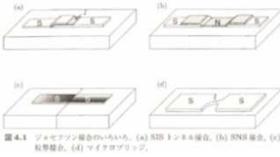


超伝導量子干渉計を用いたホログラフィックジョセフソンジャンクションにおける磁場の研究

竹内 紳悟、Rong-Gen Cai (北京, 中国)、Hai-qiang Zan (Lison, Portugal)

■ 超伝導量子干渉計(SQUID)とは？

ジョセフソンジャンクション



• SC | N or I | SC

Normal (常伝導金属層) ⇒ SNSジョセフソンジャンクション

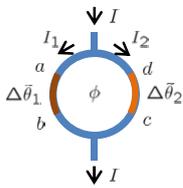
Insulator (絶縁層) ⇒ SISジョセフソンジャンクション

- この装置の面白い点だが、まず2つの超伝導体上のクーパー対の波動関数の位相が揃う理由はない。すると2つの超伝導体間の電位差がゼロでも、それら2つの波動関数の位相の違いにより、ある一方の超伝導体から絶縁層又は常伝導金属層、もう一方の超伝導体へと、超伝導電流が生じる事である。

$$J(r) = -i\hbar \frac{e^*}{2m^*} (\Psi^*(r)\nabla\Psi(r) - \Psi(r)\nabla\Psi^*(r)) - \frac{e^*}{m^*} |\Psi(r)| A(r)$$

$$= -\frac{e^*}{m^*} |\Psi(r)|^2 (\hbar\nabla\theta + e^* A(r))$$

超伝導量子干渉計(Superconducting QUantum Interference Device)



これは名称としてSQUIDと呼ばれ、典型的には2つのジョセフソンジャンクションから成る。

$\Delta\bar{\theta}_1, \Delta\bar{\theta}_2$: 2つの超伝導体上のゲージ不変に組まれたクーパー対の波動関数の位相差

絶縁層又は常伝導金属層の色の違いは、パラメータが異なる事を表わす。その結果、左右の位相差も異なるものとなる。

ϕ : SQUIDに対し垂直に走っている磁場

本発表でする事: 我々は磁束が貫く円形のSQUIDをホログラフィックに再現する事を試みた。本発表では、その際に我々が遭遇した困難と、どうしたら磁束が貫く円形のSQUIDをホログラフィックに再現できるかを議論する。

モデルは、アインシュタイン-マクスウェル-スカラーモデル(宇宙定数は負)

$$S = S_{gravity} + S_{mat} \quad \text{with} \quad S_{mat} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D\psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right]$$

- 重力の作用は物質の作用から分離する probe limit を取っている。それにより本研究では重力の揺らぎの効果は考えない。

- $\psi(r, \chi) = \bar{\psi}(r, \chi) e^{i\varphi(r, \chi)}$: 物性側でクーパー対の波動関数に対応する。

$$A(r, \chi) = A_t(r, \chi) dt + A_r(r, \chi) dr + A_\rho(r, \chi) d\rho + A_\chi(r, \chi) d\chi \quad (\text{ゲージ場の境界空間の動径成分}\rho\text{は分離する事がわかる。})$$

ゲージ場はゲージ不変な形に組み直す事が後で出来る事がわかるので、最初からそうしておく: $(M_t, M_r, M_\chi) \equiv (A_t - d\varphi, A_r - d\varphi, A_\chi - d\varphi)$

背景時空に関して: 境界時空が面になる場合(図1)、座標系は (ρ, χ, z) の円柱系に組むのが良いであろう。その場合、SQUIDを貫く磁場を入れる事を考えると、 χ 方向のゲージ場は ρ の関数でなければならない。一方、SQUIDを実現する為に χ の関数でなければならない。ホログラフィーを考えると r の関数である必要もある。その結果、 χ 方向のゲージ場は (r, ρ, χ) の関数でなければならない。そうすると、後でわかる事だが、引数が3つある為に運動方程式が複雑になり過ぎて、解けなくなる。

このような事態を避ける為、本研究では、境界の時空の1方向が最初からコンパクト化されたバルクの時空を考える。それは言わばシリンダーの表面のようなものである(図2)。そしてSQUIDはそのコンパクト化された方向に巻き付いているとする。そうすると、座標の数は2つで良い事になり、上で述べた問題はなくなる。磁場の効果を取り入れ方に関しては次のように考える。

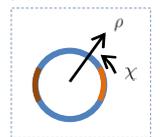


図1 (面上のSQUID)

磁場の効果の入れ方

- まず、境界の時空はシリンダーの表面のようなものなので、磁場が貫く為の空間がない。この事は、我々は原理的に磁場の効果を取り込めない事を意味する。しかし我々は以下のようにして磁場の効果を仮想的に取り入れる。

- まず磁場があると仮定する。

$$\Phi = \int dS \cdot B$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^{(f)} \quad \leftarrow \text{仮定した磁場に伴い、ゲージ場があると仮定する。}$$

$$= \oint d\chi a_\chi^{(f)}(\rho, \chi) \quad \leftarrow \text{ストークスの公式を使った。}$$

$$\vec{A}^{(f)} = a_\rho^{(f)}(\rho, \chi) d\rho + a_\chi^{(f)}(\rho, \chi) d\chi \rightarrow a_\chi(\chi) d\rho \text{ at } \rho = \rho_0$$

$$= \oint d\chi a_\chi(\chi) \quad \rho = \rho_0 \text{ で我々の実際のゲージ場に同定}$$

through GKP-W relation.

$$M_\chi(r, \chi) = \nu(\chi) + \frac{J(\chi)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})$$

$$\oint d\chi \nu_\chi(\chi) = \Phi$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ウィルソンループの角度成分} \\ W \sim \exp\left(i \oint A\right) \end{array} \right]$$

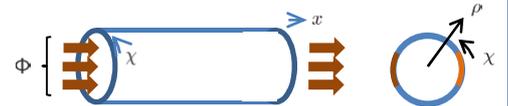


図2 (シリンダー表面上に巻きつくSQUID)

背景時空

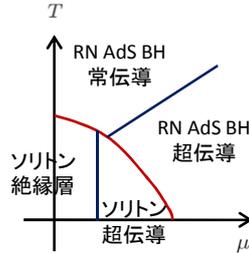
4次元Ads ソリトン時空の場合

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 dx^2 + f(r) d\chi^2 \Rightarrow \text{絶縁層/超伝導 転移}$$

4次元Ads ブラックブレン時空の場合

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2(dx^2 + d\chi^2) \Rightarrow \text{常伝導/超伝導 転移}$$

- ソリトンとBBは共に、 χ 方向は常に同じ半径コンパクト化されている ($0 \leq \chi \leq 2\pi R$)。時空の安定性に関しては $T = 3r_0/(4\pi) > 1/(2\pi R)$, ($r_0 R = 1$) でBH時空がソリトン時空よりも安定。(高柳さん-西岡さん-Shinsei Ryuさんのホログラフィック超伝導/絶縁層 転移 at $T=0$ の論文)
- 本研究では、右に述べる理由から、BB時空を背景時空に取る。



ソリトンでの計算は出来なかった。現時点で考えられる理由は (arXiv:1202.0006から引用)

Ansatz

In this section we introduce a non-trivial gauge vector potential along the compact direction only. Therefore, on the AdS-boundary we generically have

$$e_i = A_i|_{z=0} \neq 0 \quad (20)$$

Eq. (20) corresponds to the gauge invariant Wilson line $W = \exp(i \int A_i dx^i)$ that in the cigar geometry (13) implies a non vanishing magnetic flux through the (r, χ) -surface. The simplest Ansatz to study this problem is the following

$$\Psi = \psi(z) e^{im\chi/R}, \quad A_\mu = A_\mu(z), \quad A_\chi = A_\chi(z) \quad (21)$$

We want to study a system with spontaneous symmetry breaking of the local U(1) symmetry and with a chemical potential, thus the boundary conditions for A_μ and ψ at $z=0$ are given by

$$z=0, \quad \psi_0 = \mu, \quad (22)$$

ホライズンでの境界条件

BB:

$$\frac{d}{dz} \psi + (A_\chi - m/R) \psi = 0, \quad A_\mu = 0, \quad \partial_z A_\mu + \frac{g}{4\pi} (A_\mu - m/R) \psi^2 = 0.$$

ソリトン:

$$\psi = 0 \text{ for } m \neq 0, \quad \frac{d}{dz} \psi + A_\chi^2 \psi = 0 \text{ for } m = 0, \quad \partial_z A_\mu + \frac{g}{4\pi} \psi^2 = 0, \quad A_\chi = 0.$$

GKP-W 関係式

$$\exp [I_{\text{gravity}}]_{r \rightarrow \infty} = \left\langle \exp \left[\int (\psi^{(1)} \psi^{(2)} + \mu \rho + \nu J) \right] \right\rangle_{\text{some field theory}}$$

- $\psi(r, \chi) = \frac{\psi^{(1)}(\chi)}{r} + \frac{\psi^{(2)}(\chi)}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})$
 - $\psi^{(1)}(\chi)$ この項があるとGKP-W関係式における場の理論側のU(1)対称性が破れてしまうので、この項はゼロに取る。
 - $\psi^{(2)}(\chi)$ この項の値がクーパー対の波動関数の凝縮に対応する。

$M_\chi(r, \chi) = \nu(\chi) + \frac{J}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})$ J : 超伝導カレント $\nu(\chi)$: U(1) external ゲージ場

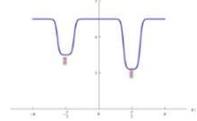
$M_r(r, \chi) = \mathcal{O}(r^{-3})$

$M_t(r, \chi) = \mu(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})$

$\rho(\chi)$: クーパー対の密度

$\mu(\chi)$: クーパー対の化学ポテンシャル

$$\mu(\chi) = \eta - \lambda_1 \left[\tanh \left\{ \frac{\kappa_1(\chi - \delta_1 + \epsilon_1)}{\pi} \right\} - \tanh \left\{ \frac{\kappa_1(\chi - \delta_1 - \epsilon_1)}{\pi} \right\} \right] - \lambda_2 \left[\tanh \left\{ \frac{\kappa_1(\chi + \delta_2 + \epsilon_2)}{\pi} \right\} - \tanh \left\{ \frac{\kappa_1(\chi + \delta_2 - \epsilon_2)}{\pi} \right\} \right]$$



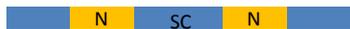
← 両端は繋がっている。

- ホライズンの位置を変えるようなリスケーリングの自由度があるので、ホライズンの位置 r_0 を1に固定する。

- その結果、温度が $T=3/(4\pi)$ に固定される。そうすると温度の効果は、転移温度との比率 T/T_c から入ってくる。
- T_c は化学ポテンシャルと次のような関係にある: $T_c = c\mu$ with $c = 0.0588$
 化学ポテンシャルが大 \Rightarrow 転移温度が大 \Rightarrow 温度が小 \Rightarrow 超伝導相へ
 化学ポテンシャルが小 \Rightarrow 転移温度が小 \Rightarrow 温度が大 \Rightarrow 常伝導金属相へ
 (温度が低くなるほど、フェルミ面が鮮明になり、クーパー対ができやすくなる。)
- 従って化学ポテンシャルの配位が次の条件を満たせば...

$$T_{CL} < T < T_{CH} \Rightarrow \frac{\mu_L}{\mu_H} < \frac{T}{c\mu_H} < 1 \quad \text{where } T_{CH} = c\mu_H \text{ and } T_{CL} = c\mu_L$$

セットアップは次のようなものになる:



運動方程式はかなり複雑。我々はそれを Spectral method on the Chebyshev Grid を Matlab で行って解く。(Lloyd N. Trefethen, Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia, 2000.)

結果

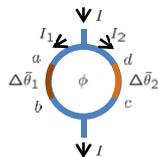
$$\nabla\theta = \frac{1}{h} (m^* v_s + e^* A)$$

■ 物性のSQUID側でよく知られた結果

$$I_{\text{total}} = I_1 + I_2$$

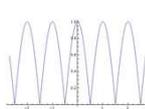
$$= I_{c1} \sin \Delta\theta_1 - I_{c2} \sin \Delta\theta_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ゲージ不変量} \\ \Delta\theta_i \equiv -\frac{e^*}{h} \int_a^b A dl + \Delta\theta_i \end{array} \right.$$



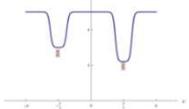
$$\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1 = -2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \text{ mod } 2\pi \quad \leftarrow 2\pi n = \oint \nabla\theta dl \text{ with } \nabla\theta = \frac{1}{h} (m^* v_s + e^* A)$$

$$= I_{\text{max}} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \sin \left(\Delta\theta_1 + \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad \text{with } I_{\text{max}} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \equiv 2I_c \cos \left(\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$



■ これをホログラフィックな計算から再現するには

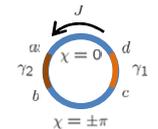
(I_1, I_2)



- やるとしたら、化学ポテンシャルを左右非対称に取り、運動方程式を右と左に分け、初期値として (I_1, I_2) を与える事になるであろう。この時 $I_1 \neq I_2$ である。
- 運動方程式は数値的に解くのだが、このような条件で運動方程式を解こうとすると、実際、解けなかった。
- 理由は恐らく、解く時は運動方程式を左右で分け接合部で左右の関数が連続的に繋がるという境界条件を課しているのだが、 $I_1 \neq I_2$ だと、この不連続性の為、境界条件を満たす解が得られないから。

■ 実際に行ってみた解析

- 化学ポテンシャルを左右非対称に取り、 J (一種類) を初期値として与え、運動方程式を解く。その結果、



J	γ_1	γ_2
0	10^{-14}	10^{-14}
0.01	0.00794	0.01929
0.02	0.01593	0.03879
\vdots	\vdots	\vdots

今、外場としての磁場はゼロ

$$\gamma_1 \equiv -\int_{-\pi}^0 d\chi (\nu(\chi) - \nu(0))$$

$$\gamma_2 \equiv -\int_0^{\pi} d\chi (\nu(\chi) - \nu(0))$$

- その結果、次のような結果を得た:



- J_{total} は次のように評価した:
 $J = J_1 \sin \gamma_1 + J_2 \sin \gamma_2 = J_{\text{total}} (J_1, J_2, \Phi) \sin (\gamma_1 + \arctan(\dots))$
- 磁場は次のように評価した: $\Phi = \int_{\chi} d\chi \nu(\chi) = \gamma_2 - \gamma_1$
 磁場の発生理由は、位相差 \Rightarrow 超伝導電流 \Rightarrow 磁場の誘発
 しかしこの結果は間違っていると僕は共同研究者に言っている。

■ これから行う解析は...

