ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張　浜中真志 (名大多元)

動機（非可換Ward予想）

ASDYM eq. $\xrightarrow{\text{非可換化}}$ NC ASDYM eq.

↓　　　　↓

KdV eq.
Toda eq.
NLS eq. …

$\longrightarrow$ [MH-Toda, PLA2002]

NC KdV eq.
NC Toda eq.
NC NLS eq. …

「可積分系研究の新しい地平」か？

[Mason-Woodhouse]　　[MH, NPB2006]

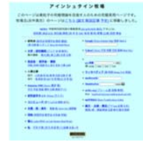
非可換空間: $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$

・背景フラックスという物理的意味
・新しい物理的対象
・弦理論への応用…

目標（期待すること）

・非可換Ward予想？(対応する物理系の存在)
・非可換階層の存在？（方程式の系統的導出）
・無限個の保存量？（ある種の可積分性）
・無限次元の対称性？（変形アフィンリー環？）
・Nソリトン解？（新しい解、新しい振る舞い？）
・タウ関数？（→非可換佐藤理論）
・(N=2)弦理論への応用？(split計量)
・非可換ツイスター理論
・非可換可積分系の基礎付け(特に $[t,x]=i\theta$)
　（Seiberg-Witten map, normal form, … → 時間について無限階の微分方程式を処理）

結果と現状



・非可換ウォード予想→大体OK
　（対応する物理系は存在！in N=2弦理論w/B場）
・非可換階層・無限個の保存量→OK (意義は不明)
・Nソリトン解→Quasideterminantで構成
　低次元・高次元に共通した結果→普遍的定式化?

$$L_{KP} = W * \partial_x W^{-1} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} + \cdots \qquad W * y_k = 0$$

$$W * f := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N & f \\ y_1' & \cdots & y_N' & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & \boxed{f_N^{(N)}} \end{vmatrix}$$

$$\partial_z (J^{-1} * \partial_{\tilde{z}} J) - \partial_w (J^{-1} * \partial_{\tilde{w}} J) = 0$$

$$J = \begin{vmatrix} \boxed{0} & -1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{0} \\ 1 & \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-n} & \Delta_{-n} \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-n} & \Delta_{1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta_{n-1} & \Delta_{n-2} & \cdots & \Delta_0 & \Delta_{-1} \\ \boxed{0} & \Delta_n & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_1 & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}$$

・タウ関数→類似物はWronski行列のQuasideterminantとして得られた（広田変換は×）

$u = 2\partial_x^2 \log \tau$

・N=2弦理論への応用→可換空間でも難
・非可換可積分系の基礎付け（素朴には絶望的）
　Seiberg-Witten map, normal formとも一筋縄ではない(少なくとも非可換KdVと可換KdVが等価ではないことは示される)

まとめと今後の展望

・可積分っぽい兆候は見られるが可積分性の立証は（定義すら）いまだに難しい

「地平線はありそうだが、太陽はまだ上っていない」

・Quasideterminant解→新しい定式化（佐藤理論の高次元化）の示唆 (AGTへの応用?)

新しい知見