

QCD におけるクォークの閉じ込めと
カイラル対称性の自発的破れの関係の研究*

京都大学大学院理学研究科
物理学第二教室原子核理論研究室

土居孝寛

2014 年 2 月 26 日

* 本稿は平成 25 年度京都大学大学院理学研究科に提出した修士論文に加筆及び修正したものである。

概要

本研究では、量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) におけるクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について、解析的な枠組み及び格子 QCD 計算の双方を用いて議論する。

核子等のハドロンがクォーク・グルーオンの多体系である事から、強い相互作用の基礎理論である QCD について理解を深める事は原子核・素粒子物理学分野において非常に有意義な事である。特に、カラーの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れ等の低エネルギー領域の QCD が示す非摂動的現象は、クォーク・グルーオンの多体系としてのハドロンを理解する上で必要不可欠な現象である。カラーの閉じ込めとは、カラーを持った状態は観測されずカラー 1 重項の状態のみが観測されるという現象である。実際、実験ではクォークやグルーオンは単体では観測されずカラー 1 重項のハドロンしか観測されていない。しかし、QCD から始めてカラーの閉じ込めを第一原理的に証明する事は未だ成功していない。また、カイラル対称性の自発的破れとは元々 QCD が持っていたカイラル対称性が自発的に破れ、クォークが質量を獲得する現象である。

QCD は理論の漸近的自由性から低エネルギー領域では相互作用が強くなり、摂動論が適用できず解析は非常に困難である。非摂動的領域の QCD を解析するのに最も信頼できる手法として、格子 QCD が挙げられる。格子 QCD とは、連続理論である QCD をゲージ対称性を保ちつつ離散化した理論である。離散化の結果、数値的にはあるが様々な物理量を非摂動的に計算できる。本研究でも解析の手法として主に格子 QCD を用いる。

カラーの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れそれぞれの非摂動的現象も興味深いだが、その関係性もまた興味深い研究対象である。閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移の転移温度の比較や、最大可換ゲージを取った場合の QCD モノポールの研究からカラーの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れには強い相関があるという事が示唆されていた。他方、QCD において閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係は単純な 1 対 1 対応ではないという事を数値的に示した研究もある。

本研究の目的は、数値的にだけではなく解析的にも low-lying Dirac mode が閉じ込め現象にとって本質的ではない事を示す事である。まず、時間方向の周期境界条件を課した時間方向の格子サイズが奇数の格子を用いて Polyakov loop と Dirac mode を直接結ぶ解析的な関係式を導出する。Polyakov loop は閉じ込めの代表的なオーダーパラメータであり、low-lying Dirac mode はカイラル対称性の自発的破れに関する最も重要なモードであるから、この関係式に基づいてクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの間を議論する事ができる。この関係式より、low-lying Dirac mode は Polyakov loop の値にほとんど寄与しない事が示唆される。

この関係式を数値的に調べた結果、実際に low-lying Dirac mode が Polyakov loop の値にほとんど寄与しない事を確認した。すなわち、Polyakov loop と Dirac mode の関係式に基づき、QCD においてクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの間は単純な 1 対 1 対応ではない事を解析的及び数値的に示した。

数値的解析の際、Dirac 演算子をスピノルの添字に関して対角化する手法である Kogut-Susskind(KS) 法を用いれば Dirac mode の数値計算のコストを抑える事ができる。しかし、従来の KS 法は時間方向の格子サイズが奇数の格子に対しては適用できないので、時間方向の格子サイズが奇数の格子に対して適用可能なように KS 法を一般化して modified KS 法を新しく開発した。

また、Polyakov loop と Dirac mode の関係式に現れるリンク変数演算子の (KS)Dirac 行列要素に、正負の値に関する新しい対称性が存在し得る事が本研究で初めてわかった。閉じ込め相ではこの正負の対称性が存在し、この対称性によって Polyakov loop の値はゼロになる。他方、非閉じ込め相ではこの正負の対称性は存在せず、その非対称性により Polyakov loop の値がゼロでなくなる。従って、この新しい対称性が閉じ込め相と非閉じ込め相を区別する新しい指標となり得る事が期待できる。

目次

第 1 章	導入	4
1.1	QCD	4
1.1.1	クォークの閉じ込め	6
1.1.2	カイラル対称性の自発的破れ	9
1.1.3	Banks-Casher 関係式	10
1.2	格子 QCD	12
1.2.1	ユークリッド化した QCD	12
1.2.2	格子 QCD の作用	13
1.2.3	格子 QCD の具体的計算法:モンテカルロ計算	17
1.2.4	クォークの閉じ込めに対するアプローチ 1:Wilson loop	18
1.2.5	クォークの閉じ込めに対するアプローチ 2:Polyakov loop	24
第 2 章	クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係に関する先行研究	28
2.1	有限温度格子 QCD 計算	29
2.2	格子 QCD における Dirac mode 展開・射影	31
第 3 章	Temporally odd-number lattice における Polyakov loop と Dirac mode の関係式	39
3.1	Temporally odd-number lattice における Polyakov loop と Dirac mode の関係式	39
3.1.1	導出	40
3.1.2	個々の Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与	42
3.2	Temporally odd-number lattice における Kogut-Susskind 法	43
3.2.1	even lattice における (通常)Kogut-Susskind 法	43
3.2.2	Temporally odd-number lattice における Kogut-Susskind 法	46
第 4 章	数値的解析	50
4.1	Polyakov loop と Dirac mode の関係式の数値的確認	50
4.2	low-lying Dirac mode の Polyakov loop への寄与	51
4.3	各 Dirac mode の Polyakov loop への寄与	52
第 5 章	まとめと展望	58
	参考文献	62

第 1 章

導入

1.1 QCD

量子色力学 (Quantum chromodynamics, QCD) は標準模型のうち強い相互作用を記述する基礎理論である [1, 2, 3, 4]。QCD は SU(3) ゲージ理論として構成され、フェルミオンであるクォーク $q(x)$ とゲージ場であるグルーオン $A_\mu^a(x)$ を基本的な場としてラグランジアンは次のように書かれる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G^a_{\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q. \quad (1.1)$$

ただし

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a. \quad (1.3)$$

g は QCD のゲージ結合定数である。クォーク場 $q^{\alpha if}$ はスピノルの添字 ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) と SU(3) の基本表現の添字 ($i = 1, 2, 3$) とフレーバーの添字 ($f = 1, \dots, N_f$) を持つ。ゲージ場 A_μ^a はローレンツの添字 ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と SU(3) の随伴表現の添字 ($a = 1, \dots, 8$) を持つ。ゲージ場として A_μ と書いたときは、 $A_\mu \equiv A_\mu^a T^a$ を意味するものとする。以下場や行列の添字はこの定義に従って記述する。 T^a は SU(3) の生成子、 f^{abc} は SU(3) の構造定数で、

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (1.4)$$

の交換関係を満たす。 γ^μ は γ 行列で、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

のクリフォード代数 (反交換代数) を満たす。 m_q はカレントクォーク質量行列である。

SU(3) ゲージ変換は、次の局所変換で定義される。

$$q(x) \rightarrow q'(x) = \Omega(x)q(x) \quad (1.6)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \Omega(x) \left(A_\mu(x) - \frac{1}{ig} \partial_\mu \right) \Omega(x)^{-1} \quad (1.7)$$

$$\Omega(x) = \exp(i\theta^a(x)T^a) \quad (\theta^a(x) \text{ はゲージ変換のパラメータ}) \quad (1.8)$$

この変換でラグランジアンが不変である時、理論が SU(3) ゲージ対称性を持つという。実際、QCD ラグランジアン (1.1) はゲージ変換で不変である。特に、ゲージ変換パラメータ $\theta^a(x)$ が十分小さいときのゲージ変換 (無限小ゲージ変換) は

$$q(x) \rightarrow q'(x) \simeq q(x) + i\theta^a(x)T^a q(x) \quad (1.9)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) \simeq A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x)T^a + f^{abc}T^a A_\mu^b(x)\theta^c(x) \quad (1.10)$$

$$\left(A_\mu^a(x) \rightarrow A'^a_\mu(x) \simeq A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) + f^{abc}A_\mu^b\theta^c(x) \equiv A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}(D_\mu\theta)^a \right) \quad (1.11)$$

$$\Omega(x) = \exp(i\theta^a(x)T^a) \simeq 1 + i\theta^a(x)T^a \quad (\theta^a(x) : \text{infinitesimal}) \quad (1.12)$$

で与えられる。式 (1.11) で随伴表現の量に作用したときの共変微分

$$(D_\mu\theta)^a \equiv \partial_\mu\theta^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)\theta^c(x) \quad (1.13)$$

を定義した。

U(1) ゲージ理論である量子電気力学 (Quantum electrodynamics, QED) では、 $f^{abc} = 0$ であるからゲージ場の光子場は自己相互作用しない。ところが QCD では $f^{abc} \neq 0$ であるからグルーオン場は自己相互作用する。QCD(非可換ゲージ理論) が QED(可換ゲージ理論) と本質的に異なるのはこの点である。グルーオンの自己相互作用項によって、QCD は漸近的自由性 (asymptotic freedom) を持つ [1, 2, 5, 6]。つまり、エネルギースケールが大きくなるにつれ (近距離になるにつれ) 相互作用は弱くなるという性質をもつ。 N_f 個の massless fermion を持つ SU(N_c) 非可換ゲージ理論の結合定数は、1-loop までの β 関数の計算により、

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q)}{4\pi} = \frac{12\pi}{11N_c - 2N_f} \frac{1}{\ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2})} \quad (1\text{-loop}) \quad (1.14)$$

となる。 Λ_{QCD} は QCD スケールで、実験から決められるパラメータである。漸近的自由性のために、低エネルギー領域 (長距離領域) では相互作用が強くなり、摂動論が適用できない。したがって低エネルギー領域では摂動論では説明できない非摂動的現象が現れる。本研究の主題であるクォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れは低エネルギー QCD の非摂動的現象の代表格である。

本研究では低エネルギー QCD の非摂動的解析方法として、格子 QCD (lattice QCD) を採用する。格子 QCD とは 4 次元ユークリッド空間で QCD をゲージ不変性を尊重して格子化したものであり、QCD に基づく第一原理計算ができる手法として大変有力な手法である [7, 8, 9]。後の節 1.2 で格子 QCD の簡単な解説を行う。

1.1.1 クォークの閉じ込め

クォークの閉じ込めはカラーの閉じ込めの一例である。カラーの閉じ込めとは、カラー電荷を持った状態は観測されずにカラー 1 重項 (color singlet) の状態しか観測されないという現象である。実際、実験的に観測されているのはメソン (中間子, meson) やバリオン (baryon) といったカラー 1 重項のハドロン (hadron) だけで、クォークやグルーオン等のカラー電荷を持った状態が観測された例はない。

ところが、カラーの閉じ込めはおろか、クォークの閉じ込めでさえ QCD からの第一原理的な証明は未だになされていない。とはいえ、数々の精力的な研究により多くの事がわかっている。以下、カラーの閉じ込め及びクォークの閉じ込めの描像をいくつか紹介する。

クォーク間の線形の閉じ込めポテンシャルがクォークの閉じ込めの最もわかりやすい描像を与える [7, 10]。メソンにいくら大きなエネルギーを与えてもクォークが単体で観測される事はなく、クォーク・反クォークの対生成が起こり新しいメソンがもう一つ生じる。メソンをクォーク・反クォークの束縛状態であるとすれば、これはクォーク・反クォークの間の距離 R を大きくするとクォーク・反クォークのポテンシャルエネルギー $V(R)$ が無限に大きくなる事を意味している。ただし、ポテンシャルエネルギーがクォーク・反クォークの対生成が起こるエネルギーを超えれば、エネルギー的に得なので対生成が起こり新しいメソンがもう一つ生じると考えられる。 $V(R)$ が遠距離で線形に大きくなる事が格子 QCD の計算で確認されているので、線形の閉じ込めポテンシャルと呼ばれる。静的クォーク・反クォーク系のポテンシャルエネルギーが Wilson loop から計算できるという事は節 1.2.4 で詳しく述べる。

QCD においては、クォーク・反クォーク間に 1 次元的に絞られたグルーオンのフラックス・チューブが構成されてクォーク間の線形の閉じ込めポテンシャルが生じると考えられている [10, 11]。図 1.1 に QCD におけるクォーク・反クォーク間のフラックス・チューブの様子を示した。図 1.2 に示した QED における電子・陽電子系の電気力線の様子とはかなり異なっている。

格子 QCD 計算で、 $q\bar{q}$ 系 [10] や qqq 系 [12, 13, 14] でのフラックス・チューブ形成が確認されている。図 1.3 に qqq 系でのフラックス・チューブの様子を示した。



図 1.1 QCD におけるゲージ不変な $q\bar{q}$ 系で形成されるフラックス・チューブの概形。クォークと反クォークの間に、1 次元的に絞られたカラー電場のフラックス・チューブが形成され、線形の閉じ込めポテンシャルが生じる。

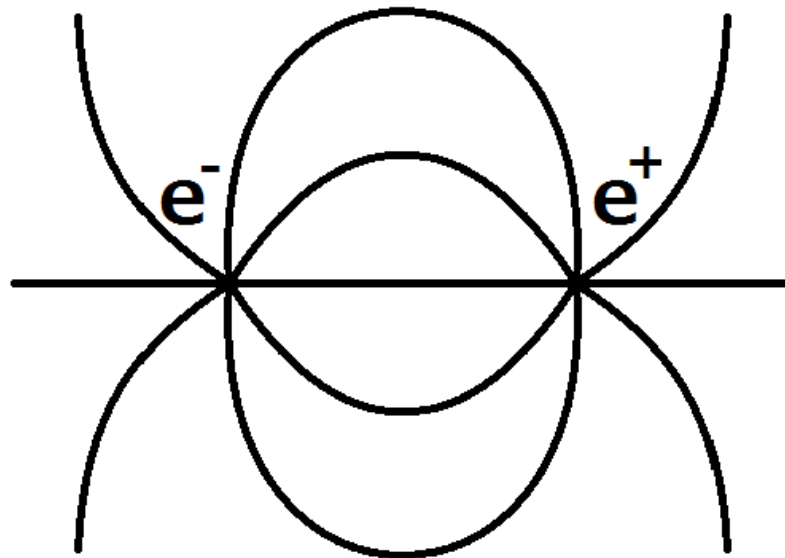


図 1.2 QED における電子・陽電子系の電気力線の概形。クーロン則に従って無限遠まで電場が生じる。

系の温度が高温になると、カラーの閉じ込めが起こらなくなり系は閉じ込め相 (confinement phase) から非閉じ込め相 (deconfinement phase) になる [1, 3, 7]。非閉じ込め相では、系はクォークとグルーオンのガス状態 (クォーク・グルーオン・プラズマ, quark gluon plasma, QGP) になると考えられており、現代の素粒子・原子核物理学の最も興味深い研究対象の一つである。閉じ込め相と非閉じ込め相を特徴づけるオーダーパラメータとして、Polyakov loop がよく用いられる [7]。Polyakov loop は QCD 真空 (QCD vacuum) に単体のクォークが存在する系のエネルギーと関係しており、閉じ込め相ではエネルギーが無限大となり非閉じ込め相ではエネルギーが有限となるので、Polyakov loop の振る舞いで系が閉じ込め相にあるか非閉じ込め相にあるかの区別ができる。Polyakov loop については節 1.2.5 で詳しく述べる。

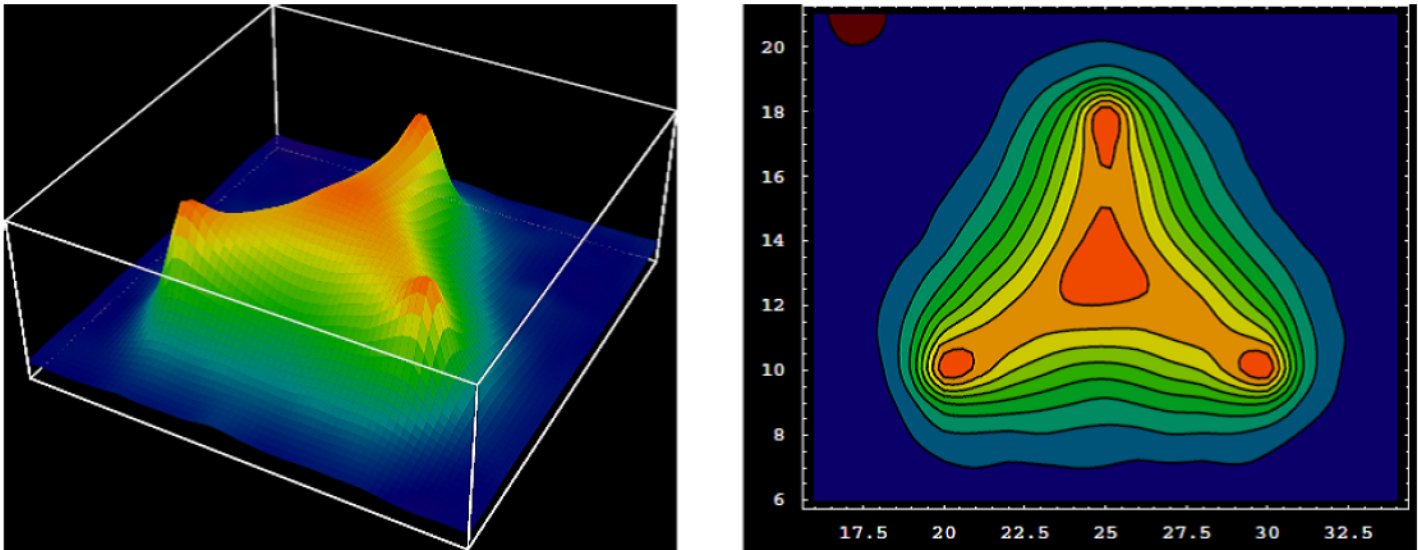


図 1.3 格子 QCD の数値計算による、 qqq 系での作用の密度分布。これは QCD における、 qqq 系の Y 字のフラックス・チューブ形成を示している。[H. Ichie et al. [12]] より引用した。

共変的なゲージ固定を行い BRST 形式に基づき物理的状态は BRST1 重項 (BRST singlet) 状態のみである事を用いて、カラーを持った状態は物理的状态でない事を示そうとする研究もある。これは九後-小嶋理論と呼ばれ、QCD から出発してクォークの閉じ込めだけではなくカラーの閉じ込めに直接アプローチできる非常に強力な手法である [2]。

Schwinger-Dyson formalism を用いた解析により、quark scalar density が閉じ込めの効果に sensitive な量であるという示唆が得られている [15]。閉じ込めに重要な量は Polyakov loop だけではなく、このような閉じ込めの効果に sensitive な量を見つけ、その性質を調べる事は大変意義のある事である。

第二種超伝導体とのアナロジーにより QCD 真空が双対超伝導体であるとする、双対超伝導描像も閉じ込めを説明する機構の一つである [11, 16, 17]。双対超伝導描像は QCD をゲージ固定する事で確認されている。最大可換ゲージ (maximally Abelian gauge, MAG) を取る事で QCD モノポール (QCD monopole) が現われ、QCD モノポールが閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れ等の非摂動的現象にとって非常に重要である事がわかっている [19, 20, 21]。また、ゲージ固定をする代わりに Cho-Faddeev-Niemi 分解を用いてゲージ不変なモノポールを定義し、閉じ込めとの関係を議論する研究もある [22, 23, 24]。

1.1.2 カイラル対称性の自発的破れ

カイラル対称性の自発的破れとは、カイラル極限 (chiral limit, $m_q \rightarrow 0$) で QCD ラグランジアン (1.1) が元々持っていたカイラル対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ が、真空においては $SU(N_f)_V$ に自発的に破れてしまう現象である [25, 26, 27]。その結果、 $(N_f^2 - 1)$ 個の南部-Goldstone ボソンが現われて、クォークは質量 (constituent quark mass, 構成子クォーク質量) を獲得する。実際は $m_q \neq 0$ なので、近似的に破れている。

$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ カイラル変換とは、フェルミオンの左巻き成分 $\psi_{L,f} \equiv \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \psi_f$ と右巻き成分 $\psi_{R,f} \equiv \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \psi_f$ に対して独立な $SU(N_f)$ 変換

$$\psi_{L,f} \rightarrow \psi'_{L,f} = U(\theta_L)_{ff'} \psi_{L,f'}, \quad U(\theta_L)_{ff'} = \exp(i\theta_L^a T^a) \in SU(N_f)_L \quad (1.15)$$

$$\psi_{R,f} \rightarrow \psi'_{R,f} = U(\theta_R)_{ff'} \psi_{R,f'}, \quad U(\theta_R)_{ff'} = \exp(i\theta_R^a T^a) \in SU(N_f)_R \quad (1.16)$$

を行うことである。 θ_L^a と θ_R^a は独立な変換のパラメータである。カイラル変換は大域的 (global) な連続変換である。このカイラル変換は次のようにベクトル変換と軸性変換に分解できる。

$$\text{ベクトル変換: } \psi_f \rightarrow \psi'_f = U(\theta_V)_{ff'} \psi_{f'}, \quad U(\theta_V)_{ff'} = \exp(i\theta_V^a T^a) \in SU(N_f) \quad (1.17)$$

$$\text{軸性変換: } \psi_f \rightarrow \psi'_f = U(\theta_A)_{ff'} \psi_{f'}, \quad U(\theta_A)_{ff'} = \exp(i\gamma_5 \theta_A^a T^a) \quad (1.18)$$

ベクトル変換は左巻き成分と右巻き成分を同じパラメータ ($\theta_L = \theta_R \equiv \theta_V$) で変換させた変換、軸性変換は左巻き成分と右巻き成分を逆符号のパラメータ ($\theta_L = -\theta_R \equiv -\theta_A$) で変換させた変換に対応する。理論が $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ カイラル対称性を持つとは、ラグランジアンが (1.15), (1.16) のカイラル変換で不変であることである。軸性変換の事を単にカイラル変換と呼ぶこともある。

QCD ラグランジアン (1.1) はカイラル極限 (chiral limit, $m_q \rightarrow 0$) でカイラル対称性を持つ。クォークは massless ではなくカレントクォーク質量を持つのでカイラル対称性は QCD の対称性ではないが、u,d クォークのカレントクォーク質量は数 MeV で QCD スケール Λ_{QCD} に比べて小さく、u,d セクターに関してはカイラル対称性は近似的対称性とみなせる。よって、カイラル対称性が状態のレベルでも保たれていれば、現実の u,d セクターの軽いハドロンのスペクトルにもその対称性が現れるはずである。ところが、実験事実によるとカイラル対称性は状態のレベルでは破れており、これをカイラル対称性の自発的破れという。現在では、QCD のカイラル対称性は $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ から $SU(N_f)_V$ に破れると考えられている。カイラル対称性の自

発的破れの秩序変数 (order parameter) はカイラル凝縮 (chiral condensate) $\langle \bar{q}q \rangle$ である。以下では $\langle \bar{q}q \rangle$ は 1flavor 当たりのカイラル凝縮とする。

カイラル対称性は大域的な連続対称性であるから、南部-Goldstone の定理よりカイラル対称性の自発的破れに伴って南部-Goldstone boson (NG boson) が現れる。最も軽いハドロンであるパイ中間子 ($m_\pi \sim 140\text{MeV}$) は u,d セクターの SU(2) カイラル対称性の破れの NG boson とみなすことができる。NG boson なのに質量を持つのは u,d クォークのカレント・クォーク質量が有限の値を持つためである。カイラル対称性に限らず対称性の自発的破れが起こったとき、低エネルギー領域においては NG boson に関連する物理量の関係が決まる。これを低エネルギー定理という [2]。例えば、Gell-Mann-Oaks-Renner 関係式

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_q \langle \bar{q}q \rangle \quad (1.19)$$

や Goldberger-Treiman 関係式

$$g_{\pi N} f_\pi = m_N g_A \quad (1.20)$$

などが低エネルギー定理の一例である。ここで f_π はパイ中間子崩壊定数 (pion decay constant) であり、実験値は $f_\pi = 93\text{MeV}$ で低エネルギー QCD の重要なパラメータの一つである。 m_π, m_N はそれぞれパイ中間子と核子質量、 $g_{\pi N}$ パイ中間子と核子の結合定数、 g_A は軸性 charge である。

1.1.3 Banks-Casher 関係式

カイラル対称性の自発的破れの秩序変数はカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ である。カイラル凝縮は Banks-Casher 関係式 [28] と呼ばれる関係式で Dirac 演算子のゼロ固有値密度と密接に関わっている。Banks-Casher 関係式は本研究の中で非常に重要な役割を担うので、導出もここで行う。

ユークリッド化した QCD を考える。 γ 行列はすべてエルミートにとる。 $(\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu)$ Dirac 演算子 (Dirac operator) $\mathcal{D} = D_\mu \gamma_\mu$ の固有値方程式を次のように書く。

$$\mathcal{D}|n\rangle = i\lambda_n|n\rangle \quad (1.21)$$

\mathcal{D} は反エルミートなので固有値は純虚数で、 λ_n は実数である。 $|n\rangle$ は固有状態である。以下この Dirac 演算子の固有モードを Dirac mode と呼ぶ。Dirac mode は正規直行基底である。

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (1.22)$$

Dirac 演算子は γ_5 と反交換する。

$$\{\not{D}, \gamma_5\} = 0 \quad (1.23)$$

この事実から、状態 $\gamma_5|n\rangle$ が状態 $|n\rangle$ の固有値 $i\lambda_n$ に対して逆符号の固有値 $-i\lambda_n$ を持つことがわかる。

$$\not{D}\gamma_5|n\rangle = -\gamma_5 \not{D}|n\rangle = -\gamma_5 i\lambda_n|n\rangle = -i\lambda_n \gamma_5|n\rangle \quad (1.24)$$

ここで、カイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ を以下のように変形する。

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{1}{V} \int dx \sum_{\alpha,i} \langle \bar{q}^{\alpha i}(x) q^{\alpha i}(x) \rangle \quad (\langle \bar{q}q \rangle \text{ は } x \text{ に依存しない事 (一様凝縮) を仮定する}) \quad (1.25)$$

$$= -\frac{1}{V} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{D} + m} \right) \right\rangle \quad (\text{Tr : functional trace}) \quad (1.26)$$

$$= -\frac{1}{V} \left\langle \sum_n \langle n | \frac{1}{\not{D} + m} | n \rangle \right\rangle \quad (\text{トレースを取る基底として Dirac mode を取った}) \quad (1.27)$$

$$= -\frac{1}{V} \left\langle \sum_n \frac{1}{i\lambda_n + m} \right\rangle \quad (1.28)$$

$$= -\frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{i\lambda + m} \left\langle \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) \right\rangle \quad (1.29)$$

$$= -\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda - im} \langle \rho(\lambda) \rangle \quad (\rho(\lambda) \equiv \frac{1}{V} \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n)) \quad (1.30)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle \rho(\lambda) \rangle \left(P \frac{1}{\lambda} + i\pi\delta(\lambda) \right) \quad (m \rightarrow 0, P \text{ は主値積分}) \quad (1.31)$$

$$\rightarrow -\pi \langle \rho(0) \rangle \quad (\text{thermodynamics limit (熱力学極限) : } V \rightarrow \infty) \quad (1.32)$$

$\rho(\lambda)$ は

$$\rho(\lambda) \equiv \frac{1}{V} \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) \quad (1.33)$$

で定義される Dirac 固有値の固有値密度であり、熱力学極限を取ることでなめらかな関数になる。式 (1.31) では、デルタ関数と主値積分を用いた関係式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad (P \text{ は主値}) \quad (1.34)$$

を用いた。式 (1.24) より $\rho(\lambda)$ が偶関数になるので、式 (1.31) 第 1 項の主値積分は消え、式 (1.32) が得られる。

結局、Banks-Casher 関係式は次のように表される。

$$\text{Banks - Casher 関係式} \quad \langle \bar{q}q \rangle = - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \pi \langle \rho(0) \rangle \quad (1.35)$$

Banks-Casher 関係式は、Dirac mode のうち固有値ゼロのモード (Dirac ゼロモード) の数密度がカイラル凝縮の値を与えることを示している。つまり、カイラル対称性の自発的破れの最も

重要なモードが ディラック・ゼロモードである。この事実に着目するのが本研究の第一歩である。

なお、式(1.27)で汎関数トレースをとる基底として Dirac mode を採用した。このアイデアは時間方向のサイズが奇数の格子上で Polyakov loop と Dirac mode の関係式を導出する際に重要となる。

1.2 格子 QCD

この節では格子 QCD についての基礎的な事項をまとめる。格子 QCD とは、一言で言うなら、ユークリッド時空においてゲージ対称性を尊重して離散化した QCD である [3, 7, 8]。まず最初にユークリッド化について議論した後、格子 QCD の作用の構成及び実際の計算方法についてまとめる。

1.2.1 ユークリッド化した QCD

式(1.1)の QCD ラグランジアンはミンコフスキー時空上で定義されているが、ここでは Wick 回転 (Wick rotation) によりユークリッド化を行う。ユークリッド化する前は μ, ν の添字は 0, 1, 2, 3 を走るが、ユークリッド化した後は μ, ν の添字は 1, 2, 3, 4 を走るものとする。ユークリッド化の具体的な操作を以下に示す。まず

$$x^0 \rightarrow -ix_4^E \quad (\partial_0 \rightarrow i\partial_4) \quad (1.36)$$

$$x^i \rightarrow x_i^E \quad (\partial_i \rightarrow \partial_i) \quad (1.37)$$

$$A^0 \rightarrow iA_4^E \quad (1.38)$$

$$A^i \rightarrow A_i^E \quad (1.39)$$

と置き換える。ベクトルの時間成分のみ変更を受ける。また、本論文では、 γ 行列 γ_μ については、すべての γ_μ^E がエルミート行列になるようにユークリッド化を行う。

$$\gamma_0 \rightarrow \gamma_4^E \quad (1.40)$$

$$\gamma_i \rightarrow i\gamma_i^E \quad (1.41)$$

このユークリッド化の定義では γ_μ^E は次の反交換関係を満たし、すべての $\mu = 1, 2, 3, 4$ に対してエルミートである。

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (1.42)$$

$$(\gamma_\mu^E)^\dagger = \gamma_\mu^E \quad (1.43)$$

これにより、 $i = 1, 2, 3$ とすると

$$F_{0i} \rightarrow iF_{4i}^E \quad (1.44)$$

$$F_{ij} \rightarrow F_{ij}^E \quad (1.45)$$

が得られる。これを用いると、

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -F_{0i}F_{0i} - F_{i0}F_{i0} + \sum_{i,j} F_{ij}F_{ij} \rightarrow F_{4i}^E F_{4i}^E - F_{i4}^E F_{i4}^E + \sum_{i,j} F_{ij}^E F_{ij}^E = F_{\mu\nu}^E F_{\mu\nu}^E \quad (1.46)$$

$$D_0 = \partial_0 - igA_0 \rightarrow i(\partial_0 - igA_4) = iD_0^E \quad (1.47)$$

$$D_i = \partial_i - igA_i \rightarrow \partial_i - igA_i = D_i^E \quad (1.48)$$

が得られる。よって、QCD の作用のユークリッド化は

$$S_{\text{QCD}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} G^{\alpha\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_c)q \right] \quad (1.49)$$

$$\rightarrow \int d^4x^E (-i) \left[-\frac{1}{4} (G^E)_{\alpha\mu\nu} (G^E)_{\alpha\mu\nu} + \bar{q}(i \cdot i\gamma_\mu^E D_\mu^E - m_c)q \right] \quad (1.50)$$

$$= i \int d^4x^E \left[\frac{1}{4} (G^E)_{\alpha\mu\nu} (G^E)_{\alpha\mu\nu} + \bar{q}(\gamma_\mu^E D_\mu^E + m_c)q \right] \quad (1.51)$$

とできる。ユークリッド化した QCD の作用を

$$S_{\text{QCD}}^E = \int d^4x^E \mathcal{L}_{\text{QCD}}^E \quad (1.52)$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^E = \frac{1}{4} (G^E)_{\alpha\mu\nu} (G^E)_{\alpha\mu\nu} + \bar{q}(\gamma_\mu^E D_\mu^E + m_c)q \quad (1.53)$$

と定義する。ユークリッド化した後の生成汎関数は

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q e^{-S_{\text{QCD}}^E} \quad (1.54)$$

ユークリッド化は後にモンテカルロ計算をする際の確率解釈をする上で本質的な操作である。

以下ではユークリッド化を表す“E”の添字は省略する。

1.2.2 格子 QCD の作用

この節ではユークリッド化した QCD(1.53) の格子化 (離散化) を行う。格子化をする際の最も重要な点は、理論のゲージ対称性を尊重する事である。連続極限で QCD に一致する作用は複数あるが、本論文ではゲージ場の運動項についてはプラケット作用、クォークセクターについては Wilson 作用という最も簡単な作用について述べる。

格子間隔 (lattice spacing) a を持つ 4 次元正方格子を考える。 $a = 1$ とした単位を格子単位という。サイト (格子点) $s_\mu = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ 上にクォーク場 $q(s)$ を、サイト間を結ぶリンク上に

リンク変数 $U_\mu(s)$ を置く。リンク変数 $U_\mu(s)$ は連続理論のゲージ場 $A_\mu(s)$ と

$$U_\mu(s) = e^{iagA_\mu(s)} \quad (1.55)$$

の関係を持つものとする。格子上でのゲージ変換は

$$q(s) \rightarrow q'(s) = \Omega(s)q(s) \quad (1.56)$$

$$U_\mu(s) \rightarrow U'_\mu(s) = \Omega(s)U_\mu(s)\Omega(s+\hat{\mu})^\dagger \quad (1.57)$$

$$\Omega(s) \in \text{SU}(3) \quad (1.58)$$

で定義する。ただし、 $\hat{\mu}$ は $|\hat{\mu}| = a$ を満たす μ 方向のベクトルであり、格子単位での単位ベクトルである。これは連続極限 ($a \rightarrow 0$) で連続理論のゲージ変換と一致する。

まず、ゲージ場の運動項について述べる。ブラケット $U_{\mu\nu}(s)$ を次の量で定義する。

$$U_{\mu\nu}(s) = U_\mu(s)U_\nu(s+\hat{\mu})U_\mu(s+\hat{\nu})^\dagger U_\nu(s)^\dagger \quad (1.59)$$

ブラケットを a が小さいとして評価すると、field strength $G_{\mu\nu}$ と関係付いている事がわかる。

$$A_\nu(s+\hat{\mu}) = A_\nu(s) + a\partial_\mu A_\nu(s) + \mathcal{O}(a^2) \quad (1.60)$$

$$A_\mu(s+\hat{\nu}) = A_\mu(s) + a\partial_\nu A_\mu(s) + \mathcal{O}(a^2) \quad (1.61)$$

及び Campbell-Baker-Hausdorff 公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (1.62)$$

を用いると、

$$e^{iagA_\mu(s)} e^{iagA_\nu(s+\hat{\mu})} = \exp \left[iag(A_\mu(s) + A_\nu(s) + \partial_\mu A_\nu(s)) - \frac{1}{2}(ag)^2 [A_\mu(s), A_\nu(s)] + \mathcal{O}(a^3) \right] \quad (1.63)$$

$$e^{-iagA_\mu(s+\hat{\nu})} e^{-iagA_\nu(s)} = \exp \left[-iag(A_\mu(s) + A_\nu(s) + \partial_\nu A_\mu(s)) - \frac{1}{2}(ag)^2 [A_\mu(s), A_\nu(s)] + \mathcal{O}(a^3) \right] \quad (1.64)$$

であるため、ブラケットは具体的に

$$U_{\mu\nu}(s) = U_\mu(s)U_\nu(s+\hat{\mu})U_\mu(s+\hat{\nu})^\dagger U_\nu(s)^\dagger \quad (1.65)$$

$$= \exp \left[ia^2 g (\partial_\mu - A_\nu(s) - \partial_\nu - A_\mu(s)) - ia([A_\mu(s), A_\nu(s)]) + \mathcal{O}(a^4) \right] \quad (1.66)$$

$$= \exp \left[ia^2 g G_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^4) \right] \quad (1.67)$$

と評価できる。よって、

$$U_{\mu\nu}(s) + U_{\mu\nu}(s)^\dagger = 2 - a^4 G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^6) \quad (1.68)$$

であるので、

$$S_g = \beta \sum_s \sum_{\mu > \nu} \left[1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(s) + U_{\mu\nu}(s)^\dagger) \right] \quad (1.69)$$

は $\mathcal{O}(a^6)$ で連続理論の QCD のゲージ場の運動項と一致する。ただし $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ である。式 (1.69) はプラケット作用と呼ばれる。

次は格子上のフェルミオンについて述べる。対称性を全て満たすように格子上にフェルミオンを置こうとすると、1つの次元に対して2個の極が生じ、余計な自由度が生じるという、ダブリング問題 (doubling problem) が生じる。粒子の個数というのは理論にとって非常に重要である。

まずは自由フェルミオンのナイーブな離散化を例にとってダブリング問題を見る。ゲージ理論の場合でもダブリング問題については全く変わらないので、自由フェルミオンについて考える。ユークリッド化した自由フェルミオンの作用は

$$S = \int d^4x \bar{q}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M)q(x) \quad (1.70)$$

である。ここでは

$$\partial_\mu q(x) \rightarrow \hat{\partial}_\mu q(s) = \frac{1}{a}(q(s + a\hat{\mu}) - q(s)) \quad (1.71)$$

とナイーブに離散化する。すると、格子上の自由フェルミオンの作用は

$$S_F = a^4 \sum_n \bar{q}(s)(\gamma_\mu \hat{\partial}_\mu + M)q(s) \quad (1.72)$$

となる。この場合、伝播関数 (propagator) は

$$\langle \bar{q}_\alpha(s_1)q_\beta(s_2) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-i\gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M)_{\alpha\beta} e^{ip(s_1-s_2)a}}{\sum_\mu (\tilde{p}_\mu)^2 + M^2} \quad (1.73)$$

となる。ただし $\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin(p_\mu a)$ である。propagator の極が物理的粒子を表す。この場合、1つの自由度に2つの p が極を与える。つまり、4次元の格子理論では元々連続理論で1つの粒子を表す極に対して $2^4 = 16$ 個の粒子 (ダブラー、doubler) が生じてしまう。これがダブリング問題である。

参考のため、自由スカラー場の理論について考える。propagator は

$$\langle \phi(s_1)\phi(s_2) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_\mu (\tilde{k}_\mu)^2 + M^2} e^{ik(s_1-s_2)a} \quad (1.74)$$

である。ただし $\tilde{k}_\mu = \frac{1}{a}\sin(k_\mu a)$ である。この場合は、元々連続理論で1つの粒子を表す極に対して格子理論でも1つの極が存在する。スカラー場の理論だけでなく、ボソン場の理論ではダブリング問題は起きない。

このダブリング問題は格子フェルミオンを考える上で必ず生じる問題であるという事が Nielsen-Ninomiya の定理 [3, 7, 29, 30] によって示されている。Nielsen-Ninomiya の定理は以

下のおりである。格子上のフェルミオンの作用が

- ・ (a) 平行移動不変性
- ・ (b) カイラル対称性
- ・ (c) エルミート性
- ・ (d) フェルミオン場の双一次形式
- ・ (e) 局所性

の条件を満たしている時、ダブリング問題が生じる。

我々が考えたい QCD は以上の Nielsen-Ninomiya の定理の条件を満たしている。なので、通常は上の条件を部分的に破る事でダブリング問題を避ける。

ここでは、カイラル対称性を破る事でダブリング問題を避ける格子フェルミオンのうち、ウィルソンフェルミオン [7, 9] について述べる。作用は

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2} a^4 \sum_s \bar{q}(s) \hat{\partial}^2 q(s) \quad (1.75)$$

である。\$S_F\$ は式 (1.71) のナイーブな離散化した自由フェルミオンの作用である。第二項はウィルソン項と呼ばれる。propagator は

$$\langle \bar{q}_\alpha(s_1) q_\beta(s_2) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-i\gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M(p))_{\alpha\beta}}{\sum_\mu (\tilde{p}_\mu)^2 + M(p)^2} e^{ip(s_1-s_2)a} \quad (1.76)$$

となる。ただし、

$$M(p) \equiv M + \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2(p_\mu a/2) \quad (1.77)$$

である。第二項はウィルソン項による寄与である。ダブラーはこの項によって、元々の物理的粒子の質量 \$M\$ よりも大きい質量を持つ事になる。よって、連続極限でダブラーは非常に大きな質量を持つことになり、低エネルギーの物理に寄与しなくなる。ウィルソン・フェルミオンはこのようにしてダブリング問題を回避している。

結局、ゲージ場の運動項としてプラケット作用、クォークセクターとしてウィルソン・フェルミオンを用いると、格子 QCD の作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{QCD}} &= S_g + S_F^{(W)} \\ &= \beta \sum_s \sum_{\mu > \nu} \left[1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(s) + U_{\mu\nu}(s)^\dagger) \right] \\ &\quad + (M + 4r) \sum_s \bar{q}(s) q(s) - \frac{1}{2} \sum_{s, \mu} \bar{q}(s) \left[(r - \gamma_\mu) U_\mu(s) q(n + \hat{\mu}) + (r + \gamma_\mu) U_\mu(s - \hat{\mu})^\dagger q(n - \hat{\mu}) \right] \end{aligned} \quad (1.78)$$

となる。分配関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{QCD}}} \quad (1.79)$$

で、演算子 \hat{O} の真空期待値は

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \hat{O}(A, \psi, \bar{\psi}) e^{-S_{\text{QCD}}} \quad (1.80)$$

である。

1.2.3 格子 QCD の具体的計算法:モンテカルロ計算

格子 QCD の一般的な相関関数 (1.80) は連続極限に近い場合は解析的に評価する事は非常に難しい。そのため、数値的な評価が行われる事が多い。区分求積法による評価の計算はスーパーコンピュータを駆使しても無理である。そこで、モンテカルロ法を用いる。

モンテカルロ法とは、分配関数 Z (1.79) の $e^{-S_{\text{QCD}}}$ の因子を確率的な重みとして考え、積分を評価する方法である。 $e^{-S_{\text{QCD}}}$ の因子はユークリッド化する前は $e^{iS_{\text{QCD}}}$ であるから、確率的な重みとして考える上でユークリッド化は本質的な操作である。

ウィルソフェルミオンに限らず、格子 QCD の作用のクォークセクターはクォーク場の双一次形式

$$S_{\text{F}} = a^4 \sum_{s_1, s_2} \bar{q}(s_1) K(s_1, s_2) q(s_2) \quad (1.81)$$

である。経路積分のうちクォーク部分については積分が実行できる。

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q e^{-(S_{\text{g}}[U] + a^4 \sum_{s_1, s_2} \bar{q}(s_1) K(s_1, s_2) q(s_2))} \quad (1.82)$$

$$= \mathcal{D}U \text{Det} K[U] e^{-S_{\text{g}}[U]} \quad (1.83)$$

$$= \mathcal{D}U e^{-S_{\text{g}}[U] - \ln \text{Det} K[U]} \quad (1.84)$$

$$= \mathcal{D}U e^{-S_{\text{g}}[U] - \text{Tr} \text{Ln} K[U]} \quad (1.85)$$

$$\equiv \mathcal{D}U e^{-S_{\text{eff}}[U]} \quad (1.86)$$

最後に有効作用 $S_{\text{eff}}[U] \equiv S_{\text{g}}[U] + \text{Tr} \text{Ln} K[U]$ を定義した。

$\mathcal{D}U$ 及び $e^{-S_{\text{eff}}}$ の重みを持ったゲージ配位 $\{U\}_i (i = N_{\text{conf}})$ を多数用意する事ができれば、

$$\langle \mathcal{O} \rangle \simeq \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{conf}}} \mathcal{O}_i \quad (1.87)$$

で評価できる。ここで \mathcal{O}_i は $\mathcal{D}U$ 及び $e^{-S_{\text{eff}}}$ の重みで生成したゲージ配位 $\{U\}_i (i = N_{\text{conf}})$ を用いて評価した量である。 $N_{\text{conf}} \rightarrow \infty$ の極限で式 (1.87) は exact になる。有限の N_{conf} の時、誤差は $\mathcal{O}(1/\sqrt{N_{\text{conf}}})$ 程度である。

$\det K[U]$ は真空偏極の効果を表し、一般には $\det K[U] \neq 1$ である。ところが、実際の計算では $\det K[U]$ の計算に非常に時間がかかる。ここで、 $\det K[U] = 1$ と近似する事で計算量を減少させられる。この近似はクエンチ近似 (quenched approximation) と呼ばれ、物理的には自明な真空からのクォーク・反クォークの対生成を無視する事を意味している。クエンチ近似での有効作用は

$$S_{\text{eff}}[U] = S_g[U] \quad (1.88)$$

である。 $S_g[U]$ は式 (1.69) のプラケット作用である。本論文で論じるカラーの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れ等の非摂動的現象は、クエンチ近似でも定性的な性質はもちろん、多くの定量的な議論も近似的に可能である事が知られている [31]。クエンチ近似を用いず、 $\det K[U]$ の効果を全て取り入れた計算をフル QCD (full QCD) 計算と呼ぶ。

1.2.4 クォークの閉じ込めに対するアプローチ 1: Wilson loop

この節では、質量が無限大のクォークの閉じ込めに関して非常に重要な量である Wilson loop について述べる [7, 9]。具体的には、ウィルソンループから質量が無限大のクォーク・反クォーク系のポテンシャル・エネルギーが求められる。

まずは簡単のため、ゲージ群が $U(1)$ の場合を考える。更に、物理的描像がわかりやすいので格子理論ではなくミンコフスキー時空の連続理論で話を進める。つまり、考える作用は

$$S_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q \quad (1.89)$$

である。

まず、次のゲージ不変な状態を考える。

$$|\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\rangle = \bar{q}_\alpha(\mathbf{x}, t)U(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t)q_\beta(\mathbf{y}, t)|\Omega\rangle \quad (1.90)$$

ここで $|\Omega\rangle$ は真空 (基底状態) であり、 U は任意の時刻 t に対して

$$U(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t) = \exp \left[ig \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz^i A_i(\mathbf{z}, t) \right] \quad (1.91)$$

で定義される。経路は \mathbf{x} と \mathbf{y} を結ぶ直線とする。式 (1.90) の状態は $t = 0$ で \mathbf{x}, \mathbf{y} に局在する $Q\bar{Q}$ 系を表す状態で、ゲージ不変である。この状態 (1.90) は Hamiltonian H の固有状態ではない。しかし、この状態から Hamiltonian の固有状態を取りだせる。状態 $|\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\rangle$ の遷移を

表す Green 関数

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \langle \phi_{\alpha'\beta'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}',t) | \phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) \rangle \quad (1.92)$$

$$= \langle \Omega | T(\bar{q}_{\beta'}(\mathbf{y}',t)U(\mathbf{y}',t;\mathbf{x}',t)q_{\alpha'}(\mathbf{x}',t)\bar{q}_{\alpha}(\mathbf{x},0)U(\mathbf{y}',0;\mathbf{x}',0)q_{\beta}(\mathbf{y}',0)) | \Omega \rangle \quad (1.93)$$

を考える。式 (1.93) の右辺は (形式的な) 経路積分表示で

$$\begin{aligned} G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};t) \\ = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}Q \mathcal{D}\bar{Q} \\ (\bar{q}_{\beta'}(\mathbf{y}',t)U(\mathbf{y}',t;\mathbf{x}',t)q_{\alpha'}(\mathbf{x}',t)\bar{q}_{\alpha}(\mathbf{x},0)U(\mathbf{x},0;\mathbf{y},0)q_{\beta}(\mathbf{y}',0))e^{iS} \end{aligned} \quad (1.94)$$

と表せる。作用 S は

$$S = S_G[A] + S_F[q, \bar{q}, A] + S_F[Q, \bar{Q}, A] \quad (1.95)$$

$$S_G[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.96)$$

$$S_F[q, \bar{q}, A] = \int d^4x \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - M)q \quad (1.97)$$

$$S_F[Q, \bar{Q}, A] = \int d^4x \bar{Q}(i\gamma^\mu D_\mu - M^{(Q)})Q \quad (1.98)$$

である。重いクォーク Q, \bar{Q} は試行粒子 (test particle) として置き、 $\mathcal{D}Q\mathcal{D}\bar{Q}$ を先に行う。作用は重いクォーク場 Q, \bar{Q} の双一次形式なのでこの変数についての積分が実行できる。

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};t) \quad (1.99)$$

$$= -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$$

$$[S_{\beta\beta'}(y, y'; A)S_{\beta\beta'}(x', x; A) - S_{\alpha'\beta'}(x', y'; A)S_{\beta\alpha}(y, x; A)]U(\mathbf{y}', t; \mathbf{x}', t)U(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t)\det K^{(Q)}[A]e^{iS_G+iS_F} \quad (1.100)$$

ただし、

$$x = (\mathbf{x}, 0), \quad y = (\mathbf{y}, 0) \quad (1.101)$$

$$x' = (\mathbf{x}', t), \quad y' = (\mathbf{y}', t) \quad (1.102)$$

であり、 $S(z, z'; A)$ は外場 A_μ 中のクォークの遷移を表す Green 関数で、

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu(z)) - M_Q]S(z, z'; A) = \delta^{(3)}(\mathbf{z} - \mathbf{z}')\delta^{(3)}(t - t') \quad (1.103)$$

を満たす関数として定義される。 $\det K^{(Q)}[A]$ は行列

$$K_{\alpha x, \beta y}^{(Q)}[A] = [\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu(z)) - M_Q]\delta^{(4)}(x - y) \quad (1.104)$$

の行列式である。 $\det K^{(Q)}$ は $M_Q \rightarrow \infty$ で (無限大の) 定数になり、 Z に含まれる因子と相殺する。よって、 $\det K^{(Q)} = 1$ として話を進める。次は式 (1.100) の $M_Q \rightarrow \infty$ の表式を得たい。

$M_Q \rightarrow \infty$ の極限では空間微分は 0 となる。(静的近似、static approximation) この近似の下で Green 関数 $S(z, z'; A)$ の定義式 (1.103) は

$$[\gamma^0(\partial_0 + igA_0(z)) - M_Q] S(z, z'; A) = \delta^{(4)}(z - z') \quad (1.105)$$

となる。式 (1.105) は簡単に解ける。

$$S(z, z'; A) = \exp\left(ig \int_{z_0}^{z'_0} dt A_0(\mathbf{z}, t)\right) \hat{S}(z - z') \quad (1.106)$$

ただし、 $\hat{S}(z - z')$ は

$$(\gamma^0 \partial_0 - M_Q) \hat{S}(z - z') = \delta^{(4)}(z - z') \quad (1.107)$$

を満たす。 $\hat{S}(z - z')$ についても解くと、

$$\begin{aligned} S(z, z'; A) = & \delta^{(3)}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \exp\left(ig \int_{z_0}^{z'_0} dt A_0(\mathbf{z}, t)\right) \times \\ & \times \left[\Theta(z_0 - z'_0) \left(\frac{1 + \gamma_0}{2}\right) e^{-iM_Q(z_0 - z'_0)} + \Theta(z'_0 - z_0) \left(\frac{1 - \gamma_0}{2}\right) e^{iM_Q(z_0 - z'_0)} \right] \end{aligned} \quad (1.108)$$

となる。式 (1.108) を式 (1.100) へ代入する。 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ という問題を考えているので、 $\delta^{(3)}(\mathbf{z} - \mathbf{z}')$ があるので、式 (1.100) の右辺第 2 項は消える。また、 $t \neq 0$ と定義すると、時間の順序関係から式 (1.108) の 2 項のうち一方しか残らない。よって、

$$\begin{aligned} & G_{\alpha'\beta', \alpha\beta}(\mathbf{x}', \mathbf{y}'; \mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \\ & \rightarrow \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\frac{1 - \gamma_0}{2}\right)_{\beta\beta'} e^{-iM_Q t} \left(\frac{1 + \gamma_0}{2}\right)_{\alpha'\alpha} e^{-iM_Q t} \times \\ & \times \exp\left(ig \int_0^t dt' A_0(\mathbf{y}, t')\right) \exp\left(ig \int_t^0 dt' A_0(\mathbf{x}, t')\right) \exp\left(ig \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz^i A_i(\mathbf{z}, 0)\right) \exp\left(ig \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} dz^i A_i(\mathbf{z}, t)\right) \times \\ & \times e^{iS_G + iS_F} \quad (M_Q \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.109)$$

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\frac{1 + \gamma_0}{2}\right)_{\alpha'\alpha} \left(\frac{1 - \gamma_0}{2}\right)_{\beta\beta'} e^{-2iM_Q t} \exp\left(ig \oint_C dz^\mu A_\mu(z)\right) e^{iS_G + iS_F} \quad (1.110)$$

$$= \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\frac{1 + \gamma_0}{2}\right)_{\alpha'\alpha} \left(\frac{1 - \gamma_0}{2}\right)_{\beta\beta'} e^{-2iM_Q t} \langle W_C[A] \rangle \quad (1.111)$$

となる。ここで、 $W_C[A]$ は Wilson loop と呼ばれる量で、

$$W_C[A] \equiv \exp\left(ig \oint_C dz^\mu A_\mu(z)\right) \quad (1.112)$$

で定義される。また、経路 C は図 1.4 に示したような時間方向に長さ t 、空間方向に長さ $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ の長方形型の経路である。ただし $\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{y}')$, $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ のデルタ関数を考慮した。

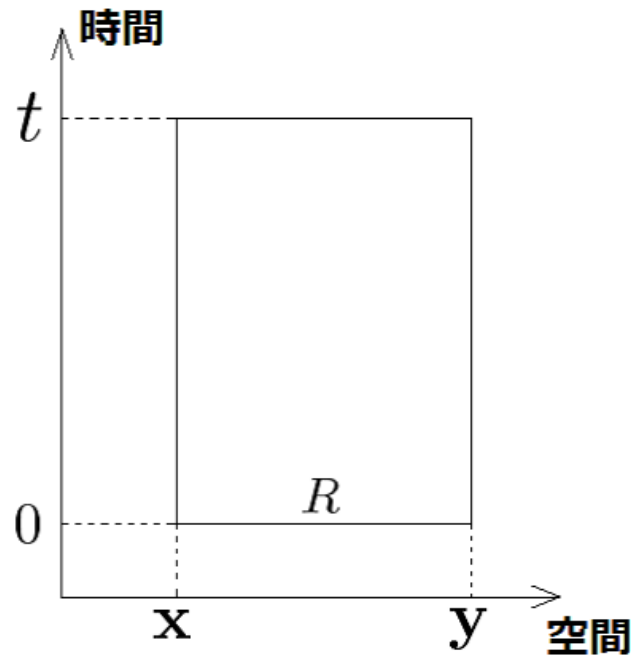


図 1.4 Wilson loop の計算に用いる経路。横軸は空間方向、縦軸は時間方向を表す。

ここで、式 (1.111) をユークリッド化 ($t \rightarrow -iT$) すると、

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};T) \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \left(\frac{1+\gamma_0}{2}\right)_{\alpha'\alpha} \left(\frac{1-\gamma_0}{2}\right)_{\beta\beta'} e^{-2M_Q T} \langle W_C^E[A] \rangle_{\text{Eucl}} \quad (1.113)$$

となる。ただし $W_C^E[A]$ はユークリッド化した Wilson loop で、

$$W_C[A] \equiv \exp\left(ig \oint_C dz^\mu A_\mu(z)\right) \quad (1.114)$$

で定義され、その期待値は具体的には

$$\langle W_C^E[A] \rangle_{\text{Eucl}} = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} W_C^E[A] e^{-S_{\text{QED}}^{\text{Eucl}}}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-S_{\text{QED}}^{\text{Eucl}}}} \quad (1.115)$$

である。ただし経路 C はユークリッド時空における、時間方向に長さ T 、空間方向に長さ $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ の長方形型の経路である。

さて、ここで (ユークリッド化した) Green 関数 (1.93) の別の表式を求める。

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \langle \phi_{\alpha'\beta'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}',T) | \phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) \rangle \quad (1.116)$$

$$= \langle \phi_{\alpha'\beta'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}',0) | e^{-HT} | \phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) \rangle \quad (1.117)$$

次に、式 (1.117) に状態 $|\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)\rangle$ を Hamiltonian H の固有状態 $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ で展開した形

$$|\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)\rangle = \sum_n C_{\alpha\beta}^n(\mathbf{x},\mathbf{y}) |n\rangle \quad (1.118)$$

を代入する。

$$\begin{aligned} G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{x},\mathbf{y};t) \\ = C_{\alpha\beta}^{n*}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')C_{\alpha\beta}^n(\mathbf{x},\mathbf{y})e^{-E_n T} \end{aligned} \quad (1.119)$$

$$\rightarrow G(R)_{\alpha'\beta',\alpha\beta}e^{-E_0 T} + \dots \quad (T \rightarrow \infty) \quad (1.120)$$

$G(R)$ は長さ $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ に依存する複素数である。式 (1.117) の \dots は $T \rightarrow \infty$ で消える。

この系の基底状態のエネルギー $E_0 = 2M_Q + V(R)$ としてポテンシャルエネルギー $V(R)$ を定義し、式 (1.113) と式 (1.120) を比較すると、Wilson loop は $T \rightarrow \infty$ で

$$W(R,T) \equiv \langle W_C^E[A] \rangle_{\text{Eucl}} \rightarrow F(R)e^{-V(R)T} \quad (1.121)$$

と振る舞う。 $F(R)$ は $|\phi_{\alpha\beta}\rangle$ と $|0\rangle$ の overlap などによる複素数である。よって、ポテンシャル $V(R)$ は Wilson loop から

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln W(R,T) \quad (1.122)$$

で得られる。

これまでは連続理論で議論したが、格子理論においても同様の議論ができる。この場合、Wilson loop は

$$W_C[U] = \prod_{l \in C} U_l \quad (1.123)$$

であり、この量の期待値 $W(\hat{R}, \hat{T}) \equiv \langle W_C[U] \rangle$ から

$$\hat{E}(\hat{R}) = - \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln W(\hat{R}, \hat{T}) \quad (1.124)$$

でポテンシャル・エネルギーが得られる。ただし、 $\hat{}$ が付いた量は格子単位での量である。つまり

$$\hat{T} = \frac{T}{a}, \quad \hat{R} = \frac{R}{a}, \quad \hat{E} = Ea \quad (1.125)$$

非可換ゲージ理論の場合についても、基本的には $U(1)$ の場合と同様の議論を行う。 $U(1)$ の場合の式 (1.91) は、QCD の場合には

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t) = \text{Pexp} \left[ig \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz^i A_i(\mathbf{z}, t) \right] \quad (1.126)$$

となり、P は path ordering を意味し、これは $Q\bar{Q}$ 状態

$$|\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\rangle = \bar{q}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \tilde{U}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t) q_{\beta}(\mathbf{y}, t) |\Omega\rangle \quad (1.127)$$

をゲージ不変性に構成するために必要である。

格子上では、path に沿ってリンク変数がかかる事が path ordering に対応する。非可換ゲージ理論の場合のゲージ不変な Wilson loop は

$$W_C[U] \equiv \text{Tr} \prod_{l \in C} U_l \quad (1.128)$$

である。その期待値は

$$W(\hat{R}, \hat{T}) = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} W_C[U] e^{-S_{\text{QCD}}^{\text{Lat}}}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-S_{\text{QCD}}^{\text{Lat}}}} \quad (1.129)$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}U W_C[U] e^{-S_{\text{QCD}}^{\text{Eff}}}}{\int \mathcal{D}U e^{-S_{\text{QCD}}^{\text{Eff}}}} \quad (1.130)$$

で評価する。ここで、 $S_{\text{QCD}}^{\text{Eff}} = S_g[U] + \text{ln det} K[U]$ はクォーク場を積分した後の有効作用である。

以上の議論より、Wilson loop から $Q\bar{Q}$ 系のポテンシャル・エネルギー $V(R)$ を得る事ができる。

1つの例として、クエンチ近似を用いた格子 QCD 計算で得られたクォーク・反クォークポテンシャルを図 1.5 に示した [10]。数値的な結果は、

$$V(R) = -\frac{\alpha}{R} + \sigma R + C \quad (1.131)$$

で非常に高い精度で fit できる。 α, σ, C は定数で、特に線形項の係数 σ は弦張力 (string tension) と呼ばれ、閉じ込め現象にとって重要な量である。式 (1.131) は Cornell ポテンシャルと呼ばれる。

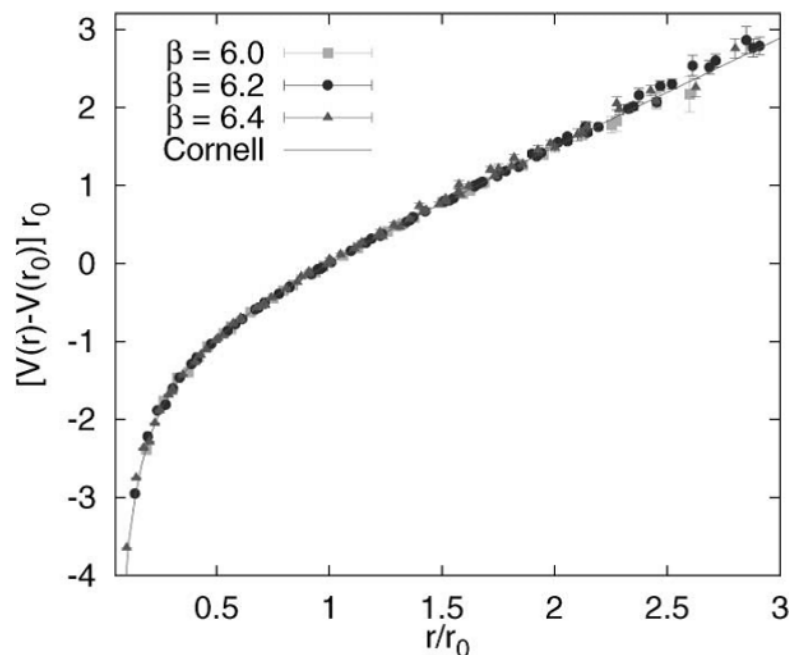


図 1.5 クォーク・反クォーク間ポテンシャルの格子 QCD 計算の例。点は格子 QCD 計算で、実線は Cornell ポテンシャルで fit したものである。[G.S. Bali et al. [10]] より引用した。

1.2.5 クォークの閉じ込めに対するアプローチ 2: Polyakov loop

Polyakov loop は single quark energy と関係する量である閉じ込めの代表的なオーダーパラメータである [7, 32]。

まずは連続理論の U(1) ゲージ理論の場合について考える。ここでは定性的な議論のみ行うが、Polyakov loop は、ゲージ場と couple した重いクォーク Q が1つだけ存在する系のエネルギーと関係する。

虚時間方向に周期境界条件を課し、周期を β とする。このとき、系の温度は $T = \frac{1}{\beta}$ である。ゲージ場と couple した重い (静的) クォーク Q が1つだけ存在する系を考える。この系の分配関数は

$$Z = \sum_s \langle s | e^{-\beta H} | s \rangle \quad (1.132)$$

である。s に関する和は、状態 $\Psi^\dagger(\mathbf{x}, 0) | s' \rangle$ についての和に拡張する。ただし、 $\Psi^\dagger(\mathbf{x}, 0)$ は状態 $| s' \rangle$ にクォークが含まれていない時は $x_4 = 0$ の時刻に \mathbf{x} の位置にクォークを生成する演算子である。 $e^{-\beta H}$ はユークリッド時間を β だけ平行移動させるという事を使うと、

$$Z = \mathcal{N} \sum_{s'} \langle s' | \bar{\Psi}(\mathbf{x}, 0) e^{-\beta H} \Psi(\mathbf{x}, 0) | s' \rangle \quad (1.133)$$

$$= \mathcal{N} \sum_{s'} \langle s' | e^{-\beta H} \bar{\Psi}(\mathbf{x}, \beta) \Psi(\mathbf{x}, 0) | s' \rangle \quad (1.134)$$

と変形できる。 \mathcal{N} は規格化因子である。ここで、静的近似で $\Psi(\mathbf{x}, \beta)$ で β 依存性は

$$(\partial_\tau - ig A_4(\mathbf{x}, \tau)) \Psi(\mathbf{x}, \beta) = 0 \quad (1.135)$$

で決定される。質量項は $\Psi(\mathbf{x}, \tau)$ に単なる定数因子を与えるだけなので、 \mathcal{N} に吸収させる事にする。式 (1.135) を解くと、

$$\Psi(\mathbf{x}, \tau) = \exp\left[ig \int_0^\beta A_4(\mathbf{x}, \tau)\right] \Psi(\mathbf{x}, 0) \quad (1.136)$$

となる。式 (1.136) を式 (1.134) に代入して、

$$Z = \mathcal{N} \sum_{s'} \langle s' | e^{-\beta H} e^{ig \int_0^\beta A_4(\mathbf{x}, \tau)} \Psi(\mathbf{x}, 0) \Psi(\mathbf{x}, 0)^\dagger | s' \rangle \quad (1.137)$$

$$= \mathcal{N} \sum_{s'} \langle s' | e^{-\beta H} L(\mathbf{x}) | s' \rangle \quad (1.138)$$

$$= \text{Tr}(e^{-\beta H} L(\mathbf{x})) \quad (1.139)$$

と変形できる。

$$L(\mathbf{x}) = e^{ig \int_0^\beta A_4(\mathbf{x}, \tau)} \quad (1.140)$$

及びその空間平均

$$L = \frac{1}{3N_s^3} \int d^3x L(\mathbf{x}) \quad (1.141)$$

は Polyakov loop と呼ばれる。Polyakov loop は Wilson loop 等の閉じたループとは異なり、時間方向の周期境界条件によってゲージ不変な量となっている。その意味で、Polyakov loop は Polyakov line と呼ばれる。式 (1.139) に対応する経路積分は

$$Z = \int \mathcal{D}A L(\mathbf{x}) e^{-S_G[A]} \quad (1.142)$$

で与えられる。ただし、 $S_G[A]$ は pure gauge field action である。式 (1.142) より、クォークが 1 つだけある系のエネルギーは

$$e^{-\beta F_q} = \langle L \rangle \quad (1.143)$$

で Polyakov loop と関係付く。

非可換ゲージ理論の場合は Polyakov loop は

$$L(\mathbf{x}) = \text{tr}_c \text{Pe}^{ig \int_0^\beta A_4(\mathbf{x}, \tau)} \quad (1.144)$$

と一般化すればよい。 tr_c はカラーの添字に対するトレースである。

次は格子理論を考える。ここでは $N_s^3 \times N_t$ の格子を考える。よって、この系の温度 T は $T = \frac{1}{N_4 a}$ である。この場合、Polyakov loop は

$$L(\mathbf{s}) \equiv \text{tr}_c \prod_{s_4=1}^{N_4} U_4(\mathbf{s}, s_4) \quad (1.145)$$

およびその空間平均

$$L \equiv \frac{1}{3N_s^3} \sum_{\mathbf{s}} L(\mathbf{s}) \quad (1.146)$$

となる。これらはゲージ不変量である。格子理論の場合、式 (1.143) は

$$e^{-\hat{\beta} \hat{F}_q} = \langle L \rangle \quad (1.147)$$

と変更される。 $\hat{\beta}$ は格子単位での量を表す。

Polyakov loop はクォークの閉じ込めのオーダーパラメータであり、クエンチ近似では exact なオーダーパラメータとなる。閉じ込め相 ($T < T_c$) では single quark energy F_q が無限大 $F_q = \infty$ となり、式 (1.147) より Polyakov loop は $\langle L \rangle = 0$ となる。また、非閉じ込め相 ($T > T_c$) ではクォークは単体で存在できて、single quark energy F_q は有限になり、式 (1.147)

より Polyakov loop は $\langle L \rangle \neq 0$ となる。よって、閉じ込め相と非閉じ込め相は Polyakov loop がゼロか有限かで区別できる。

$$\langle L \rangle = 0 \quad (T < T_c) \quad (1.148)$$

$$\langle L \rangle \neq 0 \quad (T > T_c) \quad (1.149)$$

格子上では、Polyakov loop は (Z_3) center symmetry の自発的破れのオーダーパラメータとしての役割も担っている。SU(N_c) の center 群 (center group) $Z_c \subset SU(N_c)$ の元は SU(N_c) の任意の元と可換であり、

$$e^{i2\pi n/N_c} \mathbf{1} \in Z_c \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1) \quad (1.150)$$

と表せる。格子上のある時刻 τ_0 の時間方向のリンク変数 $U_4(\mathbf{x}, \tau_0)$ に対して、中心群の元 (center element) $z \in Z_c (z \neq 1)$ をかけるという次の変換を考える。

$$\forall \mathbf{x}, \quad U_4(\mathbf{x}, \tau_0) \rightarrow zU_4(\mathbf{x}, \tau_0) \quad (1.151)$$

$$U_4(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow U_4(\mathbf{x}, \tau) \quad (\tau \neq \tau_0) \quad (1.152)$$

$\tau = \tau_0$ のリンク変数は変えない。この空間的に global な変換を center 変換 (center transformation) と呼ぶ。この変換で、閉じたループは不変になる。なぜなら、通常の閉じたループに $U_4(\mathbf{x}, \tau_0)$ が N 個含まれていれば、必ずそのループ上に $U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger$ が同じ N 個含まれているので中心群の可換性から、 $zz^* = 1$ で z の因子は相殺するからである。 $N = 1$ を例にとると、

$$Loop \equiv U_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger \cdots \quad (1.153)$$

$$\rightarrow zU_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots z^*U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger \cdots \quad (\text{center transformation}) \quad (1.154)$$

$$= zz^*U_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger \cdots \quad (\text{center 群の可換性}) \quad (1.155)$$

$$= U_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger \cdots \quad (zz^* = 1) \quad (1.156)$$

$$= Loop \quad (1.157)$$

となり、 z の因子は相殺して変換前後でループの値は変化ない。ところが、Polyakov loop のような周期境界条件を用いてゲージ不変にしたライン (line) は center 変換不変ではない。なぜなら、ライン上に $U_4(\mathbf{x}, \tau_0)$ が N 個含まれていれば、 $U_4(\mathbf{x}, \tau_0)^\dagger$ はライン上に $N \pm 1$ 個含まれるので z の因子は相殺せず、($z = 1$ でない限り) ラインは不変でない。Polyakov loop を例にとって、center 変換性を見る。

$$L(\mathbf{x}) \equiv U_4(\mathbf{x}, 0)U_4(\mathbf{x}, 1) \cdots U_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots U_4(\mathbf{x}, N_c - 1) \quad (1.158)$$

$$\rightarrow U_4(\mathbf{x}, 0)U_4(\mathbf{x}, 1) \cdots zU_4(\mathbf{x}, \tau_0) \cdots U_4(\mathbf{x}, N_c - 1) \quad (\text{center transformation}) \quad (1.159)$$

$$= zL(\mathbf{x}) \quad (1.160)$$

今は $z \neq 1$ を考えているので、Polyakov loop の期待値が 0 でない限り Polyakov loop は不変でない。格子 QCD の作用のうち、ゲージ場の運動項、つまりプラケット作用 $S_G[U]$ はラインは含まれておらずループだけしか含まれていないので、 $S_G[U]$ は center 変換で不変である。この場合、作用が Z_{N_c} center 対称性を持つという。しかし、作用のクォークセクター $S_F[\bar{\psi}, \psi, U]$ は center 対称性を持たない。

閉じ込め相と非閉じ込め相は、Polyakov loop の値でそれぞれ center symmetry が回復している相と自発的に破れている相となっている。閉じ込め相では $\langle L \rangle = 0$ であり、center 変換で不変であるが、非閉じ込め相では $\langle L \rangle \neq 0$ であり、center 変換で不変ではない。まとめると、

$$\begin{aligned} \text{閉じ込め相} : \langle L \rangle = 0 & \quad Z_{N_c} \text{ center symmetric phase} \\ \text{非閉じ込め相} : \langle L \rangle \neq 0 & \quad Z_{N_c} \text{ center symmetry broken phase} \end{aligned}$$

しかし、実際は動的な (dynamical) クォークが存在して、クォークセクターが center symmetry を explicit に破る。従って、Polyakov loop は exact な閉じ込め・非閉じ込め相転移のオーダーパラメータではない。しかし、計算が容易であることや、動的な (dynamical) クォークも考慮に入れた場合の exact なオーダーパラメータが (存在するとして) 見つかっていないことから、Polyakov loop を full QCD で計算して閉じ込め・非閉じ込め相転移が議論される事も多い。閉じ込め・非閉じ込め相転移について、Polyakov loop そのものだけでなく Polyakov loop の感受率の比も重要な意味を持つという格子 QCD の研究結果がある [33, 34]。

第 2 章

クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係に関する先行研究

クォークの閉じ込めとカイラル対称性の破れの関係に関する先行研究をいくつかまとめる。

有限温度格子 QCD の計算から、クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れに強い相関がある事が示唆されていた。具体的には、閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移の転移温度 T_c がほぼ同じである事 [7, 41] や、QCD 真空から QCD モノポールを取り除くと閉じ込めだけでなくカイラル対称性の自発的破れも無くなる事が格子 QCD 計算で確認されている事 [20, 21] が根拠となっている。

ただし、クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れは少なくとも単純な 1 対 1 対応ではないという事を数値的に示せる [44, 45, 46]。具体的には、格子 QCD における Dirac mode の計算手法及び Dirac mode 展開・射影の手法を用いて、カイラル対称性の自発的破れの最も重要なモード、つまり low-lying Dirac mode のみを QCD 真空から取り除いても閉じ込めの性質は変わらないという事を示す事ができる。

閉じ込め・非閉じ込め相転移のオーダーパラメータである Polyakov loop とカイラル対称性の自発的破れのオーダーパラメータであるカイラル凝縮との関係式がわかれば、その関係式に基づいて二つの非摂動的現象の関係性について議論できるはずである。残念ながらそのような関係式はまだ見つかっていない。しかし、Banks-Casher の関係式から、カイラル凝縮は Dirac 演算子のゼロ固有値密度に比例する。よって、Polyakov loop と Dirac mode の関係式も二つの非摂動的現象の関係性を議論する上で非常に重要である。本論文における成果の一つに、周期境界条件を課した場合の Polyakov loop と Dirac mode の関係式の導出があるが、2006 年に特殊な境界条件 (twisted 境界条件) を課した場合の Polyakov loop と Dirac mode の関係式が導き

れている [35]。この関係式に基づいて閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について議論することもできる [36]。なお、有限温度系を考える上で時間方向の周期境界条件は重要なので、我々の導出した関係式の方が有用であると考えられる。

2.1 有限温度格子 QCD 計算

上で見た通り、クエンチ近似で Polyakov loop はクォークの閉じ込めのオーダーパラメータとなっている。また、カイラル対称性の自発的破れのオーダーパラメータはカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ である。有限温度格子 QCD 計算を行って 2 つのオーダーパラメータの温度変化を見る。

閉じ込め相と非閉じ込め相、またはカイラル対称性が自発的に破れた相と回復した相の間の相転移の次数は考慮に入れるフレーバー数及びそのクォークの質量に依存する [37]。u,d クォークの質量は

$$m_u = m_d \equiv m_{u,d} \quad (2.1)$$

と等しく取り、s クォークまで考える事にする。 $m_{u,d}$ と m_s の値を変えて有限温度の相転移の次数をまとめた、いわゆる Columbia plot [38] を図 2.1 に示した [39]。 $m_{u,d} = m_s = 0$ は chiral limit、 $m_{u,d} : \text{finite}, m_s = 0$ は 2-flavor QCD、 $m_{u,d} = m_s = \infty$ は pure gauge theory を表している。また、現実の physical point では相転移は cross over ではないかと考えられている。オーダーパラメータは転移温度 T_c で特異な振る舞いをするが、実際の格子 QCD 計算では格子の体積は有限であるため、振る舞いは緩やかになる。以下ではこの緩やかな振る舞いも広義の意味で相転移と呼び、感受率 χ のピークで相転移温度 T_c を定義する。例えば、Polyakov loop の感受率は $\chi_L = V \langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle$ である。

クエンチ近似では閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移の転移温度 T_c は一致する [7, 40]。また、Polyakov loop とカイラル凝縮を full QCD で計算しても、2-flavor ($N_f = 2, m_u = m_d$) の場合は転移温度はほとんど一致する [41]。図 2.2 に、2-flavor 格子 QCD で計算した Polyakov loop とその感受率、カイラル凝縮とその感受率の温度変化を示した。感受率のピークで転移温度を定義すると、二つの相転移の転移温度はほぼ一致する。このことから、Polyakov loop とカイラル凝縮、つまり閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移に強い相関があるかもしれないと思われていた。

ところが、閉じ込め・非閉じ込め相転移の転移温度の方がカイラル相転移の転移温度よりも有

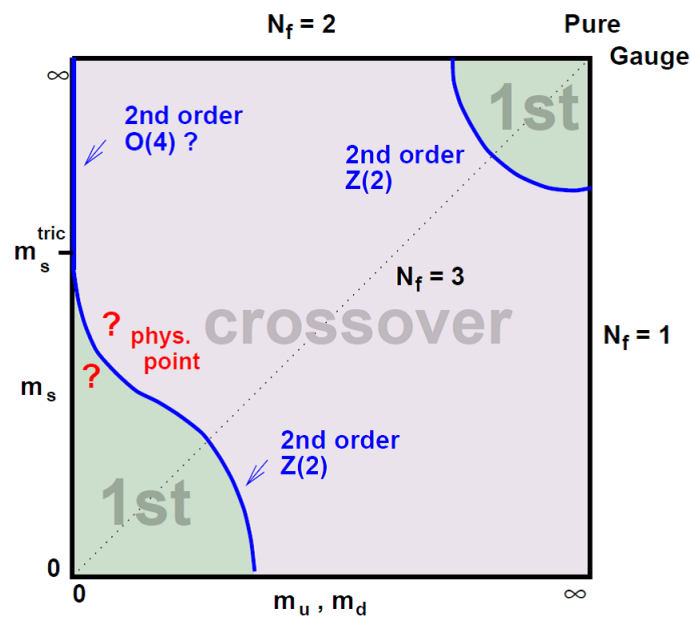


図 2.1 $m_u = m_d \equiv m_{u,d}$ と m_s を変化させたときの有限温度 QCD の相転移の次数を示した図。[E. Laermann and O. Philipsen [39]] より引用した。

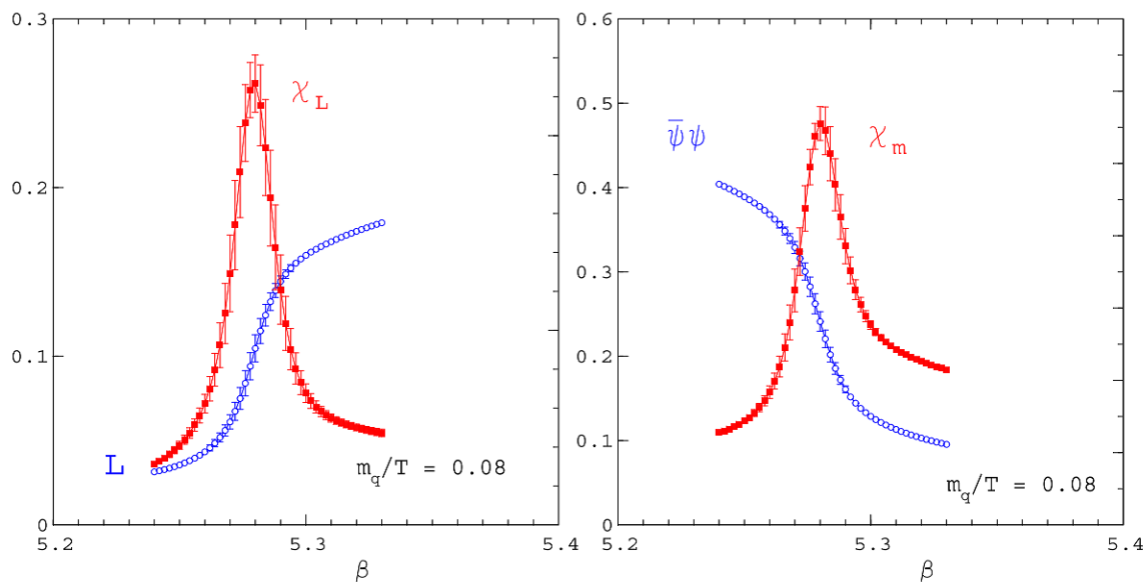


図 2.2 2-flavor の有限温度格子 QCD の計算結果。左図は Polyakov loop とその感受率、右図はカイラル凝縮とその感受率の温度変化を表している。厳密には、横軸は温度に対応した格子 QCD のパラメータ β である。相転移点を感受率のピークで定義すれば、閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移は転移温度がほぼ一致することが分かる。[F. Karsch [41]] より引用した。

意に大きいという格子 QCD での研究結果もある [42, 43]。

いずれにせよ、2つの相転移の転移温度の一致・不一致だけから閉じ込め・非閉じ込め相転移とカイラル相転移あるいは閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係性について得られる事には限界がある。

2.2 格子 QCD における Dirac mode 展開・射影

格子 QCD における Dirac 演算子の固有状態を用いた状態の展開 (Dirac mode 展開) について述べる。この節の内容は参考文献 [44, 45, 46] に基づいている。

まず、リンク変数演算子 \hat{U}_μ を

$$\langle s|\hat{U}_\mu|s'\rangle = U_\mu(s)\delta_{s+\hat{\mu},s'} \quad (2.2)$$

の行列要素で定義する。 $|s\rangle$ はサイト s の状態である。次に、格子 QCD における共変微分 \hat{D}_μ はリンク変数演算子 \hat{U}_μ を用いて

$$\hat{D}_\mu = \frac{1}{2a}(\hat{U}_\mu - \hat{U}_{-\mu}) \quad (2.3)$$

で表される。これは $\mathcal{O}(a)$ で連続理論の共変微分演算子 $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x)$ に一致する。

$$\langle s|\hat{D}_\mu|s'\rangle = \frac{1}{2a}(U_\mu(s)\delta_{s+\hat{\mu},s'} - U_{-\mu}(s)\delta_{s-\hat{\mu},s'}) \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2a}((1 + iagA_\mu(s))\delta_{s+\hat{\mu},s'} - (1 - iagA_\mu(s - \hat{\mu}))\delta_{s-\hat{\mu},s'}) + \mathcal{O}(a) \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2a}(\delta_{s+\hat{\mu},s'} - \delta_{s-\hat{\mu},s'}) + igA_\mu(s)\frac{\delta_{s+\hat{\mu},s'} + \delta_{s-\hat{\mu},s'}}{2} + \mathcal{O}(a) \quad (2.6)$$

$$\rightarrow \partial_\mu + igA_\mu(s) \quad (a \rightarrow 0) \quad (2.7)$$

よって、格子 QCD では Dirac 演算子 $\hat{\mathcal{D}}$ は

$$\hat{\mathcal{D}} = \gamma_\mu \hat{D}_\mu = \gamma_\mu \frac{1}{2a}(\hat{U}_\mu - \hat{U}_{-\mu}) \quad (2.8)$$

と表される。explicit には

$$\mathcal{D}_{ss'}^{ij,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^{\alpha\beta} [U_\mu(s)^{ij}\delta_{s+\hat{\mu},s'} - U_{-\mu}(s)^{ij}\delta_{s-\hat{\mu},s'}] \quad (2.9)$$

と表される。

Dirac 演算子 $\hat{\mathcal{D}}$ の固有値方程式を

$$\hat{\mathcal{D}}|n\rangle = i\lambda_n|n\rangle \quad (2.10)$$

と表記する。Dirac 演算子 $\hat{\mathcal{D}}$ が反エルミートである事から、Dirac 固有値 $i\lambda_n$ は純虚数である ($\lambda_n \in \mathcal{R}$)。系にカイラル対称性 $\{\hat{\mathcal{D}}, \gamma_5\} = 0$ がある場合、状態 $|n\rangle$ に対応して、状態 $\gamma_5|n\rangle$ が固有値 $-i\lambda_n$ を持った固有状態として存在する。

$$\hat{\mathcal{D}}\gamma_5|n\rangle = -\gamma_5\hat{\mathcal{D}}|n\rangle \quad (\{\hat{\mathcal{D}}, \gamma_5\} = 0) \quad (2.11)$$

$$= -\gamma_5(i\lambda_n)|n\rangle \quad (\hat{\mathcal{D}}|n\rangle = i\lambda_n|n\rangle) \quad (2.12)$$

$$= -i\lambda_n\gamma_5|n\rangle \quad (2.13)$$

Dirac 固有状態の位置表示 $\psi_n(s) \equiv \langle s|n\rangle$ を以下では Dirac 固有関数と呼ぶ事にする。Dirac 固有値方程式 (2.10) は explicit には

$$\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} [U_{\mu}(s)\psi_n(s + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(s)\psi_n(s - \hat{\mu})] = i\lambda_n \psi_n(s). \quad (2.14)$$

と表される。なお、式 (2.10) はゲージ共変であるため、Dirac 固有値 $i\lambda_n$ はゲージ不変量であり議論はゲージ不変に行える。

Wilson loop 演算子 $\hat{W}(\hat{T}, \hat{R})$ をリンク変数演算子 \hat{U}_{μ} を時間方向 (t) に \hat{T} 、空間方向 ($i = 1, 2, 3$) に \hat{R} の長さの長方形の経路に沿った積で定義する。

$$\hat{W}(\hat{T}, \hat{R}) \equiv (\hat{U}_4)^{\hat{T}} (\hat{U}_i)^{\hat{R}} (\hat{U}_{-4})^{\hat{T}} (\hat{U}_{-i})^{\hat{R}} \quad (2.15)$$

Wilson loop 演算子の汎関数トレースは Wilson loop $W(\hat{T}, \hat{R})$ と一致する。

$$\text{Tr } \hat{W}(\hat{T}, \hat{R}) = \text{tr} \sum_s \langle s|\hat{W}|s\rangle \quad (2.16)$$

$$= \text{tr} \sum_x \langle s|(\hat{U}_4)^{\hat{T}} (\hat{U}_i)^{\hat{R}} (\hat{U}_{-4})^{\hat{T}} (\hat{U}_{-i})^{\hat{R}}|s\rangle \quad (2.17)$$

$$= \text{tr} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{2\hat{R}\hat{T}}} \langle s_1|\hat{U}_4|s_2\rangle \langle s_2|\hat{U}_4|s_3\rangle \langle s_3|\hat{U}_4|s_4\rangle \cdots \langle s_{2\hat{R}\hat{T}}|\hat{U}_{-i}|s_1\rangle \quad (2.18)$$

$$= \text{tr} \sum_s \langle s|\hat{U}_4|s + \hat{4}\rangle \langle s + \hat{4}|\hat{U}_4|s + 2 \cdot \hat{4}\rangle \cdots \langle s + \hat{i}|\hat{U}_{-i}|s\rangle \quad (2.19)$$

$$= \text{tr} \sum_s \{U_4(s)U_4(s + \hat{4})U_4(s + 2 \cdot \hat{4}) \cdots U_{-i}(s + \hat{i})\} \\ = \langle W(\hat{T}, \hat{R}) \rangle \quad (2.20)$$

汎関数トレースとして任意の基底でトレースを取っても値は変わらない。よって、基底として Dirac mode を取れば、Wilson loop の Dirac mode 展開が得られる。

$$\text{Tr } \hat{W}(\hat{T}, \hat{R}) = \sum_n \langle n|\hat{W}(\hat{T}, \hat{R})|n\rangle \quad (2.21)$$

$$= \sum_n \langle n|(\hat{U}_4)^{\hat{T}} (\hat{U}_i)^{\hat{R}} (\hat{U}_{-4})^{\hat{T}} (\hat{U}_{-i})^{\hat{R}}|n\rangle \quad (2.22)$$

$$= \text{tr} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{2\hat{R}\hat{T}}} \langle n_1|\hat{U}_4|n_2\rangle \langle n_2|\hat{U}_4|n_3\rangle \langle n_3|\hat{U}_4|n_4\rangle \cdots \langle n_{2\hat{R}\hat{T}}|\hat{U}_{-i}|n_1\rangle \quad (2.23)$$

ここで、リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle m|\hat{U}_{\mu}|n\rangle$ は Dirac 波動関数 $\psi_n(s)$ を用いて

$$\langle m|\hat{U}_{\mu}|n\rangle = \sum_s \langle m|s\rangle \langle s|\hat{U}_{\mu}|s + \hat{\mu}\rangle \langle s + \hat{\mu}|n\rangle \quad (2.24)$$

$$= \sum_s \psi_n^{\dagger}(s) U_{\mu}(s) \psi_n(s + \hat{\mu}) \quad (2.25)$$

と表される。リンク変数のゲージ変換性 $U_{\mu}(s) \rightarrow \Omega(s)U_{\mu}(s)\Omega(s + \hat{\mu})^{\dagger}$ より、Dirac 固有関数のゲージ変換性はクォーク場と同じく

$$\psi_n(s) \rightarrow \Omega(s)\psi_n(s) \quad (2.26)$$

である。厳密には、大域的な位相因子が現れ得るが、物理量には影響しないので以下省略する。

よって、リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle m|\hat{U}_\mu|n\rangle$ のゲージ変換性は

$$\langle m|\hat{U}_\mu|n\rangle = \sum_s \psi_n^\dagger(s) U_\mu(s) \psi_n(s + \hat{\mu}) \quad (2.27)$$

$$\rightarrow \sum_s \psi_n^\dagger(s) \Omega(s)^\dagger \cdot \Omega(s) U_\mu(s) \Omega(s + \hat{\mu})^\dagger \cdot \Omega(s + \hat{\mu}) \psi_n(s + \hat{\mu}) \quad (2.28)$$

$$= \sum_s \psi_n^\dagger(s) U_\mu(s) \psi_n(s + \hat{\mu}) \quad (2.29)$$

であり、行列要素はゲージ不変である。よって、式 (2.23) はゲージ不変な Dirac mode 展開である。Wilson loop に限らず、一般の演算子 \hat{O} に対して、Dirac mode 展開ができる。

$$\hat{O} = \sum_m \sum_n |m\rangle \langle m|\hat{O}|n\rangle \langle n| \quad (2.30)$$

次に、Dirac mode 射影について述べる。ここで、Dirac mode の空間の部分空間 A に射影する射影演算子 \hat{P} を

$$\hat{P} = \sum_{n \in A} |n\rangle \langle n| \quad (2.31)$$

で定義する。 \hat{P} は射影演算子としての性質 ($\hat{P}^2 = \hat{P}$, $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$) を満たす。典型的な例として

$$\hat{P}_{\text{IR-cut}} = \sum_{|\lambda_n| > \Lambda_{\text{IR}}} |n\rangle \langle n|, \quad \hat{P}_{\text{UV-cut}} = \sum_{|\lambda_n| < \Lambda_{\text{UV}}} |n\rangle \langle n| \quad (2.32)$$

という射影演算子を作った場合、 $\hat{P}_{\text{IR-cut}}$ は赤外切断 (infrared cut-off) Λ_{IR} 以上の Dirac 固有値を持つ Dirac mode のみに射影する演算子で、 $\hat{P}_{\text{UV-cut}}$ は紫外切断 (ultraviolet cut-off) Λ_{UV} 以下の Dirac 固有値を持つ Dirac mode のみに射影する演算子である。この射影演算子 \hat{P} を用いて、領域 A に射影されたリンク変数演算子 \hat{U}_μ^P を

$$\hat{U}_\mu^P = \hat{P} \hat{U}_\mu \hat{P} = \sum_{m \in A} \sum_{n \in A} |m\rangle \langle m|\hat{U}_\mu|n\rangle \langle n| \quad (2.33)$$

で定義する。この射影によって、一般には局所性 (locality) が失われるが、閉じ込めのような長距離 (large-distance) の物理的性質にとってはそれほど重要でないと思われる。格子 QCD 計算は生成したリンク変数の配位 $\{U_\mu(s)\}$ 、つまりリンク変数演算子 $\{\hat{U}_\mu(s)\}$ (の行列要素) で特徴づけられる。物理量 $O = \text{Tr} \hat{O}[\hat{U}_\mu]$ の領域 A への Dirac mode 射影は、物理量 $\text{Tr} \hat{O}[\hat{U}_\mu]$ を元のリンク変数演算子 $\{\hat{U}_\mu(s)\}$ の代わりに射影されたリンク変数 $\{\hat{U}_\mu^P\}$ を用いて評価すれば実行できる。

$$O \equiv \text{Tr} \hat{O}[\hat{U}_\mu] \rightarrow O^P \equiv \text{Tr} \hat{O}[\hat{U}_\mu^P] \quad (2.34)$$

具体的には、元のリンク変数演算子 $\{\hat{U}_\mu(s)\}$ を用いて式 (2.10) を解いて Dirac 固有関数 $\psi_n(s)$ を得たのち、式 (2.25) と式 (2.33) から $\{\hat{U}_\mu^P\}$ を構成できる。

Dirac mode 射影を用いて、low-lying Dirac mode のみを取り除いた (IR-cut した) Wilson loop $W(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}}$ を求める事ができる。Dirac mode 射影された Wilson loop 演算子 $\hat{W}(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}}$ を $\hat{U}_\mu = \hat{U}_\mu^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}}$ とした Wilson loop 演算子

$$\hat{W}(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}} = \hat{W}(\hat{T}, \hat{R})|_{\hat{U}_\mu = \hat{U}_\mu^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}}} \quad (2.35)$$

$$= (\hat{U}_4^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}})^{\hat{T}} (\hat{U}_i^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}})^{\hat{R}} (\hat{U}_{-4}^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}})^{\hat{T}} (\hat{U}_{-i}^{\hat{P}_{\text{IR-cut}}})^{\hat{R}} \quad (2.36)$$

として定義する。これを用いて、IR-cut した Wilson loop $W(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}}$ は

$$W(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}} = \text{Tr} \hat{W}(\hat{T}, \hat{R})_{\text{IR-cut}} \quad (2.37)$$

で得られる。高 Dirac mode のみを取り除いた (UV-cut した) Wilson loop $W(\hat{T}, \hat{R})_{\text{UV-cut}}$ も同様にして得られる。Dirac mode 射影した $Q\bar{Q}$ ポテンシャル $V^P(\hat{R})$ は Dirac mode 射影した Wilson loop を用いて

$$V^P(\hat{R}) = - \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln W(\hat{T}, \hat{R})^P \quad (2.38)$$

で得られる。

同様の議論を Wilson loop だけでなく、Polyakov loop L に対しても行える。Polyakov loop 演算子 \hat{L} をリンク変数演算子 \hat{U}_μ を用いて

$$\hat{L} = \frac{1}{3V} \{\hat{U}_4^{N_4}\} \quad (2.39)$$

で定義する。Polyakov loop 演算子 \hat{L} の汎関数トレースは Polyakov loop L と一致する。

$$\text{Tr}_c \hat{L} = \frac{1}{3V} \text{Tr}_c \{\hat{U}_4^{N_4}\} \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{3V} \sum_s \text{tr}_c \{U_4(s)U_4(s+\hat{t})U_4(s+2\hat{t}) \cdots U_4(s+(N_4-1)\hat{t})\} \quad (2.41)$$

$$= L \quad (2.42)$$

ここで、 $V = N_1 N_2 N_3 N_4$ は4次元格子の体積、 Tr_c は汎関数トレースで、 $\text{Tr}_c \equiv \sum_s \text{tr}_c$ で定義される。 tr_c はカラーの添え字に対するトレースである。Polyakov loop 演算子の Dirac mode 展開は

$$\hat{L} = \sum_n \langle n | \hat{L} | n \rangle \quad (2.43)$$

$$= \sum_n \langle n | \hat{U}_4^{N_4} | n \rangle \quad (2.44)$$

$$= \text{tr}_c \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{N_4-1}} \langle n_1 | \hat{U}_4 | n_2 \rangle \langle n_2 | \hat{U}_4 | n_3 \rangle \langle n_3 | \hat{U}_4 | n_4 \rangle \cdots \langle n_{N_4-1} | \hat{U}_4 | n_1 \rangle \quad (2.45)$$

で与えられる。また、Dirac mode 射影した Polyakov loop 演算子 \hat{L}^P を

$$\hat{L}^P = \frac{1}{3V} \{\hat{U}_4^P\}^{N_4} \quad (2.46)$$

で定義し、Dirac mode 射影した Polyakov loop L^P はその汎関数トレース

$$L^P = \text{Tr}_c \hat{L}^P \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{3V} \text{Tr}_c \{\hat{U}_4^P\}^{N_4} \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{3V} \sum_s \text{tr}_c \{U_4^P(s) U_4^P(s+\hat{t}) U_4^P(s+2\hat{t}) \cdots U_4^P(s+(N_4-1)\hat{t})\} \quad (2.49)$$

で得られる。

Dirac mode 射影による解析の目的の一つは、閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係の解析である。Banks-Casher 関係式等で示されるように、low-lying Dirac mode がカイラル対称性の自発的破れに関する最も重要なモードである。IR-cut した $Q\bar{Q}$ ポテンシャル $V^{P_{\text{IR-cut}}}(\hat{R}, \hat{T})$ の弦張力 (string tension) σ^P と元の $Q\bar{Q}$ ポテンシャル $V(\hat{R}, \hat{T})$ の弦張力 σ を比較する事で、弦張力に対する low-lying Dirac mode の寄与を議論する事ができる。

まず、カイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ は

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{1}{V} \text{Tr} \frac{1}{\not{D} + m} \quad (2.50)$$

$$= -\frac{1}{V} \sum_n \frac{1}{i\lambda_n + m} \quad (2.51)$$

$$= -\frac{1}{V} \left(\sum_{\lambda_n > 0} \frac{2m}{\lambda_n^2 + m^2} + \frac{\nu}{m} \right) \quad (2.52)$$

と表される。ただし ν は Dirac 演算子 \not{D} のゼロ・モード ($\lambda_n = 0$) の数である。ここで、 $\lambda_n < \Lambda_{\text{IR}}$ の Dirac mode の寄与を取り除いたカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{\text{IR}}}$ は

$$\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{\text{IR}}} = -\frac{1}{V} \sum_{\lambda_n \geq \Lambda_{\text{IR}}} \frac{2m}{\lambda_n^2 + m^2} \quad (2.53)$$

により得られる。 $\frac{2m}{\lambda_n^2 + m^2} > 0$ であるから、 $|\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{\text{IR}}}| < |\langle \bar{q}q \rangle|$ であり、IR-cut によりカイラル凝縮の絶対値が小さくなる。その減少幅は $\Lambda_{\text{IR-cut}}$ に依存する。例えば閉じ込め相において、 $m \simeq 5\text{MeV}$, $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.4\text{GeV}$ の場合、

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{\text{IR}}}}{\langle \bar{q}q \rangle} \simeq 0.02 \quad (2.54)$$

と大幅に減少し、カイラル対称性はほぼ回復していると思われる。以下この節では IR-cut と例えば、パラメータ設定はこの例の場合のものを用いる。

以下では、実際の計算結果を示す [44, 45, 46]。図 2.3 に $6^4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25\text{fm})$ の格子でクエンチ近似を用いて生成したゲージ配位を用いて計算した Dirac 固有値密度 $\rho(\lambda)$ を示した。Dirac 固有値はカイラル対称性から正負対称に分布する事がわかっているため、 $\lambda > 0$ の固有値密度のみを示している。また、 $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.4\text{GeV}$ の IR-cut をした後の Dirac 固有値密度 $\rho(\lambda)_{\text{IR}}$ を図 2.3 に示した。この IR-cut でカイラル対称性はほぼ回復した状態が得られる。

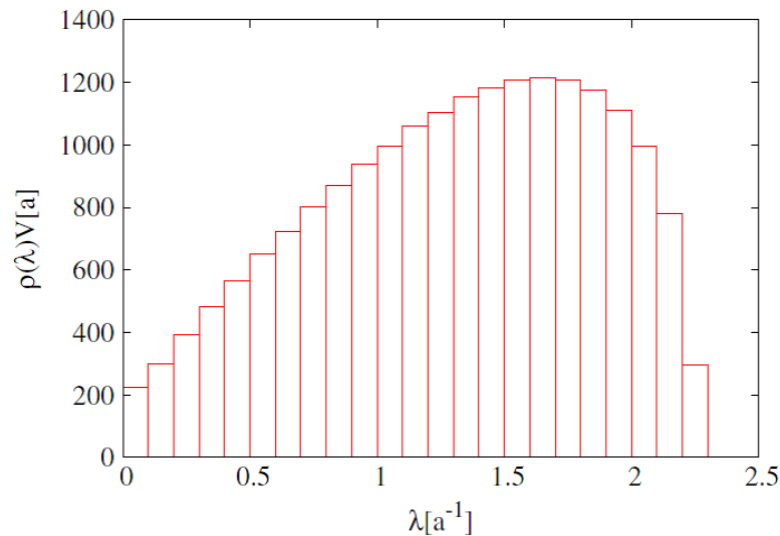


図 2.3 $6^4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25\text{fm})$ の格子で計算した Dirac 固有値密度 $\rho(\lambda)$ 。Dirac 固有値はカイラル対称性から正負対称に分布する事がわかっているため、 $\lambda > 0$ の固有値密度のみを示している。[S. Gongyo et al. [44]] より引用した。

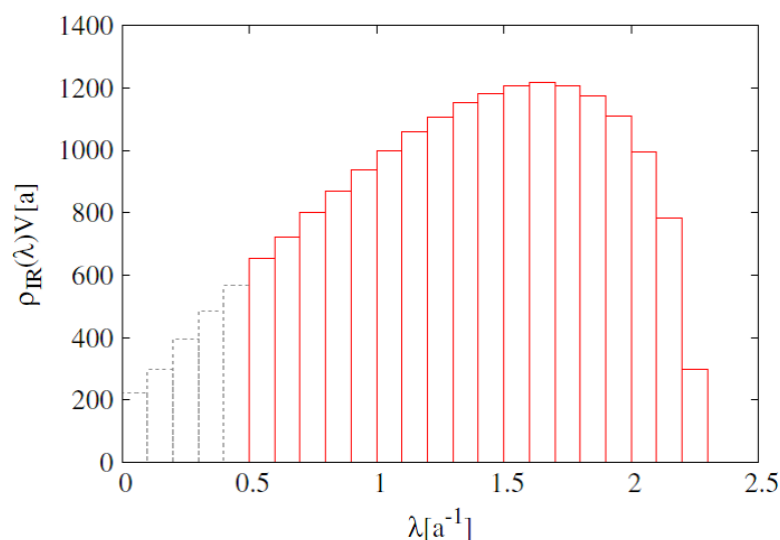


図 2.4 $6^4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25\text{fm})$ の格子で、 $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.4\text{GeV}$ の IR-cut した後の Dirac 固有値密度 $\rho(\lambda)_{\text{IR}}$ 。[S. Gongyo et al. [44]] より引用した。

このカイラル対称性がほぼ回復した状態で、Dirac mode 射影した Wilson loop から得られる $Q\bar{Q}$ ポテンシャル $V^{P_{\text{IR-cut}}}(\hat{R}, \hat{T})$ を計算する。図 2.5 に、IR-cut する前後の $Q\bar{Q}$ ポテンシャル、

つまり $V(\hat{R}, \hat{T})$ と $V^{P_{\text{IR-cut}}}(\hat{R}, \hat{T})$ を示した。図 2.5 より、IR-cut する事で $Q\bar{Q}$ ポテンシャルの値は変化するが、弦張力はほとんど変わらない事がわかる。

$$\sigma^P \simeq \sigma \quad (2.55)$$

これはつまり、カイラル対称性が回復しても閉じ込め相は閉じ込め相のままであり、閉じ込め力は IR-cut によってほぼ変わらない事を意味している。

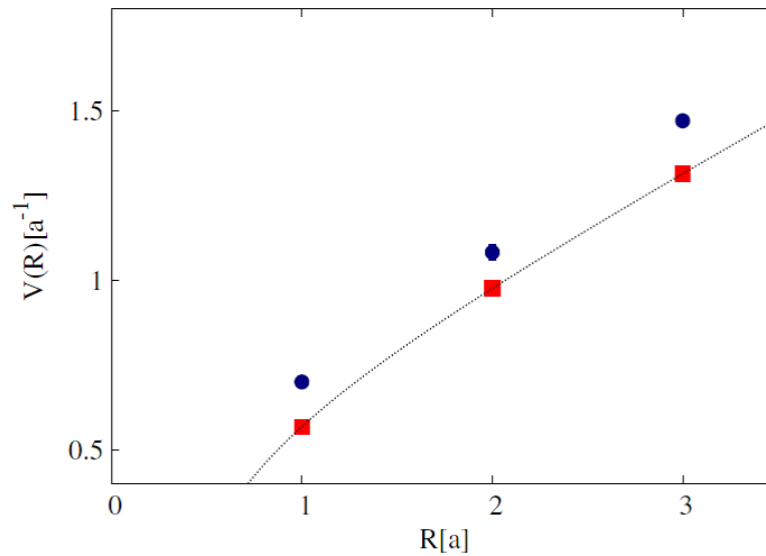


図 2.5 $6^4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25\text{fm})$ の格子で計算した $V(\hat{R}, \hat{T})$ と $V^{P_{\text{IR-cut}}}(\hat{R}, \hat{T})$ 。 $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.4\text{GeV}$ の IR-cut する前後で線形の閉じ込めポテンシャルの傾き、つまり string tension がほぼ変わらない事がわかる。 [S. Gongyo et al. [44]] より引用した。

また、IR-cut してカイラル対称性がほぼ回復した状態で Dirac mode 射影した Polyakov loop $\langle L^{P_{\text{IR-cut}}} \rangle$ を計算する [44, 45, 46]。図 2.6 に、 $12^3 \times 4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25\text{fm})$ の格子でクエンチ近似を用いて計算した $\langle L \rangle$ と $\langle L^{P_{\text{IR-cut}}} \rangle$ を示した。この場合、 $\langle L_P \rangle = 0$ で系は閉じ込め相にあり、IR-cut した後の Polyakov loop の期待値 $\langle L^{P_{\text{IR-cut}}} \rangle$ はゼロのままである。これはつまり、上の Wilson loop の解析と同様、カイラル対称性が回復しても閉じ込め相は閉じ込め相のままである事を意味している。

また、図 2.7 に、 $12^3 \times 4, \beta = 5.7 (a \simeq 0.20\text{fm})$ の格子で計算した $\langle L \rangle$ と $\langle L^{P_{\text{IR-cut}}} \rangle$ を示した。この場合、系は非閉じ込め相にあり、IR-cut した後の Polyakov loop の分布はほぼ変わらないことが分かる。従って、閉じ込め相でも非閉じ込め相でも、IR-cut によって Polyakov loop の値はほとんど変化しない事がわかる。

以上の 2 つの物理量 (Wilson loop 及び Polyakov loop) に対する IR-cut の解析より、カイラル対称性の自発的破れの最も重要なモードである low-lying Dirac mode を QCD 真空から取り

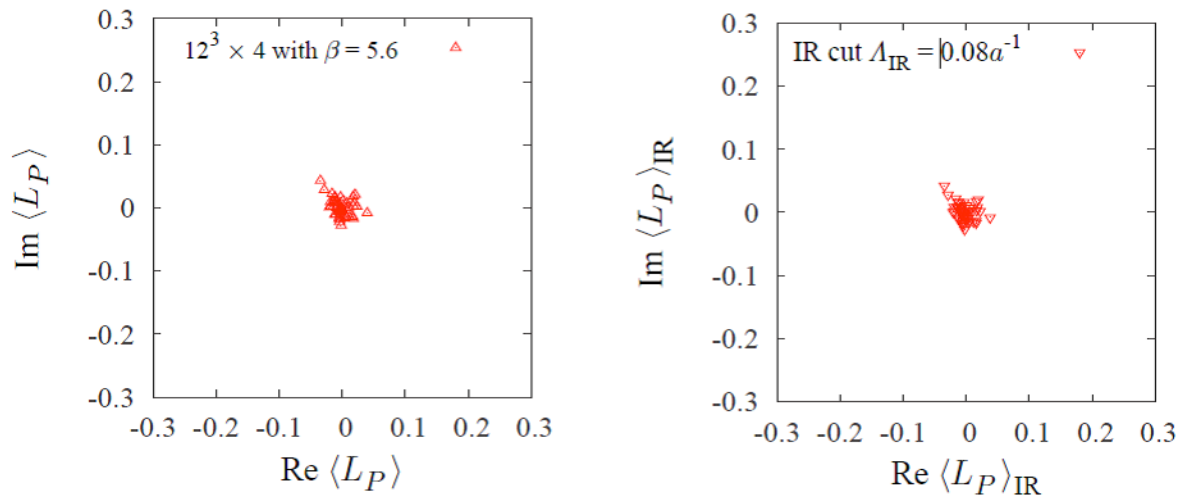


図 2.6 $12^3 \times 4, \beta = 5.6 (a \simeq 0.25 \text{fm})$ の格子で計算した、 $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.08 a^{-1}$ の IR-cut した前後の Polyakov loop。この場合系は閉じ込め相で、IR-cut によって Polyakov loop の値はほとんど変わっていない。[T. Iritani and H. Suganuma [45]] より引用した。

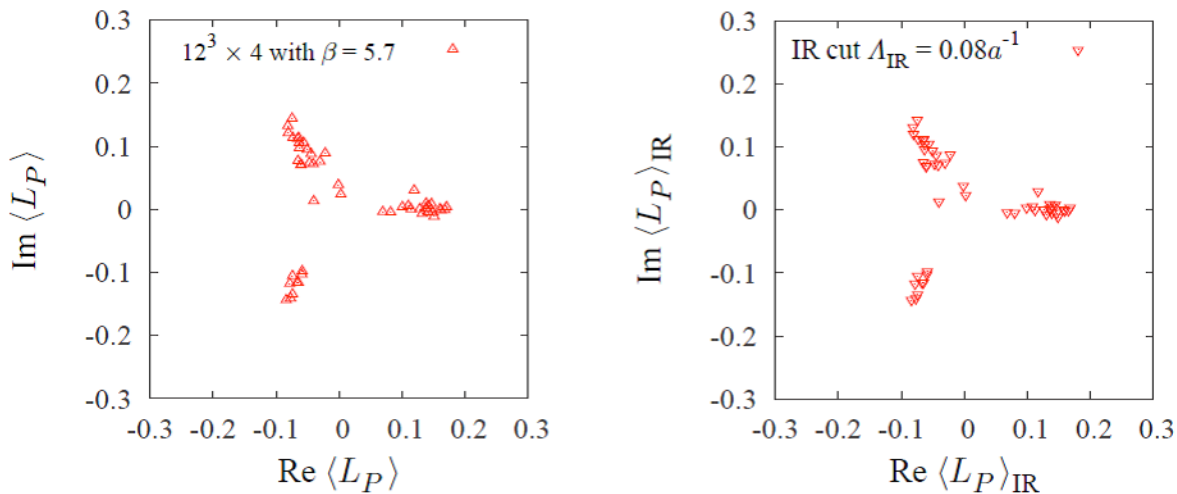


図 2.7 $12^3 \times 4, \beta = 5.7 (a \simeq 0.20 \text{fm})$ の格子で計算した、 $\Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.08 a^{-1}$ の IR-cut した前後の Polyakov loop。この場合系は非閉じ込め相で、IR-cut によって Polyakov loop の値はほとんど変わっていない。[T. Iritani and H. Suganuma [45]] より引用した。

除いても $Q\bar{Q}$ ポテンシャルの弦張力や Polyakov loop の値 (0 であるという事) 等の閉じ込めの性質がほぼ変化しない事がわかった。つまり、low-lying Dirac mode は閉じ込めに essential ではない事を意味する。この結果から、QCD において閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係は単純な 1 対 1 対応ではないという事が結論できる [44, 45, 46]。なぜなら、閉じ込めカイラル対称性の自発的破れの関係が 1 対 1 対応であれば、low-lying Dirac mode を取り除けば、同時に閉じ込めの性質も大きく変化すると考えられるからである。

第 3 章

Temporally odd-number lattice における Polyakov loop と Dirac mode の関係式

本章及び次章では、この修士論文の主題でありオリジナルな研究成果を示す [47, 48, 49, 50, 51, 52]。まず、通常的时间方向の周期境界条件を課した lattice spacing a を持つ正方格子上で Polyakov loop と Dirac mode の関係式を導出する。ただし、時間方向の格子サイズ N_4 を奇数にした格子 (temporally odd-number lattice) を考える。この関係式に基づいてクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について解析的及び数値的解析を行う。数値的解析を行う際に、Dirac 演算子をスピノルの添え字に関してブロック対角化する Kogut-Susskind 法 (Kogut-Susskind method, KS 法) を用いる [44, 53]。しかし、temporally odd-number lattice を考える場合、従来の KS 法は適用できない。そこで、本研究では temporally odd-number lattice に対しても適用可能なように一般化して新しい KS 法 (modified Kogut-Susskind method, modified KS 法) を開発した [51, 52]。

3.1 Temporally odd-number lattice における Polyakov loop と Dirac mode の関係式

以下では時間方向の格子サイズ N_4 を奇数にした格子を考える。また、Polyakov loop と Dirac mode の関係式の導出に必要なので空間方向の格子サイズ $N_i (i = 1, 2, 3)$ に対して $N_i > N_4$ を課す。物理的には空間方向の格子サイズは無限大、時間方向の格子サイズは (周期境界条件を伴って) 有限であるべきなので、 $N_i > N_4$ の条件はむしろ物理的に要請されるべき条件である。

3.1.1 導出

まず、次の量を導入する。

$$I \equiv \text{Tr}_{c,\gamma}(\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}) \quad (3.1)$$

ここで、汎関数トレース $\text{Tr}_{c,\gamma}$ は $\text{Tr}_{c,\gamma} \equiv \sum_s \text{tr}_c \text{tr}_\gamma$ であり、 tr_γ はスピノルの添字に対するトレースである。 I の真空期待値

$$\langle I \rangle = \langle \text{Tr}_{c,\gamma}(\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}) \rangle \quad (3.2)$$

は各ゲージ配位で平均する事で得られる。格子の体積 V が十分に大きい場合、演算子 O に対して $\langle O \rangle \simeq \text{Tr}O/\text{Tr}1$ が各ゲージ配位に対して期待できる。

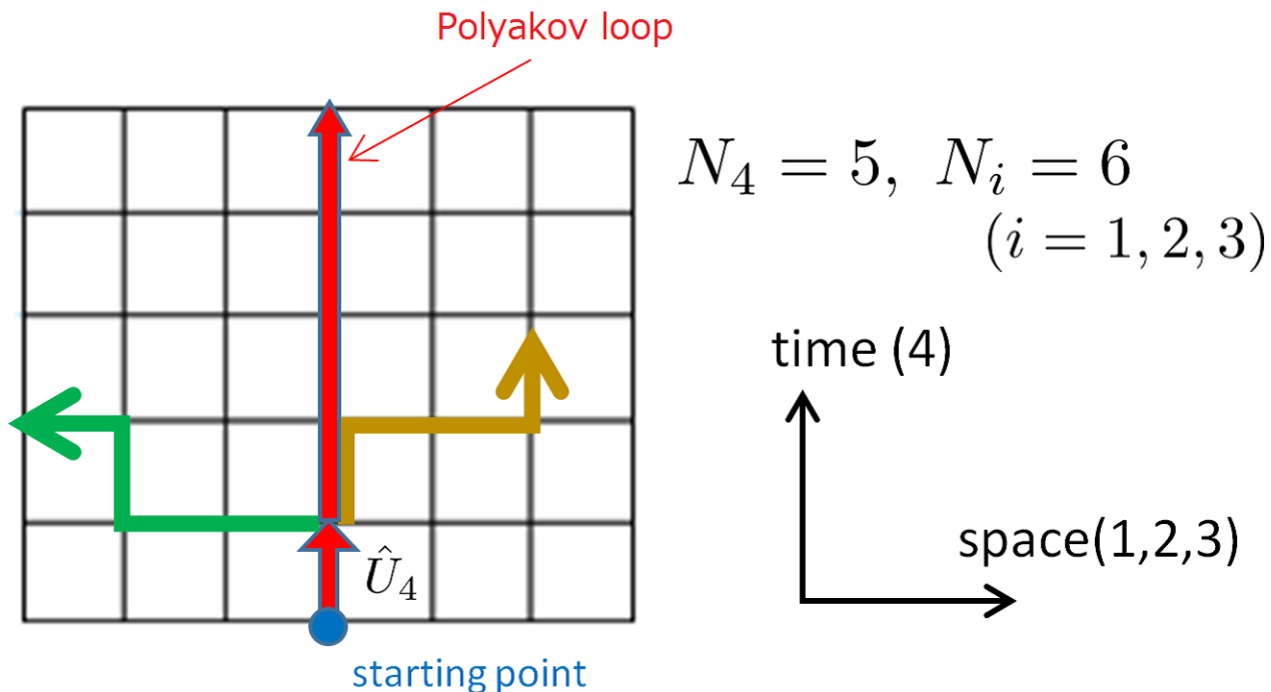


図 3.1 $N_4 = 5, N_i = 6$ ($i = 1, 2, 3$) の temporally odd-number lattice の例。各線は $\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}$ に含まれる各項に対応する。正方格子を用いる場合、奇数個のリンク変数では閉じたループを作れない。

式 (2.8) より、 $\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}$ は N_4 個のリンク変数の積で与えられる項の線形和で表される。図 3.1 に temporally odd-number lattice の例を示した。各線は $\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}$ に含まれる各項に対応する。今の場合、 N_4 は奇数であり正方格子を考えているので、 $\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}$ には $\hat{U}_4^{N_4}$ に比例する項以外の閉じたループは含まれない。従って、 $\langle I \rangle$ の $\hat{U}_4^{N_4}$ に比例する項以外はエリツァーの定

理より消える。

$$\begin{aligned}
\langle I \rangle &= \langle \text{Tr}_{c,\gamma}(\hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1}) \rangle \\
&= \langle \text{Tr}_{c,\gamma}\{\hat{U}_4(\gamma_4 \hat{D}_4)^{N_4-1}\} \rangle \quad (\text{ゲージ不変な量のみが残る}) \\
&= 4 \langle \text{Tr}_c(\hat{U}_4 \hat{D}_4^{N_4-1}) \rangle \quad (\gamma_4^{N_4-1} = 1, \text{tr}_\gamma 1 = 4) \\
&= \frac{4}{(2a)^{N_4-1}} \langle \text{Tr}_c\{\hat{U}_4(\hat{U}_4 - \hat{U}_{-4})^{N_4-1}\} \rangle \quad (\hat{D}_4 = \frac{1}{2a}(\hat{U}_4 - \hat{U}_{-4})) \\
&= \frac{4}{(2a)^{N_4-1}} \langle \text{Tr}_c\{\hat{U}_4^{N_4}\} \rangle \quad (\text{ゲージ不変な量のみが残る}) \\
&= \frac{12V}{(2a)^{N_4-1}} \langle L \rangle \tag{3.3}
\end{aligned}$$

他方、式 (3.2) の汎関数トレースを取る基底として Dirac mode ($|n\rangle$) を取って、 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ を用いれば $\langle I \rangle$ は

$$\langle I \rangle = \left\langle \sum_n \langle n | \hat{U}_4 \hat{\mathcal{D}}^{N_4-1} | n \rangle \right\rangle = \left\langle i^{N_4-1} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \langle n | \hat{U}_4 | n \rangle \right\rangle \tag{3.4}$$

とも表される。式 (3.4) の右辺の最も外側の $\langle \rangle$ はゲージ配位平均を表し、 $\langle n | \hat{U}_4 | n \rangle$ の $\langle \rangle$ はブラ・ケット記号である。式 (3.4) の表記が最も正しいが、以下では式 (3.4) の右辺のゲージ配位平均を表す $\langle \rangle$ は省略する。

式 (3.3) と (3.4) を比較する事で、

$$\langle L \rangle = \frac{(2ai)^{N_4-1}}{12V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \langle n | \hat{U}_4 | n \rangle \tag{3.5}$$

が得られる。

以上の導出には、

- ・ N_4 が奇数である事
- ・ 正方格子を用いる事
- ・ 時間方向の周期境界条件
- ・ Elitzur の定理 (ゲージ不変性)

のみが必要である。従って、関係式 (3.5) はフル QCD で、更には有限温度・有限密度で成立する。また、系の相とは無関係に関係式 (3.5) は成立する。つまり、系が閉じ込め相 (confinement phase) か非閉じ込め相 (deconfinement phase) にあるか、または系がカイラル対称性が自発的に破れている相 (chiral broken phase) かカイラル対称性が回復している相 (chiral restored phase) にあるかとは無関係に関係式 (3.5) は成立する。

3.1.2 個々の Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与

関係式 (3.5) は Polyakov loop のディラック・スペクトル表示であり、Polyakov loop $\langle L \rangle$ と Dirac mode ($\hat{D}|n\rangle = i\lambda_n|n\rangle$) を直接結ぶ解析的な関係式である。Polyakov loop はゲージ不変量であり Dirac mode もゲージ不変に得られるので、この関係式はゲージ不変に得られる。この関係式から、個々の Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与を調べる事ができる。

関係式 (3.5) に基づいて、QCD における閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係を議論する事ができる。リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n|\hat{U}_4|n\rangle$ は一般に 0 でない。よって、式 (3.5) の右辺の和の $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子により、low-lying Dirac mode ($|\lambda_n| \sim 0$) の Polyakov loop に対する寄与は他の Dirac mode の寄与よりも相対的に小さく、low-lying Dirac mode は Polyakov loop にほとんど寄与を持たない。これは上の格子 QCD の数値的解析の結果 [44]、つまり QCD 真空から low-lying Dirac mode を取り除いても閉じ込めの性質は変わらないという結論と矛盾しない。従って、関係式 (3.5) に基づき閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係は 1 対 1 対応ではないと結論できる。

関係式 (3.5) は N_4 が奇数の場合でのみ成立する。しかし、関係式 (3.5) から得られる知見は限定的なものであるわけではない。なぜなら我々は連続極限に興味があり、連続極限では時間方向のサイズ $\beta \equiv 1/T$ は実数値であるので、連続極限に近ければ N_4 の偶奇は物理的には重要でないと考えられるからである。

より詳細にかつ定量的に議論するため、関係式 (3.5) の右辺の各項を数値的に計算する事で個々の Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与を調べる。Dirac 波動関数を用いれば、関係式 (3.5) は explicit に

$$\langle L \rangle = \frac{(2ai)^{N_4-1}}{12V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \sum_s \psi_n^\dagger(s) U_4(s) \psi_n(s + \hat{4}) \quad (3.6)$$

と表される。式 (3.6) に現れる量 $\lambda_n, \psi_n(s), \psi_n^\dagger(s)$ は、各ゲージ配位のリンク変数を用いて Dirac 固有値方程式 (2.14) を解く事で得られる。Polyakov loop $\langle L \rangle$ は式 (1.145) を用いて得られる。

数値計算のコストは Polyakov loop $\langle L \rangle$ の計算よりも式 (2.14) を解く計算の方が圧倒的に大きい。そこで、次の節からは数値計算のコストを近似無しで減らす KS 法について述べる。

3.2 Temporally odd-number lattice における Kogut-Susskind 法

式 (2.9) より Dirac 演算子 \mathcal{D} は空間の添字 (s, s') 、カラーの添字 (i, j) 及びスピノルの添字 (α, β) を持っているので、Dirac 演算子 \mathcal{D} の次元 d は

$$d \equiv \dim \mathcal{D} = (V \times 3 \times 4)^2 \quad (3.7)$$

である。格子の体積 $V = N_1 N_2 N_3 N_4$ のせいで、Dirac 演算子の次元 d は非常に大きい。従って、Dirac 固有値方程式 (2.14) を解く数値計算コストは非常に大きい。そこで、Dirac 演算子をスピノルの添字に関して対角化する KS 法 [44, 53] を用いて数値計算のコストを近似無しで減らす事を考える。しかし通常の KS 法は、周期境界条件を満たさないため temporally odd-number lattice に適用できず、時空の全ての方向の格子サイズが偶数の格子 (even lattice) にのみ適用できる。そこで、我々は temporally odd-number lattice にも適用可能な modified KS 法 [51, 52] を開発し、temporally odd-number lattice における Polyakov loop と Dirac mode の関係式の解析に適用する。

3.2.1 even lattice における (通常の)Kogut-Susskind 法

この節では even lattice を考え、even lattice でのみ適用可能な Kogut-Susskind 法について述べる [53, 44, 51, 52]。

まず、行列 $T(s)$ を

$$T(s) \equiv \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2} \gamma_3^{s_3} \gamma_4^{s_4} \quad (3.8)$$

で定義する。行列 $T(s)$ を用いると、 γ 行列 $\gamma_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ を対角化できる。

$$T^\dagger(s) \gamma_\mu T(s \pm \hat{\mu}) = \eta_\mu(s) \mathbf{1} \quad (3.9)$$

ただし、 $\eta_\mu(s)$ はスタッガード位相 (staggered phase) で、

$$\eta_1(s) \equiv 1, \quad \eta_\mu(s) \equiv (-1)^{s_1 + \dots + s_{\mu-1}} \quad (\mu \geq 2). \quad (3.10)$$

で定義される。Dirac 演算子は $\mathcal{D} = \gamma_\mu D_\mu$ で与えられるので、スピノルの添字に関して対角化 (spin-diagonalization) する事ができる。

$$\sum_\mu T^\dagger(s) \gamma_\mu D_\mu T(s + \hat{\mu}) = \text{diag}(\eta_\mu D_\mu, \eta_\mu D_\mu, \eta_\mu D_\mu, \eta_\mu D_\mu), \quad (3.11)$$

ただし、 $\eta_\mu D_\mu$ は KS Dirac 演算子で、

$$(\eta_\mu D_\mu)_{ss'} = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu(s) [U_\mu(s) \delta_{s+\hat{\mu},s'} - U_{-\mu}(s) \delta_{s-\hat{\mu},s'}] \quad (3.12)$$

で定義される。

KS 法は周期境界条件を課すと even lattice でのみ適用可能である。実際、行列 $T(s)$ の周期境界条件は

$$T(s + N_\mu \hat{\mu}) = T(s) \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (3.13)$$

であるが、これは even lattice でしか成立しない。空間方向の境界条件が周期境界条件でなければならない物理的理由はないが、奇数方向の周期境界条件は有限温度の虚時間形式を考える上で必要不可欠である。従って、通常の KS 法は temporally odd-number lattice には適用できない。

modified KS 法との比較のため、KS 法について更に議論する。以下の結果は本研究によって得られた新しい計算結果である。

式 (3.11) により、Dirac 演算子のスピノル構造に対応して Dirac 固有値が 4 重縮退する事がわかる。よって、KS Dirac 固有値方程式

$$\eta_\mu D_\mu |n\rangle = i\lambda_n |n\rangle. \quad (3.14)$$

を解けば Dirac 固有値 $i\lambda_n$ が全て得られる。KS Dirac 固有状態 $|n\rangle$ の位置表示である $\chi_n(s) \equiv \langle s|n\rangle$ を以下では KS Dirac 波動関数と呼ぶ事にする。KS Dirac 固有値方程式 (3.14) は explicit には

$$\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu(x) [U_\mu(x) \chi_n(x + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(x) \chi_n(x - \hat{\mu})] = i\lambda_n \chi_n(x), \quad (3.15)$$

と表される。Dirac 固有値が 4 重縮退するので、同じ Dirac 固有値 $i\lambda_n$ を持つ Dirac 固有状態 $|n\rangle$ が 4 つ存在する。従って、Dirac 固有状態を固有値だけでなく縮退した 4 つの固有状態を区別する量子数 $I (= 1, 2, 3, 4)$ も併せて用いて区別するべきである。以下では、Dirac 固有状態を固有値と量子数 I を用いてラベルし、Dirac 固有値方程式を

$$\not{D}|n, I\rangle = i\lambda_n |n, I\rangle \quad (3.16)$$

と書くことにする。Dirac 固有状態の位置表示である Dirac 固有関数は

$$\psi_n^I(s) \equiv \langle s|n, I\rangle \quad (3.17)$$

と表記する。Dirac 固有関数 $\psi_n^I(s)$ は KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ と

$$\psi_n^I(s) = T(s)_{\alpha\beta} C_{\beta}^I \chi_n(s) \quad (3.18)$$

ここで、 C は

$$C_{\alpha}^I = \delta_{\alpha}^I \quad (3.19)$$

で定義する。式 (3.18) は意味がわかりやすい形であり、式 (3.18) は式 (3.19) を用いれば

$$\psi_n^I(s) = T(s)_{\alpha I} \chi_n(s) \quad (3.20)$$

となり、量子数 I はスピノルの添字 (α) と混ざる。これは 4 重縮退の区別のラベルが Dirac 演算子のスピノル構造によるものであることから当然の結果である。

リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_{\mu} | m, J \rangle$ は式 (3.20) を用いて次のように KS Dirac 固有関数で表される。

$$\langle n, I | \hat{U}_{\mu} | m, J \rangle = \sum_{s, \alpha} \psi_n^I(s)_{\alpha}^* U_{\mu}(s) \psi_m^J(s + \hat{\mu})_{\alpha} \quad (3.21)$$

$$= \sum_{s, \alpha} \chi_n(s)_{\alpha}^* T^{\dagger}(s)_{I\alpha} U_{\mu}(s) T(s + \hat{\mu})_{\alpha J} \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.22)$$

$$= \sum_s \chi_n(s)_{\alpha}^* \{T^{\dagger}(s) T(s + \hat{\mu})\}_{IJ} U_{\mu}(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.23)$$

ここで、行列 $T(s)$ 、リンク変数 $U_{\mu}(s)$ はそれぞれスピノル、カラーの添字のみを持つので可換である事を用いた。 $T^{\dagger}(s) T(s + \hat{\mu})$ は行列 $T(s)$ の定義式 (3.8) に従って計算可能で、

$$T^{\dagger}(s) T(s + \hat{\mu}) = \tilde{\eta}_{\mu}^{(E)}(s) \gamma_{\mu} \quad (3.24)$$

と表せる。ただし、 $\tilde{\eta}_{\mu}^{(E)}(s)$ は

$$\tilde{\eta}_{\mu}^{(E)}(s) = (-1)^{s_{\mu+1} + \dots + s_4} \quad (\mu \leq 3), \quad \tilde{\eta}_4^{(E)}(s) = 1 \quad (3.25)$$

で定義される符号関数で、スタッガード位相と似ているが構造は異なっている。KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ はスピノルの添字を持たないので γ 行列とは可換である。従って、リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_{\mu} | m, J \rangle$ は KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ を用いて

$$\langle n, I | \hat{U}_{\mu} | m, J \rangle = (\gamma_{\mu})_{IJ} \sum_s \tilde{\eta}_{\mu}^{(E)}(s) \chi_n(s)_{\alpha}^* U_{\mu}(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.26)$$

と表される。特に $\tilde{\eta}_4^{(E)}(s) = 1$ である事より、 $\mu = 4$ の場合は

$$\langle n, I | \hat{U}_4 | m, J \rangle = (\gamma_4)_{IJ} \sum_s \chi_n(s)_{\alpha}^* U_4(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.27)$$

$$= (\gamma_4)_{IJ} \langle n | \hat{U}_4 | m \rangle \quad (3.28)$$

であり、時間方向の KS リンク変数演算子の KS Dirac 行列要素 $\langle n | \hat{U}_4 | m \rangle$ と結び付く。

以上より、KS Dirac 固有値方程式 (3.15) を解く事で全ての Dirac 固有値 $i\lambda_n$ を得られ、更に KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ を用いてリンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_\mu | m, J \rangle$ を得る事ができる事がわかった。つまり、元の Dirac 固有値方程式 (2.14) を解く代わりに、より数値計算コストが小さい KS Dirac 固有値方程式 (3.15) を解く事でも元の Dirac mode に関する量を計算できる。

リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_\mu | m, J \rangle$ に限らず、一般の演算子 \hat{O} の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{O} | m, J \rangle$ も KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ を用いて評価できる。

3.2.2 Temporally odd-number lattice における Kogut-Susskind 法

この節では Temporally odd-number lattice、つまり時間方向の格子サイズ N_4 が奇数で空間方向のサイズ $N_i (i = 1, 2, 3)$ が偶数であるような格子に対しても適用可能な modified KS 法 [51, 52] について述べる。

まず、行列 $M(s)$ を

$$M(s) \equiv \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2} \gamma_3^{s_3} \gamma_4^{s_1+s_2+s_3} \quad (3.29)$$

で定義する。行列 $M(s)$ は通常の KS 法の場合の行列 $T(s)$ と似た形であるが γ_4 の指数が異なっており、サイトの時間成分 s_4 に依存しない。行列 $M(s)$ を用いれば、 γ 行列 γ_μ を γ_4 に比例する形にできる。

$$M^\dagger(s) \gamma_\mu M(s \pm \hat{\mu}) = \eta_\mu(s) \gamma_4 \quad (3.30)$$

ただし、 $\eta_\mu(s)$ は式 (3.10) のスタッガード位相である。ここで、 γ 行列の表示として Dirac 表示を取れば、 γ_4 は対角行列である。

$$\gamma_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad (\text{Dirac representation}), \quad (3.31)$$

以下では γ 行列の表示として Dirac 表示を取る。従って temporally odd-number lattice においても Dirac 演算子 $\mathcal{D} = \gamma_\mu D_\mu$ は行列 $M(s)$ を用いてスピノルの添字に関して対角化 (spin-diagonalization) する事ができる。

$$\sum_\mu M^\dagger(s) \gamma_\mu D_\mu M(s + \hat{\mu}) = \text{diag}(\eta_\mu D_\mu, \eta_\mu D_\mu, -\eta_\mu D_\mu, -\eta_\mu D_\mu), \quad (3.32)$$

ただし、 $\eta_\mu D_\mu$ は式 (3.12) で定義した KS Dirac 演算子である。

modified KS 法は周期境界条件を課した temporally odd-number lattice でも適用可能である。実際、行列 $M(s)$ の周期境界条件は

$$M(s + N_\mu \hat{\mu}) = M(s) \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (3.33)$$

であり、これは全ての μ の値に対して成立する。実際、空間方向 ($\mu = i = 1, 2, 3$) に対しては N_i が偶数である事から、時間方向に対しては行列 $M(s)$ がサイトの時間成分 s_4 に依存しない事から式 (3.33) は成立する。また、スタaggered位相 $\eta_\mu(s)$ がサイトの時間成分 s_4 に依存しない事から、スタaggered位相 $\eta_\mu(s)$ に対する周期境界条件も満たされる。従って、temporally odd-number lattice に対しても modified KS 法は適用可能である。

式 (3.32) により、Dirac 演算子のスピノル構造に対応して Dirac 固有値が 2 重縮退し、2 重縮退した固有値 $i\lambda_n$ に対応して異符号の固有値 $-i\lambda_n$ が必ず存在する事がわかる。これはカイラル対称性から保障されている。よって、KS Dirac 固有値方程式 (3.14) を解けば Dirac 固有値 $i\lambda_n$ が全て得られる。通常の KS 法の場合と同様に、KS Dirac 固有状態 $|n\rangle$ の位置表示を $\chi_n(s) \equiv \langle s|n\rangle$ を KS Dirac 固有関数と呼ぶ事にする。Dirac 固有値は 2 重縮退し、正負対称に分布するので、KS Dirac 固有値方程式 (3.14) を解いて得られる KS Dirac mode ($\eta_\mu D_\mu |n\rangle = i\lambda_n |n\rangle$) に対して量子数 $I (= 1, 2, 3, 4)$ を用いて次のように 4 つの Dirac 固有状態を構成する。

$$\psi_n^I(s) \equiv \langle s|n, I\rangle = M(s)_{\alpha\beta} C_\beta^I \chi_n(s) \quad (3.34)$$

ただし C は式 (3.19) で定義したもので、 $|n, I\rangle$ は $I = 1, 2$ の場合には Dirac 固有値 $i\lambda_n$ 、 $I = 3, 4$ の場合には Dirac 固有値 $-i\lambda_n$ をもつ Dirac 固有状態である。 C の定義式 (3.19) を式 (3.34) に代入すれば、

$$\psi_n^I(s) = M(s)_{\alpha I} \chi_n(s) \quad (3.35)$$

が得られる。

次に、even lattice の場合の式 (3.23) と同様に、temporally odd-number lattice におけるリンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I|\hat{U}_\mu|m, J\rangle$ は式 (3.35) を用いて次のように KS Dirac 固有関数で表される。

$$\langle n, I|\hat{U}_\mu|m, J\rangle = \sum_{s,\alpha} \psi_n^I(s)_\alpha^* U_\mu(s) \psi_m^J(s + \hat{\mu})_\alpha \quad (3.36)$$

$$= \sum_{s,\alpha} \chi_n(s)_\alpha^* M^\dagger(s)_{I\alpha} U_\mu(s) M(s + \hat{\mu})_{\alpha J} \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.37)$$

$$= \sum_s \chi_n(s)_\alpha^* \{M^\dagger(s) M(s + \hat{\mu})\}_{IJ} U_\mu(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.38)$$

ここで、行列 $M(s)$ 、リンク変数 $U_\mu(s)$ はそれぞれスピノル、カラーの添字のみを持つので可換である事を用いた。 $M^\dagger(s)M(s + \hat{\mu})$ は行列 $M(s)$ の定義式 (3.29) より計算可能で、

$$MT^\dagger(s)M(s + \hat{\mu}) = \tilde{\eta}_\mu^{(O)}(s)\gamma_\mu\gamma_4 \quad (3.39)$$

と表せる。ただし、 $\tilde{\eta}_\mu^{(O)}(s)$ は

$$\tilde{\eta}_\mu^{(O)}(s) = (-1)^{s_1 + \dots + s_\mu} \quad (\mu \leq 3), \quad \tilde{\eta}_4^{(O)}(s) = 1 \quad (3.40)$$

で定義される符号関数で、式 (3.10) の $\eta_\mu(s)$ と式 (3.25) の $\tilde{\eta}_\mu^{(E)}(s)$ と異なる関数である。KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ はスピノルの添字を持たないので γ 行列とは可換である。従って、リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_\mu | m, J \rangle$ は KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ を用いて

$$\langle n, I | \hat{U}_\mu | m, J \rangle = (\gamma_\mu\gamma_4)_{IJ} \sum_s \tilde{\eta}_\mu^{(O)}(s) \chi_n(s)^* U_\mu(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.41)$$

と表される。特に $\tilde{\eta}_4^{(O)}(s) = 1$ である事より、 $\mu = 4$ の場合は

$$\langle n, I | \hat{U}_4 | m, J \rangle = \delta_{IJ} \sum_s \chi_n(s)^* U_\mu(s) \chi_m(s + \hat{\mu}) \quad (3.42)$$

$$= \delta_{IJ} \langle n | \hat{U}_4 | m \rangle \quad (3.43)$$

であり、時間方向の KS リンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n | \hat{U}_4 | m \rangle$ と結び付く。更に特殊な例として $\mu = 4$ の場合の対角成分 $\langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle$ は

$$\langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle = \langle n | \hat{U}_4 | n \rangle \quad (3.44)$$

と表せる。

以上より、KS Dirac 固有値方程式 (3.15) を解く事で全ての Dirac 固有値 $i\lambda_n$ を得られ、更にリンク変数演算子の Dirac 行列要素 $\langle n, I | \hat{U}_\mu | m, J \rangle$ が KS Dirac 固有関数 $\chi_n(s)$ を用いて表せる事がわかった。つまり、元の Dirac 固有値方程式 (2.14) を解く代わりに、より数値計算コストが小さい KS Dirac 固有値方程式 (3.15) を解く事でも元の Dirac mode に関する量を計算できる。

次に、式 (3.5) を KS Dirac 固有状態で書き直す事を考える。まず、Dirac 固有状態の構造 (3.34) を考慮すると、式 (3.5) は正しくは

$$\langle L \rangle = \frac{(2ai)^{N_4-1}}{12V} \sum_{n,I} \lambda_n^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle \quad (3.45)$$

と表記すべきである事に注意する。次に、関係式 (3.45) の右辺の和 $\sum_{n,I} \lambda_n^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle$ を

KS Dirac 固有状態で書き直す。

$$\sum_{n,I} \lambda_n^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle = \sum_{n,I=1,2} \lambda_n^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle + \sum_{n,I=3,4} (-\lambda_n)^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle \quad (3.46)$$

$$= \sum_{n,I=1,2,3,4} \lambda_n^{N_4-1} \langle n, I | \hat{U}_4 | n, I \rangle \quad (N_4 - 1 : \text{even}) \quad (3.47)$$

$$= \sum_{n,I=1,2,3,4} \lambda_n^{N_4-1} (n | \hat{U}_4 | n) \quad (\text{式 (3.44)}) \quad (3.48)$$

$$= 4 \sum_n \lambda_n^{N_4-1} (n | \hat{U}_4 | n) \quad (3.49)$$

従って、関係式 (3.45) は modified KS 法を用いて、

$$\langle L \rangle = \frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} (n | \hat{U}_4 | n) \quad (3.50)$$

と書ける。modified KS 法は Dirac 演算子をスピノルの添字に関してブロック対角化する方法であり近似ではないので、関係式 (3.50) は元の関係式 (3.45) と完全に等価である。従って、以下の解析では関係式 (3.50) に基づいて議論する。

第4章

数値的解析

この章では Polyakov loop $\langle L \rangle$ と KS Dirac mode ($\eta \cdot D|n\rangle = i\lambda_n|n\rangle$) を直接結ぶ解析的な関係式 (3.50) に基づき、閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について数値的解析を行う [51, 52]。

4.1 Polyakov loop と Dirac mode の関係式の数値的確認

まずは式 (3.50) が本当に成立する事を数値的に確認する。

数値計算はクエンチ近似でプラケット作用を用いた SU(3) モンテカルロ計算で、閉じ込め相、非閉じ込め相の両方の相で行った。閉じ込め相として、大きさが $10^3 \times 5$ で $\beta = 5.6$ を持った格子を考える。この場合、lattice spacing は $a \sim 0.25\text{fm}$ であるから、系の温度は $T \sim 160\text{ MeV}$ であり、閉じ込め相にある。非閉じ込め相として、大きさが $10^3 \times 3$ で $\beta = 5.7$ を持った格子を考える。この場合、lattice spacing は $a \sim 0.20\text{fm}$ であるから、系の温度は $T \sim 330\text{ MeV}$ であり、非閉じ込め相にある。ゲージ配位生成する際、熱化には 5,000 回のゲージ配位の更新を行い、熱化以降には 500 回のゲージ配位の更新毎に採用し、20 個のゲージ配位 ($N_{\text{conf}} = 20$) を用意した。

式 (3.50) の両辺をそれぞれ計算して比較する。閉じ込め相、非閉じ込め相における関係式 (3.50) の両辺の計算結果をそれぞれ表 4.1、表 4.2 に示した。それぞれゲージ配位 7 個分の計算結果を示している。

式 (3.50) からはゲージ配位平均に対する等式であるが、表 4.1、表 4.2 より、閉じ込め相と非閉じ込め相両方で関係式 (3.50) の両辺は各ゲージ配位でほぼ一致する事がわかる。従って、ゲージ配位平均をとった関係式 (3.50) は閉じ込め相と非閉じ込め相両方で当然成立する。各ゲージ

表 4.1 各ゲージ配位を用いた閉じ込め相 ($10^3 \times 5, \beta = 5.6$) における関係式 (3.50) の両辺の計算結果。

ゲージ配位の番号	1	2	3	4	5	6	7
ReL	0.00961	-0.00161	0.0139	-0.00324	0.000689	0.00423	-0.00807
ImL	-0.00322	-0.00125	-0.00438	-0.00519	-0.0101	-0.0168	-0.00265
$\frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n \hat{U}_4 n)$	0.00961	-0.00161	0.0139	-0.00324	0.000689	-0.00423	-0.00807
$\frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n \hat{U}_4 n)$	-0.00322	-0.00125	-0.00438	-0.00519	-0.0101	-0.0168	-0.00265

表 4.2 各ゲージ配位を用いた非閉じ込め相 ($10^3 \times 3, \beta = 5.7$) における関係式 (3.50) の両辺の計算結果。

ゲージ配位の番号	1	2	3	4	5	6	7
ReL	0.316	0.337	0.331	0.305	0.313	0.316	0.337
ImL	-0.00104	-0.00597	0.00723	-0.00334	0.00167	0.000120	0.000482
$\frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n \hat{U}_4 n)$	0.316	0.337	0.331	0.305	0.314	0.316	0.337
$\frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_n \lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n \hat{U}_4 n)$	-0.00104	-0.00597	0.00723	-0.00334	0.00167	0.000120	0.000482

配位で成立する理由は、格子体積 V が十分大きければゲージ不変でない量はゲージ不変量に比べて寄与が小さいからであると思われる。

4.2 low-lying Dirac mode の Polyakov loop への寄与

前節で関係式 (3.50) は各ゲージ配位に対してほぼ成立する事が数値的に確認できた。この節では、low-lying Dirac mode が Polyakov loop の値に対してほとんど寄与を持たない事を数値的に確認する。この事は節 3.1.2 で考察したように関係式 (3.5)、(3.50) から推測されるが、リンク変数演算子の KS Dirac 行列要素 ($n|\hat{U}_4|n$) の振る舞いが非自明であるので、数値的確認は行うべきである。

low-lying Dirac mode の領域の寄与を取り除いた (IR-cut した) Polyakov loop $L_{\text{IR-cut}}$ を

$$L_{\text{IR-cut}} = \frac{(2ai)^{N_4-1}}{3V} \sum_{|\lambda_n| > \Lambda_{\text{IR}}} \lambda_n^{N_4-1} (n|\hat{U}_4|n) \quad (4.1)$$

で定義する。節 2.2 の考察から、 $\Lambda_{\text{IR-cut}} \simeq 0.4 \text{ GeV}$ とする。

各ゲージ配位を用いて Polyakov loop L と (IR-cut した) Polyakov loop $L_{\text{IR-cut}}$ をそれぞれ閉じ込め相と非閉じ込め相で計算し、比較する。計算は前節と同じゲージ配位を用いる。

表 4.3、表 4.4 より、閉じ込め相と非閉じ込め相両方で

$$L \simeq L_{\text{IR-cut}} \quad (4.2)$$

表 4.3 各ゲージ配位を用いた閉じ込め相 ($10^3 \times 5, \beta = 5.6$) における Polyakov loop L と IR-cut した Polyakov loop $L_{\text{IR-cut}}$ の計算結果。

configuration No.	1	2	3	4	5	6	7
Re L	0.00961	-0.00161	0.0139	-0.00324	0.000689	0.00423	-0.00807
Im L	-0.00322	-0.00125	-0.00438	-0.00519	-0.0101	-0.0168	-0.00265
Re $L_{\text{IR-cut}}$	0.00961	-0.00160	0.0139	-0.00325	0.000706	0.00422	-0.00807
Im $L_{\text{IR-cut}}$	-0.00321	-0.00125	-0.00437	-0.00520	-0.0101	-0.0168	-0.00264

表 4.4 各ゲージ配位を用いた非閉じ込め相 ($10^3 \times 3, \beta = 5.7$) における Polyakov loop L と IR-cut した Polyakov loop $L_{\text{IR-cut}}$ の計算結果。

configuration No.	1	2	3	4	5	6	7
Re L	0.316	0.337	0.331	0.305	0.314	0.316	0.337
Im L	-0.00104	-0.00597	0.00723	-0.00334	0.00167	0.000120	0.0000482
Re $L_{\text{IR-cut}}$	0.319	0.340	0.334	0.307	0.317	0.319	0.340
Im $L_{\text{IR-cut}}$	-0.00103	-0.00597	0.00724	-0.00333	0.00167	0.000121	0.0000475

が各ゲージ配位に対して成立する。つまり、low-lying Dirac mode の寄与を取り除いても Polyakov loop の値はほとんど変化しない。従って、low-lying Dirac mode の Polyakov loop への寄与は非常に小さいという事がわかる。式 (2.54) より、 $|\lambda_n| < \Lambda_{\text{IR-cut}} = 0.4 \text{ GeV}$ の low-lying Dirac mode はカイラル対称性の自発的破れの最も重要なモードである。その low-lying Dirac mode の寄与を取り除いても閉じ込めのオーダーパラメータである Polyakov loop の値にほとんど寄与しないという事は、閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れには 1 対 1 対応が存在しない事を意味している。これは節 2.2 で紹介した数値的研究と整合する。

4.3 各 Dirac mode の Polyakov loop への寄与

関係式 (3.50) から、各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与がわかる。この節でも、閉じ込め相 ($10^3 \times 5, \beta = 5.6$) と非閉じ込め相 ($10^3 \times 3, \beta = 5.7$) の両方で計算を行う。

時間方向のリンク変数演算子の KS Dirac 行列要素 ($n|\hat{U}_4|n$) 及び Polyakov loop に対する各 KS Dirac mode の寄与 $\lambda_n^{N_4-1}(n|\hat{U}_4|n)$ を各 Dirac mode に対して計算する。ただし、関係式 (3.50) が各ゲージ配位で成立する事、各ゲージ配位で low-lying Dirac mode が Polyakov loop にほぼ寄与しない事から、一つのゲージ配位にのみ着目する。

閉じ込め相における行列要素 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ 、 $\text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ を Dirac 固有値 λ_n の関数として図 4.1、

図 4.2 に示した。

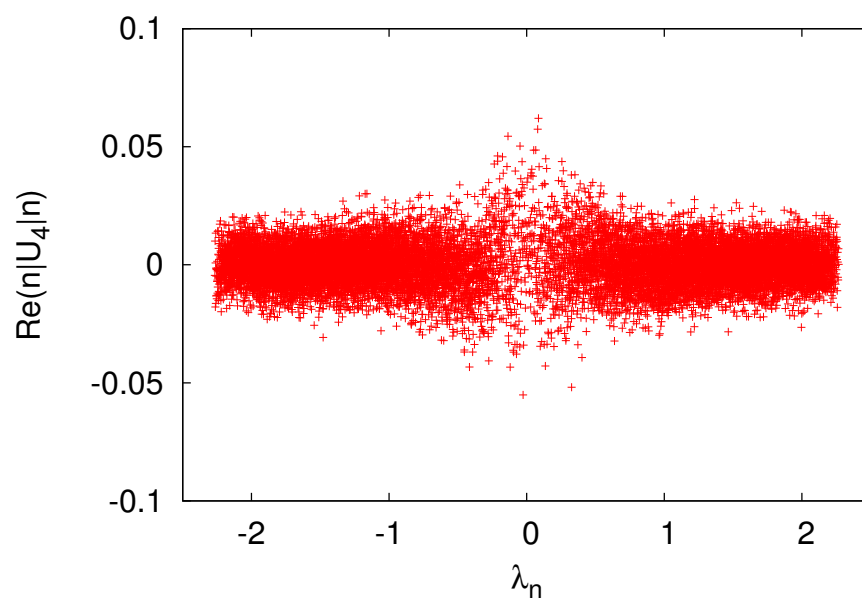


図 4.1 閉じ込め相 ($10^3 \times 5$, $\beta = 5.6$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての行列要素の実部 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

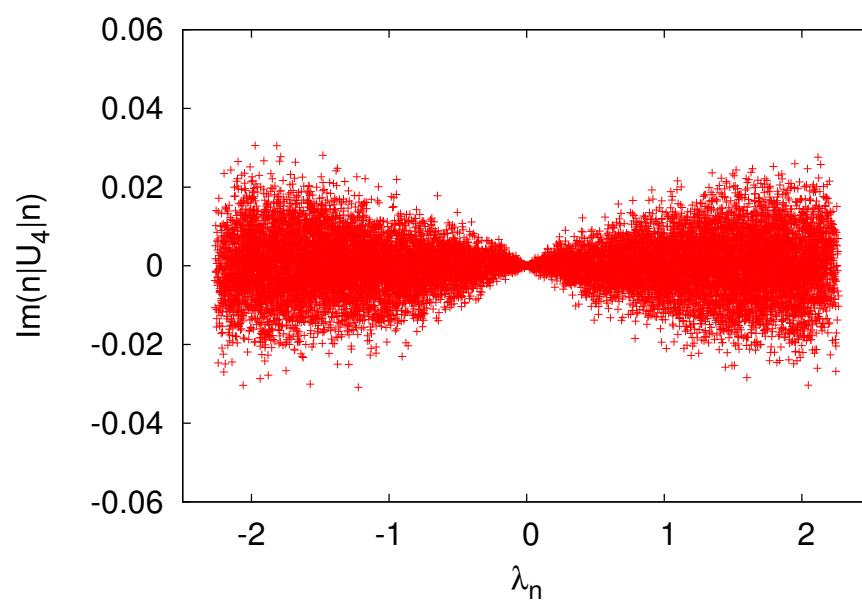


図 4.2 閉じ込め相 ($10^3 \times 5$, $\beta = 5.6$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての行列要素の虚部 $\text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

また、閉じ込め相における各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ 、 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ を Dirac 固有値 λ_n の関数として図 4.3、図 4.4 に示した。

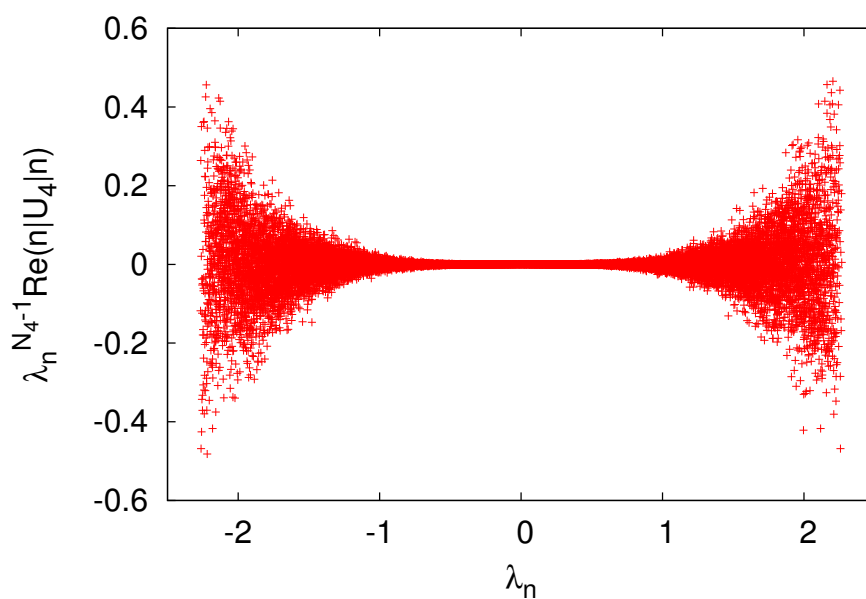


図 4.3 閉じ込め相 ($10^3 \times 5$, $\beta = 5.6$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の実部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

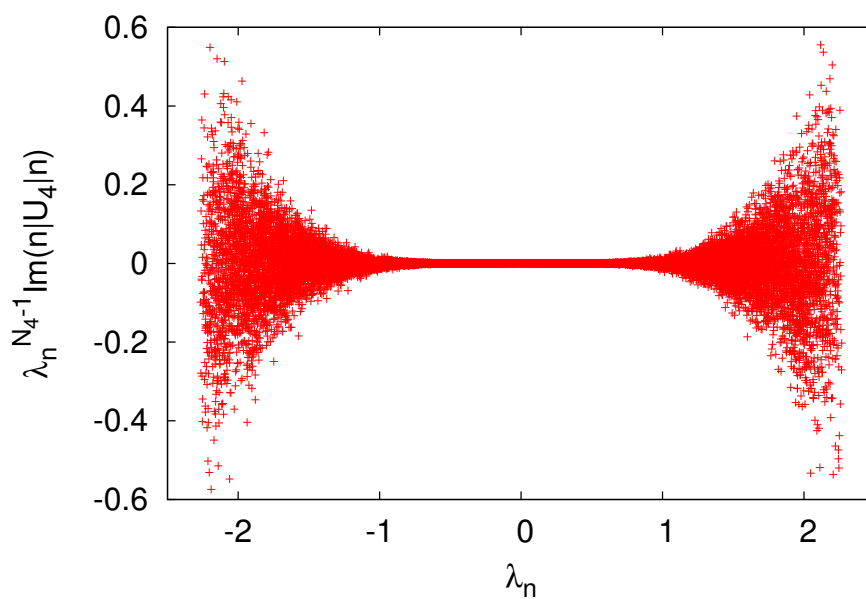


図 4.4 閉じ込め相 ($10^3 \times 5$, $\beta = 5.6$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の虚部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

まず図 4.1 より、行列要素の実部 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ は全 Dirac mode 領域で一般にゼロでなく、low-lying Dirac mode に対して値が小さくなるという性質は持たない。しかし、図 4.3 より、 $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子によって各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の実部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ が low-lying Dirac mode に対して値が小さくなっている事が確認できる。他方、図 4.2 より、行列要素の虚部 $\text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ は low-lying Dirac mode に対して値が小さくなっている点で実部

と分布が異なっている。しかし、図 4.4 より、 $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子によって low-lying Dirac mode が Polyakov loop に対してほとんど寄与を持たない事は実部と同様である。また、図 4.1、4.2 より、行列要素の実部及び虚部の分布に正負の対称性 (“positive/negative symmetry”) がある。従って、各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与にもこの正負の対称性がある事が図 4.3、4.4 からわかる。よって、閉じ込め相における Polyakov loop の期待値のゼロの値 ($\langle L_P = 0 \rangle$) はこの正負の対称性に起因している。

ここでは1つのゲージ配位に対する結果のみを示しているため、行列要素 $(n|\hat{U}_4|n)$ や各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与 $\lambda_n^{N_4-1}(n|\hat{U}_4|n)$ の点のゆらぎは統計的ゆらぎではない事に注意。他のゲージ配位に対する結果もここで述べた行列要素 $(n|\hat{U}_4|n)$ や各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与 $\lambda_n^{N_4-1}(n|\hat{U}_4|n)$ の振る舞いと同一振る舞いを見せている。

次に、非閉じ込め相における行列要素 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ 、 $\text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ を Dirac 固有値 λ_n の関数として図 4.5、図 4.6 に示した。

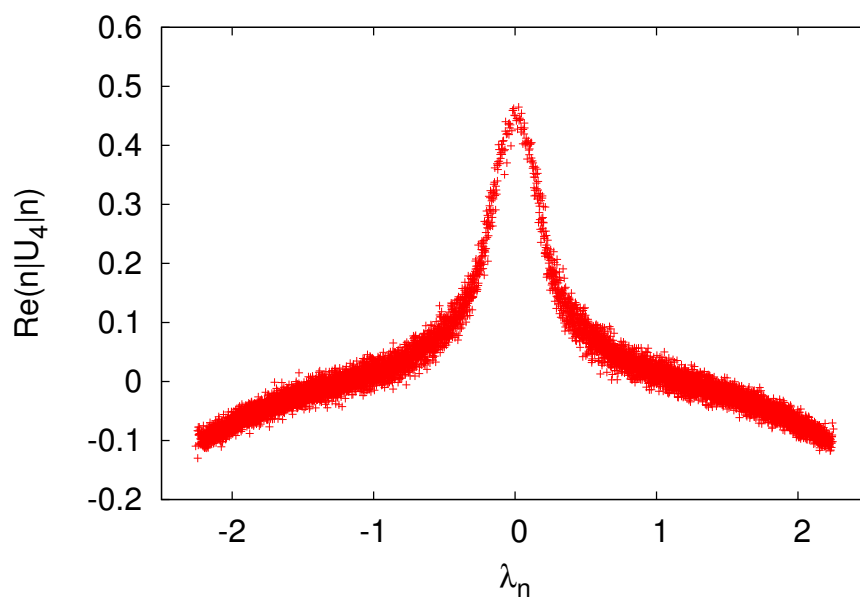


図 4.5 非閉じ込め相 ($10^3 \times 3$, $\beta = 5.7$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての行列要素の実部 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

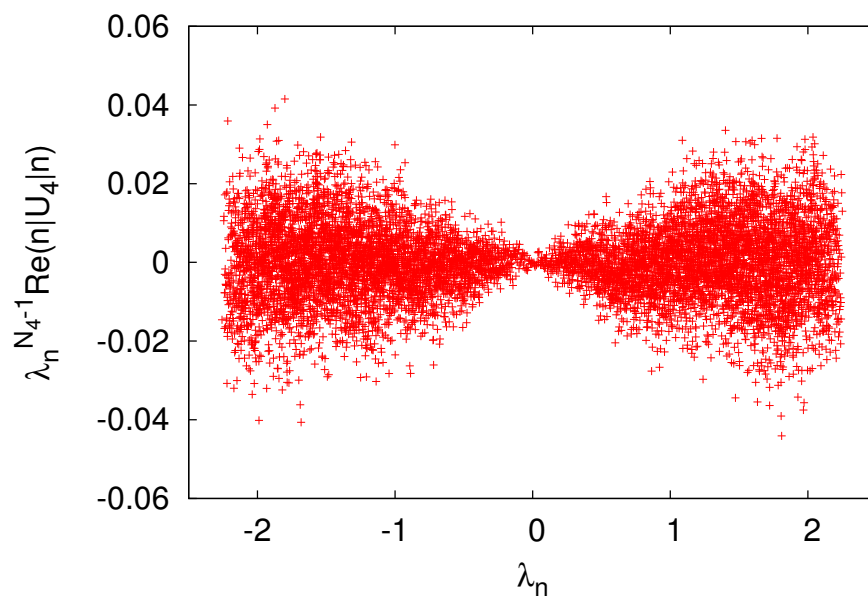


図 4.6 非閉じ込め相 ($10^3 \times 3$, $\beta = 5.7$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての行列要素の虚部 $\text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

また、非閉じ込め相における各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ 、 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ を Dirac 固有値 λ_n の関数として図 4.7、図 4.8 に示した。

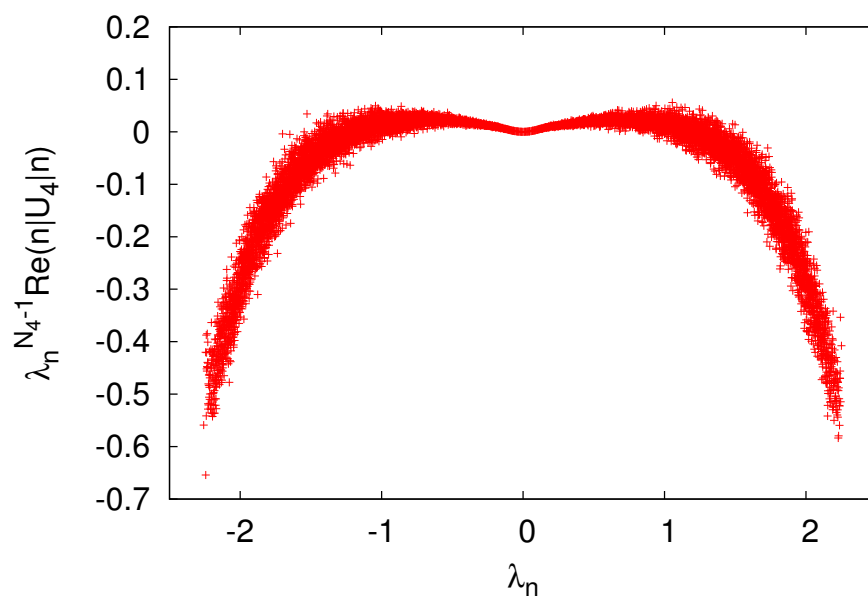


図 4.7 非閉じ込め相 ($10^3 \times 3$, $\beta = 5.7$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の実部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

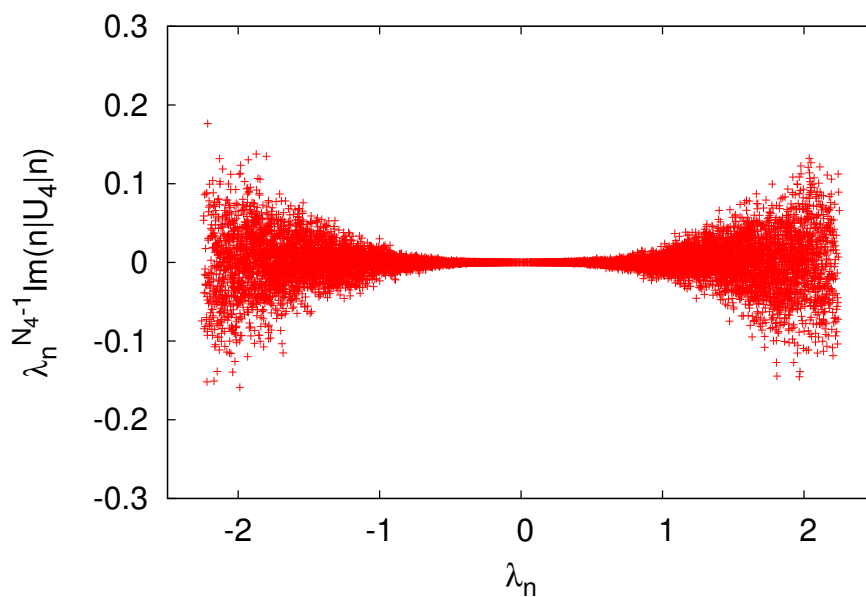


図 4.8 非閉じ込め相 ($10^3 \times 3$, $\beta = 5.7$) における Dirac 固有値 λ_n の関数としての各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の虚部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Im}(n|\hat{U}_4|n)$ の数値計算結果。

まず、我々の計算で用いたゲージ配位では Polyakov loop の期待値は実になるので、行列要素及び各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の虚部は閉じ込め相の場合と同様の振る舞いをする。よって、解析は実部に対して行えば十分である。次に、図 4.5 より、行列要素の実部 $\text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ は low-lying Dirac mode でピークを持つ事がわかる。しかし、図 4.7 より、閉じ込め相の場合と同様に $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子によって各 Dirac mode の Polyakov loop に対する寄与の実部 $\lambda_n^{N_4-1} \text{Re}(n|\hat{U}_4|n)$ が low-lying Dirac mode に対して値が小さくなっている事が確認できる。よって、 $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子が非常に重要な役割を担っている。

また、閉じ込め相の場合の行列要素に存在した正負の対称性は非閉じ込め相の場合では存在しない。従って、その非対称性から、Polyakov loop の期待値はゼロでなくなる。よって、閉じ込め相・非閉じ込め相の区別は行列要素 $(n|\hat{U}_4|n)$ の正負の対称性の有無でも可能である事が示唆される。閉じ込め相の場合と同様に 1 つのゲージ配位に対する結果のみを示すが、他のゲージ配位に対する結果も同様の振る舞いをする。

第 5 章

まとめと展望

本研究では、格子 QCD に基づいて、クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について解析的及び数値的に解析を行った。

まず、時間方向の周期境界条件を課した時間方向の格子サイズが奇数の格子を用いて Polyakov loop と Dirac mode の解析的な関係式 (3.5) を導出した。Polyakov loop はクォークの閉じ込めの代表的なオーダーパラメータであり、low-lying Dirac mode はカイラル対称性の自発的破れにとって重要なモードであるため、この関係式は本研究の主題であるクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係を議論する上で非常に有用な関係式である。この関係式は系の相とは無関係に、フル QCD 及び有限温度・有限密度で成立する一般的な等式である。

この関係式 (3.5) から、low-lying Dirac mode が Polyakov loop にほとんど寄与しない事が期待されるが、行列要素 $\langle n|\hat{U}_4|n\rangle$ の振る舞いが非自明であるため数値的解析が必要である。そこで、Dirac 演算子をスピノルの添え字に関してブロック対角化する手法である KS 法を一般化し、時間方向の格子サイズが奇数の格子にも適用可能な modified KS 法を開発した。modified KS 法を用いて関係式 (3.5) と等価な関係式 (3.50) を導出し、近似無しで数値計算のコストを抑える事に成功した。

この関係式 (3.50) は十分体積が大きい場合、各ゲージ配位に対してほぼ成立する事がわかった。また、low-lying Dirac mode が Polyakov loop にほとんど寄与しない事も数値的に確認した。つまり、カイラル対称性の自発的破れの最も重要なモードである low-lying Dirac mode は閉じ込めにとって重要ではない。従って、我々は QCD においてクォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係は単純な 1 対 1 対応ではない事を解析的及び数値的に示した。

また、関係式 (3.50) の右辺に現れる、KS Dirac 行列要素 $\langle n|\hat{U}_4|n\rangle$ や各 Dirac mode の Polyakov

loop に対する寄与 $\lambda_n^{N_4-1}(n|\hat{U}_4|n)$ の性質も調べた。閉じ込め相と非閉じ込め相でこれらの量の振る舞いが大きく異なる事がわかった。非閉じ込め相では行列要素が low-lying Dirac mode 領域でピークを持つが、 $\lambda_n^{N_4-1}(n|\hat{U}_4|n)$ は low-lying Dirac mode 領域で小さくなる。これは $\lambda_n^{N_4-1}$ の因子が非常に重要な役割を担っている事を意味する。

また、閉じ込め相では行列要素 $(n|\hat{U}_4|n)$ に正負の値に関する新しい対称性が存在することがわかった。この $(n|\hat{U}_4|n)$ の正負の対称性によって、閉じ込め相では Polyakov loop の期待値はゼロになる。 $(\langle L \rangle = 0)$ ところが、非閉じ込め相 $(\langle L \rangle \neq 0)$ ではこの対称性は存在せず、その非対称性によって Polyakov loop の値はゼロでなくなる。

これからの展望として、本研究に基づき QCD における閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れ等の非摂動的現象や、その関係性について更に深く研究する事を考えている。以下では今後の課題として考えられるいくつかの研究について述べる。

Polyakov loop と Dirac mode の解析的な関係式 (3.5) は lattice spacing a が有限の格子で成立する関係式であるが、この関係式の連続極限 ($a \rightarrow 0$) を書き下す事ができれば、連続理論の QCD について直接議論する事が可能であり、その物理的意義は非常に大きいと考えられる。また、連続極限に近づけたときの KS Dirac 行列要素 $(n|\hat{U}_4|n)$ の振る舞いの変化を調べることは非常に重要である。

閉じ込め・非閉じ込め相転移について、Polyakov loop そのものではなく Polyakov loop の感受率の比も重要な意味を持つという格子 QCD の研究結果がある。そこで、本研究で導出した Polyakov loop と Dirac mode との関係式を一般化し、Polyakov loop の感受率の比と Dirac mode との関係式について議論する事も有意義であると考えられる。

本研究で、閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れには単純な 1 対 1 対応が成立しない事が示された。これは、QCD にはより複雑で多様な相構造が現れる事を示唆している。Polyakov loop の感受率の比とも関連させて、QCD 相図に対してアプローチする事も視野に入れている。

最大可換ゲージを取った時の QCD モノポールは閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れ等の非摂動的現象と密接な関係がある。そこで、Dirac mode 展開・射影の方法を用いて、QCD モノポールと関連させて閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係について議論する事も興味深い。

本研究ではクエンチ近似を用いて数値解析を行ったが、実際の physical point における計算

をするためにはクォークセクターも考慮に入れてフル QCD 計算をする必要がある。また、カイラル対称性の自発的破れがキーワードの一つであるので、格子フェルミオンとしてカイラル対称性を尊重したフェルミオンを用いて計算をする方が望ましい。本研究で明らかになった閉じ込め相における行列要素 $\langle n | \hat{U}_4 | n \rangle$ に現れる新しい対称性についてフル QCD 計算等の計算を行って調べる事は、閉じ込め現象に対するアプローチにもなりうるので、興味深い研究題材であると考えている。

強い相互作用の2つの重要な性質であるカラーの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの関係を基礎理論の QCD から研究する事は、低エネルギー QCD が示す非摂動的諸性質それぞれの解明や有限温度・有限密度 QCD の解明及び QCD 相図の解明にも関連し、今後の素粒子・原子核・ハドロン物理学における1つの大きな流れになると期待される。

謝辞

本修士論文は筆者が京都大学大学院物理学第二教室修士課程在学中に原子核理論研究室において行った研究をまとめたものです。本修士論文を作成するにあたり、多くの方に協力していただきました。ここで謝辞を述べさせていただきます。

まず指導教官の菅沼秀夫准教授には、研究全般にわたり熱心なご指導、本研究に関する鋭い指摘をしていただきました。心からお礼を申し上げます。また、共同研究者の一人でかつ研究室の先輩でもある入谷匠さんには非常に有益な議論をしていただき、研究がスムーズに進みました。深く感謝いたします。

原子核理論研究室の山中長閑さん、今井匠太郎さん、飯田英明さんには行き詰っていた筆者に的確なアドバイスをしていただきました。そのアドバイスは本研究にも多く反映されています。感謝申し上げます。

全員名前を挙げる事はしませんが、同期の友人や研究室の方々との自主ゼミは大変有意義でした。研究する上で非常に良い環境で修士課程の2年間を過ごせた事に、心から喜びを感じています。

最後に、これまで私を育ててくれた両親と祖父母に感謝します。

参考文献

- [1] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [2] 九後汰一郎, 『ゲージ場の量子論 I, II』, 培風館, 1989 年.
- [3] 青木慎也, 『格子上の場の理論』, 丸善出版, 2005 年.
- [4] 近藤慶一, 『ゲージ場の量子論入門』, サイエンス社, 2006 年.
- [5] D.J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [6] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [7] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories*, World Scientific, 2012.
- [8] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983.
- [9] K.G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [10] G. S. Bali, K. Schilling and C. Schlichter, *Phys. Rev. D* **51**, 5165 (1995).
- [11] Y. Nambu, *Phys. Rev. D* **10**, 4262 (1974).
- [12] H. Ichie, V. Bornyakov, T. Streuer and G. Schierholz, *Nucl. Phys.* **A721**, 899 (2003).
- [13] T.T. Takahashi, H. Suganuma, H. Ichie, H. Matsufuru and Y. Nemoto, *Nucl. Phys.* **A721**, 926 (2003).
- [14] V.G. Bornyakov et al. [DIK Collaboration], *Phys. Rev. D* **70**, 054506 (2004).
- [15] N. Yamanaka, S. Imai, T.M. Doi and H. Suganuma, [arXiv:1401.2852 [hep-ph]].
- [16] G. 't Hooft, in *Proceedings of High Energy Physics*, Editrice Compositori 1976.
- [17] S. Mandelstam, *Phys. Rep. C* **23**, 245 (1976).
- [18] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B190**, 455 (1981).
- [19] H. Suganuma, S. Sasaki and H. Toki, *Nucl. Phys.* **B435**, 207 (1995).
- [20] O. Miyamura, *Phys. Lett. B* **353**, 91 (1995).
- [21] R.M. Woloshyn, *Phys. Rev. D* **51**, 6411 (1995).
- [22] Y.M. Cho, F.H. Cho and J.H. Yoon, *Phys. Rev. D* **87**, 085025 (2013).
- [23] L. Faddeev and A. Niemi, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1624 (1999).
- [24] S. Kato, K. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara and S. Ito, *Phys. Lett. B* **632**, 326 (2006).
- [25] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
- [26] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [27] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [28] T. Banks and A. Casher, *Nucl. Phys.* **B169** (1980) 103.
- [29] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B185**, 20 (1981).
- [30] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B193**, 173 (1981).
- [31] CP-PACS Collaboration (S. Aoki et al.), *Phys. Rev. Lett.* **84**, 238 (2000).
- [32] L.D. McLerran and B. Svetitsky, *Phys. Rev. D* **24**, 450 (1981).

-
- [33] P.M. Lo, B. Friman, O. Kaczmarek, K. Redlich, and C. Sasaki, Phys. Rev. D **88**, 014506 (2013).
- [34] P.M. Lo, B. Friman, O. Kaczmarek, K. Redlich, and C. Sasaki, Phys. Rev. D **88**, 074502 (2013).
- [35] C. Gattringer, Phys. Rev. Lett. **97**, 032003 (2006).
- [36] F. Bruckmann, C. Gattringer and C. Hagen, Phys. Lett. B **647**, 56 (2007).
- [37] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D **29**, 338 (1984).
- [38] F. R. Brown, F. P. Butler, H. Chen, N. H. Christ, Z. Dong and W. Schaffer, Phys. Rev. Lett. **65**, 2491 (1990).
- [39] E. Laermann and O. Philipsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163 (2003).
- [40] J. Kogut, M. Stone, H.W. Wyld, W.R. Gibbs, J. Shigemitsu, S.H. Shenker and D.K. Sinclair, Phys. Rev. Lett. **50**, 393 (1983).
- [41] F. Karsch, Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002).
- [42] Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, Phys. Lett. B **643**, 46 (2006).
- [43] Y. Aoki, S. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor, S.D. Katz, S. Krieg and K.K. Szabo, JHEP **06**, 088 (2009).
- [44] S. Gongyo, T. Iritani and H. Suganuma, Phys. Rev. D **86**, 034510 (2012).
- [45] T. Iritani and H. Suganuma, [arXiv:1305.4049 [hep-lat]].
- [46] T. Iritani, S. Gongyo and H. Suganuma, PoS (Confinement X) (2013) 053.
- [47] H. Suganuma, T. M. Doi, T. Iritani, PoS (Lattice 2013) (2013) 374.
- [48] H. Suganuma, T. M. Doi, T. Iritani, Eur. Phys. J. Web of Conferences (ICNFP2013) (2014).
- [49] H. Suganuma, T. M. Doi, T. Iritani, PoS (QCD-TNT-III) (2014) 042.
- [50] H. Suganuma, T. M. Doi, T. Iritani, PoS (Hadron 2013) (2014) 121.
- [51] T. M. Doi, H. Suganuma, T. Iritani, PoS (Lattice 2013) (2013) 375.
- [52] T. M. Doi, H. Suganuma, T. Iritani, PoS (Hadron 2013) (2014) 122.
- [53] J.B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 395 (1975).
- [54] S. Elitzur, Phys. Rev. D **12**, 3978 (1975).