

Z_N (twisted) orbifold models with magnetic flux

arXiv:1308.????[hep-th]

三浦 貴司 (神戸大学)

2013年8月20日

@ 基研研究会「場の理論と弦理論」

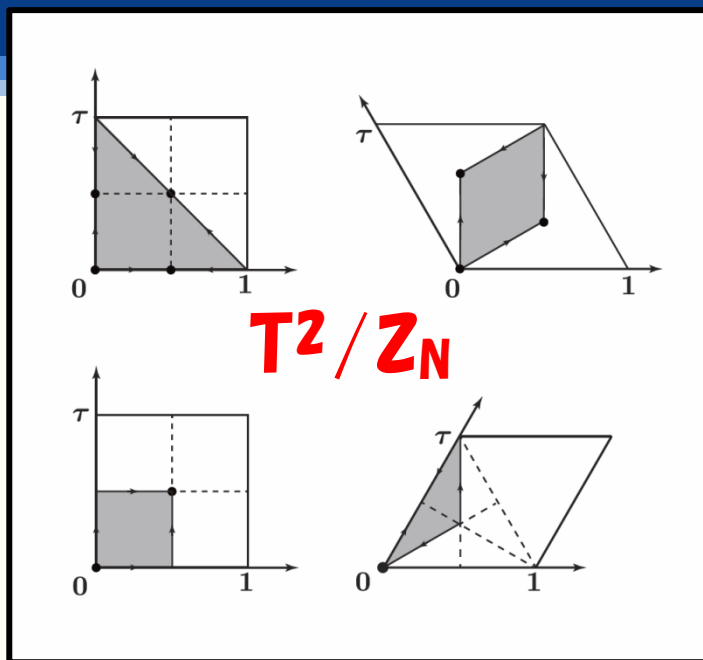
共同研究者：阿部智大(京大)、藤本教寛(神戸大)、小林達夫(京大)、
西脇健二(HCRI)、坂本真人(神戸大)。

Z_N (twisted)

orbifold models

with magnetic flux

arXiv:1308.????[hep-th]



貴司 (神戸大学)

13年8月20日

会「場の理論と弦理論」

智大(京大)、藤本教寛(神戸大)、小林達夫(京大)、
西脇健二(HCRI)、坂本真人(神戸大)。

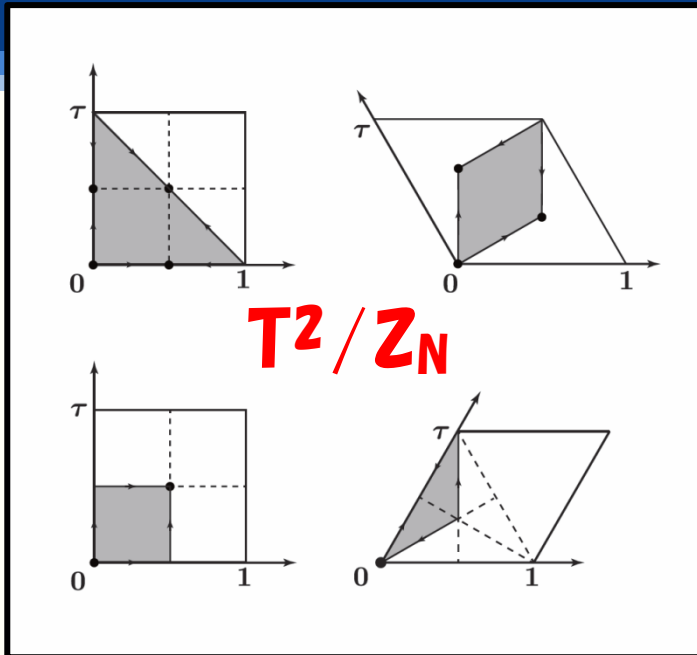
Z_N (twisted)

orbifold models

with magnetic flux

arXiv:1308.????[hep-th]

U(1) gauge theory



貴司 (神戸大)
13年8月20日
会「場の理論と弦理論」

智大(京大)、藤本教寛(神戸大)、小林達夫(京大)、
西脇健二(HCRI)、坂本真人(神戸大)。

物質場の世代

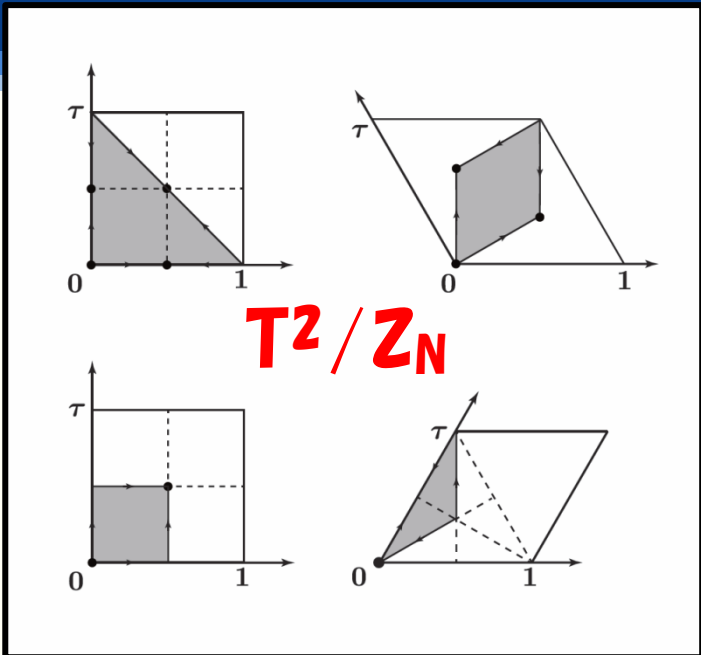
Z_N (twisted)

orbifold models

↑ with magnetic flux

arXiv:1308.????[hep-th]

U(1) gauge theory



貴司 (神戸大)
 13年8月20日
 会「場の理論と弦理論」
 習大(京大)、藤本教寛(神戸大)
 西脇健二(HO)

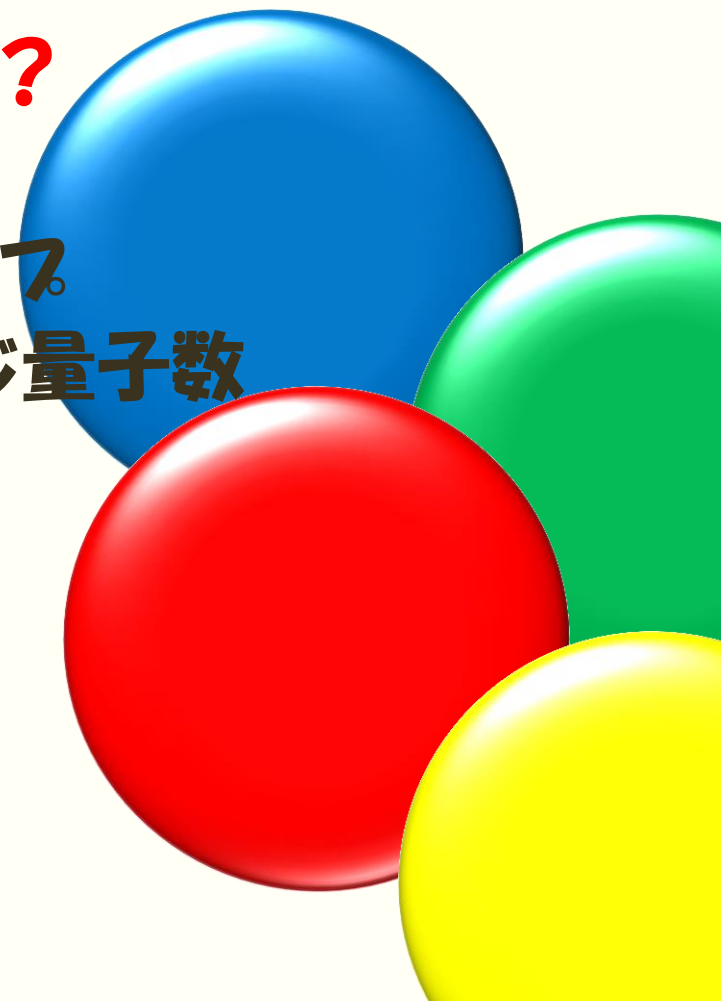
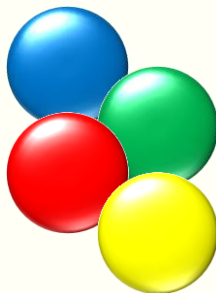
物質粒子			ゲージ
	第1世代	第2世代	第3世代
クォーク	アップ u	チャーム c	トップ t
	ダウン d	ストレンジ s	ボトム b
レプトン	ν_e ニュートリノ	ν_μ ニュートリノ	ν_τ ニュートリノ
	e 電子	μ ミューオン	τ タウ
	W	W	W

Introduction

標準模型に残されたいくつかの謎の中で、

世代とは一体何か？

- ✓ 3つのカイラルなグループ
- ✓ コピーされたような同じ量子数
- ✓ 質量階層性の存在



Introduction

どんなアプローチが考えられたか？

- 弦理論からの導出
- 世代を統一するようなより大きなゲージ群からの導出
- 余剰次元空間とゲージ群の関係からの導出

Y. Goto, Y. Kawamura and TM ('13)

- 余剰次元空間中の磁束の存在を利用した導出

Y. Fujimoto, T. Kobayashi, TM, K. Nishiwaki and M. Sakamoto ('13)

-

What is the generation?

世代の起源を高次元時空の場の理論の観点から明らかにできないだろうか？

- **1つのフェルミオンから世代(数)を導出する機構を提案する。**
- **重要になるのが余剰次元空間中の磁束の存在。**
- **3世代模型の候補を調べ上げた。**

興味深い結果として、

世代数を余剰次元時空の構造と関係づけて議論できる。

(フレーバー構造も示せたら嬉しい！)

What is the generation?

世代の起源を高次元時空の場の理論の観点から明らかにできないだろうか？

- 1つのフェルミオンから世代(数)を導出する機構を提案する。
- 重要になるのが余剰次元空間中の磁束の存在。
- 3世代模型の候補を調べ上げた。

興味深い結果として、

世代数を余剰次元時空の構造と関係づけて議論できる。

Z_N orbifolds

e.g.) T^2 / Z_N ($N=2,3,4,6$)

Contents

- *Introduction*
- **Models with magnetic flux**
- **Z_N (twisted) orbifolds**
 - **Z_3 orbifold**
 - **Three-generation models**
 - **Kaluza-Klein modes**
- **Conclusion**

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

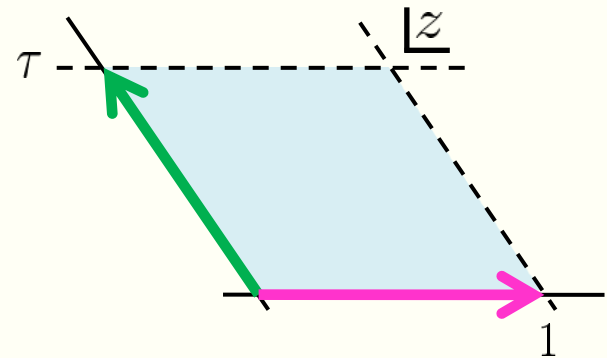
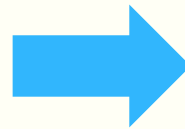
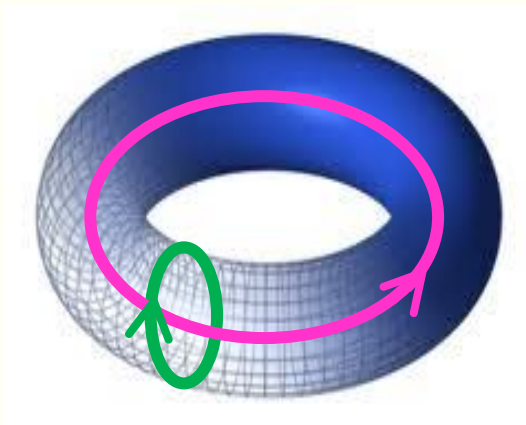
D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$



$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

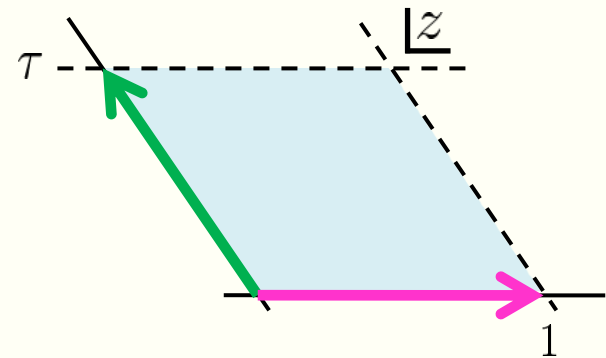
$$\tau \in \mathbb{C}, \text{Im}\tau > 0$$

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$



$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

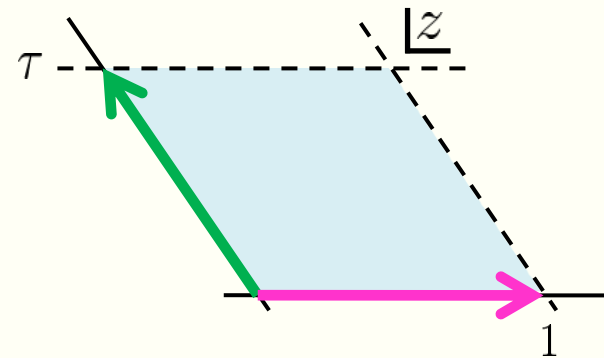
D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

要請

Lagrangian密度は一価であれ。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A_M(x, z), \Psi(x, z)) \\ &= \mathcal{L}(A_M(x, z + 1), \Psi(x, z + 1)) \\ &= \mathcal{L}(A_M(x, z + \tau), \Psi(x, z + \tau))\end{aligned}$$



$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

Models with magnetic flux

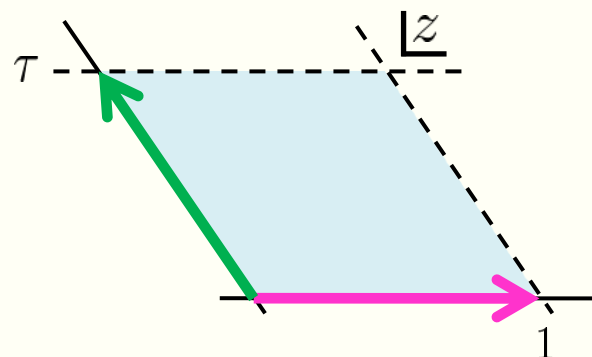
磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

要請

Lagrangian密度は一価であれ。



$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : $|M|$

Landau準位の議論のように、..

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : $|M|$

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : $|M|$

$\Rightarrow M$ の正負によって異なるカイラル理論が作られる。

$$\Psi_+(x, z) = \sum_n \begin{pmatrix} \psi_{4R,n}(x) \times \psi_{+,n}^j(z) \\ \psi'_{4L,n}(x) \times \psi_{-,n}^j(z) \end{pmatrix} \quad j = 0, 1, 2, \dots, |M| - 1$$

$$\psi_{+,0}^j(z) = \mathcal{N} e^{i\pi M z \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \cdot \vartheta \left[\begin{matrix} j \\ 0 \end{matrix} \right] (Mz, M\tau) \quad \text{for } M > 0,$$

$$\psi_{-,0}^j(z) = \mathcal{N} e^{i\pi M \bar{z} \frac{\text{Im}\bar{z}}{\text{Im}\bar{\tau}}} \cdot \vartheta \left[\begin{matrix} j \\ 0 \end{matrix} \right] (M\bar{z}, M\bar{\tau}) \quad \text{for } M < 0.$$

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : $|M|$

⇒ M の正負によって異なるカイラル理論が作られる。

⇒ 『磁束の大きさ = 世代数』

(※ M は理論から自動的に決まらない。)

Models with magnetic flux

磁束の存在する高次元ゲージ理論から任意数の世代を導出できるのでは!?

D. Cremades, L. E. Ibáñez and F. Marchesano ('04)

e.g.) $M^4 \times T^2$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : $|M|$

⇒ M の正負によって異なるカイラル理論が作られる。

⇒ 『磁束の大きさ = 世代数』

(※ M は理論から自動的に決まらない。)

⇒ 3世代模型を作るには $M = \pm 3$ である必要が、

フレーバー構造を正確に再現するにはもう少し工夫が必要!

Z_N (twisted) orbifolds

どうすれば複雑な構造を作り出せるか？

⇒ Z_N orbifolds

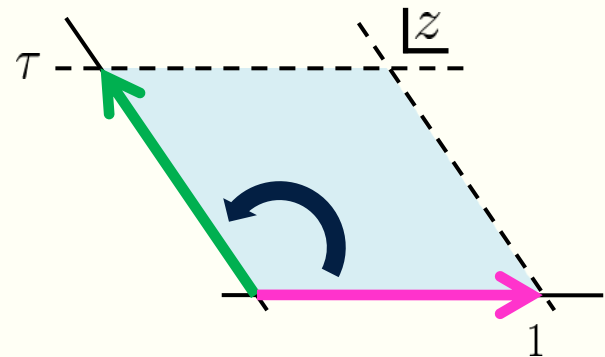
e.g.) T^2 / Z_N ($N=2,3,4,6$)

$$T^2 : z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

+

$$z \sim \omega z$$

$$\omega = e^{2\pi i/N}$$



Z_N (twisted) orbifolds

どうすれば複雑な構造を作り出せるか？

⇒ Z_N orbifolds

e.g.) T^2/Z_N ($N=2,3,4,6$)

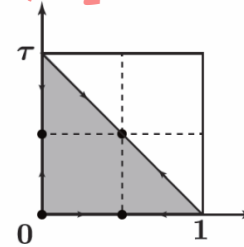
$$T^2: z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

+

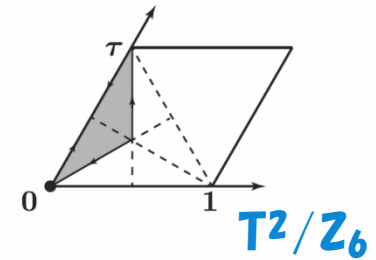
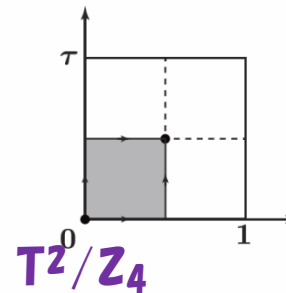
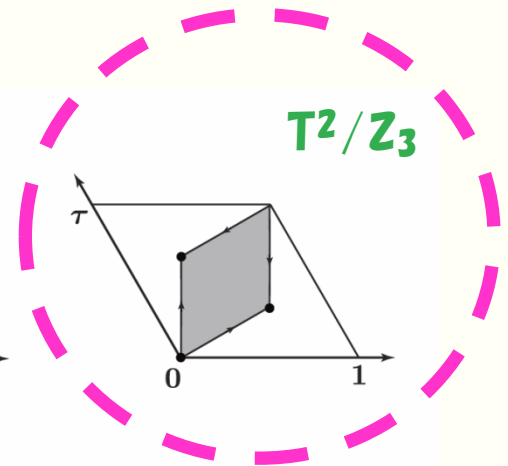
$$z \sim \omega z$$

$$\omega = e^{2\pi i/N}$$

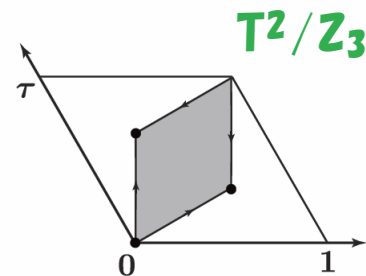
T^2/Z_2



T^2/Z_3



Z_3 orbifold



要請
Lagrangian密度は
一価であれ。

$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

+

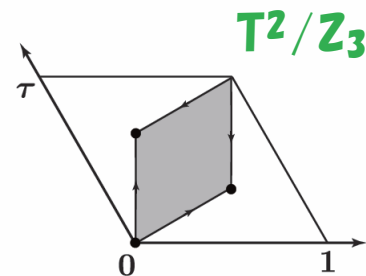
$$z \sim \omega z$$

$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

- 磁束の量子化 : $M \in \mathbb{Z}$
- (zero-mode) 波動関数の縮退 : ~~$|M|$~~

Landau準位の
議論のように、..

Z_3 orbifold



要請

Lagrangian密度は
一価であれ。

$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

+

$$z \sim \omega z$$

$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

• 磁束の量子化: $M \in \mathbb{Z}$

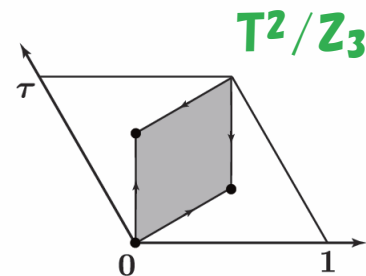
• (zero-mode) 波動関数の縮退: ~~$|M|$~~

Landau準位の
議論のように、..

ただし、トーラスの場合とは明らかに異なる縮退を
引き起こすということが重要！

Z_3 orbifold

どのように縮退しているか?



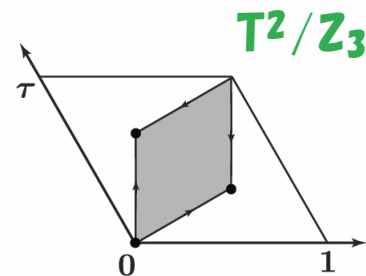
$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

$ M $		(0)	2	4	6	8	10	12	14
η	1	(1)	1	1	3	3	3	5	5
	ω	(0)	0	2	2	2	4	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	1	1	1	3	3	3	5

Table 4.2: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

Z_3 orbifold

どのように縮退しているか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

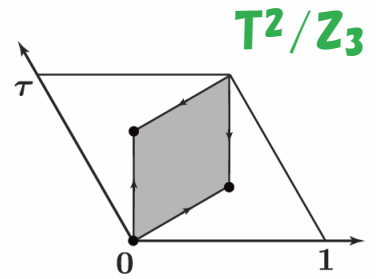
$ M $	(0)	2	4	6	8	10	12	14	
η	1	(1)	1	1	3	3	3	5	5
	ω	(0)	0	2	2	2	4	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	1	1	1	3	3	3	5

Table 4.2: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

$z \sim \omega z$ \Rightarrow 余剰次元部分の場の境界条件 / 固有値方程式を考える必要がある。

Z_3 orbifold

どのように縮退しているか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

$\eta: Z_3$ 固有値

M		(0)	2	4	6	8	10	12	14
η	1	(1)	1	1	3	3	3	5	5
	ω	(0)	0	2	2	2	4	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	1	1	1	3	3	3	5

Table 4.2: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

$z \sim \omega z \Rightarrow$ 余剰次元部分の場の境界条件 / 固有値方程式を考える必要がある。

$$\psi_{\pm,0}(z) \rightarrow \psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta$$

$$\psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(\omega z)_\eta = \eta \psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta$$

$$\psi_{T^2/Z_3+,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta \quad \text{for } M > 0,$$

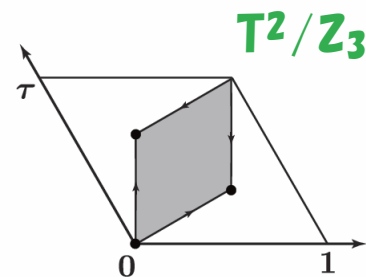
$$\psi_{T^2/Z_3-,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta \quad \text{for } M < 0.$$

$$\psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z+1)_\eta = e^{2\pi i \alpha_1} \psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta,$$

$$\psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z+\tau)_\eta = e^{2\pi i \alpha_\tau} \psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta.$$

Z_3 orbifold

どのように縮退しているか？



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

$ M $		(0)	2	4	6	8	10	12	14
η	1	(1)	1	1	3	3	3	5	5
	ω	(0)	0	2	2	2	4	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	1	1	1	3	3	3	5

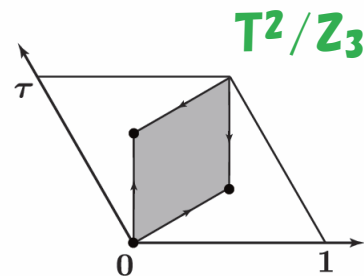
Table 4.2: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

$$\psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(\omega z)_\eta = \eta \psi_{T^2/Z_3\pm,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta$$

- ◆ 各 Z_3 固有値に対する固有状態の縮退度は $|M|$ になっていない！
- ◆ 全ての固有状態の縮退度を足し上げたものが $|M|$ に一致している。
- ◆ 各固有値の縮退度 = 世代数

Z_3 orbifold

どのように縮退しているか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

- M が奇数か偶数かで出現パターンが異なる。
- (α_1, α_τ) が違っても出現パターンが異なる。

$$\begin{aligned}
 &(\alpha_1, \alpha_\tau) \\
 &= (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
 &\hspace{15em} \text{for } M = \text{even,} \\
 &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) \\
 &\hspace{15em} \text{for } M = \text{odd.}
 \end{aligned}$$

$ M $		(0)	2	4	6	8	10	12	14
η	1	(1)	1	2	2	3	4	4	5
	ω	(0)	1	1	2	3	3	4	5
	$\bar{\omega}$	(0)	0	1	2	2	3	4	4

Table 4.3: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3 \pm 0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$ M $		(0)	1	3	5	7	9	11	13
η	1	(1)	1	1	2	3	3	4	5
	ω	(0)	0	1	2	2	3	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	0	1	1	2	3	3	4

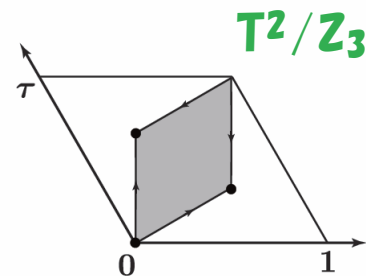
Table 4.4: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3 \pm 0}(z)_\eta$ for $M = \text{odd}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.

$ M $		(0)	1	3	5	7	9	11	13
η	1	(1)	0	2	2	2	4	4	4
	ω	(0)	1	1	1	3	3	3	5
	$\bar{\omega}$	(0)	0	0	2	2	2	4	4

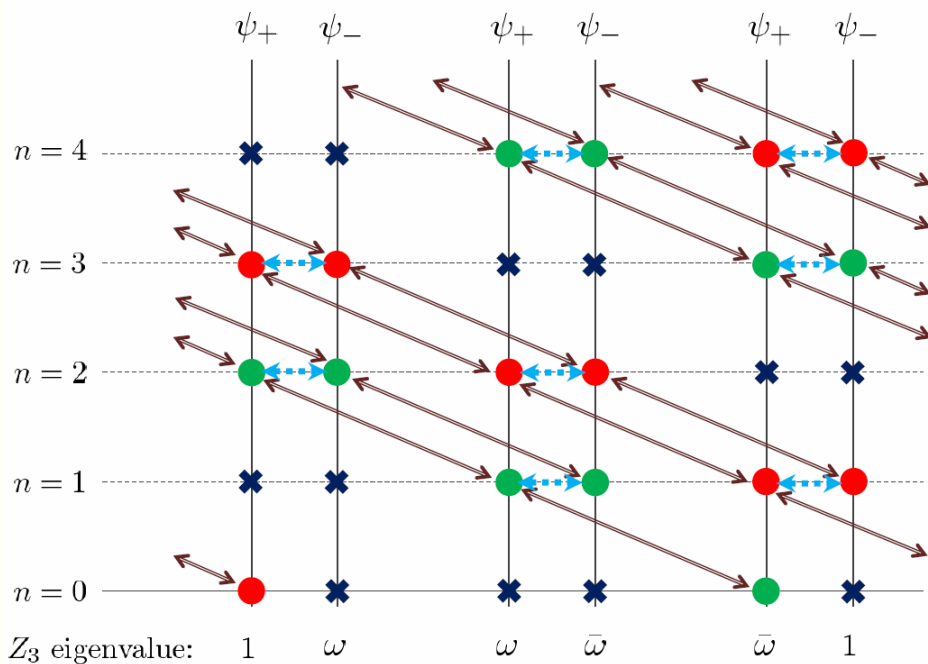
Table 4.5: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_3 \pm 0}(z)_\eta$ for $M = \text{odd}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Z_3 orbifold

どのようなKK towerを作るか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$



$$m_n^2 = \frac{4\pi|M|}{R^2 \text{Im}\tau} n \quad \text{for } n \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

$$\Delta = \frac{4\pi|M|}{\text{Im}\tau} \left(\hat{N}_+ + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{N}_+ \equiv \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+,$$

$$\hat{a}_+ \equiv i \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi|M|}} D_{\bar{z}}, \quad \hat{a}_+^\dagger \equiv i \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi|M|}} D_z,$$

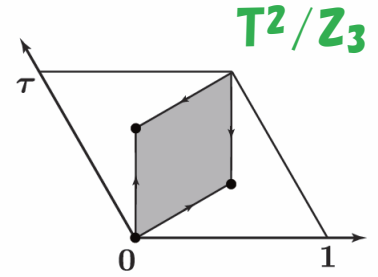
$$[\hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger] = 1, \quad |0\rangle \equiv \psi_{+,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z).$$

$$\leftrightarrow \psi_{T^2/Z_3+,n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_+^\dagger)^n \psi_{T^2/Z_3+,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z),$$

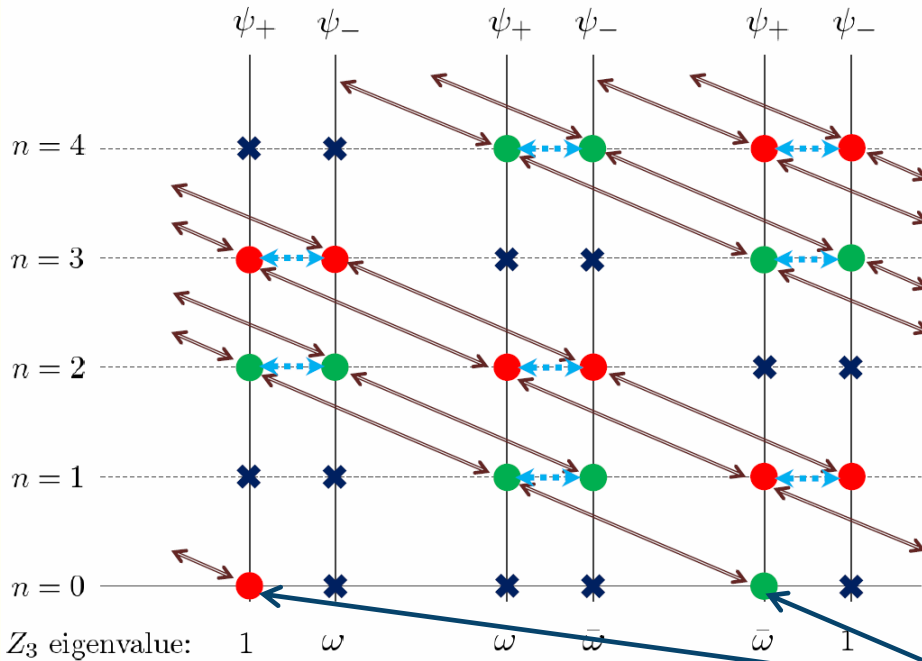
$$\leftrightarrow \psi_{T^2/Z_3-,n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z) = \frac{2}{m_n} D_{\bar{z}} \psi_{T^2/Z_3+,n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z).$$

Z₃ orbifold

どのようなKK towerを作るか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$



$$m_n^2 = \frac{4\pi|M|}{R^2 \text{Im}\tau} n \quad \text{for } n \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

$$\Delta = \frac{4\pi|M|}{\text{Im}\tau} \left(\hat{N}_+ + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{N}_+ \equiv \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+,$$

$$\hat{a}_+ \equiv i\sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi|M|}} D_{\bar{z}}, \quad \hat{a}_+^\dagger \equiv i\sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi|M|}} D_z,$$

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger] = 1, \quad |0\rangle \equiv \psi_{+,0}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z).$$

$$\Leftrightarrow \psi_{T^2/Z_{3+},n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_+^\dagger)^n \psi_{T^2/Z_{3+},0}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z),$$

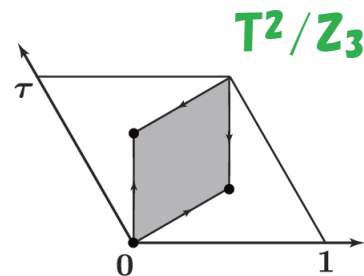
$$\Leftrightarrow \psi_{T^2/Z_{3-},n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z) = \frac{2}{m_n} D_{\bar{z}} \psi_{T^2/Z_{3+},n}^{(j+\alpha_1, \alpha_2)}(z).$$

$ M $	(0)	2	4	6	8	10	12	14
η	1	1	1	3	3	3	5	5
	ω	(0)	0	2	2	2	4	4
	$\bar{\omega}$	(0)	1	1	1	3	3	3

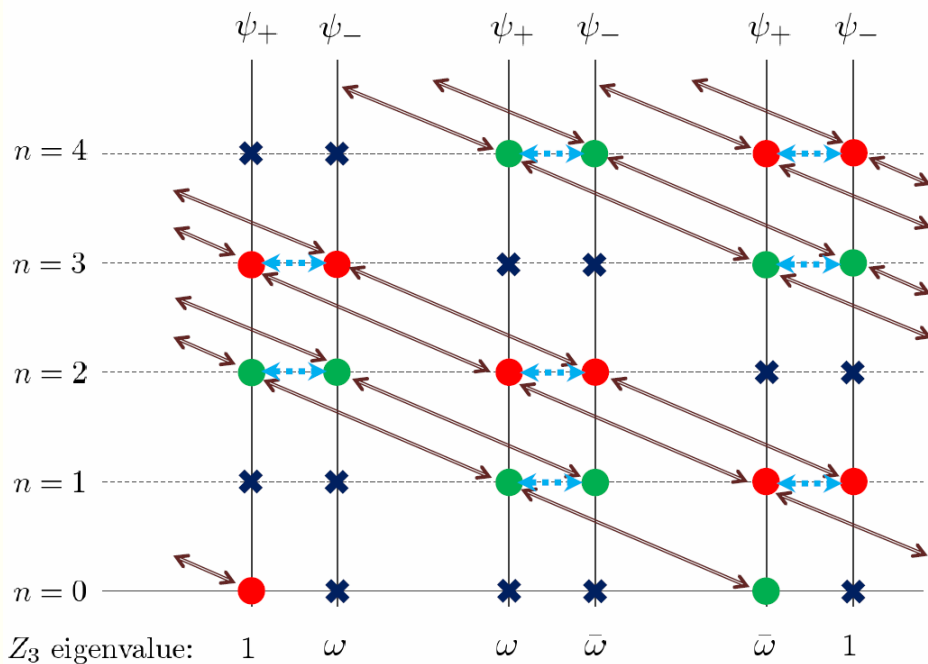
Table 4.2: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_{3\pm},0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$.

Z₃ orbifold

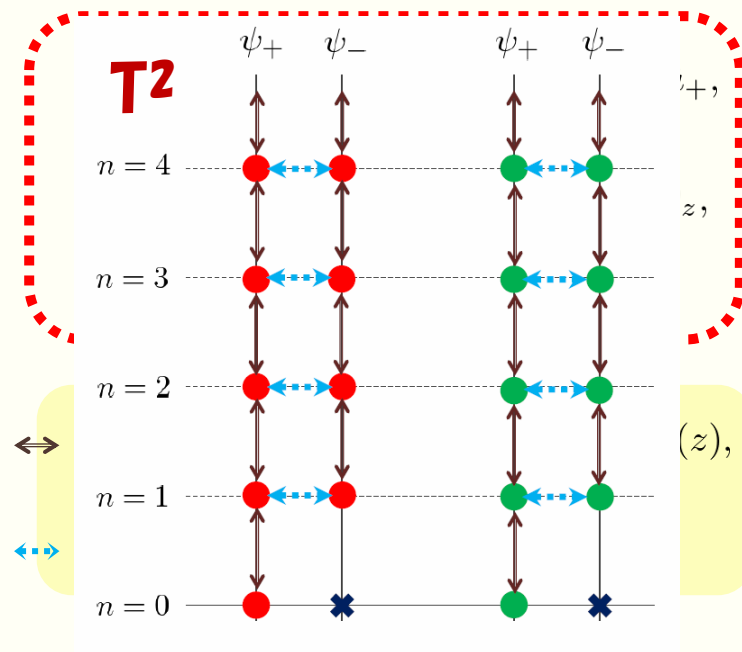
どのようなKK towerを作るか?



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$



$$m_n^2 = \frac{4\pi|M|}{R^2 \text{Im}\tau} n \quad \text{for } n \in \{0, \mathbb{N}\}.$$



質量スペクトラムはねじれながら成長する奇妙な特徴を持つ。

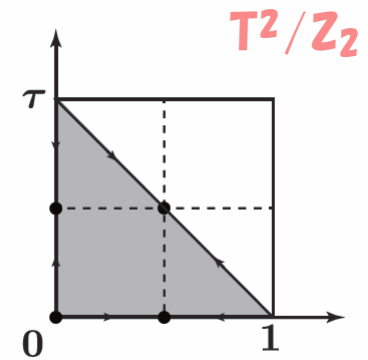
Conclusion

- ◆ 余剰次元空間に磁束が存在する場合、Landau準位と同様の議論から同じ質量の固有状態が磁束の大きさに合わせて縮退する。
 - ◆ “磁束の大きさ” \Leftrightarrow “世代数”
 - ◆ 余剰次元空間の構造を反映して、有限個のnon-trivialな3世代模型の候補を見つけることができる。
 - ◆ 一方、Kaluza-Kleinモードを含めた質量スペクトラムはねじれながら成長する奇妙な構造をしている。
-
- ◆ この機構を実際にいくつかの模型に埋め込むことで、現実的なフレーバー構造を導出できるか？
 - ◆ このような機構はどのような理論に由来するのか？

Backup

Z_2 orbifold

どのように縮退しているか？

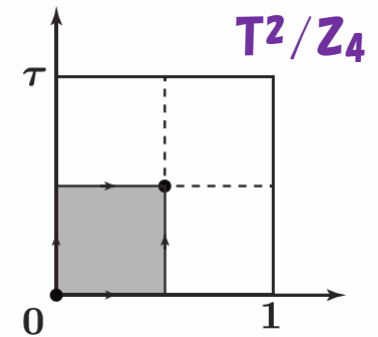


(α_1, α_τ)	M	$\psi_{T^2/Z_2 \pm, 0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_{+1}$	$\psi_{T^2/Z_2 \pm, 0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_{-1}$
$(0, 0)$	even	$\frac{ M }{2} + 1$	$\frac{ M }{2} - 1$
	odd	$\frac{ M +1}{2}$	$\frac{ M -1}{2}$
$(\frac{1}{2}, 0)$	even	$\frac{ M }{2}$	$\frac{ M }{2}$
	odd	$\frac{ M +1}{2}$	$\frac{ M -1}{2}$
$(0, \frac{1}{2})$	even	$\frac{ M }{2}$	$\frac{ M }{2}$
	odd	$\frac{ M +1}{2}$	$\frac{ M -1}{2}$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	even	$\frac{ M }{2}$	$\frac{ M }{2}$
	odd	$\frac{ M -1}{2}$	$\frac{ M +1}{2}$

Table 4.1: The number of zero-mode eigenstates for each Z_2 eigenvalue.

Z_4 orbifold

どのように縮退しているか?



$ M $		(0)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
η	+1	(1)	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5
	+i	(0)	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
	-1	(0)	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
	-i	(0)	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4

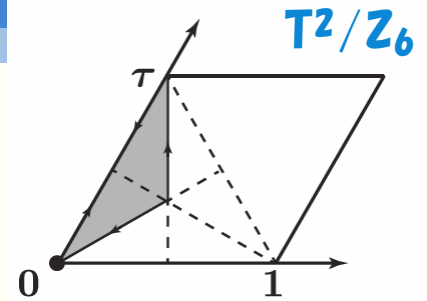
Table 4.6: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_4 \pm, 0}(z)_\eta$ for $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

$ M $		(0)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
η	+1	(1)	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
	+i	(0)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
	-1	(0)	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
	-i	(0)	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4

Table 4.7: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_4 \pm, 0}(z)_\eta$ for $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Z_6 orbifold

どのように縮退しているか?



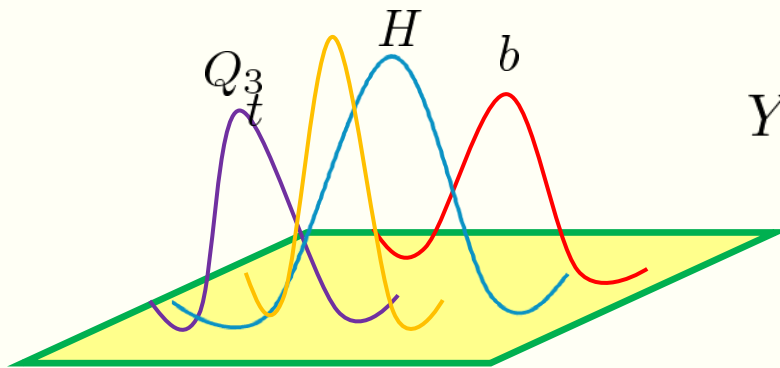
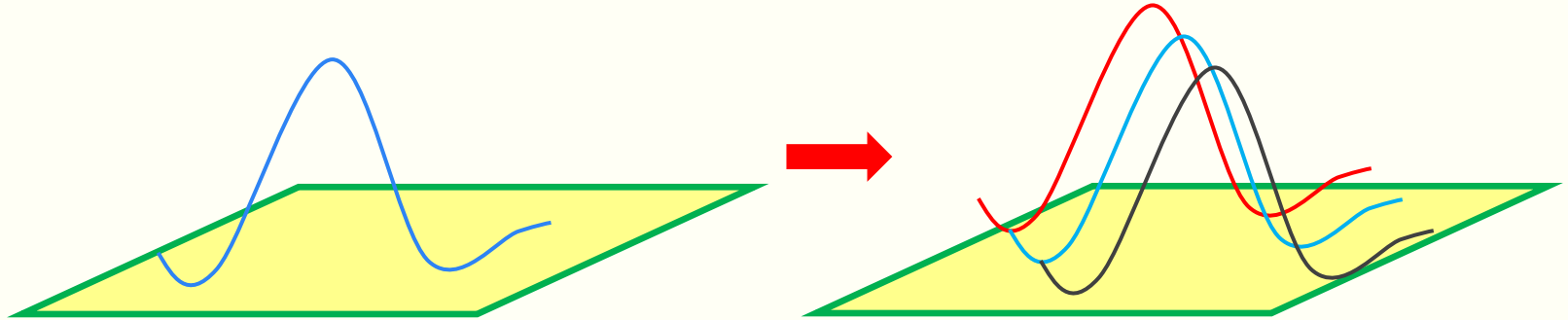
$ M $		(0)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
η	1	(1)	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5
	ω	(0)	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	ω^2	(0)	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5
	ω^3	(0)	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
	ω^4	(0)	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	ω^5	(0)	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4

Table 4.8: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_6\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{even}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (0, 0)$.

$ M $		(0)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
η	1	(1)	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	ω	(0)	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5
	ω^2	(0)	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
	ω^3	(0)	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	ω^4	(0)	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
	ω^5	(0)	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4

Table 4.9: The number of zero-mode eigenstates $\psi_{T^2/Z_6\pm,0}(z)_\eta$ for $M = \text{odd}$ and $(\alpha_1, \alpha_\tau) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Construction of flavor structure



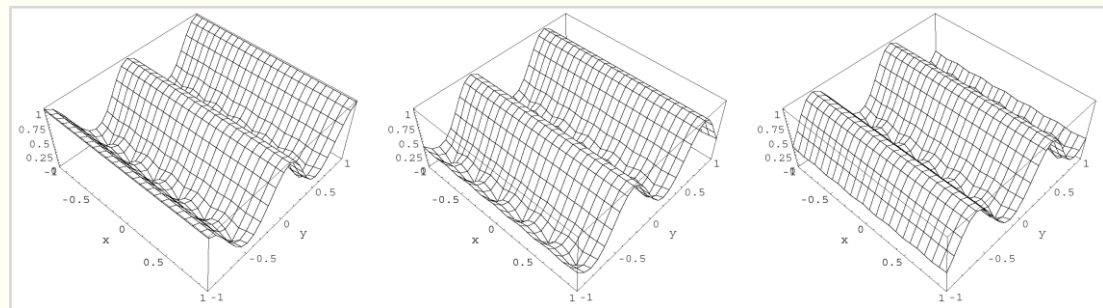
$$Y_{t/b} \propto \int d^2 z \psi_q(z) \psi_H(z) \psi_{t/b}(z)$$

$$z = y_1 + iy_2$$

$$\psi_{\pm}^j(z, \bar{z})$$

$$\mathbf{M=3,}$$

$$\mathbf{j=0,1,2 \Rightarrow}$$



Shifted orbifold

How can the magnitude of magnetic flux be decided or restricted?

⇒ Shifted orbifolding

e.g.) T^2 / \mathbb{Z}_N

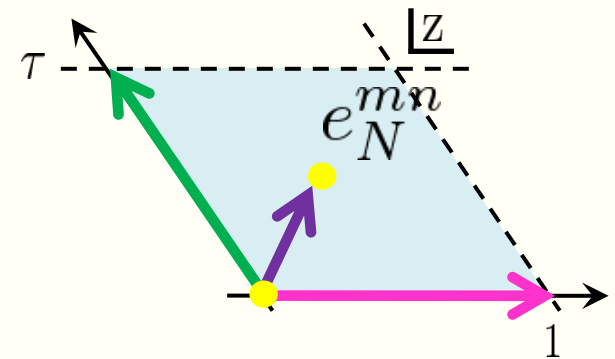
\mathbb{Z}_N shifted orbifolding

$$z \sim z + e_N^{mn}$$

$$e_N^{mn} \equiv \frac{m + n\tau}{N} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

⇒ **The quantization of magnetic flux**

$$M = tN \quad (t \in \mathbb{Z})$$



$$z \sim z + 1 \sim z + \tau$$

Requirement

Lagrangian density
is single-valued.

Shifted orbifold

How can the magnitude of magnetic flux be decided or restricted?

⇒ Shifted orbifolding

e.g.) T^2 / \mathbb{Z}_N

⇒ The quantization of magnetic flux

$$M = tN \quad (t \in \mathbb{Z})$$

⇒ The degeneracy of (zero-mode) wave functions

$$\frac{|M|}{N} = |t|$$

↑

Still arbitrary...

Degeneracy of wave function

e.g.) T^2/Z_N

$$z \sim z + e_N^{mn} e_N^{mn} \equiv \frac{m+n\tau}{N} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Psi_{\pm}^j(z, \bar{z}) = \mathcal{N}' \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{i\pi \ell m(2j - (N-\ell)n\tau)/N} \psi_{\pm}^{j+\ell n\tau}(z, \bar{z}).$$

$j = 0, 1, \dots, |M| - 1$

If $N=3$, $M=3$ and $(m,n)=(0,1)$,

$$\Psi_{\pm}^j(z, \bar{z}) = \mathcal{N}' \sum_{\ell=0}^2 \psi_{\pm}^{j+\ell}(z, \bar{z}). \quad \Rightarrow |M|/N = 1$$

↑ ↑
 T^2/Z_3 T^2

\Rightarrow The degeneracy of wave functions : $\frac{|M|}{N} = |t|$

We take the same method for wave function in the other shifted orbifold models.

Shifted orbifold

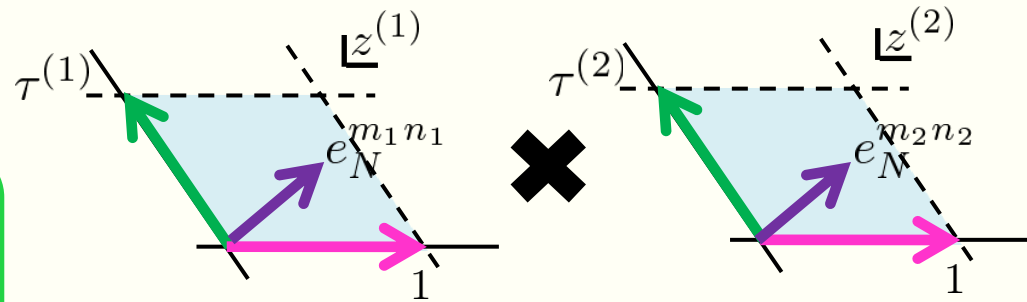
どうすれば磁束の大きさを決めることができるか？

⇒ Shifted orbifolding

e.g.) $(T^2 \times T^2) / \mathbb{Z}_N$

要請

Lagrangian密度は
一価であれ。



$$z^{(i)} \sim z^{(i)} + 1 \sim z^{(i)} + \tau^{(i)}$$

$$i = 1, 2$$

\mathbb{Z}_N shifted orbifolding

$$(z^{(1)}, z^{(2)}) \sim (z^{(1)} + e_N^{m_1 n_1}, z^{(2)} + e_N^{m_2 n_2})$$

$$e_N^{m_i n_i} \equiv \frac{m_i + n_i \tau}{N} \quad (m_i, n_i \in \mathbb{Z}; i = 1, 2)$$

Shifted orbifold

どうすれば磁束の大きさを決めることが出来るか？

⇒ Shifted orbifolding

e.g.) $(T^2 \times T^2) / \mathbb{Z}_N$

要請

Lagrangian密度は
一価であれ。

$$z^{(i)} \sim z^{(i)} + 1 \sim z^{(i)} + \tau^{(i)}$$

\mathbb{Z}_N shifted orbifolding

$$(z^{(1)}, z^{(2)}) \sim (z^{(1)} + e_N^{m_1 n_1}, z^{(2)} + e_N^{m_2 n_2})$$

$$e_N^{m_i n_i} \equiv \frac{m_i + n_i \tau}{N} \quad (m_i, n_i \in \mathbb{Z}; i = 1, 2)$$

⇒ 磁束の量子化

← a multiple of N !

$$M^{(1)} = t_1 N, \quad M^{(2)} = t_2 N \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{Z})$$

Shifted orbifold

どうすれば磁束の大きさを決めることが出来るか？

⇒ Shifted orbifolding

e.g.) $(T^2 \times T^2) / \mathbb{Z}_N$

- 磁束の量子化 ← a multiple of N !

$$M^{(1)} = t_1 N, \quad M^{(2)} = t_2 N \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{Z})$$

- (zero-mode) 波動関数の縮退

$$\frac{|M^{(1)} M^{(2)}|}{N} = |t_1 t_2| N \quad \leftarrow \text{a multiple of } N !$$

⇒ 世代数はNの倍数！

世代数は余剰次元空間の構造によって制限される！

Three-generation models

3世代模型の候補はどんなものがあるか？

e.g.) $(T^2 \times T^2) / Z_N$

世代数はNの倍数であった。

もし $N = 3$ であるなら、3の倍数の世代を持つ模型が現れる。


⇒3世代模型は以下のときにのみ現れる。

$$(N; M^{(1)}, M^{(2)}) = (3; 3, 3)$$

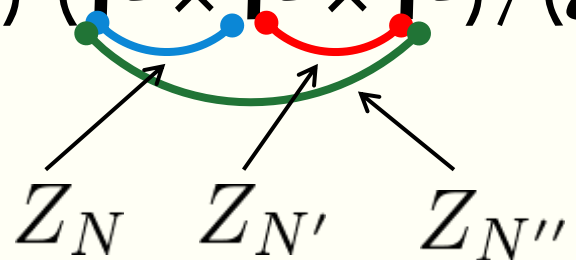
Three-generation models

様々なshifted orbifoldingsを調べら結果として、

e.g.1) $(T^2 \times T^2 \times T^2) / (Z_N \times Z_{N'})$



e.g.2) $(T^2 \times T^2 \times T^2) / (Z_N \times Z_{N'} \times Z_{N''})$



Three-generation models

様々なshifted orbifoldingsを調べら結果として、

e.g.1) $(T^2 \times T^2 \times T^2) / (Z_N \times Z_{N'}) \Rightarrow$ only one case!

$$(N, N'; M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}) = (3, 3; 3, 3, 3)$$

e.g.2) $(T^2 \times T^2 \times T^2) / (Z_N \times Z_{N'} \times Z_{N''}) \Rightarrow$ only two case!

$$(N, N', N''; M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}) \\ = (3, 9, 3; 3, 9, 9), (3, 9, 9; 9, 9, 9)$$

3世代模型を再現できるのは、それぞれのshifted orbifoldにおいて1つか2つの模型である。

$$\psi_{T^2/Z_N \pm, n}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta = \mathcal{N}' \sum_{\ell=0}^{N-1} \bar{\eta}^\ell \psi_{T^2 \pm, n}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(\omega^\ell z)$$

$$\psi_{T^2 \pm, 0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(\omega^k z) = \sum_{i=0}^{|M|-1} C_k^{ji} \psi_{T^2 \pm, 0}^{(i+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)$$

$$\psi_{T^2/Z_N \pm, 0}^{(j+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)_\eta = \mathcal{N}' \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{|M|-1} \bar{\eta}^\ell C_\ell^{ji} \psi_{T^2 \pm, 0}^{(i+\alpha_1, \alpha_\tau)}(z)$$