

Numerical Nahm transform of SU(2) massless k-caloron and singular line problems

Kouki Takesue^a, Nobuyuki Sawado^a, Atushi Nakamura^b

^a: Department of Physics, Graduate school of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba 278-8510, Japan

^b: Department of Physics, School of Science, Kitasato University, Sagami-hara, Kanagawa 252-0373, Japan

Abstract

$S^1 \times R^3$ 上のSU(2) Yang-Mills理論の古典解として知られているcaloron解は、QCDに於けるconfinementの機構との関連という文脈で議論されることもあり、特に、その非自明なholonomyの解はconfinement-deconfinementの相転移の機構に新たな知見を与えると期待されている。

双対性を利用してinstanton/monopole解を構成する手法として知られているADHM/Nahm構成法をcaloron解に援用することにより、その系統的な構成が可能であることが既に提唱されている。

ADHM/Nahm構成法によってgauge場を導出するにあたっては、双対空間のgauge場に対応するNahm dataを、実空間(物理空間)のgauge場に変換する、所謂Nahm変換を行う必要がある。これは、一階の連立微分方程式(Weyl方程式)を解くことに相当し、その一般的な解析解を見出すことは困難である。更には、非自明なholonomyを持つ一般のcaloron解のNahm変換には大きな困難が伴う。

自明なholonomyをもつMassless limitにおいて、チャージ2のcaloron解についてのNahm変換を数値的に実行する手法が、D.Nyrbaka(D.Muranaka et al./Physics Letters B 703(2011) 498-503)で提案された。我々は、その手法を一般のチャージの場合にも行えるようにするため、数値解析手法にアップグレードを加えた。

またMuranakaらの解析では、所謂PATCHWORKと呼ばれる場当たりの方法によって、作用密度に生じる様々な特異性が回避されてきた。我々は、この特異線問題の起源について考察を重ね、その根本的な解決を試みた。

Massless limitに於けるcaloronのNahm構成法

$k \in \mathbb{Z}_+$: caloron's charge, $l = 1, 2$: index, $s \in (-1, 1)$: 双対空間の座標, $\mu_0 \in (0, 2)$

$$\begin{cases} \text{bulk Nahm-eq: } \frac{d}{ds} T_i - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [T_j, T_k] + i [T_i, T_4] = 0. \\ \text{boundary Nahm-eq: } T_i(-\mu_0/2) - T_i(\mu_0/2) = \frac{1}{2} \text{tr}_2 (\sigma_i W^\dagger W). \end{cases}$$

$T_\mu(s, x^\mu)$: Nahm data, $W(x^\mu)$: boundary data

Nahm 変換

$$\text{bulk Weyl-eq: } \left(\mathbf{I}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu(s) + x_\mu \mathbf{I}_k) \otimes e_\mu \right) \mathbf{u}_l = 0. \quad (1) \quad \mathbf{u}_l: 2k\text{-vector}, \quad \mathbf{v}_l: 2\text{-vector}$$

$$\text{boundary Weyl-eq: } \mathbf{u}_l(-\mu_0/2) - \mathbf{u}_l(\mu_0/2) =: \Delta \mathbf{u}_l = iW^\dagger \mathbf{v}_l. \quad \text{bulkの解} \quad \text{boundaryの解}$$

$$\text{normalization: } \int \mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{u}_b ds + \mathbf{v}_a^\dagger \mathbf{v}_b = \delta_{ab}.$$

$$\text{gauge field: } (A_\mu(x))_{ab} = \int \mathbf{u}_a^\dagger \partial_\mu \mathbf{u}_b ds + \mathbf{v}_a^\dagger \partial_\mu \mathbf{v}_b, \quad a, b = 1, 2.$$

Bulk Weyl方程式

$$\text{bulk Weyl-eq: } (1) \xrightarrow{\times(s-s_{\text{pole}})} (s-s_{\text{pole}}) \mathbf{I}_{2k} \frac{d}{ds} \mathbf{u}_l = B_s \mathbf{u}_l.$$

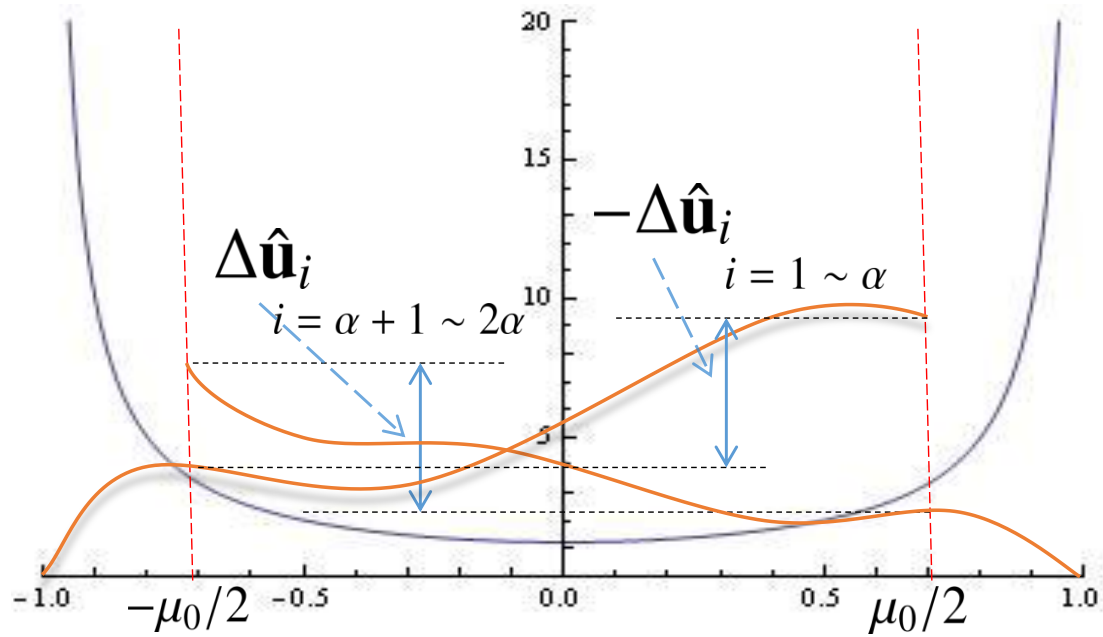
$$\therefore B_s := (s-s_{\text{pole}}) (i(T_\mu(s) + x_\mu \mathbf{I}_k) \otimes e_\mu).$$

$2k \times 2k$ matrix

$s_{\text{pole}} = -1, 1$

Nahm dataの極の座標

B_s の正の固有値の数 $\iff \alpha$: bulk Weyl-eqの極 s_{pole} を始点とする、独立な解の数



線形結合係数 $\omega_l := {}^t(\omega_l^1, \omega_l^2, \dots, \omega_l^{2\alpha})$: 2α -vector

$$\mathbf{u}_l = (\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \dots \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha}) \cdot \omega_l, \quad l = 1, 2$$

$$\Delta \mathbf{u}_l = (\Delta \hat{\mathbf{u}}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_2 \dots \Delta \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha}) \cdot \omega_l, \quad l = 1, 2$$

Boundary Weyl方程式

Boundary dataが $\delta, W = (\lambda \mathbf{I}_2 W_2 W_3 \dots W_k)$ と書けるとする。ここで、 $W_i: 2 \times 2k$ -matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{boundary Weyl-eq: } \Delta \mathbf{u}_l = iW^\dagger \mathbf{v}_l \iff \begin{pmatrix} \Delta u_l^1 \\ \Delta u_l^2 \\ \vdots \\ \Delta u_l^{2k} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ W_2^\dagger \\ \vdots \\ W_k^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_l^1 \\ v_l^2 \\ \vdots \\ v_l^2 \end{pmatrix}.$$

これは2つの未知数 v_l^1, v_l^2 に対する $2k$ 本の連立方程式だが、一般に優決定系。

必要な自由度: $(2k-2) = 2(k-1)$

SU(2)のWeyl-eqの解空間の次数は2なのでbulkの独立な解の数を α とすると、 $(2\alpha-2) = 2(\alpha-1)$ が線形結合の自由度となる。

よって次が要請される。

$$2(\alpha-1) \geq 2(k-1) \iff \alpha \geq k.$$

上式が満たされているとする。このとき $\alpha = k$ となるように、 α を適当に調整する。

$$1. \text{ Boundaryの解をbulkの解で表現する。} \begin{cases} v_l^1 = -i\Delta u_l^1 / \lambda. \\ v_l^2 = -i\Delta u_l^2 / \lambda. \end{cases}$$

$$2. \text{ Boundary Weyl-eqに代入することで、} 2(k-1) \text{本の条件式を得る。} \begin{pmatrix} \Delta u_l^3 \\ \vdots \\ \Delta u_l^{2k} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} W_2^\dagger \\ \vdots \\ W_k^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\Delta u_l^1 / \lambda \\ -i\Delta u_l^2 / \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\text{なお } W_j^i \text{ は } W^\dagger \text{ の成分を表す。} \iff \lambda \Delta u_l^i \omega_l^j = W_m^i \Delta \hat{u}_m^j \omega_l^j, \quad i = 3 \sim 2k, j = 1 \sim 2\alpha, m = 1, 2.$$

$$\iff \underbrace{(W_m^i \Delta \hat{u}_m^j - \lambda \Delta \hat{u}_i^j)}_{=: A^i_j} \omega_l^j = 0.$$

$$3. \text{ 右式は } \omega_l \text{ に対する同次方程式と見做せるので、その解空間の基底行列を求めると } \omega_l \text{ は決定される。} \iff A \omega_l = 0.$$

$$A \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{a}^1_{2\alpha-1} & \bar{a}^1_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha-1} & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha} \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}^1_{2\alpha-1} \\ -\bar{a}^2_{2\alpha-1} \\ \vdots \\ -\bar{a}^{2k-2}_{2\alpha-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} -\bar{a}^1_{2\alpha} \\ -\bar{a}^2_{2\alpha} \\ \vdots \\ -\bar{a}^{2k-2}_{2\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Example: Symmetric caloron

R.S. Ward, *Symmetric calorons*, Phys.Lett.B 582, 203(2004).

先の手法を用いて、WardのSymmetric caloronの作用密度の可視化を試みる。

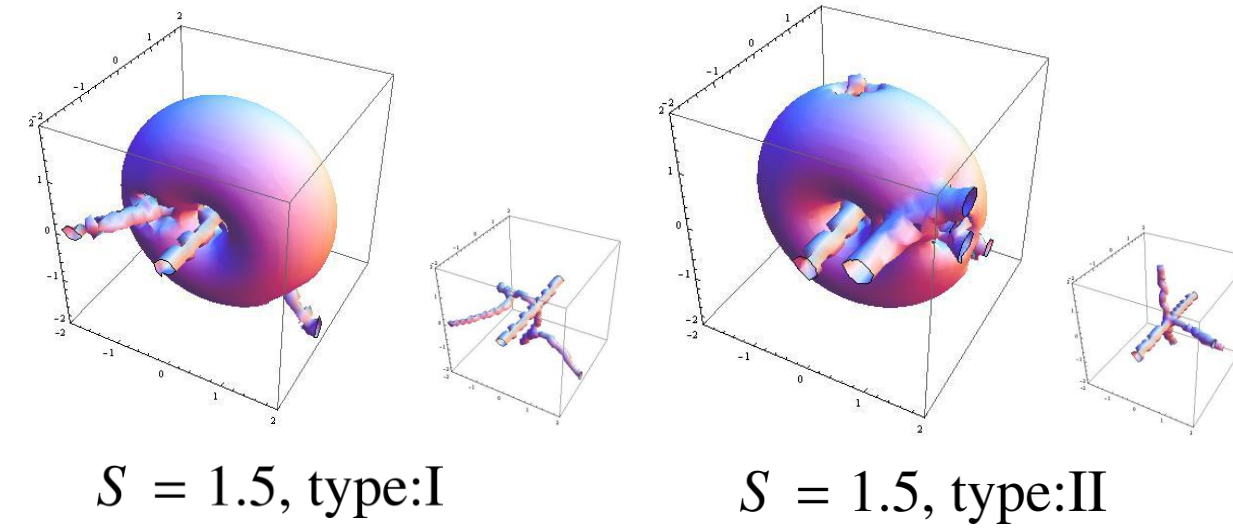
$$\text{field strength: } F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad \text{ASD condition: } *F_{\mu\nu} = \pm F_{\nu\mu} \implies$$

$$\text{action density: } S := -\frac{1}{2} \text{Tr}_2 F_{\mu\nu}^2.$$

$$S(x^i, t) = -\frac{1}{2} \text{Tr}_2 F_{\mu\nu}^2 = -2 \text{Tr}_2 (F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2)$$

以下の計算では $\mu_0 = 1.0, x^0 = 0.0$ で計算している。

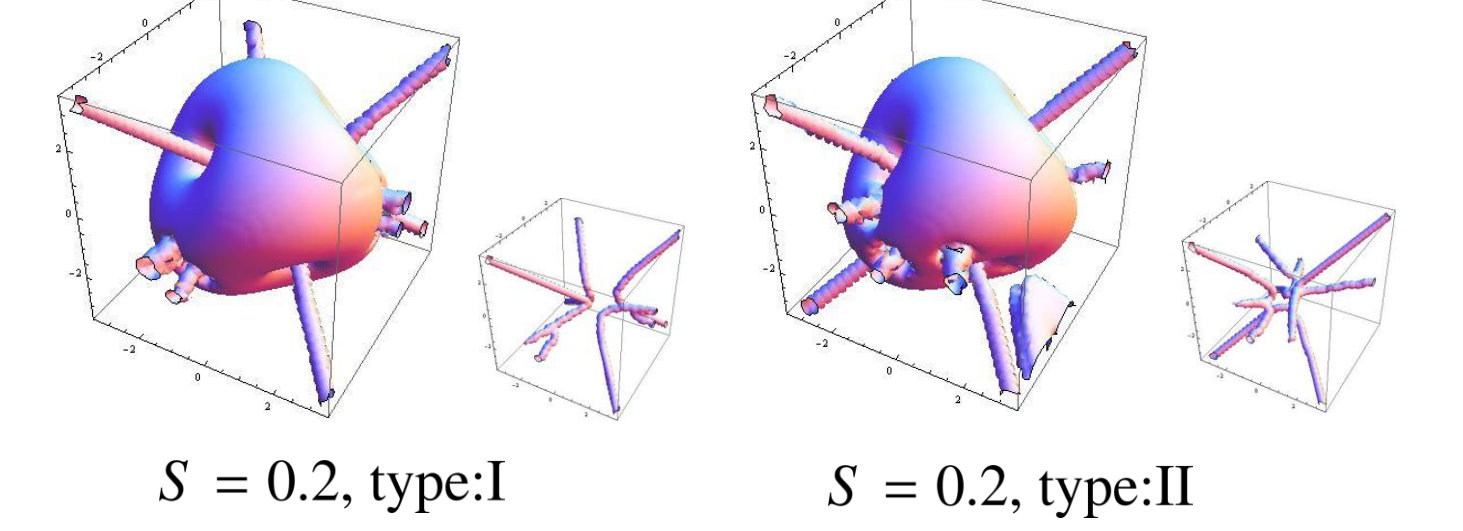
Symmetric 2-caloron



$S = 1.5$, type:I

$S = 1.5$, type:II

Symmetric 3-caloron



$S = 0.2$, type:I

$S = 0.2$, type:II

type は、bulk Weyl-eqを数値的に解く際に用いるRunge-Kutta法の初期条件の種類。

作用密度を計算すると特異線が現れる。この特異線には二種類あり、Runge-Kutta法の初期条件により動かない特異線(以降、不動特異線と呼称)と動く特異線が存在する。

常微分方程式論を用いた、特異線の起源の考察

Action densityの特異線 \iff Gauge fieldの $u(2)$ 値の破れ \iff Zero modeのgap

Bulkのzero modeはbulk Weyl-eqの解の線形結合として求められる。

Zero mode

微分不可能点のこと

$$\mathbf{u}_l = (\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \dots \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha}) \cdot \omega_l, \quad l = 1, 2$$

bulk Weyl-eqは数学的には"正規形の常微分方程式系"と見做せる。

bulk Weyl-eqの解

線形結合係数

そして正規形の常微分方程式系に対するある定理を適用すると、bulk Weyl-eqの解は物理空間の座標に対して微分可能であることが保証される。

微分可能

従って、zero modeのgapの原因は線形結合係数にあることが分かる。なおboundaryも同様。

$$\mathbf{u}_l = (\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \dots \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha}) \cdot \omega_l, \quad l = 1, 2$$

微分不可能

微分不可能

不動特異線の解消

不動特異線が生じる部分で線形結合係数: ω_l を調べると、発散していることが分かる。

Charge:2の場合で具体的に説明する。 $A = (A_1 A_2 A_3 A_4)$ と2-vector: A_l を導入すると、

$$\omega_l \text{の発散} \iff \text{vector: } A_1, A_2 \text{ の従属。}$$

A の計算を思い出すと、 $A^i_j := W^i_m \Delta \hat{u}_m^j - \lambda \Delta \hat{u}_i^j$ であるので、これを写像と見做す。

$$f_A(x^\mu): \hat{\mathbf{u}}_j(x^\mu) \mapsto A_j(x^\mu).$$

$$\Delta \mathbf{u}_l := \mathbf{u}_l(-\mu_0/2) - \mathbf{u}_l(\mu_0/2)$$

この写像を用いると、不動特異線とその他の点の違いは次のようにまとめることができる。

$$\dim \text{Im}(f_A) \begin{cases} = k-1 & \text{対称軸上、つまり特異線上。} \\ \geq k & \text{その他。} \end{cases}$$

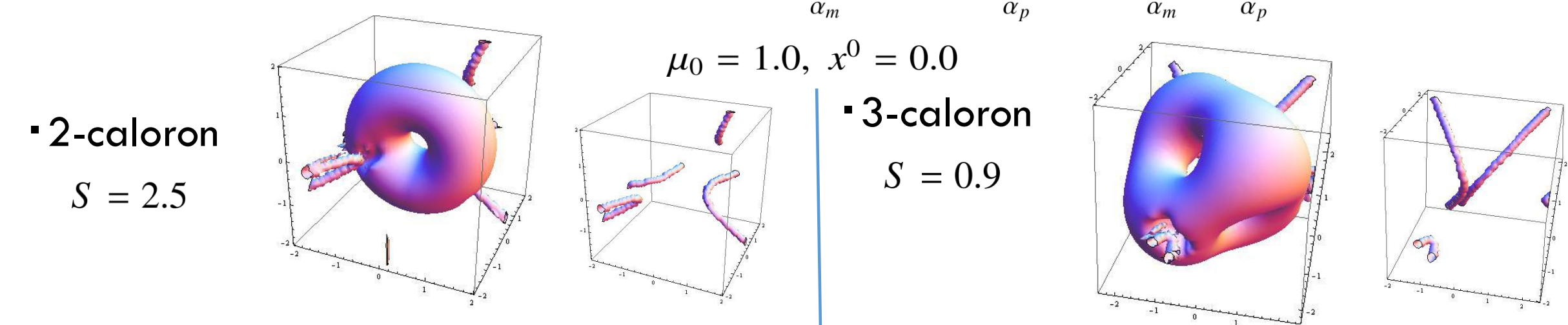
領域: l の負の極からのbulkの解を α_m 、正の極からのbulkの解を α_p とする。

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{a}^1_{2\alpha-1} & \bar{a}^1_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \bar{a}^{\alpha_m}_{2\alpha-1} & \bar{a}^{\alpha_m}_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha-1} & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{a}^1_{2\alpha-1} & \bar{a}^1_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \bar{a}^{\alpha_p}_{2\alpha-1} & \bar{a}^{\alpha_p}_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha-1} & \bar{a}^{2k-2}_{2\alpha} \end{pmatrix}$$

従来の構成法

改良型の構成法

実際には、次のように構成する。 $\mathbf{u}_l = (\hat{\mathbf{u}}_1 \dots \hat{\mathbf{u}}_{\alpha_m} \hat{\mathbf{u}}_{\alpha_p} \dots \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha-2} \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha-1} \hat{\mathbf{u}}_{2\alpha}) \cdot \omega_l, \quad l = 1, 2$



• 2-caloron
 $S = 2.5$

• 3-caloron
 $S = 0.9$

特異線の暫定的解消法

正規直交化前のboundary Weyl-eqの解に対して、次のような条件を導入する。

$$\mathbf{v}_l \in \mathbb{C}^2: \text{fix}, \exists \alpha_l, \beta_l \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \mathbf{v}_l = \alpha_l \mathbf{v}_1 + \beta_l \mathbf{v}_2, \quad l = 1, 2$$

$\mathbf{e}_l := (\mathbf{u}_l, \mathbf{v}_l)$ ($l = 1, 2$) と、bulkとboundaryのzero modeを纏めて書く。

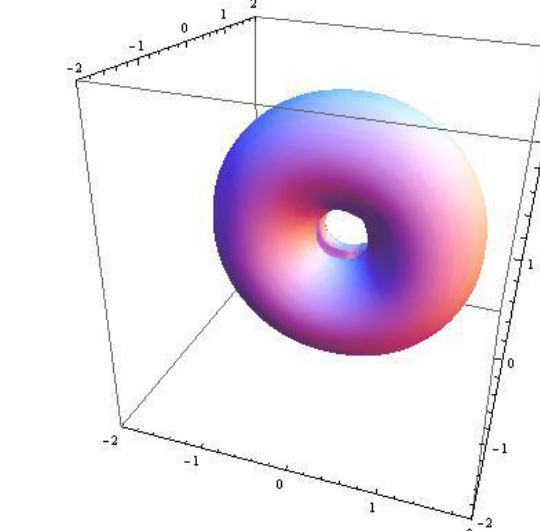
先に決めた α_l, β_l を用いて、以下のように取り直すことで一種の固定を行う。

$$\mathbf{e}_l' = \alpha_l \mathbf{e}_1 + \beta_l \mathbf{e}_2.$$

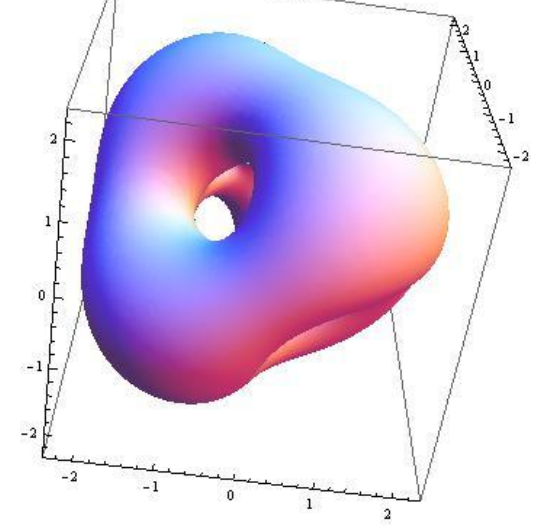
このような固定法を用いて、計算した結果が以下である。

$$\text{parameter } \mu_0 = 1.0, x^0 = 0.25$$

• 2-caloron
 $S = 2.5$



• 3-caloron
 $S = 0.9$



実はこの固定法には問題がある。というのもまずNahm変換において本質的ではないboundaryの解を用いて固定していることである。その結果 $x^0 = 0.0$ 、即ち原点付近に於いて特異点が生じ、上手くgauge場が計算できていない。また、この特異線の原因であるgauge場が上手く計算できないというのは数値的Nahm変換の普遍的問題であり、instantonやmonopoleも実はこのようなスキームではgauge場は正しく計算できない。

数学的に云うとzero modeをfiberの切断と見做せる。特異線の原因は各物理空間上で $u(2)$ の自由度で勝手に計算されるため、数値計算においてこの切断が滑らかであることが保障されないことが原因であると考えられる。従って、滑らかな切断となるような数値計算法を考える必要があると思われる。