5 次元 SYM と 2 次元 q-YM

松宮　就章 (東京大学)

2013/8/19@京都

Phys.Lett. B716 (2012) 450-453[arXiv:1206.5966] T.Kawano, N.M
Nucl.Phys. B869 (2013) 493-522[arXiv:1210.2855] Y.Fukuda,T.Kawano, N.M

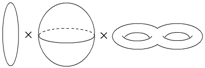
導入

- 動機

1. 4D/2D 双対性
   - ゲージ理論 on S^4 $\Leftrightarrow$ Liouville on Σ
     [Alday,Gaiotto,Tachikawa]
   - ゲージ理論 on $S^3 \times S^1$ $\Leftrightarrow$ q-deformed YM on Σ
     [Gadde,Rastelli,Razamat,Yan]
2. 6 次元 $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論 (M5 ブレーン)
   - 双対性の背後にはこの理論がある？
   - ラグランジアンは知られていない

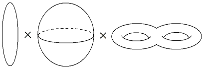
導入

6D $\mathcal{N} = (2,0)$ on $S^1 \times S^3 \times \Sigma$ (l, R: S^3, S^1 の半径)



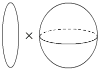
導入

6D $\mathcal{N} = (2,0)$ on $S^1 \times S^3 \times \Sigma$ $\quad$ (l, R: S^3, S^1 の半径)



[Gaiotto]

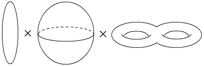
4D $\mathcal{N} = 2$ on $S^1 \times S^3$



4 次元理論はリーマン面によって決まる。

導入

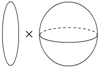
6D $\mathcal{N} = (2,0)$ on $S^1 \times S^3 \times \Sigma$ $(l, R$: S^3, S^1 の半径)



[Gaiotto]

Dual

4D $\mathcal{N} = 2$ on $S^1 \times S^3$ $\longleftrightarrow$ 2D q-YM on Σ



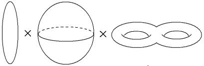
$q = \exp(-\frac{2\pi R}{l})$

[Gadde,Rastelli,Razamat,Yan]

予想：この 4 次元理論は 2 次元 q-YM と双対？

導入

6D $\mathcal{N} = (2,0)$ on $S^1 \times S^3 \times \Sigma$ $(l, R$: S^3, S^1 の半径$)$



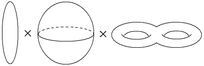
How ?

2D q-YM on Σ

双対な 2 次元理論は 6 次元理論からどのように導出するか？

導入

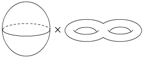
6D $\mathcal{N}=(2,0)$ on $S^1\times S^3\times\Sigma$ $\quad(l,R\text{: } S^3,S^1$ の半径)



$R=\frac{g^2}{4\pi^2}$

[Douglas]
[Lambert,Papageorgakis, Schmidt-Sommerfelt]

5D $\mathcal{N}=2$ SYM on $S^3\times\Sigma$

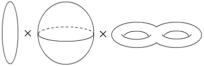


2D q-YM on Σ

6 次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ を S^1 コンパクト化すると 5 次元 $\mathcal{N}=2$SYM

導入

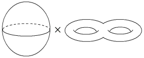
6D $\mathcal{N}=(2,0)$ on $S^1\times S^3\times\Sigma$ $(l, R$: S^3, S^1 の半径)



$R=\frac{g^2}{4\pi^2}$

[Douglas]
[Lambert,Papageorgakis, Schmidt-Sommerfelt]

5D $\mathcal{N}=2$ SYM on $S^3\times\Sigma$



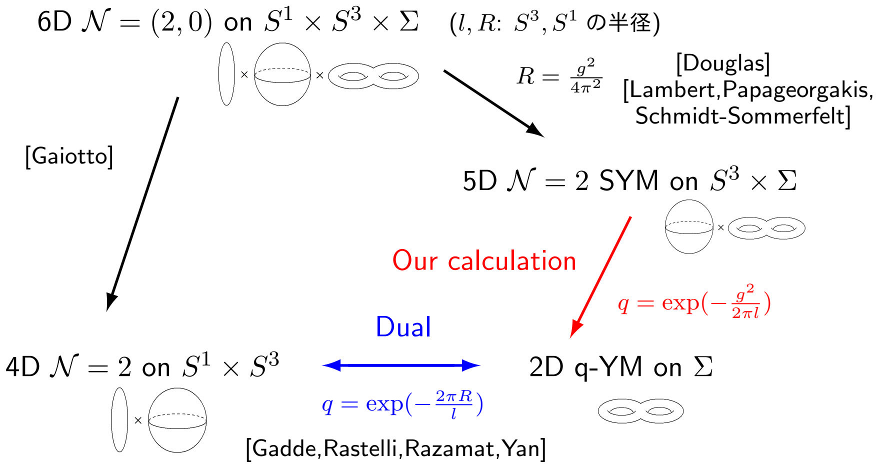
Our calculation

$q=\exp(-\frac{g^2}{2\pi l})$

2D q-YM on Σ

5D $\mathcal{N}=2$ SYM を局所化 (localization) によって調べた。

導入



今回の結果はこれらの予想と合致。

結論

- 5 次元 $\mathcal{N}=2$ SYM on $S^3\times\Sigma$ の分配関数（相関関数）は 2 次元 q-YM on Σ の分配関数（相関関数）と一致。
- パラメータ q は、今回導いたものと、双対性から予想されたもので一致。→今回の結果と予想が合致。

5D $\mathcal{N}=2$ SYM

1. ベクトル多重項 $(\sigma, A_M, \Psi^{\dot{\alpha}}, D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}})$:adjoint (gauge 群 G)
   - $\sigma \cdots$ 実 scalar
   - $A_M \cdots$ gauge 場 $(M = 1, 2, \cdots, 5)$
   - $\Psi^{\dot{\alpha}} \cdots$ symplectic Majorana
     $$\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}} = (\Psi_{\dot{\alpha}})^\dagger = (\Psi^{\dot{\beta}})^T C_5 \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$
   - $D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \cdots$ 補助場
     $$D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -(D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}})^\dagger, D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = D^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}, D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\alpha}} = 0$$
2. ハイパー多重項 $(H_{\dot{\alpha}}, \Xi, F_{H\alpha})$:adjoint
   - $H_{\dot{\alpha}} \cdots$ 複素 scalar
   - $\Xi \cdots$ spinor
   - $F_{H\alpha} \cdots$ 補助場

$\dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2$:SU(2)$_R$

$\alpha, \beta = 1, 2$:SU(2)$'$

5D $\mathcal{N} = 2$ SYM

・Killing spinor
まず、$S^3 \times \mathbb{R}^2$ 上で考える。Killing spinor は以下のように選ぶ。

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma^{\dot\alpha=1} &= \epsilon \otimes \zeta_+ \\ \Sigma^{\dot\alpha=2} &= C_3^{-1}\epsilon^* \otimes \zeta_- \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \nabla_m \Sigma^{\dot\alpha} &= \frac{i}{l} N^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \Gamma_m \Sigma^{\dot\beta} \\ \nabla_z \Sigma^{\dot\alpha} &= 0 \\ N^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= \frac{1}{2}(\sigma_3)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned}}$$

- $\Sigma^{\dot\alpha}$: symplectic Majorana
- ϵ :半径 l の S^3 の Killing spinor. ($\nabla_m \epsilon = \frac{i}{2l}\gamma_m \epsilon$)
- $\zeta_\pm$:2 次元カイラリティ $\pm$ の $\mathbb{R}^2$ 上の constant spinor

5D $\mathcal{N}=2$ SYM

・Killing spinor
　次に、$S^3\times\Sigma$ 上で考える。background ゲージ場 $A_{z}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ を導入する。

$$\tilde\nabla_z\Sigma^{\dot\alpha}=\underbrace{\partial_z\Sigma^{\dot\alpha}+\frac{1}{2}\omega_z\Gamma^{45}\Sigma^{\dot\alpha}}_{\nabla_z\Sigma^{\dot\alpha}}+iA_{z}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\Sigma^{\dot\beta}\to 0\qquad(\omega_z=\omega_z^{45})$$

$\boxed{\text{この項が 0 になるように、}A_{z}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}=\omega_z N^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\text{ とする。}}$

- この background を含む共変微分 $\tilde\nabla_z$ を使って、SUSY 変換やラグランジアンを定義する。
- この Killing spinor は S^3 方向には covariantly constant ではない。⇒SUSY 不変なラグランジアンを得るには、SUSY 変換とラグランジアンに補正が必要。

5D $\mathcal{N}=2$ SYM

- ベクトル多重項の SUSY 変換。赤字 は補正項。
  (ハイパー多重項の変換は略)

$$
\begin{aligned}
\delta_\Sigma A_M =& -i\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}\Gamma_M\Psi^{\dot\alpha} \\
\delta_\Sigma \sigma =& i\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}\Psi^{\dot\alpha} \\
\delta_\Sigma \Psi^{\dot\alpha} =& -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}\Sigma^{\dot\alpha}+\Gamma^M D_M\sigma\Sigma^{\dot\alpha}+D^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\Sigma^{\dot\beta}\right) \\
\delta_\Sigma D^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} =& i\left(D_M\bar{\Psi}_{\dot\beta}\Gamma^M\Sigma^{\dot\alpha}+\bar{\Sigma}_{\dot\beta}\Gamma^M D_M\Psi^{\dot\alpha}+ig[\sigma,\bar{\Psi}_{\dot\beta}]\Sigma^{\dot\alpha}+ig\bar{\Sigma}_{\dot\beta}[\sigma,\Psi^{\dot\alpha}]\right) \\
& -\frac{2}{l}\left(\bar{\Sigma}_{\dot\gamma}N^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}\Psi^{\dot\alpha}-\bar{\Psi}_{\dot\beta}N^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\Sigma^{\dot\gamma}\right)
\end{aligned}
$$

- 代数は閉じる

$$
[\delta_\Sigma,\delta_\Theta]=\text{diffeo}+\text{ゲージ変換}+\mathrm{U}(1)_R
$$

5D $\mathcal{N}=2$ SYM

・ベクトル多重項のラグランジアン。赤字 は補正項。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_V =& \mathrm{tr}\Big[-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \frac{1}{2}D_M\sigma D^M\sigma \\
&+ i\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}\Gamma^M D_M\Psi^{\dot{\alpha}} - g\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}[\sigma, \Psi^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{4}D^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}D^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\Big] \\
&+ \mathrm{tr}\left[\frac{1}{l}N^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}\Psi^{\dot{\beta}} + \frac{1}{l}(N^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}D^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\epsilon^{ij}F_{ij})\sigma + \frac{1}{l^2}\sigma\sigma\right] \\
&+ \frac{1}{2l}\epsilon^{mnl}\mathrm{tr}\left[A_m\partial_n A_l + i\frac{g}{3}A_m[A_n, A_l]\right]
\end{aligned}
$$

局所化による分配関数の計算

step1 SUSY を用いて、BRST 変換 δ_Q ($\delta_Q^2 = 0$) を構成
step2 ラグランジアンに次の項 $\mathcal{L}_Q$ を追加。

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L} + t\mathcal{L}_Q$$
$$\mathcal{L}_Q = \delta_Q \mathrm{tr}[(\delta_Q \Psi^{\dot{\alpha}})^\dagger \Psi^{\dot{\alpha}}]$$

このとき、分配関数 Z_t はパラメータ t の値に依らない。

$$Z_t = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(-\int d^5x \mathcal{L} + t\mathcal{L}_Q\right)$$

場を固定点周りで展開

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{\Phi}$$

これを分配関数の式に代入し、$t \to \infty$ を考えると、$\tilde{\Phi}$ のガウス積分になる。(1-loop det)

局所化による分配関数の計算

step3 固定点 $(\delta_Q \Psi^{\dot{\alpha}} = 0)$ 周りの fluctuation の積分。固定点は、

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_0 &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_0^i H_i \\ A_{0\,z}(z,\bar{z}) &= \sum_{i=1}^{r} A_{0\,z}^i(z,\bar{z}) H_i \end{aligned}}$$

σ_0^i は定数。H_i はカルタン部分代数の生成子。

局所化による分配関数の計算

1-loop determinant

- S^3 の球面調和関数は $(j, m, \tilde{m})$ でラベルされる。

  $(j = 0, 1/2, 1, \cdots . \quad -j \leq m, \tilde{m} \leq j)$

- fluctuation をこの球面調和関数で展開すれば、1-loop determinant の計算ができる。

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{1}{\mathrm{Det}_{(1,0)}\left[g^2 l^2 (\alpha \cdot \sigma_0)^2\right]} \prod_{j \geq 1/2} \left(\frac{\mathrm{Det}_{(0,0)}\left[4j^2 + g^2 l^2 (\alpha \cdot \sigma_0)^2\right]}{\mathrm{Det}_{(1,0)}\left[4j^2 + g^2 l^2 (\alpha \cdot \sigma_0)^2\right]} \right)^2$$

- $\mathrm{Det}_{(p,q)}$ は Σ 上の (p, q) 形式の determinant.
- α はゲージ群のルート
- $\prod_{j \geq 1/2}(\cdots) \to \sin(\cdots)$ 　無限積は sin 関数になる。

局所化による分配関数の計算

結果

$$Z^{\mathcal{N}=2}_{\text{5D SYM on}S^3\times\Sigma}$$

$$= N\prod_{i=1}^{r}\int dA^i_{0z}dA^i_{0\bar{z}}d\sigma^i_0 \prod_{\alpha\in\Delta_+}\left[\sin(i\pi g l\alpha\cdot\sigma_0)\right]^{\chi(\Sigma)}\exp\left(\int_\Sigma \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} d\mathrm{vol}\right)$$

$$\mathcal{L}_{YM} = -\sum_{i=1}^{r}[(\sigma^i_0)^2 + 2\sigma^i_0 g^{z\bar{z}}F^i_{0\,z\bar{z}}]$$

- $N\cdots$ normalization
- これは 2 次元 q-YM と呼ばれる
- $\sin(i\pi g l\alpha\cdot\sigma_0)\to i\pi g\alpha\cdot\sigma_0\ (l\to 0)$ のとき普通の YM

SU(2) の場合

簡単のため、G=SU(2) の場合にもう少し詳しく見る。

- $\prod_{\alpha\in\Delta_+}\left[\sin(i\pi g l\alpha\cdot\sigma_0)\right] = \sin(\sqrt{2}i\pi g l\alpha\cdot\sigma_0)$
- モノポール：$\int_\Sigma F_{0\,\bar{z}z}dzd\bar{z} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{g}m\ (m\in\mathbb{Z})$
  $\to \int dA_{0\,z}dA_{0\,\bar{z}}(\cdots) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\cdots)$
- 最後に σ_0 の積分を実行

$$Z^{\mathcal{N}=2}_{\text{5D SYM on}S^3\times\Sigma} \propto \sum_{n\in\mathbb{Z}}[n]_q^\chi \exp\left(-\frac{n^2g^2}{16\pi^2l^3}\text{Area}(\Sigma)\right)$$

$$q=\exp(-\tfrac{g^2}{2\pi l}) \qquad [n]_q = q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}$$

結論

- 5 次元 $\mathcal{N}=2$ SYM on $S^3 \times \Sigma$ の分配関数（相関関数）は 2 次元 q-YM on Σ の分配関数（相関関数）と一致。
- パラメータ q は、今回導いたものと、双対性から予想されたもので一致。→今回の結果と予想が合致。