換可積分階層と無限個の保存量

非可換可積分階層は, 2 つの線型方程式系 $L \star \psi = \lambda \psi, \partial_m \psi = B_m \star \psi$, (ただし λ は定数) の両立条件として得られ, したがって広い意味での Lax 形式である:

$$\partial_m L = [B_m, L]_{\star}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

ここで L は 1 階の擬微分作用素で以下のように与えられる:

$$L = \partial_x + u_2 \partial_x^{-1} + u_3 \partial_x^{-2} + u_4 \partial_x^{-3} + \dots \quad (3.2)$$

各係数 u_k ($k = 2, 3, \dots$) は無限個の「時間変数」(x^1, x^2, \dots) に依存する関数である. (ただし $x^1 \equiv x$.)

$$u_k = u_k(x^1, x^2, \dots). \quad (3.3)$$

この無限個の変数の一部が, 時間, 空間の座標に対応する. したがって非可換性はこの無限個の「時間変数」(x^1, x^2, \dots) に対して導入される. 非可換性はこの段階では任意に与えられる. また微分 ∂_m の L に対する作用は, $\partial_m L := [\partial_m, L]$ あるいは $\partial_m \partial_x^k = 0$ のように ∂_x^k の係数への作用として定義される. 作用素 B_m は, 微分作用素であり, 以下で定義される.

$$B_m := \underbrace{(L \star \dots \star L)}_{m \text{ 個}} \geq 0 =: (L^m)_{\geq 0}, \quad (3.4)$$

非可換階層 (3.1) は各 m について, ∂_x^{1-k} の各係数から生じる無限個の微分方程式を含んでいる. したがって, m を動かすと, 膨大な数の微分方程式が得られる. これを非可換階層方程式と呼ぶ. 非可換階層方程式の左辺は, (3.1) より $\partial_m u_k$ の形になるので, x^m 方向の「非可換発展方程式」とも呼ばれる.

ここで非可換階層の中のある方程式に着目し, その保存則, 保存密度について議論しよう. このとき非可換性は, 時間・空間方向にのみ導入されている. 天下りであるが, 座標 x^m が時間座標 t であるとき, (無限個の) 保存密度は次式のようなになる ($n = 1, 2, \dots$) [16]:

$$\sigma_n = \text{res}_{-1} L^n + \sum_i \theta^{im} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \partial_x^{k-l} \text{res}_{-(l+1)} L^n \diamond \partial_i \text{res}_k L^m, \quad (3.5)$$

ここで, “ \diamond ” は Strachan 積 [41] と呼ばれる積で次のように定義される:

$$f(x) \diamond g(x) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_i^{(x')} \partial_j^{(x'')} \right)^{2s} f(x') g(x'') \Big|_{x'=x''=x}. \quad (3.6)$$

Strachan 積は可換であるが結合則を満たさないという性質を持つ.

非可換 KP 方程式の保存量の具体的表式は以下のようなになる.

- 空間—空間非可換性の場合 $[x, y]_{\star} = i\theta$:

$$\sigma_n = \text{res}_{-1} L^n. \quad (3.7)$$

これは可換空間の結果とほとんど同じである. 時間微分や時間発展の概念も通常と同じであり, 擬微分作用素 A のトレースを $\text{tr} A := \int dx dx^i \text{res}_{-1} A$ として定義すれば, ハミルトン構造の議論も可換空間と同様である.

- 時間—空間非可換性の場合 $[t, x]_{\star} = i\theta$:

$$\sigma_n = \text{res}_{-1} L^n - 3\theta ((\text{res}_{-1} L^n) \diamond u'_3 + (\text{res}_{-2} L^n) \diamond u'_2). \quad (3.8)$$

(3.5) の第 2 項の寄与があるため, 保存密度が大幅に変形されることが分かる. この変形された部分は非可換特有の項であるが, 時間微分が無限個含まれる微分方程式に対して標準的なハミルトン力学系の議論はそのまま通用せず, その意義は明確でない. (時間発展という概念すら素朴にはよく分からない.)

一つの解決法は, Seiberg-Witten マップ [39] や Normal Form の理論を用いて, 時間についての無限階微分方程式を 1 階の微分方程式に帰着させることである. これについては次のセクションで議論する.

4 非可換可積分系の基礎付け

4.1 Seiberg-Witten マップ

非可換 KdV 方程式を θ で摂動展開し, Seiberg-Witten マップで可換側にうつすことを考える. KdV 方程式では時間方向に非可換性が入るが, u_t に KdV 方程式を代入していくことで, 好きな次数ま

で x だけの微分多項式にすることができる。(その次数までは時間についての 1 階の発展方程式である.)

Seiberg-Witten マップは非可換側のゲージ場と可換側のゲージ場との対応を与える。可換側は複雑な方程式になることが予想され、ゲージ場同士ではなく、ゲージ場の中の変数 u 同士の対応を見るのは一筋縄ではない。単純に可換側のゲージ場が KdV 方程式と同様の形をとると仮定すると、 θ の 1 次ですでに解なしとなる。 N ソリトン解の漸近的振る舞いで、非可換 KdV 方程式はもしかしたら KdV 方程式に帰着するのではないかという疑いもあったが、Seiberg-Witten マップで帰着するという可能性は否定された。(この研究は I. Strachan 氏との共同研究に基づく.)

4.2 Normal Form の理論

前節同様に、非可換 KdV 方程式を θ で摂動展開した発展方程式を考える。Normal Form の理論 (cf. [29]) を適用して、この方程式が可換 KdV 方程式からの変換によって記述できる可能性を調べた。 θ が長さの 2 乗の次元を持つため、 θ で摂動展開した発展方程式は次数が大きく飛び飛びとなるため、Normal Form の理論からも、可換 KdV 方程式に帰着することはないと結論される。(この研究は児玉裕治氏との議論に基づく.)

5 N ソリトン解・タウ関数

可積分系の大きな特徴の一つである、 N ソリトン解について議論する。これらの解の記述には、高次元・低次元どちらの方程式についても、ある種の非可換行列式である quasi-determinant と呼ばれるものが重要な役割を果たすことが明らかになった。この事実は、低次元の非可換可積分 (階層) 方程式と共通したものであり、低次元と高次元の深遠な関係を示唆しているとも考えられる [22, 23]。また、この証明には quasi-determinant の恒等式をフルに用いるが、このことを「非可換ベックルント変換は quasi-determinant の恒等式そのものである」と言い表すこともできる。これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「ベックルント変換は determinant の恒等式そのものである」の自然な拡張となっており、quasi-determinant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほのめかしている。

5.1 非可換 ASDYM 方程式

4次元空間上で定義される非可換 ASDYM 方程式は、Yang 形式で次のように書ける。

$$\partial_z(J^{-1} \star \partial_{\bar{z}} J) - \partial_{\bar{w}}(J^{-1} \star \partial_w J) = 0. \quad (5.1)$$

ただしゲージ群は $G = GL(2)$ とする。 $J \in GL(2)$ である。この方程式の解 J が与えられると、反自己双対なゲージ場を再現することができる。また、一般性を失わず、 J を以下のようにパラメトライズすることができる：

$$J = \begin{bmatrix} f - g \star b^{-1} \star e & -g \star b^{-1} \\ b^{-1} \star e & b^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

私は、グラスゴー大学の Gilson 氏、Nimmo 氏と共同で、非可換 ASDYM 方程式 ($G=GL(2)$) に対する (2 種類の involutive な) ベックルント変換 (解を解にうつす変換) を与え、それらを交互に

組み合わせることで、線形方程式 (Laplace 方程式) の簡単な解から、非可換インスタントン解、非可換「非線形平面波」解といったさまざまな厳密解を具体的に構成した [12]. (簡単な解は以下のようにして得られる: $b = e = f = g = \Delta_0^{-1}$ ($\Delta_0(x)$ はスカラー関数) とおくと、非可換 ASDYM 方程式は非可換線形微分方程式 $(\partial_z \partial_{\bar{z}} - \partial_w \partial_{\bar{w}}) \Delta_0 = 0$ (ユークリッド空間のときは 4 次元ラプラス方程式) となる.) 得られる解のシリーズは、以下のように Quasideterminant という「非可換行列式」を用いて、極めてシンプルかつ対称的に表される:

- 非可換 Atiyah-Ward 仮設解 R_l

$$\begin{aligned}
 b_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}^{-1}, & f_l &= \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, \\
 e_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, & g_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

- 非可換 Atiyah-Ward 仮設解 R'_l

$$\begin{aligned}
 b'_l &= \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \Delta_{l-2} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}, & f'_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \Delta_{l-2} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}, \\
 e'_l &= \begin{vmatrix} \Delta_{-1} & \Delta_{-2} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-2} & \Delta_{l-3} & \cdots & \Delta_{-1} \end{vmatrix}, & g'_l &= \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \Delta_2 & \Delta_1 & \cdots & \Delta_{3-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

行列の要素として現れたスカラー関数 $\Delta_i(x)$ は以下の関係式により、 Δ_0 から完全に決まる:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial z} = -\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \bar{w}}, \quad \frac{\partial \Delta_i}{\partial w} = -\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \bar{z}}, \quad -l \leq i \leq l-1 \quad (l \geq 2), \tag{5.5}$$

可換極限では、 $b_l = f_l, b'_l = f'_l$ が成り立ち、[3] の結果に帰着する。

非可換線形方程式 (Laplace 方程式) を解くのはそれほど難しくはなく、非可換インスタントン解、非可換「非線形平面波」解といったさまざまな新しい厳密解が生成される。この議論では有限作用の条件は課しておらず、ADHM 構成法で構成できない解が多く含まれる。ユークリッド空間の設定では、これは D0-D4 ブレーン系を記述する。これらの解の D ブレーン解釈も興味深い問題である。

証明は、Quasideterminant の恒等式のみを駆使して与えられる。(なお可換極限をとると [35, 40] との関連も見える。) このことを「非可換ベックルント変換は Quasideterminant の恒等式そのものである」と言い表すこともできるが、これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「バックルント変換は determinant の恒等式そのものである [30]」の自然な拡張となっており、

Quasideterminant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほのめかしている. この解に対する J の表式も極めて美しく, J を直接導くような Riemann-Hilbert 問題の解法の存在が示唆される. このベックルント変換が単なるゲージ変換ではないことも J の表式を見れば明らかである.

さらに [13] では, このベックルント変換の起源を非可換ツイスター理論の枠組み (Penrose-Ward 変換) から理解することに成功し, 生成された解はいわゆる Atiyah-Ward 仮設解 [1] と呼ばれるクラスの解の非可換版であることを明らかにした.

5.2 非可換 KP 階層と解の漸近的振る舞い

非可換 KP 階層の N ソリトン解と漸近的振る舞いについて議論する. ここでも quasideterminant が活躍する.

まず以下の関数を考える.

$$f_s(\vec{x}) = e_{\star}^{\xi(\vec{x};\alpha_s)} + a_s e_{\star}^{\xi(\vec{x};\beta_s)}, \quad \xi(\vec{x};\alpha) = x^1\alpha + x^2\alpha^2 + x^3\alpha^3 + \dots \quad (5.6)$$

α_s, β_s, a_s は定数. Moyal 指数関数は以下のように定義される:

$$e_{\star}^{f(x)} := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{f(x) \star \dots \star f(x)}_{n \text{ times}}. \quad (5.7)$$

非可換 KP 階層 (3.1) の N ソリトン解は Wronski 行列の quasideterminant で以下のように与えられる [7]:

$$L = \Phi_N \star \partial_x \Phi_N^{-1}, \quad (5.8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Phi_N \star f &= |W(f_1, \dots, f_N, f)|_{N+1, N+1}, \\ &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N & f \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_N & f' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} & f^{(N-1)} \\ f_1^{(N)} & f_2^{(N)} & \cdots & f_N^{(N)} & \boxed{f^{(N)}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wronski 行列 $W(f_1, f_2, \dots, f_m)$ の定義は以下の通り:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_m) := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \cdots & f_m^{(m-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

f_1, f_2, \dots, f_m は x の関数で $f' := \partial f / \partial x$, $f'' := \partial^2 f / \partial x^2$, $f^{(m)} := \partial^m f / \partial x^m$.

可換極限で, $\Phi_N \star f$ は以下のようになり, 可換な結果 [4] と一致する:

$$\Phi_N \star f \longrightarrow \frac{\det W(f_1, f_2, \dots, f_N, f)}{\det W(f_1, f_2, \dots, f_N)}. \quad (5.11)$$

式 (5.8) より, 非可換 KP 方程式の解として以下の広田変換のような表式が得られる [7, 11]:

$$u = \frac{1}{2} \partial_x \left(\sum_{s=1}^N W'_s \star W_s^{-1} \right), \quad W_s := |W(f_1, \dots, f_s)|_{ss}. \quad (5.12)$$

なお, 広田変換の非可換化は素朴な試みはすべてうまくいかない. 佐藤理論の非可換化については, [46] でも議論がなされている.

$f(x)$ と $g(x)$ が実数に値をとっても, $f(x) \star g(x)$ は一般に複素数に値をとるため, この配位の物理的解釈は自明ではなく, 今のところ特別な状況でのみ解析可能である.

- 1 ソリトン解 [5, 26]

$z := x + vt, \bar{z} := x - vt$ とおくと,

$$f(z, \bar{z}) \star g(z, \bar{z}) = e^{iv\theta(\partial_{z'} \partial_{z''} - \partial_{z'} \partial_{\bar{z}''})} f(z', \bar{z}') g(z'', \bar{z}'') \Big|_{z'=z'', \bar{z}'=\bar{z}''=\bar{z}}. \quad (5.13)$$

より, 以下が成り立つ.

$$f(z) \star g(z) = f(z)g(z). \quad (5.14)$$

したがって, 1 ソリトン解は可換空間の場合とまったく同じ振る舞いをする.

- N ソリトン解の漸近的振る舞い [21] (cf. [38].)

$t, x^i \rightarrow \pm\infty$ といった漸近的状况では, あるソリトンと共動する座標系にうつることで, N ソリトン解が可換空間のものと同じになることが証明できる. したがって, N ソリトン解は漸近的には, N 個の 1 ソリトン解の重ね合わせのような配位で, 衝突によって各ソリトンの速度や形状は変わらず, 位相のずれも可換空間の場合と同じだけ生じることが分かる. この証明には, Moyal 積の性質だけでなく, quasideterminant の種々の性質が効いている.

6 結論

時間・紙数も尽きたので, より詳しい議論は, 本記事の増補版 [24] に譲る.

Acknowledgements

この研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) から経済援助を受けています (#23740182).

A Quasideterminant のレビュー

この章では, Quasideterminant の簡単な紹介を行う. これは, 行列要素が非可換変数となっているような行列に対するある種の「行列式」であり, 1991 年に Gelfand と Retakh によって導入された [8]. 当時は純粋に数学的対象として定義されたが, まもなく非可換ソリトンや非可換対称関数との関連が指摘され始め, ここ数年は, Quasideterminant を用いたソリトン解の構成が盛んに研究されている. (レビューとして例えば, [9, 10, 22, 23, 42] がある.)

Quasideterminant は, $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 直接には, A の逆行列 $B = (b_{ij})$ を用いて,

$$|A|_{ij} := b_{ji}^{-1}, \quad (A.1)$$

のように定義される。(添え字 i, j はもちろん 1 から n までを走る。また、以後逆行列の存在はすべて仮定する。) 可換極限をとると、 A の行列式に帰着せず、 $|A|$ に比例したもの、あるいは行列式の比となる：

$$|A|_{ij} \xrightarrow{\text{可換極限}} (-1)^{i+j} \frac{\det A}{\det A^{ij}}. \quad (\text{A.2})$$

ただし、 A^{ij} は A の i 行と j 列を除いた行列である。

Quasideterminant は、定義により、一つの行列 A に対し、 n^2 種類存在する。それらは、添え字 i, j で表されているが、その代わりに A の (i, j) 成分をボックスで囲んで表記することも多く、便利なこともある：

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & \boxed{a_{ij}} & & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ブロック分割された行列の逆行列の公式を考察することで、Quasideterminant の具体的表式が以下のように帰納的に求まる：

- 1×1 matrix $A = a$ に対しては、 $|A| = a$

- 2×2 matrix $A = (a_{ij})$ に対しては、

$$\begin{aligned} |A|_{11} &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12} \star a_{22}^{-1} \star a_{21}, & |A|_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} - a_{11} \star a_{21}^{-1} \star a_{22}, \\ |A|_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21} - a_{22} \star a_{12}^{-1} \star a_{11}, & |A|_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{21} \star a_{11}^{-1} \star a_{12}, \end{aligned}$$

- 3×3 matrix $A = (a_{ij})$ に対しては、

$$\begin{aligned} |A|_{11} &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} - (a_{12}, a_{13}) \star \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \star \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} - a_{12} \star \begin{vmatrix} \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} - a_{12} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31} \\ &\quad - a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} - a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31}, \dots \end{aligned}$$

定義を見る限り行列式というよりむしろ逆行列に近い Quasideterminant であるが、行列式らしい恒等式が多数存在する。例えば、

- 非可換 Jacobi 恒等式 [8]

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ E & \boxed{i} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B \\ E & \boxed{h} \end{vmatrix} \star \begin{vmatrix} A & B \\ D & \boxed{f} \end{vmatrix}^{-1} \star \begin{vmatrix} A & C \\ D & \boxed{g} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

可換極限で、行列式に対する Jacobi の恒等式 [30] に帰着する：

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & i \end{vmatrix} A = \begin{vmatrix} A & C \\ E & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ D & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B \\ E & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & C \\ D & g \end{vmatrix}.$$

- Homological 関係式 [8]

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & \boxed{h} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} \star \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & \boxed{g} \\ E & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ D & f & \boxed{0} \\ E & h & 1 \end{vmatrix} \star \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} \quad (\text{A.5})$$

References

- [1] M. F. Atiyah and R. S. Ward, Commun. Math. Phys. **55**, 117 (1977).
- [2] S. J. Brain and S. Majid, Commun. Math. Phys. **284**, 713 (2008) [math/0701893].
- [3] E. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Commun. Math. Phys. **58**, 223 (1978).
- [4] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems (2nd Ed.)* (World Sci., 2003) [ISBN/9812381732].
- [5] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, Phys. Lett. A **278** (2000) 139 [hep-th/0007074].
- [6] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].
- [7] P. Etingof, I. Gelfand and V. Retakh, Math. Res. Lett. **4**, 413 (1997) [q-alg/9701008].
- [8] I. Gelfand and V. Retakh, Funct. Anal. Appl. **25**, 91 (1991); Funct. Anal. Appl. **26**, 231 (1992).
- [9] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. L. Wilson, Adv. Math. **193**, 56 (2005).
- [10] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J. Y. Thibon, Adv. Math. **112** (1995) 218 [hep-th/9407124].
- [11] C. R. Gilson and J. J. C. Nimmo, J. Phys. A **40**, 3839 (2007) [nlin.si/0701027].
- [12] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, Glasgow Mathematical Journal **51A** (2009) 83[arXiv:0709.2069].
- [13] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, Proc. Roy. Soc. Lond. A **465** (2009) 2613 [arXiv:0812.1222].
- [14] 浜中 真志, “ADHM/Nahm 構成法とその双対性,” 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.²
- [15] M. Hamanaka, “Noncommutative solitons and D-branes,” Ph. D thesis [hep-th/0303256].
- [16] M. Hamanaka, J. Math. Phys. **46** (2005) 052701 [hep-th/0311206].
- [17] 浜中 真志, “Solitons on Non-Commutative Spaces,” 京大数理研講究録 **1400** (2004) 88-126.
- [18] 浜中 真志, “ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張,” 応用力学研究所研究集会研究会報告 **16ME-S1**, 18 (2005) 1-12.
- [19] M. Hamanaka, Phys. Lett. B **625** (2005) 324 [hep-th/0507112].
- [20] M. Hamanaka, Nucl. Phys. B **741**, 368 (2006). [hep-th/0601209].
- [21] M. Hamanaka, JHEP **0702**, 094 (2007) [hep-th/0610006].
- [22] M. Hamanaka, arXiv:1101.0005 [hep-th].

²私書いた解説記事は、私のホームページ [<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html>] から入手可能です。

- [23] M. Hamanaka, arXiv:1012.6043 [math-ph].
- [24] 浜中 真志, “ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張 (増補版),”
[<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html>]
- [25] M. Hamanaka and K. Toda, Phys. Lett. A **316** (2003) 77 [hep-th/0211148].
- [26] M. Hamanaka and K. Toda, J. Phys. A **36** (2003) 11981 [hep-th/0301213].
- [27] K. C. Hannabuss, Lett. Math. Phys. **58** (2001) 153 [hep-th/0108228].
- [28] J. A. Harvey, [hep-th/0102076].
- [29] Y. Hiraoka and Y. Kodama, “Normal form and solitons,” arXiv:nlin/0206021.
- [30] 広田 良吾, 「直接法によるソリトンの数理」(岩波書店, 1992年) [ISBN/4-00-005676-X]
- [31] C. M. Hull, Phys. Lett. B **387**, 497 (1996) [hep-th/9606190].
- [32] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov, Commun. Math. Phys. **221** (2001) 385 [hep-th/0002193].
- [33] N. Marcus, Nucl. Phys. B **387** (1992) 263 [hep-th/9207024]; “A tour through N=2 strings,” hep-th/9211059.
- [34] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twistor theory* (Oxford, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].
- [35] 増田 哲, “Ernst 方程式再訪,” 応用力学研究所研究集会報告 **17ME-S2**, 17 (2006) 1-19.
- [36] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99; H. J. Groenewold, Physica **12** (1946) 405.
- [37] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A **5** (1990) 1389; Nucl. Phys. B **361** (1991) 469; Nucl. Phys. B **367** (1991) 83.
- [38] L. D. Paniak, [hep-th/0105185].
- [39] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].
- [40] N. Sasa, Y. Ohta and J. Matsukidaira, J. Phys. Soc. Jap. **67**, 83 (1998).
- [41] I. Strachan, J. Geom. Phys. **21** (1997) 255 [hep-th/9604142].
- [42] 鈴木 達夫, “非可換行列式とその応用,” [<http://www.aoni.waseda.jp/suzukita/>].
- [43] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162]
- [44] K. Takasaki, J. Geom. Phys. **37** (2001) 291 [hep-th/0005194].
- [45] K. Toda, JHEP Proceedings of workshop on integrable theories, solitons and duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002 [JHEP PRHEP-unesp2002/038].
- [46] N. Wang and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jap. **73** (2004) 1689.
- [47] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.