Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity Coupled to a Scalar with Shift Symmetry

近畿大学総合理工
素粒子論・重力理論研究室
博士２年　宗行賢二
共同研究者　太田信義

高階微分を含む重力理論における、ユニタリー性と繰り込み可能性についての問題点

高階微分を含む重力理論の歴史

- Einstein重力が繰り込み可能ではないことはよく知られている。しかし4次元の場合、Einstein重力に高階微分を含む項（スカラー曲率及びRicciテンソルの2乗）を追加することにより、繰り込み可能になることも知られている(Stelle['77])。ただし繰り込み可能になる代わりに、理論のユニタリー性が破れることもすでに知られている(Stelle ['77]) 。
- 最近、上記のユニタリー性の問題を解決するために、興味深い提案がなされた(Mukohyama['13])。それは上記の高階微分を含む重力理論にshift symmetryを持つスカラー場が結合した理論を、ローレンツ(-,+,+,+)ではなく、ユークリッドの記法(+,+,+,+)で理論を構築する事である。この理論の特徴は近距離では時間の概念のないリーマン理論で理論を記述でき、遠距離ではこの理論はローレンツ計量で記述された理論に帰着する点である。つまり近距離では時間の概念がないため（つまりユニタリー性の問題が生じないため）、理論に高階微分項を加えることにより生じるユニタリー性の問題を回避することができる。

研究の動機

- 左記の理論ではshift symmetryを持つスカラー場と重力が結合しているが、スカラー場にも高階微分が含まれているため、繰り込み可能であるかどうかが明白ではなかったため研究を行った。

研究の方法と結果

- Stelle['77]に倣いBecchi-Rouer-Stora-Tyutuin(BRST)対称性を用いて、shift symmetryを持つスカラー場と結合した高階微分を含む重力理論での繰り込み可能性について研究した。
- 研究の結果、3，4次元では繰り込み可能であり、5次元では繰り込み不可能である結論を得た。
- 5次元は繰り込み不可能であるが、1ループのみ繰り込み可能である結論を得た。

繰り込み可能性とプロパゲータの関係

$$\begin{aligned} S &= \int d^Dx\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{\kappa^2}\Big(R+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}^2+\gamma R_{\mu\nu\rho\lambda}^2\Big)+Z_0(\nabla_\mu\phi)^2+Z_1R(\nabla_\mu\phi)^2 \\ &\quad + Z_2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi+Z_3(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)^2+Z_4(\Box\phi)^2+Z_5(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\Big] \\ &= \int d^Dx\,\mathcal{L}_{GMG+\phi} \end{aligned}$$

- ここでプロパゲータを計算するのは、繰り込み可能性を議論する際にプロパゲータの高エネルギー領域での振る舞いが重要だからである。
- まず上記のようなshift symmetryを持つスカラー場と相互作用するような高階微分を含む重力の一般次元の作用から始める。ここでκ^2は一般次元の重力定数であり、α、β、γとZ_n(n=0,...,5)は定数である。
- 次にプロパゲータを得るために、ミンコフスキー空間の周りで計量 $\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+\kappa h^{\mu\nu}$. を展開する。
- BRST対称になるように元々の作用にゲージ固定項とFaddeev-Popov(FP)ゴースト項を加えると重力とスカラー場のプロパゲータは以下の様になる。

$$\begin{aligned} D^h_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) &= \frac{4}{(2\pi)^D}\Big[\frac{P^{(2)}}{k^2\{(\beta+4\gamma)k^2-1\}}+\frac{(D-2)^2P^{(0,s)}}{k^2[\{4(D-1)\alpha+D\beta+4\gamma\}k^2+D-2]} \\ &\quad -\frac{a}{2k^2}\Big\{2P^{(1)}+(D-1)P^{(0,s)}+P^{(0,w)}-\sqrt{D-1}\Big(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)}\Big)\Big\}\Big]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ D^\phi(k) &= \frac{1}{(2\pi)^D}\frac{1}{k^2(Z_4k^2+Z_0)} \end{aligned}$$

- Landauゲージを取ると（つまりa=0）、重力とスカラー場のプロパゲータがk^{-4}と振る舞う事が分かる。
- このゲージでは$\partial_\mu h^{\mu\nu}=0$と取るため、上記の重力のプロパゲータは $k^\mu D_{\mu\nu,\rho\sigma}(k)=0$ の関係式を満たす。これらの関係式を満たすことは、繰り込み可能性の議論をより簡潔にするために必要である。

繰り込み可能性に対するSlavnov-Taylar恒等式の必要性

- Slavnov-Taylar(ST)恒等式自体は繰り込み可能性の議論とは直接の関係はない。しかしST恒等式を求めることにより、有効作用の発散する部分が分かる。つまりST恒等式を求めることは、理論の発散する部分を打ち消す相殺項を求めることと同義である。
- ST恒等式を求めるには、以下のような汎関数がBRST対称である事を課すことで得られる。ここで $K_{\mu\nu}$、$J_{\mu\nu}$ M、Nはグラスマン偶な外場であり L_μ、$\bar{\eta}_\alpha$ η^αはグラスマン奇な外場である。

$$\begin{aligned} Z[J_{\mu\nu},\bar{\eta}_\alpha,\eta^\beta,N,K_{\mu\nu},L_\rho,M] &= \int[dh][d\phi][d\bar{c}][dc]\exp\Big(i\int d^Dx[\mathcal{L}_{sym}+J_{\mu\nu}h^{\mu\nu}+N\phi+\bar{\eta}_\alpha c^\alpha+\bar{c}_\alpha\eta^\alpha]\Big) \\ &\equiv \exp\big(iW[J_{\mu\nu},\bar{\eta}_\alpha,\eta^\beta,K_{\mu\nu},L_\rho,M]\big) \\ I_{sym}[h_{\mu\nu},\bar{c}_\alpha,c^\beta,K_{\mu\nu},L_\rho,M] &= \int d^Dx[\mathcal{L}_{GMG+\phi}+\mathcal{L}_{GF+FP}+K_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho-L_\mu c^\nu\partial_\nu c^\mu-Mc^\rho\partial_\rho\phi] \\ &\equiv \int d^Dx\,\mathcal{L}_{sym} \end{aligned}$$

- ST恒等式は以下のようになる。

$$\int d^Dx\left[J_{\mu\nu}\frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}}+N\frac{\delta W}{\delta M}-\bar{\eta}_\mu\frac{\delta W}{\delta L_\mu}+\frac{i}{a}\eta^\mu\partial_\nu\frac{\delta W}{\delta J_{\mu\nu}}\right]=0$$

- 前述のST恒等式のままでは不便なので、以下のようにルジャンドル変換を行い有効作用を定義する。

$$\tilde{\Gamma}[h^{\mu\nu},\phi,\bar{c}_\alpha,c^\beta,K_{\mu\nu},L_\rho,M]\equiv W[J_{\mu\nu},\bar{\eta}_\alpha,\eta^\beta,K_{\mu\nu},L_\rho,M]-\int d^Dx\,[J_{\mu\nu}h^{\mu\nu}+N\phi+\bar{\eta}_\alpha c^\alpha+\bar{c}_\alpha\eta^\alpha].$$

- そしてST恒等式がさらに簡潔な形になるように、以下のように有効作用を定義し直す。

$$\Gamma=\tilde{\Gamma}+\int d^Dx\frac{1}{2a}(\partial_\nu h^{\mu\nu})^2$$

- そうすると以下のようなより簡潔になったST恒等式が得られる。

$$\int d^Dx\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta h^{\mu\nu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_{\mu\nu}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta c^\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta L_\mu}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\frac{\delta\Gamma}{\delta M}\right]=0$$

- 前述のST恒等式は有限な部分と発散する部分が入り混じっている。ここでは発散する部分のみを取り上げる方法について述べる。
- まず有効作用をnループの部分の和として表し、さらにnループの有効作用を有限な部分と発散する部分とに分ける。ここで仮定として(n-1)ループまでは有効作用は繰り込みの操作をすでに行われているとする。

$$\Gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma^{(n)}. \qquad \Gamma^{(n)}=\Gamma^{(n)}_{\rm finite}+\Gamma^{(n)}_{\rm div}$$

- 前述のST恒等式に上記の有効作用を代入し、発散する部分と有限な部分に分ける。前述のST恒等式を満たすには、それぞれの部分で0にならなければならない。結局、ST恒等式で発散する部分は以下のような結果になる。

$$\int d^Dx\left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta h^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta K_{\mu\nu}}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta L_\lambda}\frac{\delta}{\delta c^\lambda}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^\lambda}\frac{\delta}{\delta L_\lambda}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta M}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M}\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma^{(n)}_{\rm div}=0$$

高階微分を含む重力理論は繰り込み可能か？

- 繰り込み可能かどうかを判定するには、ファインマン図形の発散の次数を調べればいい。今の場合だと重力とスカラー場のプロパゲータがk^{-4}と振る舞い、FPゴーストプロパゲータがk^{-2}と振る舞うことに注意すると発散の次数Dは以下のようになる。

$$D_{div}=D-(4-D)(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-(D-2)(V_{h,2}+V_{hs,2})-\frac{D}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{D-2}{2}(E_c+E_{\bar{c}})$$

- ここでI_hは重力の内線の数、I_sはスカラー場の内線の数、$V_{h,2}$は2階微分を含む重力のバーテックス、$V_{h,4}$は4階微分を含む重力のバーテックス、$V_{hs,2}$は2階微分を含む重力とスカラー場のバーテックス、$V_{hs,4}$は4階微分を含む重力とスカラー場のバーテックス、$V_{s,4}$は4階微分を含むスカラー場のバーテックス、V_KはK-重力-ゴーストバーテックスの数、V_MはM-重力-ゴーストバーテックスの数、V_LはL-ゴースト-ゴーストバーテックスの数、Eはそれぞれゴーストと反ゴーストの外線の数である。
- FPゴースト項に含まれている反ゴースト-重力-ゴースト相互作用は以下の様に書き直す事が出来る。Landauゲージでは2，3項目が重力のプロパゲータと接続しないため(*繰り込み可能性とプロパゲータの関係*参照)これ以降無視する。そして1項目の形からゴーストと反ゴーストの外線がそれぞれ外線運動量の因子を2つ運ぶ事が分かる（具体的には1項目を部分積分すればいい）。

$$i[\partial_\rho\partial_\mu\bar{c}_\nu\cdot c^\nu h^{\mu\rho}+\partial_\mu\bar{c}_\nu\cdot c^\nu\partial_\rho h^{\mu\rho}+\partial_\mu\bar{c}_\nu\cdot c^\mu\partial_\rho h^{\nu\rho}].$$

- それにより発散の次数は変更を受け1粒子既約(1PI)なファインマン図形の発散の次数は以下のようになる。

$$D^{(1PI)}_{div}=D-(4-D)(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-(D-2)(V_{h,2}+V_{hs,2})-\frac{D}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{D+2}{2}(E_c+E_{\bar{c}})$$

3次元の場合

$$D^{(1PI)}_{div}=3-(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-(V_{h,2}+V_{hs,2})-\frac{3}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{5}{2}(E_c+E_{\bar{c}}).$$

- 右辺の2項目の括弧内は1PIでは0以上なので、超繰り込み可能である事が分かる。これはバーテックスが増えれば（高次のループになれば）、発散の次数がいつかは負になり、発散するファインマン図が有限個に収まるためである。重力とスカラー場の相互作用以外の相互作用はすべて負になるためST恒等式が以下のような簡潔な形になる。

$$\int d^3x\left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M}\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma^{(n)}_{\rm div}=0$$

- 上記のST恒等式から$\Gamma_{div}^{(n)}$が局所ゲージ不変で重力の計量およびスカラー場のみからなる関数である事が分かる。そして発散の次数から微分は0階と2階しか含まないことも言える(3階微分はパリティの保存から考えない)。つまり相殺項はEinstein項、宇宙項と$(\nabla_\mu\phi)^2$のみであり、高階微分項は量子論的な補正を受けないと言う事である(ϕ^2項はshift symmetryから許されない)。

4次元の場合

$$D^{(1PI)}_{div}=4-2(V_{h,2}+V_{hs,2})-2(V_K+V_M)-V_L-3(E_c+E_{\bar{c}}).$$

- 発散の次数が4以下、つまり相殺項が有限個で収まる。つまり各ループ毎の発散するファインマン図は有限となるので繰り込み可能である事が分かる。重力とスカラー場の相互作用以外の相互作用はすべて負になるためST恒等式が以下のような簡潔な形になる。

$$\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}+\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M}\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma^{(n)}_{\rm div}=0$$

- 上記のST恒等式から$\Gamma_{div}^{(n)}$が局所ゲージ不変で重力の計量およびスカラー場のみからなる関数である事が分かる。そして発散の次数から微分は0階、2階と4階しか含まないことも言える。つまり対称性から許される相殺項は最初に記した作用に含まれる項のみである。

5次元の場合

$$D^{(1PI)}_{div}=5+(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-3(V_{h,2}+V_{hs,2})-\frac{5}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{7}{2}(E_c+E_{\bar{c}})$$

- 2項目は0以上なので、バーテックスが増えれば増えるほど発散の次数が酷くなるので繰り込み不可能である。ただし2項目は1ループで0になるので1ループの計算においては繰り込み可能である。その場合での相殺項は4次元の場合と同じ項である。

今後の課題

- 繰り込み群の方法を用いて、この理論が漸近的自由及び安全性であるかを調べる。
- この理論では低エネルギーでスカラー場以外の高階微分項は無視できるほど小さいと想定することで、ユークリッドからローレンツの作用に帰着することを示した[Mukohyama'13]。
- 上記の事柄を繰り込み群の方法等を用いて明白に示すことが今後の課題となる。