ローレンツ不変な質量項をもつEinstein重力理論や修正重力理論の定式化とその量子化

東京理科大学 基礎工学部 教養 (長万部キャンパス) 佐藤喜一郎

2013年8月21日「場の理論と弦理論」 YITP

0. はじめに—非線形massiveGravity登場

Massive spin 2 field theory としてのFierz-Pauli理論(FP理論)

Kinetic term

$$\mathcal{L}^{(2)}_{EH} = \frac{1}{2}[\partial_\lambda h^{\mu\nu} \cdot \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\lambda h \cdot \partial^\lambda h - 2\partial_\mu h^{\mu\lambda} \cdot \partial^\nu h_{\nu\lambda} + 2\partial^\mu h_{\mu\lambda} \cdot \partial^\lambda h], \quad (1)$$

Mass term

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}} = -\frac{m^2}{2}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2), \quad (2)$$

FP理論の運動方程式は

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(\Box + m^2)h - \partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu} \\ -\partial_\nu\partial^\lambda h_{\lambda\mu} + \partial_\mu\partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}\partial^{\lambda\rho}h_{\lambda\rho} \quad &= \quad 0,\end{aligned}$$

何度か組み合わせるとポアンカレ群のユニタリ表現から期待されるBargman-Wigner方程式が得られる。

$$(\Box + m^2) h_{\mu\nu} = 0, \quad h = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

(Fierz-Pauliの方程式と呼ぶ！) 4次元時空で，$h_{\mu\nu}$が質量がm，自由度5の理論になっている。

Fierz-Pauli理論の問題点

1. 余分なスカラーモードが，ゴースト(BD ghost)であり，vectorモードのゲージ条件との兼ね合いで簡単な補助条件では排除できない
   加えて，propagatorはProca形式的で高エネルギーの振る舞いが絶望的

2. 非線形版の質量項が簡単には見出せない
   宇宙項はやはり宇宙項である(BD)

3. ゼロ質量極限がgravitonの理論にならない (vDZV問題)
   スカラーモードがenergy-momentum tensorのtraceと結合するため，

質量項については，Boulware-Deser(1972)でわかっていたが，Arkani-Hamed-Georgi-Schwarz(2003)が決定版。しかし，2010年に，De Rhamらの非線形massive重力理論がでてきた。

dRG, dRGT

de Rham-Gabadaze (2010), de Rham-Gabadaze-Tolly (2011) 以降，Galileon 程度の高階微分を含む FP 型質量項の理論が提唱された。この理論は，補助場に関する複雑な拘束条件があからさまに解け，自由度が 5 の理論である。この登場以降，特に宇宙論で graviton が質量をもつような可能性の研究が盛んに行われた。

- 本質的には ADM 分解後の Hamilton 形式
- BFV 形式に書き換えられれば共変性は明白だが，難しそう
- 自由度が５であることと，ユニタリティは別物
- Deser らの partially-massless が再燃？本当の意味で massive か？

参考—FP 理論におけるvDVZ 不連続問題とは

FP 理論の Propagator は

$$\frac{1}{p^2 - m^2}\left(\frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\mu\alpha}\tilde{\eta}_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\mu\beta}\tilde{\eta}_{\nu\alpha} - \frac{1}{3}\tilde{\eta}_{\mu\nu}\tilde{\eta}_{\alpha\beta}\right),$$

ここで，$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$. (これがどうやって得られるかは後述)

一方，Feynman-like gauge での graviton propagator は

$$\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right),$$

これを比較すると，零質量極限 $m^2 \to 0$ において以下の 2 つの問題がある事がわかる

1. singular $1/m^2$ factorがある

2. 係数が1/2と1/3で異なる

(van Dam-Veltman (1970) and Zakharov (1970))

・さらによく知られていない様々な問題がある

量子版のFierz-Pauli理論のpropagator(実はT^*の2点関数！)は，Fierz-Pauliの方程式から期待される関係を満たさない！

$$< \mathrm{T}^* h(x) h_{\alpha\beta}(y) >= \eta^{\mu\nu} < \mathrm{T}^* h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(y) > \neq 0.$$

$$< \mathrm{T}^* \partial_x^\mu h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(y) > \neq 0.$$

余分なスカラーモードが伝搬している！というのが定説であるが，それ以外にも，transverse条件も壊している。(T積とT^*積の差を直接見たいが，U_0が簡単に他の場で書けるProcaのように，簡単ではない。)

また，そもそも，propagatorを得るには，de Donder条件 (harmonic gauge)

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h = 0,$$

に対応する

$$+\frac{1}{2\alpha'}(\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h)^2,$$

というゲージ固定項を勝手に？導入し，ユニタリゲージ $\alpha' \to +\infty$ を採る必要がある！

$$\begin{aligned} F.T.\Delta_{F\,\mu\nu,\alpha\beta} \quad = \quad & A(p^2)\delta_{\mu\nu,\alpha\beta} + B(p^2)\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + C(p^2)\eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta \\ & + D(p^2)\eta_{\alpha\beta}p_\mu p_\nu + E(p^2)(\eta_{\mu\alpha}p_\nu p_\beta + \eta_{\mu\beta}p_\nu p_\alpha + \eta_{\nu\alpha}p_\mu p_\beta + \eta_{\nu\beta}p_\mu p_\alpha) \\ & + F(p^2)p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta \end{aligned}$$

と展開したとき，例えば，$d=4$では,

$$F(p^2)=-\frac{\frac{1-\frac{1}{2\alpha'}}{\frac{1}{4\alpha'}p^2+m^2}+4\frac{\alpha'-\frac{1}{2}}{p^2-2\alpha' m^2}}{p^2+\frac{\frac{\alpha'}{2\alpha'-1}(\frac{1}{2\alpha'}p^2-m^2)(\frac{2\alpha'-\frac{1}{2}}{\alpha'}p^2-3m^2)}{\frac{1}{4\alpha'}p^2+m^2}}\times\frac{1}{p^2-m^2},$$

となり，$\alpha'\to+\infty$では,

$$f(p^2)\to\frac{2}{3}\frac{1}{m^2}\frac{1}{p^2-m^2},$$

となり，ようやくvDV等に一致する。

参考 質量項の拡張

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m^2}{2}[h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - bh^2], \tag{4}$$

$b = 1$ が Fierz-Pauli 理論，このモデルの運動方程式は

$$\begin{aligned}
(\Box + M^2)(\Box + m^2)h_{\mu\nu} &= 0, &(5)\\
(\Box + M^2)h &= 0, &(6)\\
\partial^\mu h_{\mu\nu} &= a\partial_\nu h, &(7)
\end{aligned}$$

ここで，M は，parameter a, 時空の次元 d を用いて

$$M^2 = \frac{db - 1}{(d-2)(1-b)}m^2, \tag{8}$$

のように表せる。この理論では，一般のbでは $(m,\ M)$ の2重質量の理論になっている。Tachyon free condition

$$\frac{1}{d} \leq b < 1, \tag{9}$$

4次元では$1/4 \leq b < 1$．この拡張モデルでは，$a = 1$ のFierz-Pauli理論への極限において質量無限大！となり，スカラーモードが伝搬しない。FP理論の特異性はこのモデルでよく分かる。

予備知識—宇宙項は質量項にはなれない！

宇宙定数は次元解析からは質量項になれそうだが，そうはならない。

1. 単純に弱場近似で $\eta_{\mu\nu}$ から展開すると，2次では，Fierz-Pauli型ではない質量項がでる (あからさまなBDゴースト, 自由度問題！)

$$\mathcal{L}_m^{(2)} = -\frac{m^2}{2}[h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^2], \tag{10}$$

2. 展開の1次はEinstein方程式に相当するので，宇宙項があれば1次にも残り，物質との相互作用がなくても $\eta_{\mu\nu}$ で展開する根拠がない

3. 宇宙項ありの解であるdSやAdS解として背景に展開しなおすと，masslessモードになる ?? (Higuchi 1987, Witten 1990?)

4. 背景計量$\eta^{\mu\nu}$と$g_{\mu\nu}$の関数として一般に議論されたが面白い関数は見出されていない。Boulware-Deser(1972)

我々の新理論の指針 (最新版)

1. Fierz-Pauli mass term の絶対視はやめて，6 自由度の理論を出発点とし，必要があれば係数調整して Fierz-Pauli に戻る。BD での g の任意の関数で作用を探すことに再挑戦する。

2. 多い 1 自由度が残ったら，隠された gauge symmetry を探し，scalar BRS invariance な物理的状態の意味で 5 自由度の量子論を構成する
新しい kugo-Ojima 型補助条件

3. 宇宙項は宇宙項として別途導入できるようにしておく

4. 状況証拠から BD モードには Weyl 対称性が利きそうなので，できれば Weyl ゲージ場を導入した共形不変に構成する。

一般化されたDirac-Uchiyama-Freund型共形重力理論

重力場$g_{\mu\nu}$，Weylゲージ場W_μ，スカラー場ϕを基本場とする理論のWeyl不変な作用は，Dirac 1973，Uchiyama 1973，Freund 1974，Padmanabhan 1987の作用を最大限一般化して，

$$
\begin{aligned}
S_0 &= a\int d^Dx\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{4}\frac{(D-2)}{(D-1)}R\phi^2\right] \\
&\quad +b\int d^Dx\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu-\frac{1}{2}(D-2)W_\mu\right)\phi\cdot\left(\partial_\nu-\frac{1}{2}(D-2)W_\nu\right)\phi \\
&\quad +c\int d^Dx\sqrt{-g}\phi^{\frac{2D}{D-2}}, \\
S_1 &= \int d^Dx-\frac{1}{4e}\sqrt{-g}\phi^{\frac{2(D-4)}{D-2}}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}f_{\mu\lambda}f_{\nu\rho},
\end{aligned}
$$

$$S_2 \quad = \quad \xi \int d^D x \sqrt{-g} \phi^2 \left[R + 2(D-1) g^{\lambda\rho} \nabla_\lambda W_\rho + (D-1)(D-2) g^{\lambda\rho} W_\lambda W_\rho \right]$$

(反対称テンソル場は省略) ここでWeyl変換は，以下のように定義した。

$$g'_{\mu\nu} \quad = \quad \mathrm{e}^{2\Lambda(x)} g_{\mu\nu}, \tag{11}$$

$$W'_\mu \quad = \quad W_\mu - \partial_\mu \Lambda(x), \tag{12}$$

$$\phi' \quad = \quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(D-2)} \phi, \tag{13}$$

freeパラメータはa，b，c，ξの４つあるが，

$$S_0 + S_1 + S_2 \quad = \quad a' \int d^D x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\xi-\frac{1}{8}\frac{(D-2)}{(D-1)}a\right)\int d^Dx\sqrt{-g}\phi^2R\\
&+2(D-1)\left(\xi+\frac{1}{8}\frac{(D-2)}{D-1}(a'-a)\right)\int d^Dx\frac{1}{2}\sqrt{-g}\phi^2g^{\mu\nu}\nabla_\mu W_\nu\\
&+(D-1)(D-2)\left(\xi+\frac{1}{8}\frac{D-2}{D-1}(a'-a)\right)\int d^Dx\sqrt{-g}\phi^2g^{\mu\nu}W_\mu W_\nu\\
&+c\int d^Dx\sqrt{-g}\phi^{\frac{2D}{D-2}}+\int d^Dx\left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{-g}\phi^{\frac{2(D-4)}{D-2}}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}f_{\mu\lambda}f_{\nu\rho},
\end{aligned}
$$

となり，aとξは特別な結合$\xi-\frac{1}{8}\frac{(D-2)}{(D-1)}a$でしか現れないので，独立なものは１つ減っている。また，$a'=a+b$とおいた。

以下では，BRS不変性に基づき，一般座標変換に対するBRS変換と独立にWeyl変換にもBRS変換を導入し，Kugo-Ojimaの補助条件を設定して量子論を構成する。

G.C.Tに対するBRS変換は

$$\delta^* = \delta - \delta x^\mu \partial_\mu,$$

$$\delta x^\mu = \kappa C^\mu. \quad \delta g_{\mu\nu} = -\kappa \partial_\mu C^\lambda g_{\lambda\nu} - \kappa \partial_\nu C^\lambda g_{\mu\lambda}, \quad \delta W_\mu = -\kappa \partial_\mu C^\lambda A_\lambda, \quad \delta\phi = 0,$$
$$\delta C^\mu = 0, \quad \delta \bar{C}_\mu = iB_\mu, \quad \delta B_\mu = 0,$$

Weyl変換に対するBRS変換は，GCTとは独立に以下のように定義する。

$$\delta^{\mathrm{W}} g_{\mu\nu} = 2C(x) g_{\mu\nu}, \quad \delta^{\mathrm{W}} W_\mu = -\partial_\mu C(x), \quad \delta^{\mathrm{W}} \phi = -\frac{1}{2}(D-2)C(x)\phi,$$

$$\delta^{\mathrm{W}} C(x) = 0, \quad \delta^{\mathrm{W}} \bar{C} = iB, \quad \delta^{\mathrm{W}} B = 0, \mathrm{otherwies} = 0,$$

Unitaryゲージ(Einsteinゲージ)での量子化

Weyl不変性に対するゲージ条件としては，有名なものに，Einstein gauge

$$\phi = const. = M_p{}^{\frac{D-2}{2}},$$

がある。このゲージ条件は過去にも使われているが，そのときは，一般座標変換に対するゲージ固定を考慮してしなかったため，我々は，これを徹底的に調べてみた。すると，作用はG.C.T.不変性を考えるとそれほど気楽には作れない。実際，安直に，

$$-i\delta\left(\int d^D x \bar{C}(\phi - M_p{}^{\frac{D-2}{2}})\right) = \int d^D x(\phi - M_p{}^{\frac{D-2}{2}})B + i\int d^D x \bar{C}(-)\frac{D-2}{2}\phi C,$$

という形を作ってしまうと，FP ghost$C$がスカラー場であれば，Nakanishi-

Lautrap 場 B と FP anti-ghost $\bar{C}$ はスカラー場ではなく，スカラー密度と考えなければならなくなる。

これは煩雑なので，同じゲージ条件を与えることになるが,

$$
\begin{aligned}
& -i\delta\left(\int d^D x\sqrt{-g}\bar{C}(\phi - M_p{}^{\frac{D-2}{2}})\right) \\
= \quad & \int d^D x\sqrt{-g}(\phi - M_p{}^{\frac{D-2}{2}})B + i\int d^D x\sqrt{-g}\bar{C}DC(\phi \\
& -M_p{}^{\frac{D-2}{2}}) + i\int d^D x\bar{C}(-)\frac{D-2}{2}\phi C,
\end{aligned}
$$

とする。(C と $\bar{C}$ を汎関数積分でで消去すると Hayashi-Kugo [] に同じ。) 結果は大差はないが，ゲージ条件とゲージ固定項の対応はそれほど簡単ではないことがわかる。

さて，Einstein ゲージでの作用は,

$$
\begin{aligned}
S_{Einstein} \quad = \quad & \xi' {M_p}^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} R + c {M_p}^D \int d^D x \sqrt{-g} \\
& - \frac{1}{4e} {M_p}^{D-4} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} f_{\mu\lambda} f_{\nu\rho} \\
& + \int d^D x (D-1)(D-2) \left(\xi' + \frac{1}{8} \frac{D-2}{D-1} a' \right) {M_p}^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} W_\mu W \\
& + {M_p}^{D-2} \int d^D x \left(\partial_\mu \left(\tilde{g}^{\mu\nu} \right) B_\nu + i\kappa \tilde{g}^{\mu\nu} \phi^2 \partial_\mu \bar{C}_\lambda \partial_\nu C^\lambda \right) \\
& + i \int d^D x \bar{C} (-) \frac{D-2}{2} {M_p}^{(D-2)/2} C,
\end{aligned}
$$

となる。ここで,

$$
\kappa = {M_p}^{-2}, \quad \Lambda_{cosm.} = 2c {M_p}^2
$$

とおいて，ξ' を適当に選べば，Einstein 重力理論 (宇宙項つき)＋massive ベクトル場の理論に帰着する。5 自由度であるが，graviton が 2 massless 自由度，massive ベクトル場 3 自由度の理論である。Weyl ゲージ場が質量をもってしまうので，理論の共形不変性はまったくみえなくなってしまった。

ちなみに，Weyl ゲージ場の質量項は正し符号で用意されるので，Tachoyon 問題は発生しない。唯一問題なのは，Einsitein 重力のスケールを考えると，その質量は Plank mass そのものになってしまうことであろう。このような重い基本粒子は，重力場としか結合しないため，めったに観測されない。ダークマターとしてみなすのであれば，Weyl ゲージ場を物質場として扱えばよい。W_μ を無視すれば普通の宇宙項付き Einstein 重力，W_μ があれば Weyl ゲージ場がダークマターの修正重力というように理解する。

5. 新しい質量項の候補

質量項の候補はBoulware-Deserで議論したgの単純関数ではなく，無限個用意する。

まず，$\sqrt{-g}$の関数として探してみよう。単純な冪型で探す

$$\mathcal{L}_m(a) = \frac{m^2}{K^2}\lambda\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a},$$

ただし，$a=0$の場合には宇宙項そのものになるので，この時点では除外しておくが，後で，意外な形で復活できる。

さて，この項の弱場近似$\eta_{\mu\nu}+Kh_{\nu\nu}$での展開は,

$$\mathcal{L}_m^{(1)}(a) = \frac{1}{2}(1+a)\frac{m^2}{K}\lambda\left(\sqrt{-\eta}\right)^{1+a}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(1+a)\frac{m^2}{K}\lambda h,$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_m^{(2)}(a) &= \frac{1}{4}(1+a)m^2\lambda\left(\sqrt{-\eta}\right)^{1+a}\Big[(a+1)\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}-\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}\Big] \\
&= -\frac{1}{2}(1+a)m^2\lambda\Big[h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}-\frac{1+a}{2}h^2\Big],
\end{aligned}
$$

なので，$a=+1$ ととればFierz-Pauli型になることがわかる。また，$a=0$ が今は避けている宇宙項である。

スカラーモードがタキオンにならないための条件 (K.S., 2005, hep-th/0501042, 参考にある) から，

$$
\frac{1}{d} \leq \frac{1+a}{2} \leq 1,
$$

$$
\frac{2-d}{d} \leq a \leq 1,
$$

である。時空が4次元ならば,

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq 1,$$

となり，実は$a = -1$などはとることができない。$\sqrt{-g}$のべきとしては,
$\frac{1}{2}$から2までの正冪に限られることが分かる。

ただし，これらの項，単独では面白くないことはBDですでにわかっているので，複数個足すことを考えよう。

$$\mathcal{L}_m(a_i) = \frac{m^2}{K^2}\lambda(a_i)\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a_i},$$

$$\mathcal{L}_m = \sum_i \mathcal{L}_m(a_i) = \sum_i \frac{m^2}{K^2}\lambda(a_i)\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a_i},$$

ここで $\lambda(a_i)$ は a_i の冪の違いごとに導入されたパラメータである。

ここまでくれば，$\lambda(a_i)$ を無限個足すついでに，$\lambda(a_i)$ 自身が分布関数であるような意味で,

$$\mathcal{L}_m = \frac{m^2}{K^2}\int da\,\lambda(a)\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a}, \tag{14}$$

まで拡張して考えることが考えられる。

新しい質量項の意味1

新しい質量項を弱場近似$\eta_{\mu\nu}+Kh_{\nu\nu}$のもとで展開すると,

$$\mathcal{L}_m^{(1)}=\int da\,\frac{1}{2}(1+a)\frac{m^2}{K}\lambda(a)h,$$

$$\mathcal{L}_m^{(2)}=\int da\frac{1}{4}(1+a)m^2\lambda(a)\Big[(a+1)h^2-h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}\Big],$$

となる。

$\lambda(a)$の性質によっては,

$$\int da\,(1+a)\lambda(a)=0,$$

となり，1次の項は零になる可能性もある。

また，もし,
$$\int da\,(1+a)\lambda(a) \neq 0,$$
のときは,
$$\int da\,(1+a)^2\lambda(a) = 2\int da\,(1+a)\lambda(a),$$
という性質を満たすのであれば，実質的な質量項としてはFirez-Pauli型になる！

ただし，積分範囲をどうとるべきかは現時点では不明でよくわからない。(純粋主義者なら$[-\frac{1}{2},1)$か) また，どういう種類の積分性を仮定するかによっても，事情は変わってくる。

とにかく，分布でまともな質量項を与える可能性はある。

新しい質量項の意味2

とりあえず，普通の連続分布の代表例で，$a = \bar{a}$を中心に，正規分布している場合を考えよう。

$$\lambda(a) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(a-\bar{a})^2}{\sigma^2}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} da \, \frac{m^2}{K^2} \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(a-\bar{a})^2}{\sigma^2}} \left(\sqrt{-g}\right)^{1+a} \\ &= \frac{m^2}{K^2} \lambda_0 \left(\sqrt{-g}\right)^{1+\bar{a}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\sigma \log \sqrt{-g})^2} \end{aligned}$$

となる。$\sqrt{-g}$に関して，Liouville的理論となる。(冪の違いに注意)

新しい質量項の意味3

もし，$\lambda(a)$ として，δ 関数的な分布まで許せるのであれば，a_i の個別の値をとりだすことができる。実際，普通のRiemann積分可能な部分を $\tilde{\lambda}(a)$ として

$$\lambda(a) = \sum_i \lambda_i \delta(a - a_i) + \tilde{\lambda}(a),$$

のように書くことができる。たとえば $a_i = 0$ の部分は宇宙項である。

単純Fierz-PauliやKimura, Hamamoto らのASGも離散分布として作れ，mixすることができる。

新しい質量項の意味4

また，長さの次元の y を導入して，$a = my$ この y を5次元目の時空の座標と考えられないかと誰しも考えるであろう。その場合には，$\lambda(y)$ は単なる分布関数ではなく，5次元座標に依存する場としてとらえたくなるかもしれない。(できていない)

また，5次元以上の高次元時空に埋め込みこみ，次元簡約する方法をいろいろ検討しているが，満足するものを見出せていない。

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} (\sqrt{-g})^{\alpha} & 0 \\ 0 & (\sqrt{-g})^{\beta} g_{\mu\nu} \end{pmatrix},$$

型でどうか？

Friedman方程式

質量項を入れたFriedman方程式を導こう。変分で質量項は以下のような寄与を与える。

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{\kappa}\int da'\lambda(a')\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a'},$$

$$\delta\mathcal{L}_m = \frac{1}{\kappa}\int da'\frac{1}{2}(1+a')\lambda(a')\left(\sqrt{-g}\right)^{a'}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu},$$

以下では

$$L = \int da'\frac{1}{2}(1+a')\lambda(a')\left(\sqrt{-g}\right)^{a'}$$

と記す。

FLRW時空の計量(一様等方宇宙)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

ここで，aがスケール因子，Hubble膨張率は,

$$H = \frac{\dot{a}}{a},$$

Friedman方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{c^2 K}{a^2} + \frac{c^2 \Lambda}{3} - \frac{c^2}{3}L,$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{8\pi G}{c^2}P - \frac{c^2 K}{a^2} + c^2\lambda - c^2 L,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{c^2}{3}\Lambda - \frac{c^2}{3}L,$$

物質の状態方程式

$$w = \frac{P}{\rho c^2},$$

と表わすと，

$$\dot{H} = -4\pi G(1+w)\rho + \frac{c^2 K}{a^2},$$

ここには，Λ や L は効かない！

質量項の宇宙論的効果

FLRW計量では

$$\sqrt{-g} = a^3 \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-Kr^2}},$$

である。

単純な質量項では

$$L = \frac{1}{2}(1+a')\lambda(\sqrt{-g})^{a'} = \frac{1}{2}(1+a')\lambda\left(a^3 \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-Kr^2}}\right)^{a'},$$

というように空間点に依存する。$a' = 1$ の単純 Fierz-Pauli 型では，Friedman 方程式に a^3 の寄与を与える。Gauss 型を採れば，指数関数でさ

らにenhanceする。座標依存を除けば，将来的に必ず膨張率を小さくする効果をもたらす。

自由度が6の場合のBDゴースト閉じ込め作戦

1計量モデルでの質量項を最大限拡張したが，最終的に分布関数を計算してFP型にならないような分布を作ってしまうと，BDゴーストが生で現れる。これをresidualなDeser-Waldron型のゲージ変換

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\,\Phi,$$

で消去できないかと格闘したが，$\Box\Phi = 0$の対称性しかなく，本格的なゲージ対称性としては確認されていない。

Einstein Gravityから共形不変な理論に拡張すると，Weyl変換が自由にできるので，この任意関数への制約が緩和される可能性があり，Einsteinゲージを取る前のDirac-Utiyama-Freund型の重力理論で計算中である。

また，テクニカルにStueckelberg場が2種類必要である。

質量項が，一般共変性とWeyl不変性を一気に破るため，背景時空での共変性を破らないためのStueckelberg場をϕ^a

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + KH_{\mu\nu},$$

で導入する。これに関しては，量子化で新たにFP(Feddeev-Popov)ゴーストが必要である！(deRhamらなど導入していないが。。。) 場の変数変換をIzawaのBRS処方を使って行うと，必要なFPゴーストは

$$-i\bar{C}^{\mu\nu}(2\eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu C^b),$$

(deRhamらはこれがないのでユニタリではないのでは？)

Izawa's Procedure によるStueckelberg場の導入 (ϕ編)

$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + Kh_{\mu\nu}$, で一旦Stueckelberg場$\phi^a$を導入し，質量項が壊している一般座標不変性を回復させる。このことを量子論としてきちんと行うには，Izawa's procedureに従い，$(g_{\mu\nu}, \theta_\lambda)$から

$$(g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - (\eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + Kh_{\mu\nu}), \phi^a)$$

への変数変換を「ゲージ固定条件」のように扱い，BRS変換を導入して定式化する。この際のBRS変換はtopological field theoryに似ている。

$$\delta g'_{\mu\nu} = 0, \quad \delta h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}, \quad \delta\phi^a = C^a, \quad \delta\bar{C}^{\mu\nu} = iB^{\mu\nu},$$

Stueckelberg場を導入するための “Gauge fixing” と FP ghost terms は

$$
\begin{aligned}
&-i\delta\Big[\bar{C}^{\mu\nu}(\eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + Kh_{\mu\nu})\Big] = \\
&B^{\mu\nu}(\eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b + Kh_{\mu\nu}) \\
&-i\bar{C}^{\mu\nu}(2\eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu C^b\partial_\mu\theta_\nu + \partial_\nu\theta_\mu),
\end{aligned}
$$

となる。$B_{\mu\nu}$ は運動方程式で消去し，たくさんあるFPゴーストも当面無関係になっているので無視する。(もし，非線形版を作る場合にはそうもいっていられない)

これ以外，Weyl不変性を回復させるものを考える必要がある。K を場に格上げできないか検討中である。Dirac-Utitama-Feund型のWeyl不変な理論にはϕというスカラ場ーがありκと直接関係していた。

まとめと展望

質量分布関数 $\lambda(a)$ を導入し無限個の質量項をもつ，Einstein 及び Weyl 不変な重力場の量子論を構成中である。

分布関数として何がよいのか指針がないので try-and-error 中 (求む！アイディア，特に 5 次元モデル)

宇宙論的な解を探すと，Friedman 方程式が座標依存するので失敗か？しかし，$\dot{H}$ には意味があるので謎が多い。

質量項の存在のために失われた一般座標変換（と必要なら Weyl 不変性）に対するゲージ不変性を回復するためには Stuecklberg 場を導入する必要があり，目下，計算中である。(分布関数に依存する部分があるので面倒)