素粒子論研究・電子版 Vol. 23 (2016) No. 3

2015 年度原子核三者若手夏の学校

素粒子論パート講義 (弦理論) 講義録

超弦理論と超対称ゲージ理論

講師：細道　和夫　（国立台湾大学物理学科）

講義録作成：京都大学物理学第二教室素粒子論研究室

京都大学基礎物理学研究所素粒子論グループ

川井 大輔, 梅田 直弥, 西 雅人, Choi Jaewang,

Park Minkyu, 宮本 貴也, 渡邊 賢人,

京野 秀紀, 坂本 純一, 宮川 大輝, 清水 数馬, 宮地 真路,

酒井 勝太, 服部 貴也, 山本 順二

目次

お招きいただきましてありがとうございます。台湾から来ました、細道と言います。去年 (2014年) の 8 月に、京都大学基礎物理学研究所から台北市にある国立台湾大学というところに移って、今働いています。向こうの研究室は若い人が多くてですね、大学院生の数もこんなに多くなくて、台湾ではこのような大学院生が集まる夏の学校というのはとてもできないので、すごいみんな羨ましがっています。皆さんよい機会ですので、是非、いろんなことを学んで帰っていただきたいと思います。

今日と明日の講義は、超弦理論と超対称ゲージ理論というタイトルで話したいと思います。超弦理論とか超対称ゲージ理論というのはいずれも広い分野ですので、興味を受ける話題として 4 次元のゲージ理論、特に $\mathcal{N}=2$ という超対称性を持つものに限ることにします。超弦理論と超対称ゲージ理論との関わりを色々紹介できたら良いなと思っていたのですが、なにしろ盛んに発展している分野でもありますので、いくつかトピックを絞って紹介したいと思います。今日と明日で約 3 時間の講義を 2 回させていただくのですが、それを 4 分割しまして、そのそれぞれのコマで 1 つずつ話題をお話ししたいと思います。

1 Seiberg-Witten 理論
2 M 理論を使った Seiberg-Witten 問題の解
3 Nekrasov 分配関数
4 球面上の分配関数 (Pestun)

最初の話題では、Seiberg-Witten 理論というものを紹介したいと思います。これは 1990 年代半ばに 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギーの物理について Seiberg と Witten が新しい解き方を提唱した華々しい結果です。ゲージ理論と Riemann 面との数学の間に思いがけない関係があるという話です。それをまず今日の最初の 1 時間か 2 時間くらいの間に話します。Seiberg-Witten 理論というのは、Seiberg と Witten がゲージ理論の低エネルギーの物理を解きたいという問題を提唱し、その答えを Riemann 面を使って解いたというものです。そして、その Riemann 面の意味は M 理論という超弦理論の強結合極限で現れる 11 次元の理論を考えるとわかります。そこで次のコマでは、M 理論を使った Seiberg-Witten 問題の解を紹介します。この 2 つの話題は、だいたい 1990 年代の半ばから終わりぐらいに発表されたものです。

明日の講義では、最初に Nekrasov が 2002 年に発表した Nekrasov の分配関数というものをお話しします。皆さん、Ω-変形という話を聞いたことがあるでしょうか。そのような話を明日したいと思います。最後のコマでは、2007 年に Pestun という人が 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論を 4 次元球面の上に実現し、その分配関数を厳密に計算したという話をしたいと思います。分配関数が厳密に計算できるというだけでもすごいことなのですが、その厳密公式をきっかけにして新しい発見が次々と出て来まして、その話題もいくつか紹介できればと思っています。

では今日は早速、Seiberg-Witten 理論の話をしたいと思います。

1 Seiberg-Witten 理論

Seiberg-Witten 理論というものは、先ほども少し触れましたが、1994 年に最初の論文が出たもので、Seiberg と Witten が 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギーでのダイナミクスを解きました。その際、ゲージ理論と Riemann 面との関係を使いました。その話を紹介しようと思うのですが、超対称性は全然勉強したことがない、という方もいらっしゃるかもしれないと思いまして、$\mathcal{N}=2$ SUSY というものがどういう対称性か、そもそも超対称性とはどういう対称性か、というような「超対称性とは何か」という話を最初にしたいと思います。

1.1 $\mathcal{N}=2$ 超対称性 (SUSY)

SUSY というのは日本語でいうと超対称性です。対称性というと、電荷の組があって、その電荷が交換関係に従うような数学です。超対称性というと、交換関係ではなくて、反交換関係に従うような電荷が出てきまして、これは超電荷 (Super Charge) と呼ばれています。高エネルギー理論とか場の理論で専ら話題になる超対称性というのは、超電荷を含むように Poincare 代数という対称性を拡張したものです。ですので、今日お話しする話は Poincare 対称性の一般の拡張となります。Poincare 対称性とはローレンツ変換の生成子と並進の生成子から成る対称性のことです：

$$\{P_m,\ M_{mn}\} \tag{1}$$

これに加えて、超電荷を含むような対称性の代数を考えます：

$$\left\{P_m,\ M_{mn},\ Q_\alpha,\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} \tag{2}$$

超対称性代数の一番大事な特徴は、この Q_α や $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ という超電荷がスピノルであるということです。スピノルというのは、ローレンツ変換の変換性に関わる言葉です。せっかくなので、γ 行列などのおさらいをしたいと思います。γ 行列というのは 4×4 の行列の組であり、それに γ^5 というのを加えて考えるときもあります。この 4×4 の行列の組は次のような代数に従っています：

$$\gamma^{m=0,1,2,3},\ \gamma^5 \qquad \{\gamma^m,\ \gamma^n\} = -2\eta^{mn} \tag{3}$$

この η^{mn} はミンコフスキー計量で、

$$\eta^{mn} = \mathrm{diag}(-,+,+,+) \tag{4}$$

と定義されています。γ 行列はこのような 4×4 の行列なのですが、表示の仕方がたくさんありまして、今日の午前中に萩原先生がすごく丁寧に講義してくださっていたようですが、超対称性を考える時に便利なのは γ^5 を対角化するような表示です：

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

この表示を使うと、$\gamma^{m=0,1,2,3}$ は block-off-diagonal の成分しかノンゼロになりません。これは block diagonal 成分がノンゼロだと γ^5 と反交換しないことから導かれます。block-off-diagonal の成分は

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^m)^{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

のように書けます。そして γ^{mn} という行列もたまに使います。これは γ^m と γ^n の交換子で定義されます：

$$\gamma^{mn} = \frac{1}{2}\left[\gamma^m, \gamma^n\right] \tag{7}$$

これは、$\gamma^{m=0,1,2,3}$ が block-off-diagonal の成分しか持たない表示だとすると、block-diagonal の成分に次のような値を持ちます：

$$\gamma^{mn} = \begin{pmatrix} (\sigma^{mn})_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

超電荷がスピノルだというのがどういう意味かと言いますと、超電荷とローレンツ変換の生成子との交換関係が次のようになっているということです：

$$[M_{mn},\ Q_\alpha] = \clubsuit\ (\sigma_{mn})_\alpha^\beta Q_\beta \tag{9}$$

係数はちょっと自信がないので $\clubsuit$ と書いています。[*1] このような代数を Q_α と M_{mn} が満たしていると、Q_α はスピノルということができます。Q を $\bar{Q}$ に変えた場合は、σ という係数行列が $\bar{\sigma}$ という係数行列に変わります。このようにして、Poincare 代数を反交換する超電荷を含むように一般化したものが超対称性と呼ばれる対称性の代数です。

超電荷がスピノル量だということに加え、もう 1 つ重要な超対称性を特徴付ける交換関係として、超電荷の反交換子を計算すると並進の生成子 (運動量) が出てくるというものがあります。これは超対称性の 1 番大事な交換関係と言えます。

$$\left\{Q_\alpha,\ \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}P_m \tag{10}$$

ここに紹介した超 Poincare 代数と呼ばれる超対称代数は、$\mathcal{N}=1$ と呼ばれる超対称代数です。ここで、超電荷の数を増やすこともできます。超電荷の数を増やすと、Q_α という超電荷が余分な脚を持つようになります。$\mathcal{N}$ 重に拡張した超対称代数は次のように書けます：

$$\left\{Q^I_\alpha,\ \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\right\} = 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}P_m\delta^I_J \qquad I, J = 1, 2, \cdots, \mathcal{N} \tag{11}$$

この余分な脚がないときは minimal-SUSY と呼び、余分な脚が $\mathcal{N}$ 個あるときは $\mathcal{N}$ 重に拡張された超対称性 ($\mathcal{N}$-extended SUSY) と呼びます。このとき、余分な脚が $\mathcal{N}$ 個ある $\mathcal{N}$ 重に拡張され

[*1] 以降 $\clubsuit$ などのスーツは明示されていない係数を表す。

た超対称性を考えると、R 対称性というものが出てきます。[*2] この R 対称性というものは、超電荷同士を回転させて混合させるような変換です。どのように混合する可能性があるかというと、Q^I_α というのは左巻きのスピノルで、$\bar{Q}_{\dot{\beta}J}$ というのは右巻のスピノルなので、変換性が違うために Q^I_α と $\bar{Q}_{\dot{\beta}J}$ は混ざりませんが、Q^I_α の $I=1,\cdots,\mathcal{N}$ までを混ぜることができます。それから重要なことは、Q^I_α と $\bar{Q}_{\dot{\beta}J}$ は互いに複素共役の関係にあるので、Q^I_α をユニタリ変換した場合、$\bar{Q}_{\dot{\beta}J}$ はその複素共役行列を使って変換します。このようなことをいろいろ考えると、この 4 次元の $\mathcal{N}$ 重に拡張された超対称性の場合は R 対称性を

$$\mathrm{U}(\mathcal{N}) = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(\mathcal{N}) \tag{12}$$

とします。今日と明日の話では、この $\mathcal{N}$ が 2 の場合を専ら考えます。

超対称性のある理論というのは色々な次元で考えることができます。また、超対称性代数というのも分類がよく研究されていて、この話を見るとわかるように、SUSY 代数というのは、次元 (D) と超対称性の数 $(\mathcal{N})$ で分類されるわけです：

$$\text{SUSY 代数：} \ (D,\ \mathcal{N}) \tag{13}$$

このような対称性の代数がある場の理論を今後考えていくということです。

1.2 超対称性をもつ場の理論

では、超対称性を持つような場の理論がどのようになるかを見ていきましょう。皆さんもすぐ想像できると思うのですが、超対称性は反交換する電荷があるので、ボゾンとフェルミオンを入れ替えます。もう少し詳しく言うと、まず、ある場の理論があったとして、その中のボゾンを ϕ とし、ψ をフェルミオンとします。今、4 次元の話に限ることにすると、ボゾンの質量次元は 1、つまり微分 1 個分、またフェルミオンの質量次元は 3/2 になるということが知られています：

$$[\phi] = [\partial], \quad [\psi] = [\partial^{\frac{3}{2}}] \tag{14}$$

ここで $[\cdots]$ は色々な量の質量次元を表すということにします。では、超電荷の質量次元は何になるかを考えると、Q と $\bar{Q}$ を反交換すると P が出てくることから、この P というのは偏微分そのものなので、Q の質量次元は P の 1/2 乗、つまり

$$[Q] = [P^{\frac{1}{2}}] = [\partial^{\frac{1}{2}}] \tag{15}$$

になります。そして、超対称性がボゾンとフェルミオンをどのように変換するかというのを想像すると、次のようになります：

$$\phi \xrightarrow{Q} \psi \xrightarrow{Q} \partial\phi \tag{16}$$

[*2] $\mathcal{N}=1$ のときも、Q、$\bar{Q}$ を位相回転する $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性が存在する。

つまり、ボゾンに超電荷 Q にかけると質量次元が 1/2 上がってフェルミオンになり、フェルミオンにさらに Q をかけるとボゾンに戻ると考えられるのですが、質量次元が合わないのでボゾンの微分に変わるようにする、ということです。

次に、超対称性を持つ場の理論のもう少し詳しい紹介をしようと思います。もちろん、この講義で 1 から超対称な場の理論を構成するなんことはできませんし、そんなことをしては却って皆さんのためにならないので、よく知られている事実を手短にまとめて紹介するということにします。先ほど紹介した通り、超電荷というのはボゾンとフェルミオンを入れ替えるわけです。つまり、場の理論の場の組があって、場の組が超対称性代数の表現を成しているということです。超対称性代数の表現のことを、我々は超対称性多重項、あるいは短く多重項、英語で言うと Super-multiplet とか multiplet と呼んでいます。どのような超対称性多重項があるかというのも、超対称性代数のどれを選ぶかに応じて決まるわけです。そこで今日紹介しようと思うのは、4 次元の $\mathcal{N}=1$ の超対称性多重項にどのようなものがあり、そして 4 次元の $\mathcal{N}=2$ の場合はどうかということです。もうすでに超対称性について勉強したことがある方がたくさんいるのではないかと思いますが、手短に紹介したいと思います。

4 次元の $\mathcal{N}=1$ という超対称性の表現としては、ベクトル多重項 (vector multiplet) というものと、カイラル多重項 (chiral multiplet) というものがあります。ベクトル多重項というのはどのような多重項であるかというと、ゲージ場 A_m と、その超対称パートナーであるスピン 1/2 のゲージーノと呼ばれるスピノル $\lambda_\alpha,\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ があります。これだけ書いて終わりでも良いのですが、超対称性の表現としての性質を整えようとすると、補助場 D というのを足す場合があります。補助場というのは表現としての補助的な役割をするもので、ダイナミクスには現れません。ゲージ場を A、ゲージーノを λ、補助場を D と書くのは、Wess-Bagger[*3]を使って超対称性を勉強している皆さんが多いと思うのですが、標準的な表記となっています。ベクトル多重項というのは、ゲージ対称性に対応する多重項ですので、ゲージ群を G と選ぶとベクトル多重項は全てゲージ群 G の随伴 (adjoint) 表現に属する場となります。一方、カイラル多重項はどのようになるかと言いますと、複素スカラー場 ϕ、カイラルスピノル場 ψ_α、複素スカラー補助場 F の 3 つから成ります。また、これらの複素共役を取ったもの、即ち $\bar{\phi},\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}},\ \bar{F}$ を反カイラル多重項 (anti-chiral multiplet) と呼びます。カイラル多重項の中にはゲージ場がなく、物質場しか含まれていません。この物質場の組は、ゲージ群の任意の複素表現に属することができます。例えば、カイラル多重項がゲージ群 G の複素表現 Λ に属するとすると、反カイラル多重項は $\bar{\Lambda}$ に属することになります。

このように、2 種類の多重項があります。では、この多重項を使って超対称性に不変なラグランジアンや変換則をどのように書くかというと、一番手っ取り早い方法は、当て勘でローレンツ不変性から許される項を書くという方法です。試しに、カイラル多重項だけを含むような自由なラグランジアンを書いてみます。うまく係数を選ぶと、Wess-Zumino 模型と呼ばれる超対称性を持つ模

[*3] SUSY の有名な教科書のこと：Julius Wess, Jonathan Bagger, “Supersymmetry and Supergravity”

型になります：

$$\mathcal{L} = \clubsuit\ \partial_m \bar{\phi}\ \partial^m \phi + \spadesuit\ \bar{\psi}\ \bar{\sigma}^m \partial_m \psi + \diamondsuit \bar{F} F \tag{17}$$

カイラル多重項を使って書ける自由なラグランジアンとしてはこれが一番一般的なものになります。ここで係数をうまく選ぶと超対称性不変になるのですが、そのためには、ラグランジアンが超対称性変換の下で全微分 (total derivative) を除いて不変になるということを考えます：

$$\delta \mathcal{L} = 0 \qquad (\text{全微分を除いて}) \tag{18}$$

この δ というのが ϕ や ψ にどのように作用するのかというと、これも当て勘で

$$\delta\phi = \xi\psi = \xi^\alpha \psi_\alpha \tag{19}$$

$$\delta\psi = \spadesuit\ \bar{\sigma}^m \bar{\xi} \partial_m \phi + \diamondsuit \xi F \tag{20}$$

のように書いてみます。また、他の 4 つの場についても適当に変換則を書いてみて、上手く決まっていない係数を埋めていけば、超対称性不変なラグランジアンになっているということです。ですが、このようなことをしなくても、教科書を読めば超対称性不変なラグランジアンの構成法や結果が書いてあります。超対称性変換の変換則とラグランジアンというのは、非常に大雑把でまだ決まっていない部分も多いのですが、体裁はいつもこのような形になります。超対称性がどのようにパラメトライズされるかというと、ξ や $\bar{\xi}$ というのが超対称性変換をパラメトライズするパラメーターになっています。つまり、$\xi_\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ は係数スピノルで、この係数 (SUSY パラメーター) が超対称性をパラメトライズしています。

質疑応答

質問： 係数スピノルと言っているのは、今フラットで考えているからですか？

回答： はい、そうです。明日の 4 コマ目で曲がった空間での超対称性を議論します。

このラグランジアン ((17) 式) というのは、$\mathcal{N}=1$ の超対称性を持ったラグランジアンの例です。なぜかというと、$\mathcal{N}=1$ の多重項を使って作ったからです。これからお話ししたいのは、4 次元の $\mathcal{N}=2$ という超対称性を表現する多重項がどのようなものになるかというものです。ラッキーなことに、$\mathcal{N}=2$ の超対称性というのは $\mathcal{N}=1$ の超対称性を含むので、$\mathcal{N}=2$ の超対称性の表現は $\mathcal{N}=1$ の超対称性の表現を使って作れます。このときの多重項に含まれる場の数というのは、$\mathcal{N}=1$ の多重項に含まれる場の数よりも多くなります。

最初の例はベクトル場を含む多重項を書こうと思います。どのようにすれば良いかというと、$\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項をまず持ってきます。それから、$\mathcal{N}=1$ の随伴表現に属するカイラル多

重項を持ってきます：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}=1\ \text{ベクトル}:&\ (A_m,\ \lambda,\ \bar{\lambda},\ D) \\ \mathcal{N}=1\ (\Lambda=\text{随伴表現})\ \text{カイラル}:&\ (\phi,\ \psi,\ F) \\ &\ (\bar{\phi},\ \bar{\psi},\ \bar{F}) \end{aligned} \tag{21}$$

これらは皆、随伴表現に属すると言えます。これらを全てまとめてやると、$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項と呼ばれる多重項ができます。$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項というのは、$\mathcal{N}=1$ の部分代数の表現を使えば (21) 式のように書けるのですが、他の書き方もありまして、

$$\mathcal{N}=2\ \text{ベクトル}:\ (A_m,\ \phi,\ \bar{\phi},\ \lambda_{\alpha A},\ \bar{\lambda}^j_A,\ D^A_B) \tag{22}$$

このような形になります。まずベクトル場 A_m があって、複素スカラー場 ϕ とその複素共役 $\bar{\phi}$ があります。そして、左巻きのスピノルが λ と ψ と 2 つあるので、その 2 つを添え字 A というものでラベルし、1 個の $\lambda_{\alpha A}$ という記号でまとめたわけです。

そして超対称性代数があると、その超電荷をまわす R 電荷があると言いました。その R 電荷に対する変換性も重要です。今、$\mathcal{N}=2$ という超対称性を考えているので、R 対称性は $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ になります。この下での (22) 式の場の変換性というのは、まず SU(2) の下で非自明な変換性に従うものが $\lambda_{\alpha A}$ と $\bar{\lambda}^j_A$、D^A_B です。$\lambda_{\alpha A}$ と $\bar{\lambda}^j_A$ が二重項、D^A_B が三重項です。また、U(1) 電荷を持つのは $\phi,\ \bar{\phi}$ と $\lambda_{\alpha A},\ \bar{\lambda}^j_A$ で、それぞれ電荷の量は $+2,\ -2,\ +1,\ -1$ となります。

$\mathcal{N}=2$ 超対称性の多重項としては、ベクトル多重項の他にハイパー多重項 (Hyper multiplet) というものがあります。これの作り方は、まず $\mathcal{N}=1$ のカイラル多重項でゲージ群の表現 Λ に属するものを持ってきます：

$$\mathcal{N}=1\ \text{カイラル}\ (\Lambda):\ (q,\ \chi_\alpha) \tag{23}$$

ちょっと理由があって、補助場は省略することにします。また、カイラル多重項でゲージ群の表現 $\bar{\Lambda}$ に属するものを持ってきます：

$$\mathcal{N}=1\ \text{カイラル}\ (\bar{\Lambda}):\ (\tilde{q},\ \tilde{\chi}_\alpha) \tag{24}$$

これらをまとめると、$\mathcal{N}=2$ のハイパー多重項と呼ばれる多重項になります。ここで、q と χ がカイラル多重項を成すとすると、$\bar{q}$ と $\bar{\chi}$ は反カイラル多重項に属します。同様に、$\tilde{q}$ と $\tilde{\chi}$ がカイラル多重項を成すとすると、$\bar{\tilde{q}}$ と $\bar{\tilde{\chi}}$ は反カイラル多重項に属します。これだけの場がいるのですが、この中で表現 Λ に属するものを抜き出して書いてみると、

$$\begin{pmatrix} q \\ \bar{\tilde{q}} \end{pmatrix},\quad \chi_\alpha,\quad \bar{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}} \tag{25}$$

となります。これらの、R 対称性の下での変換性を書くと、$\begin{pmatrix} q \\ \bar{\tilde{q}} \end{pmatrix}$ は SU(2) の二重項、$\chi_\alpha,\ \bar{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}}$ は一重項で、U(1) の下での変換性は $\begin{pmatrix} q \\ \bar{\tilde{q}} \end{pmatrix}$ が電荷がゼロ、χ_α は電荷 -1、$\bar{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}}$ は電荷 $+1$ となりま

す。このように、$\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ場の理論は、ベクトル多重項とハイパー多重項を使って作ります。

ここで、$\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論のいくつか重要な特徴があります。今言ったように、ベクトル多重項とハイパー多重項から理論をどのように特徴付けることができるかというと、一見いろんな理論が作れる気がするのですが、実は結構強い制限があります。$\mathcal{N}=2$ 理論というのは、ゲージ群 G というものと、ゲージ群の表現 Λ、及びフレーバー対称性 F を与えてやると、その理論の大枠が決まってしまいます。つまり、$G,\ \Lambda,\ F$ は共通なのですが、ポテンシャルをいじって別の理論を作る、などのことができないような、対称性の高い状況になっています。このときのフレーバー対称性というのは何かと言いますと、例えば、ゲージ群を $\mathrm{SU}(N)$ として、Λ を $\mathrm{SU}(N)$ の基本表現 (N 次元表現)$\times N_F$ 個のハイパー多重項を入れたようなもののような $\mathcal{N}=2$ 理論を考えると、このような理論の中のハイパー多重項にはゲージ群の作用と直交する方向から、$\mathrm{U}(N_F)$ という回転を施す対称性があります。フレーバー対称性は、このときの $\mathrm{U}(N_F)$ になります。

$\mathcal{N}=2$ 理論の大まかな特徴づけというのはこれまでのように出来て、今度は、どのような結合定数があるのかと言いますと、まずゲージ結合定数 g があります。また、シータ角 θ というのがあります。そして、物質場 (ハイパー多重項) が入っているような理論にはフレーバー対称性がありますが、そのフレーバー対称性 F の元を選ぶと、ハイパー多重項に質量を入れることが出来ます。今、素早く言ったのですが、質量パラメーターというのはフレーバー対称性の Lie 代数の元です。あと、その他に Fayet-Iliopoulos 結合定数というのがあるのですが、この短い時間で説明するのは難しいので、こういうものもあるということにしたいと思います。

このように、一般的な 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ理論を作っていくことができます。では、その特別な例として、$\mathcal{N}=2$ の超対称 Yang-Mills 理論 (SYM) というものをこれから考えようと思います。どのような理論かと言いますと、ベクトル多重項とハイパー多重項の両方を入れるとちょっと面倒なので、ベクトル多重項だけの理論を考えます。

1.3 $\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論 (SYM)

任意のゲージ群で理論を定義することができ、具体的にゲージ群を $\mathrm{SU}(n)$ に選ぶとします。そうすると場はベクトル場、スカラー場、…、がいますが、それらは皆 $n\times n$ の行列だと思ってください：

$$G=\mathrm{SU}(n),\qquad \text{場}\left(A_m,\Phi,\bar{\Phi},\cdots\right)$$
$$n\times n\ \text{エルミート・トレースレス行列}$$

これらの場が登場するラグランジアンを書こうとすると以下のような形になります：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}_{n\times n}\left[F_{mn}F^{mn}+\spadesuit D_m\Phi D^m\bar{\Phi}+\clubsuit\left[\Phi,\bar{\Phi}\right]^2\right]-\frac{i\theta}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\left[F_{mn}\tilde{F}^{mn}\right] \tag{26}$$

$$D_m\ =\partial_m\Phi-i\left[A_m,\Phi\right] \tag{27}$$

$$F_{mn}=\partial_m A_n-\partial_n A_m-i\left[A_m,A_n\right] \tag{28}$$

$\mathrm{Tr}_{n\times n}$ は $n\times n$ の行列の積についてとったゲージ不変なトレースです。フェルミオンなどは省略していますが、最初のいくつかの項がこんな形になります。係数を上手に選ぶと $\mathcal{N}=2$ の超対称なラグランジアンになります。Φ というものが随伴表現に属する場なので、共変微分 D は (27) 式のようになります。人によっては第 2 項の係数を $-i$ ではなく別の係数にする人もいますが、僕はここを $-i$ にするのが好きなのでこのように書いています。全体にマイナス符号がかかっているのは、今ミンコフスキー符号のラグランジアンを書いたからなのですが、ユークリッド符号のラグランジアンを調べてみたいと思ったら、Wick 回転というのを行ってこのラグランジアンから移ることができ、移った先の公式を便宜のため書いておきますと、他にも色々な項がありますがざっとこのような形になります：

$$\mathcal{L}_E=\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left[F_{mn}F_{mn}\right]+\frac{i\theta}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\left[F_{mn}\tilde{F}_{mn}\right]+\cdots \tag{29}$$

$$\tilde{F}_{mn}=\frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}F^{kl} \tag{30}$$

$\tilde{F}$ というものは (30) 式のように定義されます。ここに現れる θ というパラメーターが θ 角と呼ばれる結合定数の一種です。ユークリッドでも、ミンコフスキーでも、この ϵ というものを $\epsilon^{0123}=1$ とする定義に基づいて僕は書いています。しかし、これまでのように網掛けがいっぱいあるので、あまり詳しいことは省略します。このラグランジアンで定義される理論の色々な性質を、これから 2 日間にかけて調べていきたいというのがこの講義の目標です。

では、ここにラグランジアンを与えられた理論の真空がどのようになっているのかを調べてみましょう。真空が何かと言いますと、このラグランジアンのスカラー場の微分を含まない項をポテンシャルと思って、このポテンシャルを極小にするような Φ の値は何か、というのが真空を求める問題です。そんな真空がどこにあるかと言いますと、ゲージ群が $\mathrm{SU}(n)$ の時は簡単で、この $n\times n$ 行列の Φ と $\bar{\Phi}$ の交換関係が 0 のところが真空となります：

$$\text{真空：}\ \left[\Phi,\bar{\Phi}\right]=0 \tag{31}$$

線形代数で習ったように、交換する行列が 2 つあると同時対角化できるので、Φ というのは $n\times n$ のエルミート行列だったのですが、Φ と $\bar{\Phi}$ は互いに複素共役だったので、エルミートではなく $n\times n$ トレースレス行列となります。そして、今 Φ と $\bar{\Phi}$ を上手くゲージ回転すると、どちらも対角化することができます。$\mathrm{SU}(n)$ というゲージ群を取ったので、対角成分の和は 0 でなければなりません：

$$\Phi=\mathrm{diag}\left(a_1,\cdots,a_n\right),\qquad \sum a_i=0 \tag{32}$$

このように真空がどこかと調べてみると、実は真空は一個ではなくてたくさんあると分かります。どうしてたくさんの真空があるかと言いますと、複素パラメーター a_i でラベルされるだけの真空があるということです。真空は連続的にたくさんあり、真空のモジュライ空間を成しています。モジュライ空間の次元は複素で数えて $(n-1)$ 次元となります。標準模型にもゲージ群の非自明な表現に属するスカラー場が出てきますが、縮退した無数の真空が出てくるというのは、拡大超対称な理論にある一般的な性質の 1 つです。

真空を今調べましたが、ベクトル多重項だけの理論なので簡単に答えが求まりました。しかし、ベクトル多重項とハイパー多重項が両方ある理論を考えると、真空の解析がもっと厄介になります。なぜかと言いますと、ベクトル多重項の中にもハイパー多重項の中にもスカラー場があって、そのベクトル多重項のスカラー場がノンゼロになるか、或いはハイパー多重項のスカラー場がノンゼロになるか、という 2 つの選択が出てくるからです。もうすでに時間が押しているので、ハイパー多重項の話はもうしないことにします。Φ というのが (32) 式のような期待値を持つような真空を選ぶとすると、この Φ の真空期待値によって元々あった $\mathrm{SU}(n)$ というゲージ理論が破れます。破れるパターンは $\mathrm{SU}(n)$ から $\mathrm{U}(1)$ の g 乗あって、この g というのは $n-1$ と同じです：

$$\langle\Phi\rangle \text{ によってゲージ群が破れる：} \ \mathrm{SU}(n) \ \rightarrow \ \mathrm{U}(1)^{g(=n-1)}$$

このようにゲージ群が破れます。$\mathrm{SU}(n)$ の要素の中での Φ を不変に保ち、Φ と交換するような $\mathrm{SU}(n)$ の元というものが何かと考えてみると、この $\mathrm{U}(1)$ の $n-1$ 乗に属するものしかありません。ベクトル多重項の中のスカラー場が真空期待値を持つ真空を Coulomb 相真空と呼びますが、今日と明日の話は、Coulomb 相真空の上での $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の、低エネルギーでの振る舞いに関する話になります。

1.4 Seiberg-Witten 理論

次の話題に移って、Seiberg-Witten 理論というものを紹介したいと思います。その上で、まずどういうことを問題にしたのかを説明し、その次に、色々手順を踏んだ後にどのような解を、どのように求めるのかという話をしたいと思います。今述べたように、Φ の (32) 式なる期待値でラベルされる Coulomb 相真空の上では、ゲージ群が $\mathrm{SU}(n)$ から $\mathrm{U}(1)$ の g 乗に破れています。それに伴って、低エネルギーで軽いまま残る場は $\mathrm{U}(1)^g$ のベクトル多重項のみとなります。ゲージ群が破れて $\mathrm{U}(1)^g$ のみが残るというのは、これに対応するベクトル場としてゼロ質量の場が残るということです。超対称性があるとその超対称パートナーも全てゼロ質量に戻っているはずであり、従って低エネルギーでは $\mathrm{U}(1)^g$ のベクトル多重項が残るというわけです。そして、Seiberg-Witten 理論が問うた問題というのは、低エネルギーで残るこれらの軽い粒子の有効理論を書き下しなさいという問題です。エネルギーが高いときは、SUSY のない QCD でも同様ですが、まずラグランジアンを書き、そのラグランジアンに基づいて摂動的な解析をする、ということが役立つわけです。しかしながら、低エネルギーに行くと、我々が専ら興味のあるゲージ理論というのは、漸近自由なゲージ理論が多いので、今度は結合定数が強くなり、ラグランジアンから出発してもあまり意味のある結果を出すのは難しくなります。どのような SUSY があるかないかに関わらず、面白いゲージ理論の振る舞いというのは大体そういうものです。これからしたい話には超対称性があるので、ものすごく鮮やかに解けるわけですが、何をやりたいかというと、微視的なラグランジアンから出発してエネルギーをどんどん下げていった時に、有効記述がどう変わるかということを問うので、精神は SUSY のない QCD を解くことと全く同じものになります。今、低エネルギーに行くほど結合定数が強くなるという話をしましたが、その話をもう少し詳しくしたいと思います。

1.5 走る結合定数

今日の午前の講義は標準模型の講義だったので、恐らく (≫) のようなグラフを見たと思います。この話と同じ話です。古典的にラグランジアンを書くと結合定数というのは定数なのですが、量子効果を入れるとその結合定数というのは興味のある物理のエネルギースケールに応じて変わり、それを走る結合定数 (running coupling) と言います。その様子は 1 ループの精度で満足することにすると、次のような β 関数の公式で表されます：

$$\beta(\mu) \equiv \mu \frac{d}{d\mu}\left(\frac{8\pi^2}{g^2(\mu)}\right) = \frac{11}{3}\underbrace{C(\mathrm{adj})}_{\text{ゲージ場、ゴースト}} - \frac{2}{3}\overbrace{C(\Lambda_\mathrm{f})}^{\text{Weyl フェルミオン}} - \frac{1}{3}\underbrace{C(\Lambda_\mathrm{b})}_{\text{スカラー}} \tag{33}$$

ゲージ結合定数を g と書きましたが、g のランニングではなく $8\pi^2/g^2$ のような組み合わせを考えて、これのエネルギースケールの振る舞いを考えると公式がすっきりします。この結合定数のエネルギー依存性というのは、超対称性を仮定しない場合にはベクトル場、或いはゲージ固定をした場合にはゴーストなどの寄与もあります。加えて、フェルミオンとスカラーの寄与に分けて書くと、有名な 11/3 というのが出てきて、後で説明しますが $C(\mathrm{adj})$ という係数、そして $C(\Lambda_\mathrm{f})$ や $C(\Lambda_\mathrm{b})$ というのが出てきます。右辺は 3 つの項から成り、最初の項がゲージ場とゴーストからの寄与で、今ループの中を走る粒子がゲージ場とゴーストです。第 2 項はループの中を走る Weyl フェルミオン、そして第 3 項がスカラーとなります。ベクトル場とスカラー、フェルミオンからの寄与に分けて書くと、β 関数への寄与はこのような形になります。$C(\mathrm{Rep.})$ という係数の定義ですが、カッコの中身はゲージ群の表現になっています。今日と明日ではゲージ群は $\mathrm{SU}(n)$ の場合しか考えないので $\mathrm{SU}(n)$ に限った書き方をすると、C の定義というのは Λ という表現で

$$\mathrm{Tr}_\Lambda(T^a T^b) = 2C(\Lambda)\,\mathrm{Tr}_{n\times n}(T^a T^b) \tag{34}$$

と与えられます。ゲージ群が $\mathrm{SU}(n)$ の場合は

$$\begin{aligned} C(\square) = C(\overline{\square}) =& \frac{1}{2} \\ C(\mathrm{adj}) =& n \end{aligned}$$

となります。$\mathcal{N}=1$ $\mathrm{SU}(n)$ SYM は $C(\mathrm{adj}) = n$ でゲージーノが 1 個いるので

$$\beta(\mu) = \frac{11}{3}\times n - \frac{2}{3}\times n - \frac{1}{3}\times 0 = 3n \tag{35}$$

$\mathcal{N}=2$ の時は、ゲージーノが 2 個、複素スカラー場が 1 個いるので

$$\beta(\mu) = \frac{11}{3}\times n - \frac{2}{3}\times 2n - \frac{1}{3}\times n = 2n \tag{36}$$

と表されます。SYM 理論については β 関数が正で出てきましたから、低エネルギーに行くほど $8\pi^2/g^2$ が小さくなり、結合が強くなります。即ち漸近自由ということです。

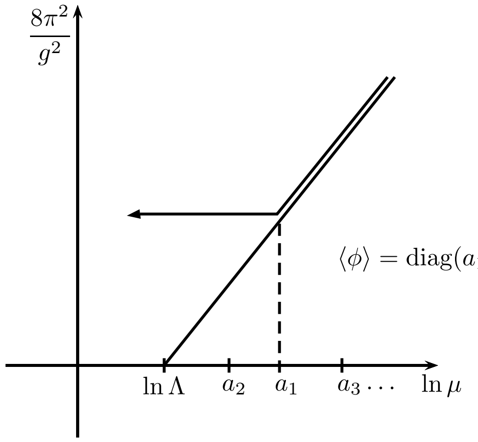


図 1: μ を小さくしていくと結合定数の逆数は小さくなっていき、$\mu = \Lambda$ でゼロになります。Coulomb 相の真空期待値を $\langle\phi\rangle = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ と一般的な $a_i, i = 1, \cdots, n$ を用いて表すと、a_i はエネルギースケールを持った量なので、興味のあるエネルギースケール μ が a_1 よりも十分大きい場合はゲージ対称性が破られていないので、(37) 式に従って変化します。しかし、$\mu < a_1$ の時はゲージ対称性が破れて重くなって物理がなってしまい、結合定数はもう変化しない（例えば、$\mathrm{SU}(n) \to \mathrm{U}(1)^{n-1}$）。従って、結合定数は $\mu > a_1$ では (37) 式に従って変化し、$\mu < a_1$ では一定値をとる。

$\mathcal{N} = 2$ の場合にくりこみ群方程式を解くと、結合定数 g^2 というのはエネルギーによる量なので μ への依存性というのは以下のようになります：

$$\text{解：} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2(\mu)}\right) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 \tag{37}$$

今微分方程式を解いた解が (37) 式です。Λ は積分定数です。Λ の物理的な意味は何かと言うと、Yang-Mills 結合定数がエネルギースケールに応じて値を変え、それによって低エネルギーに行くほど大きくなり、このエネルギースケールが $\mu = \Lambda$ になる時に結合定数が無限大になるという意味です：

$$g(\mu = \Lambda) = \infty \tag{38}$$

この Λ を力学的スケール、或いは QCD スケールと呼びます。

我々は $\mathcal{N} = 2$ の超対称性を持った SYM 理論から出発して Coulomb 相の真空を 1 つ選びました。選んだ点の上の結合定数の繰り込み群依存性を調べると図 1 のようになります。この演習は Seiberg-Witten 理論がいかに難しい問題を扱っているか、というのを理解するのに役立つのでやってみましょう。Seiberg-Witten 理論がどのように難しいかというと、もし a_i が Λ より非常に大きいところにあるとすると、図 1 からわかるように低エネルギーでの結合定数の値はすごく小さくなります。従って $a_i \gg \Lambda$ 場合は摂動論が非常にいいということです。しかし a_i が Λ に近づいていくと、図 1 からわかるように低エネルギーでの結合定数が非常に大きくなるので、a_i を力学

的スケールに比べてどのくらいの値に設定するかによって摂動論が有効かどうかが変わります。今の話は超対称性のある理論に関わらず、結合定数はエネルギースケールに応じて走るので、結合定数は次元のない量でしたが次元を持つ量が出てきます。

超対称性のある理論を考えると Λ という量は自然と複素数になることを説明したいと思います。Λ も複素数になるため、結合定数も自然に複素数の結合定数を考えるのが都合がいいです。

1.5.1　正則な Yang-Mills 結合定数

$\mathcal{N} \geq 1$ の超対称性を持つ超対称 Yang-Mills 理論のラグランジアンを次のように少し省略して書くと（便宜上ユークリッド符号を使う）

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2g^2}F_{mn}^2 + \frac{i\theta}{16\pi^2}F\cdot\widetilde{F} + \cdots\right] \tag{39}$$

のようになります。このラグランジアンは

$$F^{\pm} = \frac{1}{2}\left(F \pm \widetilde{F}\right) \tag{40}$$

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{41}$$

を定義すると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi^2}\Big[-2\pi i\tau \underbrace{\mathrm{Tr}(F^-)^2}_{\text{実はカイラル多重項のメンバー}} + 2\pi i\bar{\tau}\,\mathrm{Tr}(F^+)^2 + \cdots\Big] \tag{42}$$

と書き換えられます。ここで F^+ は自己双対 (SD) 成分、F^- は反自己双対 (ASD) 成分と呼ばれます。書き換えられたラグランジアン (42) 式の第 1 項はカイラル多重項だけから書けていて、[*4]そうすると τ をカイラル多重項のスカラーの真空期待値と思っても SUSY と矛盾しません。カイラル多重項のスカラー場は自然に複素数に値をとるので、この議論から SYM の時には τ は自然に複素数になります。この議論がとりわけ強力なのは、もし τ というものが量子補正を受けて変更を受けたとしても、この正則性 (holomorphy) という議論から τ というのは元の τ の正則関数でなければなりません。然るに、ゲージ理論の摂動論を考えると摂動論的な補正というのは g^2 の正冪で現れます。g^2 の正冪というのは正則でもなんでもないので、τ というのが量子補正を受けて変更を受けたとしても正則性を保ちなさい、ということにものすごく抵触します。従って正則性の議論により、τ は量子補正を受けるのですが、その補正は 1 ループまでで正確であるということが知られています。

次に結合定数が複素数になるということの、もう 1 つ自然な根拠を書きたいと思います。

1.5.2　インスタントンと力学的スケール Λ

インスタントンについて皆さんは勉強したことがあるでしょうか。現象論の人もいるということなので、現象論でもインスタントン効果が重要になるかどうかよくわからないですが、まずインス

[*4] ゲージーノ λ_α を初項とする多重項はカイラル多重項になり、F^- はその多重項に属する。

タントンとは何かという話をしたいと思います。

■インスタントンとは?

4 次元の非可換ゲージ場の配位の中にはトポロジカルに非自明な量子数を持ったような配位があります。そのトポロジーを測る積分量 (位相不変量) があって、それをインスタントン数と呼びます。その定義は

$$k \equiv -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left(F_{mn}\widetilde{F}^{mn}\right) \tag{43}$$

です。面白いことにインスタントン数というのは整数になります。インスタントン数がノンゼロの整数を持つようなゲージ場の配位というのは、ゲージ場ゼロの配位から連続変形では絶対通っていくことができません。インスタントン数が k と与えられたとして、その中でユークリッド符号の Yang-Mills 作用を最小にするような配位がどんな配位かということを考えてみたいと思います。

インスタントン数 k の配位のうち、ユークリッド符号の Yang-Mills 作用を最小にするものは何かというのを考えてみると、実はユークリッド作用は以下のように書き換えられます：

$$S_{\mathrm{E}} = \int d^4x\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2g^2}(F^+_{mn})^2\right] - 2\pi i\tau k \tag{44}$$

ユークリッド符号の作用積分はこのように書けます。インスタントン数 k を固定すると第 2 項というのは変わりようがありません。ユークリッド作用を最小にするような配位というのは何かと言うのを考えると、第 1 項を最小にするような配位ということになります。そうすると第 1 項はあらわに正定値になっていますから、S_{E} を最小にするようなゲージ場の配位というのは、F の自己双対成分がゼロでないといけないということがわかります：

$$S_{\mathrm{E}}\text{を最小化} \ \ \rightarrow\ \ F^+_{mn} = 0 \tag{45}$$

従って作用を最小にする配位は

$$\text{ゲージ場は反自己双対 (ASD)} \tag{46}$$

となります。また (45) 式の解をインスタントンといいます。

k-インスタントンセクターからの経路積分への寄与は

$$\int \mathcal{D}(\cdots)\, e^{-S_{\mathrm{E}}} \sim \underbrace{e^{2\pi i\tau k}}_{\sim\Lambda^{2nk}}(\cdots)\,. \tag{47}$$

経路積分というのはそもそもこのような形でしたから、インスタントン配位において S_{E} というのは最小になっていて、その最小値は (45) 式から与えられます。従って k-インスタントンセクターからの寄与は $e^{2\pi ik}$ に比例します。これを Λ^{2nk} とします。先程書いた式は

$$(37)\text{ 式：}\ \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2(\mu)}\right) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{2n}$$

でした。ここで見て分かるように、超対称な模型では Λ は複素数と思うのが自然です。今話したのは Λ というのを複素数だと思うのが自然であるということです。

1.5.3 Λ の $\mathrm{U}(1)_R$ 電荷

次に話したいことは、実は Λ というのは R 電荷を持っているということです。Λ って定数ではないかということなんですけど、Λ を U(1) 電荷を持った量と思うのが実は自然です。なんでかというのを説明するために、ゲージーノに関する経路積分を考えます。$\mathcal{N}=2$ SYM のゲージーノ $(\lambda,\bar{\lambda},\psi,\bar{\psi})$ の経路積分です。作用の中でゲージーノを含む項がいっぱいあると思いますけど、運動項を書いてみると

$$\int \mathcal{D}[\lambda\bar{\lambda}\psi\bar{\psi}]\ \exp\left[\int i\bar{\lambda}\,\bar{\sigma}^m \underbrace{D_m}_{\text{ゲージ場が入っている}}\lambda + i\bar{\psi}\,\bar{\sigma}^m D_m\psi\right] \tag{48}$$

となります。D_m の中に入っているゲージ場 A_m がインスタントン数 $k>0$ の配位の時、どんな面白いことが言えるかというと、指数定理というものがあって、λ のゼロモードと $\bar{\lambda}$ のゼロモードの個数の差を比べるとゲージ場の配位の詳細によらずインスタントン数だけによることが分かります：

$$\begin{aligned}\#(\overbrace{\lambda\text{のゼロモード}}^{\bar{\sigma}^m D_m\lambda=0\ \text{の解}}) - \#(\overbrace{\bar{\lambda}\text{のゼロモード}}^{\sigma^m D_m\bar{\lambda}=0\ \text{の解}}) &= 2k\,\overbrace{C(\mathrm{adj})}^{=n} \\ &= 2kn\end{aligned} \tag{49}$$

ゼロモードが何かという話ですが、λ のゼロモードというのは $\bar{\sigma}^m D_m\lambda=0$ の解、$\bar{\lambda}$ のゼロモードというのは $\sigma^m D_m\bar{\lambda}=0$ の解になります。A_m が一般的なインスタントン数 k の配位の時は指数定理が成り立っていて、もし A_m が反自己双対な特別な時は $\#(\lambda\text{のゼロモード})=2nk$ 個 で $\#(\bar{\lambda}\text{のゼロモード})=0$ 個 になります。

このようなゼロモードのミスマッチが起こっているとどんな面白いことが言えるのかというと、例えばインスタントン数 k の時、ゲージーノのノンゼロ相関関数は個数に今ミスマッチがあるので、ノンゼロの相関関数を作ろうと思うと、今の場合、背景のゲージ場がインスタントン数 k を持っているという話ですが、左巻きのスピノルを右巻きのスピノルよりも相当多く挿入した相関関数を考えないとノンゼロになりません。そして、そのノンゼロの値はこれを経路積分を使って計算したと思うと Λ^{2nk} に比例するということが言えます：

$$\langle\lambda(x_1)\cdots\lambda(x_{2nk})\psi(y_1)\cdots\psi(y_{2nk})\rangle \sim \Lambda^{2nk}\,. \tag{50}$$

最初の方の議論で左巻きのゲージーノに $\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 1 を与えたことを思い出すと、左辺は全体として $\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 $4nk$ を持っていて、従って右辺も R 電荷を持っていなければならないという話になり、Λ は $\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 $+2$ を持つことになります。

Λ というのは質量次元 1、$\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 2 を持っています。Coulomb 相の真空期待値 a_i も同じ性質を持ちます。Λ というのは量子論を考えて行って初めてあらわれたパラメーターなのですが、Λ というのは a_i と同じような資格を持ったパラメーターであることに注意してください。

1.6 Seiberg-Witten 理論における解の構成

SW 理論の答えを説明する段階に入っていきます。どうやって答えにたどり着くのかというと、$\mathcal{N}=2$ の超対称性だけを使って、軽い可換 (Abelian) $\mathrm{U}(1)^{g=n-1}$ ベクトル多重項の低エネルギー有効ラグランジアンの一般形を書いてみます。$\mathrm{U}(1)^g$ のベクトル多重項というものは

$$A_m^i \leftrightarrow \lambda^i \tag{51}$$
$$a^i \leftrightarrow \psi^i \tag{52}$$
$$i = 1, \cdots, g \tag{53}$$

のように書かれます。A_m^i はゲージ場であり、$\mathcal{N}=1$ SUSY で関係付くゲージーノ λ^i がいます。そして、中性スカラー場を a_i と書き、その $\mathcal{N}=1$ SUSY の下での超対称パートナーを ψ^i と書きます。また、i は 1 から g まで走ります。これだけの場がいる理論のラグランジアンの一般形を書いてみます。ユークリッド符号でのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{16\pi^2}\left[-2\pi i\tau_{ij}F_{mn}^{-(i)}F_{mn}^{-(j)} + 2\pi i\tau_{ij}F_{mn}^{+(i)}F_{mn}^{+(j)} + g_{i\bar{j}}\partial_m a^i \partial_m \bar{a}^j + \cdots\right] \tag{54}$$

と書かれ、前から 2 項がゲージ場の運動項となります。g 個の電磁場の運動項がこれです。後ろの項は g 個の複素スカラー場の運動項となっています。他にもフェルミオンがいますが、省略することにして、一般形はこのような形になります。$\mathcal{N}=1$ の SUSY からどのような制約があるのかというと、先ほどすごく早口で説明したのですが、τ_{ij} が正則な量であるということです。τ_{ij} はスカラー場 a^i に依ってもいいですが、a^i はカイラル多重項のスカラー場、$\bar{a}^i$ が反カイラル多重項のスカラー場であるので、τ_{ij} というのは a^i の正則関数でなければなりません：

$$\tau_{ij}(a), \quad \bar{\tau}_{ij}(\bar{a^i}) \tag{55}$$

スカラー場の運動項に現れる計量がどう書けるのかと言うと、今日は理由について説明することができませんが、Wess-Bagger などで勉強したことがある人は知っていて、$\mathcal{N}=1$ 超対称な非線形シグマ模型の計量というものは Kähler 計量となります：

$$g_{i\bar{j}}(a,\bar{a}): \ \text{Kähler} \tag{56}$$

Kähler が何を意味するのかというと、この計量はある Kähler ポテンシャルと呼ばれる関数から導かれるということですが、

$$g_{i\bar{j}} = \partial_{a_i}\partial_{\bar{a}_j}K \tag{57}$$

となる K が存在します。これが Kähler 多様体の定義の 1 つです。$\mathcal{N}=1$ の SUSY からこのようなことが言えました。では、$\mathcal{N}=2$ の SUSY を課すとどんなことが言えるかというと、もっと強いことが言えます。何が言えるかというと、(54) 式に書いてないフェルミオンの運動項を調べてみ

ると、今フェルミオンは λ_i と ψ_i の運動項が等しくなければならないという話です。λ の運動項に現れる計量は

$$\lambda\text{の計量} \ \rightarrow \ \mathrm{Im}(\tau_{ij}) \tag{58}$$

のようになり、ψ の計量はというと、ψ は a の超対称パートナーであるので

$$\psi_i\text{の計量} \ \rightarrow \ g_{i\bar{j}} \tag{59}$$

となります。従って $\mathcal{N}=2$ の SUSY の要請というのは、τ_{ij} の虚数部分と Kähler 計量を関係付けます：

$$\mathrm{Im}\,\tau_{ij} \propto g_{i\bar{j}} \tag{60}$$

左辺は正則な量と反正則な量の差なのですごく制約があります。一方で右辺もポテンシャル関数の 2 階微分であるという制約があります。ダブルで制約があるのですごく強いことが言えるわけです。どのような強いことが言えるのかをまとめると以下のようになります：

- プレポテンシャルと呼ばれる正則関数 $\mathcal{F}(a)$ が存在する。正則関数といってもモジュライ空間の全体で真っ当な関数として定義されているかは分からない。少なくとも局所的には定義されていて

$$\tau_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j}, \qquad K \propto \left(a_i \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{a}_j} - \bar{a}_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \right) \tag{61}$$

となる。

Kähler ポテンシャルも複素結合定数 τ も、このようにして 1 つの正則関数を用いて書けてしまいます。この議論を見ると、$\mathcal{N}=2$ SUSY ゲージ理論の低エネルギーの物理は、このプレポテンシャルと呼ばれる 1 個の正則関数の中に全てエンコードされているということになります。それ故、Seiberg-Witten 理論はこのプレポテンシャルを決めようということになります。言い忘れていましたが、τ の虚数部分が計量に対応するので、$\mathrm{Im}\,\tau_{ij}$ は正定値ということになります。$\mathcal{N}=2$ SUSY Yang-Mills 理論の Coulomb 相のモジュライ空間というのは a という複素数でパラメトライズされのですが、それは特別な空間を成していて、プレポテンシャルというものですべて決まります。そのような構造を持つ多様体を special Kähler 多様体と呼ぶこともあります。このプレポテンシャルがどのような関数になるのかというのを、$\mathcal{N}=2$SU(2) SYM の場合に調べてみましょう。とりあえず、インスタントン補正のことは難しいので、摂動補正に注目して調べましょう。

1.6.1 例: $\mathcal{N}=2$ SU(2) SYM の場合

Coulomb 相の真空を以下のように選びます：

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \tag{62}$$

SU(2) の Yang-Mills 結合定数のランニングを書きます：

$$2\pi i\tau(a) = -4\log\frac{a}{\Lambda} \tag{63}$$

これは 1 ループの β 関数を使って導いた近似式であるので、インスタントン効果は入っていません。これから、低エネルギーで残る U(1) の結合定数を計算しなければなりません。U(1) のゲージ場は次のように埋め込まれています：

$$A_m^{\mathrm{SU}(2)} = \begin{pmatrix} A_m^{\mathrm{U}(1)} & X \\ Y & -A_m^{\mathrm{U}(1)} \end{pmatrix} \tag{64}$$

Coulomb 相を (62) 式のように選んでおくと、非対角成分の X, Y は非常に重くなっているので無視すると、対角成分 $A_m^{\mathrm{U}(1)}$ がゼロ質量の U(1) のゲージ場になっています。この U(1) ゲージ場の結合定数は (64) 式の τ を用いて

$$\tau^{\mathrm{U}(1)} = 2\tau \tag{65}$$

と書けるので、従って

$$2\pi i\tau = -8\log\frac{a}{\Lambda} \tag{66}$$

となります。いずれにせよゲージ結合定数は log で与えられています。(55) 式より、$\tau^{U(1)}$ の虚部が正定値であるかどうかが重要となります。$\mathrm{Im}\,\tau^{\mathrm{U}(1)}$ は

$$\mathrm{Im}\tau^{\mathrm{U}(1)} > 0, \quad |a| > |\Lambda| \tag{67}$$

$$\mathrm{Im}\tau^{\mathrm{U}(1)} < 0, \quad |a| < |\Lambda| \tag{68}$$

となります。$|a|$ のほうが $|\Lambda|$ より非常に大きければ摂動論の式は大体あっています。$|a|$ が $|\Lambda|$ より小さくなってしまうと、(63) 式は意味を成さなくなっていまいます。何故かというと、ゲージ場の運動項の係数が負になってしまうためです。それ故、摂動論だけの結果は信頼できなくなり、インスタントンの効果を入れなければならなくなります。どのようにしてインスタントンの効果を入れるかということなのですが、ここで Seiberg と Witten はすごいアイディアを出してきて、それは Riemann 面を使います。

1.7 τ_{ij} と Riemann 面

ここからガラッと変わって、数学の話に移ります。

$$\tau_{ij} : g \times g \qquad a\text{ の正則関数行列} \tag{69}$$

この τ_{ij} はジーナス (種数) g の Riemann 面の「周期行列」から作ります。ジーナス 3 の Riemann 面は図 2 のようになります。Riemann 面と言ったときに、単に 2 次元の滑らかな面を指しているのでなく、その上に複素座標を割り振ることができます。これは複素次元 1 の複素多様体であると

図 2: ジーナス 3 の Riemann 面の図。赤い線で表された 1 サイクルが α サイクルで青が β サイクルであり、それぞれ 3 つずつあることがわかる。

いうことです。複素座標を z として書くことにします。この Riemann 面の上には 1 サイクルが g の 2 倍存在します。図 2 のようにして α サイクル、β サイクルと定めると

$$\alpha_i \cup \beta_j = -\beta_j \cup \alpha = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, g \tag{70}$$

ジーナス g の Riemann 面には $2g$ 個の 1 サイクルが存在しますが、そのホモロジー 1 サイクルの基底の双対である $2g$ 個の閉 1 形式が存在し、そのうちの g 個を正則 1 形式、その他を反正則 1 形式とします：

$$g \text{ 個の正則 1 形式：} \ \lambda_i = \lambda_i(z) dz^i \tag{71}$$

$$g \text{ 個の反正則 1 形式：} \ \bar{\lambda}_i \tag{72}$$

このように閉じた微分 1 形式があります。Riemann 面 Σ の上で閉じた微分 1 形式の満たす Riemann 双線型恒等式というものがあります：

$$\int_\Sigma \lambda \wedge \omega = \sum_{i=1}^{g} \left\{ \int_{\alpha_i} \lambda \int_{\beta_i} \omega - \int_{\beta_i} \lambda \int_{\alpha_i} \omega \right\} \tag{73}$$

興味のある人は頑張って導出してみてください。「周期行列」を定義するために、g 個の正則微分 1 形式 λ^i を

$$\int_\alpha \lambda^j = \delta^i_j \tag{74}$$

のように取ります。これは基底を上手く取ればいつでも取れます。このとき τ_{ij} を

$$\tau_{ij} = \int_{\beta_i} \lambda^j \tag{75}$$

と定めます。今 Riemann 面を使って τ_{ij} を作りました。これが超対称 Yang-Mills 理論の結合定数行列とみなせるかどうか調べてみましょう。λ_i と λ_j のウェッジ積の積分を考えます。これは線要

素 dz のウェッジ積なので自明にゼロなのですが、Riemann 双線型恒等式を使うことによって

$$\int_\Sigma \lambda^i \wedge \lambda^j = 0 \propto \tau_{ij} - \tau_{ji} \tag{76}$$

となります。これにより、τ_{ij} が対称行列であることになります。次に

$$\int_\Sigma \lambda_i \wedge \bar{\lambda}^j = \text{正定値行列} = \cdots = \mathrm{Im}\tau_{ij} > 0 \tag{77}$$

ということが分かります。そこで Seiberg と Witten は、Riemann 面の周期行列がゲージ理論の結合定数行列とみなせる性質を有しているので

$$\text{SW: } \boxed{\text{形が } (a_i, \Lambda) \text{ に依存するような Riemann 面の族を考える} \to \tau_{ij}(a_i, \lambda) \text{ 正則関数}}$$

と考えました。このような τ_{ij} を (a,Λ) の正則関数として決めることができれば、$\tau_{ij} = \partial_{a_i}\partial_{a_j}\mathcal{F}$ を以って $\mathcal{F}$ を定めることができます。ゲージ理論のダイナミクスを決めようとしたときにプレポテンシャルという量が出てきましたが、それを決めるためには Riemann 面の族を決めればよいという問題になりました。物理の問題から幾何の問題へと問題を変形させたわけです。さらに、周期行列がプレポテンシャルの 2 階微分であるという性質を使うと、もう 1 つ面白いことがいえます。Riemann 面 Σ 上に Seiberg-Witten 1 形式 λ_{SW} が存在して

$$a_i = \int_{\alpha_i} \lambda_{\mathrm{SW}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} = \int_{\beta_i} \lambda_{\mathrm{SW}} \tag{78}$$

が成立します。今日は時間の都合上こっそり省略してしまったのですが、a_i や $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}$ は荷電 BPS 粒子の質量の下限を与えます。BPS 粒子とは超対称性を半分保つ粒子のことです：

$$a_i,\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \cdots \text{荷電 BPS 粒子の質量の下限を与える重要な量} \tag{79}$$

Pure SU(2) SYM 理論の解、つまり Riemann 面 (Seiberg-Wittern(SW) 曲線) を Seiberg と Witten が求めたものが最初の論文ですが、これをどうやって導いたかというのを説明すると長くなるので、答えをまず書きます。SU(2) の SYM の SW 曲線は

$$\Lambda^2 \left(z + \frac{1}{z} \right) = x^2 - u, \quad u = a^2 \tag{80}$$

となります。また、SW1 形式は

$$\lambda_{\mathrm{SW}} = \frac{x}{2\pi i} \frac{dz}{z} \tag{81}$$

であり、この曲線はジーナス 1 の Riemann 面を与えます。この (80) 式から x について解くことができます：

$$x = \pm \sqrt{\Lambda^2 \left(z + \frac{1}{z} \right) + u} \tag{82}$$

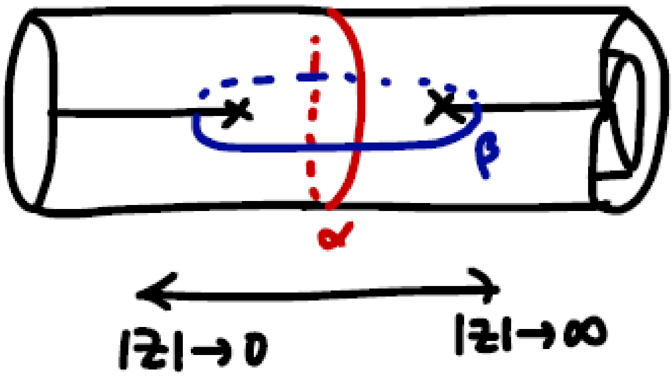


図 3: $\mathcal{N}=2$SU(2)SYM の Seiberg-Witten 曲線の図。図中の $\times$ が $x=0$ となる特異点を表している。赤い線で表された 1 サイクルが α サイクルで青が β サイクルである。

z の値について 2 通りの x の値が定まります。z がどこに値をとるのかというと、無限遠点と原点は具合が悪いので、z は複素平面から無限遠点と原点を除いたもの、つまり、円柱となります (図 3)。各々の z の値について x の値が 2 通り有ることから、2 枚のシートが円柱を覆っていることになります。2 枚のシートが平行に覆っているのでなく、2 枚のシートの上の特異点から切れ込みを入れて、この切り込みに沿って 1 枚目のシートと 2 枚目のシートを入れ替えるということになってます。この操作のおかげでジーナス 1 の Riemann 面になっています。ジーナス 1 の Riemann 面なので α サイクルと β サイクルが 1 つずつあります。a と $\partial\mathcal{F}/\partial a$ はこれらにより、λ_{SW} を用いて

$$a = \int_\alpha \lambda_{\mathrm{SW}} \tag{83}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial a} = \int_\beta \lambda_{\mathrm{SW}} \tag{84}$$

と与えられます。一般的な表式を書き下すのは難しいのですが、近似的に $|u| \gg |\Lambda^2|$ の場合は

$$a \to \sqrt{u} \tag{85}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial a} \to \frac{4\sqrt{u}}{\pi i}\log\left(\frac{\sqrt{u}}{\Lambda}\right) \tag{86}$$

のようになり、摂動論がよい領域でその近似式を書いたわけですが、$\sqrt{u}=a$ と考えると、先ほど議論していたインスタントン補正を入れない 1 ループの走る結合定数の式とよく似た表式が出てくるわけです。しかしながら、この a と $\partial\mathcal{F}/\partial a$ を Seiberg-Witten 曲線上の積分として表した (83) 式、(84) 式によると、$|u|$ というパラメーターが $|\Lambda|$ よりも小さくなっても問題ない表式となっているわけです。Seiberg-Witten 理論が達成したのはこういうことです。$\mathcal{N}=2$ のゲージ理論を解くのに Riemann 面の幾何という数学を持ち出してきたので、何か人工的であるように感じますが、これからどのような話をするのかというと、一見人工的に持ち出してきたように見

える Seiberg-Witten 曲線が実は超弦理論におけるブレーンの形と思えるということです。この Seiberg-Witten 曲線の意味を超弦理論から与えられるということを話していこうと思います。

2 ブレーンの力学

$\mathcal{N}=2$ のゲージ理論を解くのに、何か数学、即ち、Seiberg-Witten 曲線や Riemann 面の幾何を持ち出したために、何やら人工的であるように感じられます。それでこれからどんな話をしようかと言いますと、一見人工的に持ち出してきたと思われる、この Seiberg-Witten 曲線が実は超弦理論のブレーンの形と思えるということ、即ち、Seiberg-Witten 曲線の意味を弦理論を使って与えるというのをやっていく、そういう話をしたいと思います。

今日は時間もあまりなくなってきたので、弦理論を詳しく調べないでもわかるブレーンの話のようなものをします。

2.1 ブレーンとは

ブレーンとは何でしょうか。ブレーンとは超弦理論の中に現れるソリトン的な物体のことです。超弦理論というと、何でもひもで説明することができるような理論と思っている方もいらっしゃるかもしれないですが、ひも理論を詳しく調べると、ひも以外にも色々な次元をもった板状物体、膜状物体が現われることが分かってきました。1990 年の半ばのことです。それら、高次元の板状物体・膜状物体を総称して、「ブレーン」と言います。特に p ブレーンと言ったら、何か $(p+1)$ 次元、空間 p 次元で時間 1 次元の物体のことです：

$$p \text{ ブレーン} = (p+1) \text{ 次元物体}$$

このような膜状物体が超弦理論には色々あります。

一番有名なのが II 型超弦理論に存在する D ブレーンです。D ブレーンというのが何なのかというと、開弦が終わることのできる板状物体のことを言います：

$$\text{D ブレーン} \cdots \text{開弦の端}$$

D ブレーンにも色々な次元を持ったものがいて、例えば Dp ブレーンと言うと、$(p+1)$ 次元の広がりをもった物体があって、そこに開弦が終われるということです。何枚も D ブレーンを持ってきて、一方の端ともう一方の端を違うブレーンに終わらせることもできます (図 4)。元々 D ブレーンとは II 型と言われる超弦理論の中に存在するものなのですが、II 型超弦理論というのはそもそも閉弦だけで矛盾がなかった理論です。しかし、Polchinski が「それじゃあ開弦を導入してみる」ということを考えました。それで、開弦を導入するときには開弦の端に適当な境界条件をおいて量子化しないといけません。境界条件のおき方は Dirichlet と Neumann の 2 通りの選び方があるのですが、開弦の理論というのは、2 次元の場の理論で

$$X^{\mu}(\sigma,t) \qquad (0 \le \sigma \le \pi,\ t \in \mathbb{R};\ \mu = 0,\cdots,9) \tag{87}$$

のようなスカラー場が 2 次元の面上に存在するという理論です。そして、開弦というときは、短冊みたいな世界面を想像しています (図 5)。

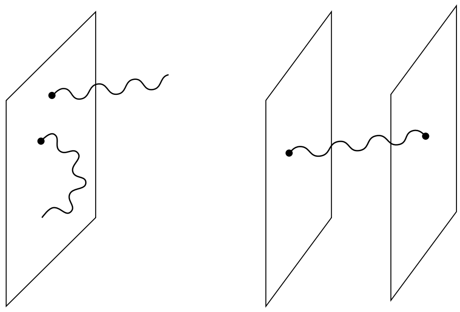


図 4: D ブレーンは開弦の端が終われる板状の物体である。

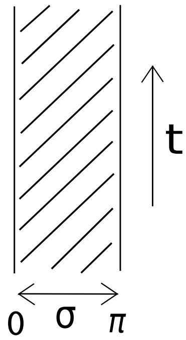


図 5: 開弦の世界面。横方向が σ の方向で、$\sigma = 0$ から $\sigma = \pi$ までで、縦方向が時間の方向を表す。

$\sigma = 0$ と $\sigma = \pi$ で境界条件をおかないといけないのですが、境界条件に 2 通りあって、例えば、$\sigma = 0, \sigma = \pi$ での境界条件：

$$\text{Neumann} : \partial_\sigma X^m = 0, \quad m = 0, \cdots, p$$
$$\text{Dirichlet} : \left. X^I \right|_{\text{bdry}} = a^I, \quad I = p+1, \cdots, 9$$

試しにこのような境界条件をおいたとすると、この弦の運動はどうなっているかというと、何か $(p+1)$ 次元の物体、Dp ブレーンがあって、端がそこに束縛されているような状況になります。この Dp ブレーンというのは $X^{0,\cdots,p}$ までの方向まで伸びています。そして、$X^{I(=p+1,\cdots,9)}$ というのが定数 a^I です。なので、この a^I というのは Dp ブレーンの位置を表すパラメーターと理解することができます。

II 型超弦理論に開弦を導入することによって、D ブレーンというものの存在が明らかになったのですが、このように議論を行うと、D ブレーンは単なる開弦の境界条件のような印象を持たれる方もいると思うのですが、実は D ブレーンもひものように動的な物体と思うべきなのです。それで D ブレーンの力学をどのようにして調べればよいかと言うと、その D ブレーンに付着している開弦を量子化することを考えます。D ブレーンにたくさんの開弦がくっついて運動している様を調べると、それはブレーンの励起を調べているのと一緒である、そういう理屈です。そして開弦を調べると、Dp ブレーンの運動というのも調べられます。Dp ブレーンの力学を調べようとすると開弦

の量子化をすればよく、それをすると $(p+1)$ 次元の最大超対称なゲージ理論が出てきます：

$$\mathrm{D}p\ \text{ブレーン上の開弦量子化} \ \to\ (p+1)\ \text{次元最大 SUSY ゲージ理論}$$

このゲージ理論にはどのような場がいるかというと、$(p+1)$ 次元の理論でゲージ場とスカラー場がいて、スカラー場の数は $9-p$ 個となります：

$$\begin{array}{lll} A_{\mu=0,\cdots,p}(x^\mu), & \phi^{I=p+1,\cdots,9}(x^\mu), & \text{フェルミオン} \\ U(1)\ \text{ゲージ場} & \text{スカラー}\ (9-p)\ \text{個} & \end{array}$$

それで重要なことは、このゲージ場というのはブレーンの上に住んでいるのですが、開弦の端点はこのゲージ場の電荷、電気的な電荷と思えます。それからこのスカラー場というのは、$(9-p)$ 個のスカラー場がいるのですが、そのスカラー場の数というのはこのブレーンに垂直な方向の空間の方向の数となります。ϕ はブレーンの垂直な方向の運動をあらわします。特にこの ϕ というスカラー場の真空期待値は、従ってブレーンの位置をあらわすことになります：

$$\begin{aligned} \phi^I(x^\mu) &:\ \text{D ブレーンの垂直方向の運動をあらわす場} \\ \langle\phi^I\rangle &:\ \text{D ブレーンの位置} \end{aligned}$$

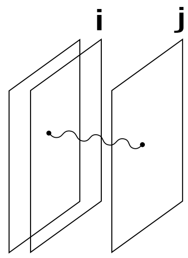


図 6: Chan-Paton 因子

1 枚のブレーンを考えると、何か電磁場があって、実スカラー場が $(9-p)$ 個いる、という話なのですが、ブレーンを何枚も重ねて置きますと、U(1) だったゲージ対称性が拡大して $\mathrm{U}(n)$ という対称性になります。n 枚重ねると、ブレーンの上のゲージ理論は $\mathrm{U}(n)$ のゲージ理論になります。どうしてそうなるかというと、開弦は端が 2 つありますから、各々の端がどのブレーンに終われるかという自由度があり、これを Chan-Paton の自由度と言います (図 6)。i 番目の D ブレーンから始まって、j 番目の D ブレーンで終わるという開弦を考えると、この開弦というのは $\mathrm{U}(n)$ の $n\times n$ 行列の (i,j) 成分と思うことができます：

$$\to\ (n\times n)\ \text{行列の}\ (i,j)\ \text{成分}$$

そのようなわけで、n 枚のブレーンが平行に重なると、ゲージ対称性が $\mathrm{U}(n)$ に拡大することも言えます。

それで試しに、U(n) の最も超対称なゲージ理論のラグランジアンのボソン部分に限って書いてみると、それがどんな感じかと言いますと、何度も同じようなラグランジアンを書いていますが

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \mathrm{Tr} \left[-F_{mn}F^{mn} - \spadesuit D_m \phi^I D^m \phi^I + \clubsuit [\phi^I, \phi^J]^2 + \cdots \right] \tag{88}$$

このような形のラグランジアンになります。それでこのラグランジアンで定義されるゲージ理論の真空はどこにあるかと言いますと、真空を調べる式は $(9-p)$ 個の $n \times n$ 行列のスカラー場が互いに交換しなさい、という式になります：

$$\text{真空：} \ [\phi_I, \phi_J] = 0 \qquad (I, J = p+1, \cdots, 9) \tag{89}$$

そうするとこの ϕ_I というのは全部対角行列になります。それで、その対角成分を $a_I^{(1)}, \cdots, a_I^{(n)}$ と書くと

$$\phi_I = \mathrm{diag}\,(a_I^{(1)}, \cdots, a_I^{(n)}) \tag{90}$$

となります。この真空期待値には幾何学的な意味があり、ブレーンが n 枚あるうちの何番目のブレーンが 10 次元空間のどこにあるか、というのをパラメトライズするパラメーターにちょうどなっています。

このようにして 1990 年代の半ばに D ブレーンというものがまず発見されました。それで D ブレーンというのは超対称なゲージ理論をサポートするような物体なので、ブレーンを使って SUSY ゲージ理論を詳しく非摂動的に調べることが、時にはできることも分かりました。それで、II 型超弦理論には他にもブレーンがあるのですが、その他のブレーンの分類をしようとすると、それは開弦を調べるとかそういう簡単な話ではなくなります。では同類の方法が無いのかと言いますと、そんなこともなくて、色々なブレーンを分類しようと思うと、その方法としては超重力理論を調べるという方法があります。

超重力理論は皆さん勉強したことありますか。超重力理論の、特に高次元の超重力理論の特徴として、10 次元の超重力理論に IIA 型超重力理論というのと、IIB 型超重力理論というのがあるのですが、その中には反対称テンソルゲージ場がいくつかあります。普通ゲージ場と言うとベクトル場なんじゃないかと思う方もいらっしゃるかもしれませんが、10 次元の超重力理論の中にはベクトルの脚をいくつも持っているものがいます：

$$A_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{p+1}}(x) \tag{91}$$

それでその脚について反対称、これは即ち $(p+1)$ 階の反対称テンソルのゲージ場というわけです。だから $(p+1)$ 形式ゲージ場です。それでこのようなゲージ場があると、そのゲージ場の源になるような電荷とか磁荷とかが存在するわけです。それでは $(p+1)$ 形式があったらその電荷は何次元の物体かと言うと、それは簡単に分かります。$(p+1)$ 形式：

$$A_{(p+1)} = \frac{1}{(p+1)!} A_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p+1}} \tag{92}$$

というのがあると、このゲージ場に電気的に結合する物体というのは、電荷はこの $(p+1)$ 形式と以下のような結合を持っています：

$$\text{電荷：} \int_{\text{電荷}} A_{(p+1)} \tag{93}$$

その電荷を持った物体の世界体積の上でこの A は $(p+1)$ 形式ポテンシャルを積分したこのようなものが相互作用の形になります。従って、$(p+1)$ 形式ポテンシャルの電荷を持つ物体は $(p+1)$ 次元でないといけません。電荷は $(p+1)$ 次元の世界体積をもつので、電荷は p ブレーンです：

$$\text{電荷 } (p+1) \text{ 次元世界体積} \cdots p \text{ ブレーン}$$

そして、$(p+1)$ 形式のポテンシャルのあとに磁荷を考えることもできますが、それでは磁荷は何ブレーンになるでしょうか。磁荷を測ろうと思うと、何かある磁荷を担った物体があって、その物体を囲む球面を考えて、その球面上で場の強さを積分するわけです：

$$\text{磁荷：} \int_{\text{球面}} F_{(p+2)}, \quad F_{(p+2)} = dA_{(p+1)} \tag{94}$$

この積分が意味をなすためには、この球面の次元は $(p+2)$ 次元でないといけません。$(p+2)$ 次元の球面がなにか物体を囲んでいるということは、その球面は $(p+3)$ 次元の球の境界です。ですので磁荷を持った物体はその $(p+3)$ 次元の球と一点で交わるという話ですから、10 次元の中で 10 から $(p+3)$ を引いた $(7-p)$ 次元です。磁荷は $(7-p)$ 次元の世界体積をもちます。ということは磁荷は $(6-p)$ ブレーンになります：

$$\text{磁荷：} (7-p) \text{ 次元世界体積} \cdots (6-p) \text{ ブレーン}$$

このような形で反対称テンソルゲージ場があると、何か高次元物体がその電荷だとか磁荷とかの役割を担って、超重力理論に存在しないといけないということがわかります。そうすると、今 10 次元には IIA 型、IIB 型という超弦理論があるのですけれども、その超弦理論の中にどのような反対称テンソルゲージ場があるかと言いますと、10 次元と 11 次元の超重力理論に現れる無質量場のスペクトルをちょっと書いてみます。

10 次元の IIA 型、IIB 型超重力理論、あるいは 11 次元の超重力理論に含まれる場は表 1 の通りです。まず IIA 型超重力理論には対称テンソル $g_{\mu\nu}$、ディラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ があります。このディラトンは弦の結合定数を決める役割をしています。それから、NS-NS 2 形式と呼ばれる場 $B^{\mathrm{NS}}_{\mu\nu}$ と、R-R 1 形式、3 形式と呼ばれる場 C^{R}_{μ}、$C^{\mathrm{R}}_{\mu\nu\lambda}$ があります。名前はこの際どうでもいいですが、IIA にはとにかく 1 形式と 2 形式と 3 形式があります。IIB には計量 $g_{\mu\nu}$ とディラトン ϕ、NS-NS 2 形式 $B^{\mathrm{NS}}_{\mu\nu}$、それから 0 形式 C^{R}、2 形式 $C^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}$、4 形式 $C^{\mathrm{R}\,+}_{\mu\nu\lambda\rho}$ があります。ただし、この 4 形式は場の強さを計算すると 5 形式になりますが、その 5 形式が自己双対であるというものです。そして 11 次元の超重力理論には計量と 3 階の反対称テンソルがあります。

これだけ、ポテンシャルがあるということで、これらの場にそれぞれ電気的、磁気的に結合する面白い物体があります。まず、$B^{\mathrm{NS}}_{\mu\nu}$ に電気的に結合する物体は 1 次元で、それは他でもない基本

表 1: II 型超重力理論と 11 次元超重力理論の無質量スペクトル

IIA	$g_{\mu\nu}$	ϕ	$B_{\mu\nu}^{\mathrm{NS}}$	C_{μ}^{R}	$C_{\mu\nu\lambda}^{\mathrm{R}}$		
			F1	D0	D2		電気的物体
			NS5	D6	D4		磁気的物体
IIB	$g_{\mu\nu}$	ϕ	$B_{\mu\nu}^{\mathrm{NS}}$	C^{R}	$C_{\mu\nu}^{\mathrm{R}}$	$C_{\mu\nu\lambda\rho}^{\mathrm{R}\,+}$	
			F1	D(−1)	D1	D3	電気的物体
			NS5	D7	D5		磁気的物体
11d	$g_{\mu\nu}$			$A_{\mu\nu\lambda}$			
				M2			電気的物体
				M5			磁気的物体

弦 (F1) になります。磁気的に結合するものは 5 次元の物体で、それは NS5 ブレーンと呼ばれます。R-R 1 形式に電気的に結合するものは 0 次元で D0 ブレーンと呼ばれ、磁荷は D6 ブレーンです。R-R 3 形式に結合する電気的物体は D2 ブレーン、磁気的物体は D4 ブレーンです。このようにして、どんなブレーンが IIA 型理論にあるのかがわかります。IIB 型だと、$B_{\mu\nu}^{\mathrm{NS}}$ に対しては F1 ブレーン、NS5 ブレーン、C^{R} に対しては D(−1) ブレーン、D7 ブレーン、$C_{\mu\nu}^{\mathrm{R}}$ は D1 ブレーンと D5 ブレーン、$C_{\mu\nu\lambda\rho}^{\mathrm{R}\,+}$ は D3 ブレーンが結合します。

最後に、11 次元の超重力理論には 3 形式があるので、電気的物体は M2 ブレーン、磁気的物体は M5 ブレーンがあります。このように、超重力の無質量 ゲージ場のスペクトルを知っておくと、どんなブレーンがあるかというのが予想できます。

これらのブレーンには著しい性質がいくつか存在しますが、重要なものを紹介すると、今紹介したブレーンは全て超対称性を半分保つ BPS ソリトンであるということが知られています。BPS 状態には、超対称性を保つので、安定という性質が付きまといます。どういう場合に安定かというと、例えば、2 枚の同種のブレーン を平行に置いたとします。そうすると、素朴にはこの 2 つのブレーンの間には力が働くと考えられらます。まず、これらのブレーンは質量 (張力) を持っているので重力による引力が働きます。もう 1 つ、この 2 枚の物体は電荷を持っているので Coulomb 力が斥力として働きます。そして BPS 状態であるゆえの性質として、これらの引力と斥力が釣り合って安定な状態として存在できるということがあります。これが BPS 状態の著しい性質です。ブレーンは 2 枚だけでなく何枚置いても安定な配位として存在できることが知られています。

2.2 双対性

超重力理論があって、色々なブレーンがいるということが分かりましたが、これらのブレーンが双対性という変換で移り合うことを説明したいと思います。ここで言う双対性とは超重力理論の対

称性で、異なる弦理論や M 理論を関係付けるものとします。

2.2.1　T 双対性

まず、T 双対性というものについて説明します。超重力理論の枠内ではどういう対応関係かというと、IIA 型、IIB 型超重力理論は 1 次元簡約して、9 次元にすると等価になる、という性質があります。次元簡約というのは、元々 10 次元の理論で全ての場は 10 個の座標に依存していますが、そのうち 1 つの座標依存性を忘れるということです。そうすると 9 次元の理論になりますが、そうしたときに IIA 型、IIB 型超重力理論は等しくなるということです。超重力理論の範囲の関係としてはこのような話ですが、弦理論としての対応関係としても対応するものがあります。IIA 型弦と IIB 型弦の 1 次元方向を S^1 にコンパクト化したものを考えると、その半径が $R\widetilde{R}=\alpha'$ であるときに、実はこの 2 つの理論が等しくなるということが知られています：

$$\text{IIA 弦}/S^1(R)=\text{IIB 弦}/S^1(\widetilde{R})\,,\quad R\widetilde{R}=\alpha'\,. \tag{95}$$

この等価性がブレーンをどのように結びつけるかというと、IIA 型には Dp ブレーンのうち p が偶数のものしかありません。一方、IIB 型弦理論には p が奇数のものしかありません。そして、この T 双対性というのは Dp ブレーンの次元を ±1 する変換になっています。

2.2.2　S 双対性

他にも S 双対性と呼ばれる双対性がありますが、この説明は時間の関係で割愛します。

2.2.3　M 理論と IIA 型超弦理論の関係

11 次元超重力理論と IIA 型超重力理論の関係を説明します。11 次元超重力理論を 1 つ次元簡約すると、IIA 型超重力理論になります。超重力理論の観点からは簡単な対応なんですけど、これを弦理論の観点に置き換えてみると非自明な話になります。これは、まず 11 次元には M 理論と呼ばれる量子超重力理論があって、1 次元を半径 R_{11} の円周にコンパクト化すると、IIA 型超弦理論と等しいという主張になります：

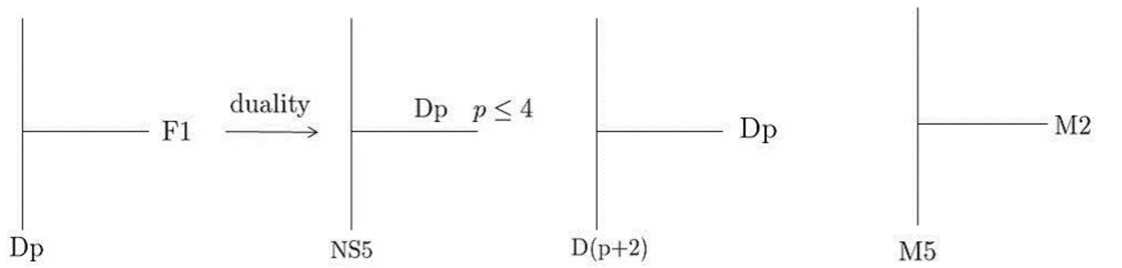
$$\text{IIA 弦}=\text{M}/S^1(R_{11})$$

M 理論は本質的な、即ち、他の何物にもよらない定義は、今のところ与えられていないと思います。一般的な定義としては IIA 型超弦理論から出発するものがあります。IIA 型超弦理論はミンコフスキー時空上では、弦の結合定数 g_s と弦の長さ $l_s(=\sqrt{\alpha'})$ をパラメーターとして持ちますが、弦の結合定数 g_s をどんどん大きくすると 11 番目の次元が見えてくるという話になっています。

M 理論は 11 次元の Planck 長さ l_P という 1 つのパラメーターしか持ちませんが、S^1 にコンパクト化するとその半径 R_{11} もパラメーターとなります。この M 理論の 2 つのパラメーター l_P、R_{11} と IIA 型超弦理論の 2 つのパラメーター g_s、$l_s(=\sqrt{\alpha'})$ は実は関係していて

$$g_s\,l_s=R_{11},\quad g_s\,l_s^3=l_\text{P}^3 \tag{96}$$

という式が成り立ちます。これが M 理論の一番一般的な定義となっています。11 次元の超重力理



(a) 基本弦は D ブレーンに端をもつことができる。双対性でいろいろ変換させてやると、Dp ブレーンというのは p が 4 以下のとき NS5 ブレーンと交わる。それから Dp ブレーンは D$(p+2)$ ブレーンに端をもつことができる。

(b) M 理論では、M2 ブレーンが M5 ブレーンに端を持つことができる。

図 7: ブレーンの複合体

論というのは古典的なラグランジアンなどもあってよく知られていますが、それに対応する量子重力理論というのはあまりよくわかっていません。11 次元の超重力理論では弦の代わりに何を量子化したら良いのかがあまりよく分かっていません。

先ほど、11 次元の超重力理論には M2 ブレーンと M5 ブレーンがあるといいましたが、M 理論を S^1 コンパクト化したときに、M2 ブレーンと M5 ブレーンがどのようになるかというと、M2 ブレーンが S^1 に巻き付いているかそうでないかの違いによって、IIA 型の F1 ブレーンか D2 ブレーンになります。M2 ブレーンは S^1 も巻き付いていれば、次元が下がって D4 ブレーンになりますし、巻き付いていなければ、NS5 ブレーンになります：

$$\mathrm{M2} \ \rightarrow \ \mathrm{F1, D2}, \qquad \mathrm{M5} \ \rightarrow \ \mathrm{D4, NS5} \tag{97}$$

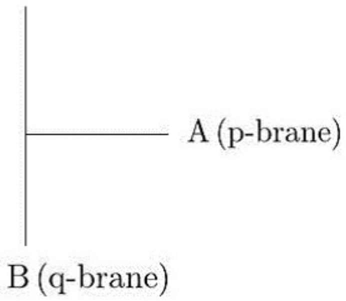
2.3 ブレーンに端をもつブレーン

10 次元と 11 次元の世界には弦のほかにいろんなブレーンがあるという話をしてきましたけれども、そのブレーン達が複雑な複合体をもつ話をします (図 7)。基本弦は D ブレーンに端を持てるという話をしましたけれども、色々なブレーンは他のブレーンに端を持てる場合が他にもあります。どのようなブレーンがどのようなブレーンに端を持てるのかというと、双対性の性質をいろいろ知っているとすぐに分かります。

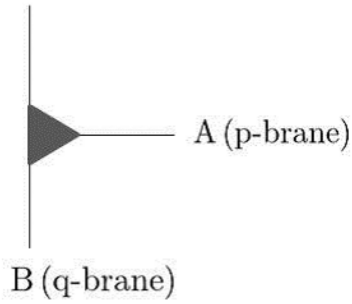
それで、あるブレーンが他のブレーンに終わることが許される条件がどのような条件かというと、次のような A の境界 ∂A が B が含まれている状況を考えましょう (図 8)：

$$\partial A \subset B \tag{98}$$

このときに A との配位が可能な条件として、A の境界 ∂A は B の世界体積上のゲージ場の電荷・磁荷になっていなければならない、ということが知られています。そうすると A というのが p ブ



(a) p ブレーン A が q ブレーン B に終わっている。



(b) ブレーン A の張力によってブレーン B の形が変形する。

図 8: ブレーン A がブレーン B に終わっている。

レーンで、その境界 ∂A というのは次元が 1 つ下がります。∂A というのは p 次元の物体です。この p 次元の物体が B の中のゲージ場と結合していないといけないわけですから、∂A が B のあるゲージ場に電気的に結合しているとそれは p 形式でなければなりません。もし、∂A が磁気的に結合しているとそのゲージ場は $(q-p-1)$ 形式となります。B の中には p 形式もしくは $(q-p-1)$ 形式というのがなければなりません。ここで僕が言ったことの整合性をチェックするために、F1 が Dp ブレーンに終わるという話をしました。Dp ブレーンというのは 1 形式ゲージ場に結合します。F1 ブレーンの境界は (0+1) 次元の物体です。従ってそのゲージ場 1 形式の電荷になるわけです。

そこで図 8a のような状況を想像してみると、A というブレーンは有限の張力をもった物体なので、ブレーン A はブレーン B を引っ張ろうとするわけです。なので、A が B を引っ張る力によって B というブレーンの形は図 8b のようになります。そして形が変わる様を、ちょっと発見的な議論で大雑把に形を決めたいと思うのですが、それをどうやって決めようかというと以下のような議論をしましょう。

2.3.1 ブレーンベンディング

何個かのブレーン A がブレーン B に終わっている状況を考えましょう (図 9)。そうすると A が B に終わっている組み合わせが超対称、つまり BPS だとすると、この A が何枚であっても A が B に終わっている配位は安定なわけです。それを今度 B というブレーンの世界体積という観点から、まるで力がつりあっているという議論をすると、今見てきたようにブレーン A の端はブレーン B の世界体積上のゲージ場に結合しています。従って同じ種類の電荷を持っていることになります。もし Coulomb 力だけ働いているとすると、このブレーンの端は斥力で互いで離れていきそうになります。そうすると何か引力の元がないといけなくなります。その引力の源が何かといいますと、B というブレーンの上にはゲージ場が勿論いますけれども、ゲージ場のほかにスカラー場があります。そのスカラー場の交換が引力の源となります。

(a) 同じブレーン A がブレーン B に終わっている。 (b) スカラー場の非自明な値によってブレーン B が変形する。

図 9: 何個かのブレーン A がブレーン B に終わっている。

ところがこのスカラー場が、D ブレーンの中の場の理論の中でどのような役割をしていたかと言うと、D ブレーンに垂直な方向に対する D ブレーンの運動をあらわす自由度だったわけです。従ってスカラー場を交換するということは、A の境界はゲージ場の源であるだけではなくてスカラー場の源にもなっていることを意味します。なのでブレーン A があるとそのスカラー場が非自明な値を持つことになります。このような議論でスカラー場の値がどのようになるのかが分かります。

スカラー場の非零の値というのは Poisson 方程式の解で決まります。そうするとどんな次元の Poisson 方程式を解けばいいのかという話になるのですが、それはどんな次元の Poisson 方程式かというと、A の境界 ∂A は B の中で余次元 (codimension) k を持つことにしましょう。[*5] そうすると A の境界は p 次元で、p 次元のものが q 次元の中に埋め込まれている余次元は

$$(q+1)-p=k \tag{99}$$

となります。このブレーンベンディングのスカラー場の値は Poisson 方程式で決まるのですが、この Poisson 方程式の次元はこの余次元になります。そうすると余次元に応じてブレーンベンディングの形が分かります：

$$\begin{aligned} k \geq 3, &\qquad \phi \sim \frac{1}{r^{k-2}} \\ k = 2, &\qquad \phi \sim \log r \\ k = 1, &\qquad \phi \sim |r| \end{aligned}$$

ここで、r はブレーン A の端からの距離を表し、これを立体的に図示したものが図 10 になります。ブレーン A の端はブレーン B に点 O で乗っていて、スカラー場 ϕ の値を O から距離 r の点 P で測っています。

[*5] A の境界が B の中に埋め込まれているが、その B の中で A の境界に垂直な方向が何個あるか、というのを余次元と言う。

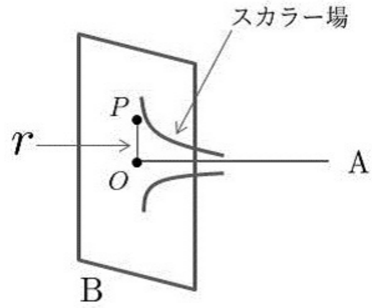


図 10: r は、スカラー場の値を A の付け根 O から点 P までの距離 $\overline{OP}$ を測っている。

2.4 ブレーン上の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ SU(n) 超対称 Yang-Mills 理論

4 次元の $\mathcal{N}=2$ の SYM をブレーンを使って実現する、そして Seiberg-Witten 曲線を出す、というのをやっていきたいと思います。答えを書きますと、これは II 型理論のブレーンを使って作ります (図 11)。ここで、NS5 ブレーンは 10 次元の中で $0,1,2,3,4,5$ の方向、D4 ブレーンは $0,1,2,3,6$ の方向に伸びています。主張は、この D4 ブレーンの上のゲージ理論が何かを考えればよいということです。

まず、D4 ブレーンが n 枚あるので、ゲージ対称性は SU(n) のような気がします。それから、D4 ブレーンは $(4+1)$ 次元の物体なので、その上の理論は 5 次元の理論のような気がします。しかし、NS5 ブレーンの間の距離 L を小さくしていくと、$(4+1)$ 次元の理論が次元簡約を起こして $(3+1)$ 次元の理論になるだろう、そういう主張です。それから、D4 ブレーンには

$$A_{0,1,2,3},\ A_6:\ \text{ゲージ場}$$
$$\phi_{4,5},\ \phi_{7,8,9}:\ \text{D4 ブレーンの垂直方向の運動を表すスカラー場}$$

の場があります。しかし、これだけの場が本当にいるのかどうかを考えると、D4 ブレーンは NS5 ブレーンに端を持ってしか動けませんから、NS5 ブレーンに垂直な方向 ($7,8,9$ 方向) には動けません。つまり $\phi_{7,8,9}$ は Dirichlet 境界条件を課されているので凍結されます。同じ理由で A_6 も凍結されます。残った場のスペクトルを見ると、ベクトル場が 1 個とスカラー場が 2 個あります。これを複素スカラー場 1 個と見ると、ちょうど $\mathcal{N}=4$ SYM 理論と同じになります。このような形で、D4 ブレーン n 枚の上に乗っている理論は SU(n) の純粋な SYM になります。U(n) か SU(n) かという問題があります。それを忘れないようにしましょう。先ほどの議論で、SU(n) SYM のラグランジアンを書いて真空を決めるときに、$\phi,\bar{\phi}$ が交換しなければならない、$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$ でラベルされる真空があると言いました。その $a_1,a_2,\cdots,a_n$ というのは他でもない、D4 ブレーンの座標になります。無味乾燥なゲージ理論の話をしていると辛いですが、ゲージ理論の真空がこう行った形で図解できて、さらにブレーンの位置のような解釈ができると精神的にすごく助かります。

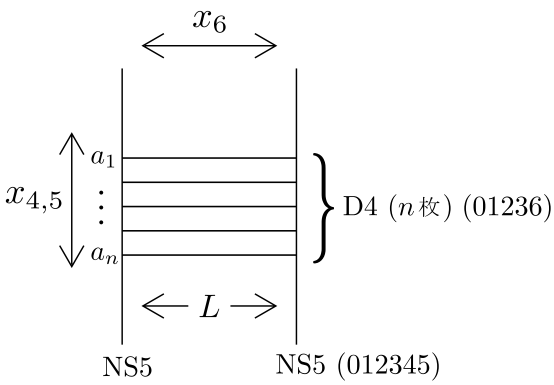


図 11: 4 次元の $\mathcal{N} = 2$ の SYM を実現するブレーンの配位。NS5 ブレーンは 10 次元の中で $0,1,2,3,4,5$ 方向に伸びている。また D4 ブレーンは $0,1,2,3,6$ の方向に伸び、NS5 ブレーンに端を持っている。

D4 ブレーンが n 枚覆わっているので、長々と話してきたブレーンベンディングの話をしようと思います。NS5 と D4 の関係の場合、このベンディングは log-ベンディングになります。log-ベンディングというのはすごく厳しいベンディングなので、例えば D4 ブレーン n 枚が一色端に上下方向に動くと、その重心運動の自由度 (これは実は U(n) ゲージ理論の中の U(1) 部分) が実は規格化可能な運動ではないので、それをダイナミクスから除外し、この n 枚の D4 ブレーン上の理論は SU(n) のゲージ理論になることが知られています。

NS5 ブレーン上のスカラー場の内、Φ_6 を考えます。これは NS5 ブレーンの x_6 方向のゆらぎを表すものです。NS5 ブレーンは 2 枚ありますが、今は図 11 の右側の NS5 ブレーン上のスカラー場の話をしています。log-ベンディングの式は

$$\Phi_6 = \text{const} \times \sum_{i=1}^{n} \log|v - a_i|, \quad v = x_4 + ix_5 \tag{100}$$

となります。D4 ブレーンが n 枚、NS5 ブレーンに付着してそれを引っ張っているので、log-ベンディングになります。D4 ブレーンはスカラー場に結合する他にゲージ場にも結合します。今の場合、ゲージ場は 0 形式になっています。つまり、D4 ブレーンの端は 0 形式の磁荷となっています。0 形式ということは周期的なスカラー場なのですが、D4 ブレーンは NS5 ブレーン上の 0 形式ポテンシャル Φ_{11} の磁荷となっています。ということは、この Φ_{11} も log 関数で表わされるような関数形に従っていて、超対称性を思い出すと $\Phi_6 + i\Phi_{11}$ が v の正則関数になっていることから

$$\Phi_6 + i\Phi_{11} = \text{const} \times \sum_{i=1}^{n} \log(v - a_i) \tag{101}$$

のようになります。log-ベンディングの式と超対称性を使うと、NS5 ブレーン上の場はこのような形になります。

この公式が意味を成すためには、ϕ_{11} は 2π の周期性に従わなければ、この右辺は 1 価関数では

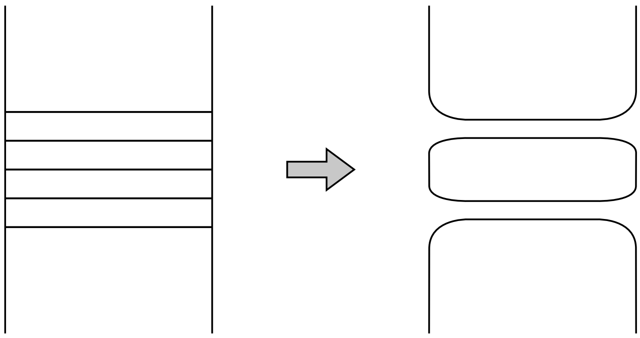


図 12: M5 ブレーンの滑らかな配位のイメージ図。D4 ブレーンが NS5 ブレーンに端を持つことから生じるベンディングは、M5 ブレーンに n 本の管を滑らかにつないだものとして表される。

なく、log 関数というのは多価関数ですから少し式を変更して

$$\frac{\Phi_6 + i\Phi_{11}}{2\pi R_{11}} = \mathrm{const} \times \sum_{i=1}^{n} \log(v - a_i) \tag{102}$$

このような形にしておきます。この log-ベンディングの式を指数化した式を書くと、等価な式ですが

$$Z = \exp\left(\frac{\Phi_6 + i\Phi_{11}}{2\pi i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{v - a_i}{\Lambda}\right) \tag{103}$$

となります。左辺が無次元量であることを考慮して、右辺をエネルギーの次元を持つ量 Λ で割ることにします。右側の NS5 ブレーンの log-ベンディングの式がこうなります。それなら、左側の NS5 ブレーンの log-ベンディングの式もよく似た形になるはずで、それは単に Z を Z^{-1} に変えた式：

$$Z^{-1} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{v - a_i}{\Lambda}\right) \tag{104}$$

これが左側の NS5 ブレーンの log-ベンディングになります。

左右の NS5 ブレーンが変形された無矛盾な量子論的な解は、M 理論を思い出すと分かります。IIA 理論と M 理論の間に S^1 コンパクト化を通じた関係があります。このブレーンの組み合わせというのは IIA 理論のブレーンの組み合わせなのですが、これを M 理論に持ち上げることが出来ます。M 理論に持ち上げると、D4 ブレーンも NS5 ブレーンも同じ M5 ブレーンになります (図 12)。つまり、D4 ブレーンが NS5 ブレーンで終わっているものが M5 ブレーンの滑らかな形になります。イメージとしては、梯子のようなブレーンの複合体だったものが 2 枚の板の上に n 本の管が滑らかに繋がったようなそういう M5 ブレーンの形になります。この形を決めようとすると、右側の NS5 ブレーンの式 (103) と左側の NS5 ブレーンの式 (104) の 2 つを滑らかに繋ぐ自然な解は

$$Z + Z^{-1} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{v - a_i}{\Lambda}\right) \tag{105}$$

となり、これが M5 ブレーンの形を表す式になります。この式で Z^{-1} を無視すると右側になりますし、Z を無視すると左側の式になります。その意味でこの式は自然かつ滑らかな繋ぎあわせになっています。

実はこの式で $n=2$、$a_1=-a_2$ とすると、休憩直後に話した SU(2) の純粋な SYM の Seiberg-Witten 曲線になります。というわけで、弦理論と M 理論を使って Seiberg-Witten 曲線を再現することができました。

これで今日の話は終わりにしたいと思います。

質疑応答

司会： 質問等あれば 1 問 2 問ぐらい出来ますがどうでしょうか？

質問： Λ というのが R_{11}^{-1} なんでしょうか？

回答： いえ、Λ と R_{11} は関係ないです。R_{11} はむしろ

$$\exp\left(\frac{\Phi_6+i\Phi_{11}}{2\pi i R_{11}}\right)$$

に隠れています。

質問： では今ここで言う Λ とは何処から来ているのでしょうか？

回答： Λ というのは、NS5 ブレーンをスタート時点でどのくらいの距離に設定したかに関わるパラメーターだと思います。

質問： では、例えば先程の a と Λ の関係が摂動的といった場合、距離と計量との関係がということでしょうか？

回答： そうですね。D4 ブレーンの散らばり方と NS5 ブレーンの離れ具合の競合関係みたいなものです。もし n が小さく、またブレーンが密集している場合、M5 ブレーンの真ん中の穴がどんどん潰れていくみたいなことになります。

司会： 他にはよろしいでしょうか？ では 1 日目の講義を終わりたいと思います。細道さん、ありがとうございました。

3　Nekrasov 分配関数

昨日の講義[*6]の中でプリポテンシャルというものが出てきたと思います。プリポテンシャルは説明したように、4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー領域の物理を決める基本的な量なんですけども、Nekrasov が 21 世紀の初め、2002 年くらいに、プリポテンシャルよりもより基本的な量、Nekrasov のインスタントン分配関数と呼ばれる量を提唱しました。この量のいいところは、昨日のプリポテンシャルと違って Seiberg-Witten 曲線を最終的に持ってくるような緻密な議論を必要とせずに、正直な経路積分に基づいてパッと出てくるところです。そして、経路積分からインスタントン分配関数が出てくる様を理解するために、まず Ω 変形というものを学ぶ必要があると思います。それから Nekrasov 分配関数を説明したいと思います。

3.1　Ω 変形

Ω 変形という言葉自体は Nekrasov が最初に使った言葉だと思うので、今日最初にする話は無限次元の経路積分の問題とかそういう話ではなく、有限次元、偶数次元で行う簡単な積分の話から入りたいと思います。「有限次元の積分を Ω 変形」と言われる方はあまりいないんじゃないかと思いますが、積分が系の対称性を利用して簡単化する仕組みは、Nekrasov の分配関数が Young 図についての足し上げに書けることと同じ理屈ですので、あえて Ω 変形と呼びたいと思います。Ω 変形の何が嬉しいのかというと、色々な空間の体積を評価したい、しかし空間によっては素朴な体積が無限大になってしまうことがありますが、それを空間の対称性を使って有限になるように正則化する、そういう仕組みと思うことができます。

3.1.1　Duistermaat-Heckman 公式

体積を求める非常に便利な公式があって、Duistermaat-Heckman 公式 (DH 公式) といいます。これをまず説明したいと思います。この公式は、偶数次元のシンプレクティック空間という空間の体積に関わってくるものです。シンプレクティック空間というのがどういう空間かといいますと、偶数次元、$2n$ 次元で、閉じた微分 2-形式が存在する空間です。その 2-形式を ω と書くことにします：

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i dx^j \qquad (\text{閉形式、}\omega_{ij}\text{は非退化行列}) \tag{106}$$

このようなシンプレクティック空間はたくさんありますが、最も簡単で身近な例は解析力学で出てくる位相空間です。位相空間上のシンプレクティック形式は $\omega=\sum_i dq_i dp_i$ となっています。体積形式はシンプレクティック形式を使って

$$\text{vol.form} = \frac{\omega^n}{n!} \tag{107}$$

[*6] 1 章のこと。以下同様

と書けます。位相空間の例ではこれは $\prod_i dq^i dp^i$ です。

ここまではシンプレクティック空間という以外に何の仮定も置いていませんが、さらにこのシンプレクティック空間に連続的な対称性があるとしましょう。その対称性変換の座標に対する作用はベクトル場 $V^i(x)$ を用いて次のように表される微小変換で、その変換のもとでシンプレクティック形式は不変であるとします：

$$\delta x^i = V^i(x) \tag{108}$$

$$\delta\omega = 0 \tag{109}$$

このとき、シンプレクティック空間がこの対称性の下で不変であるといいます。さらに、この $V^i(x)$ に対応するハミルトン関数 $H(x)$ が存在するとしましょう。$H(x)$ は次の性質を持ちます：

$$\partial_i H = V^k \omega_{ki} \tag{110}$$

このような対称性を持ったシンプレクティック空間の体積を考えようとします。普通の体積は体積形式を空間全体で積分すればいいのですが、ここでは Ω 変形した体積というものを考えてみます。その定義は

$$Z(\beta) = \int \frac{\omega^n}{n!} \mathrm{e}^{-\beta H(x)} \tag{111}$$

です。系の対称性を生成するハミルトン関数を使って変形しました。$\beta = 0$ のときは普通のシンプレクティック体積になります。この β を Ω 変形のパラメーターと呼ぶことにしましょう。この Ω 変形した体積はいくつかの場面において普通の体積よりよい性質を持っているので、後ほどインスタントンモジュライ空間という難しい空間の体積を測るのに使います。

この変形のいいところは赤外発散 、シンプレクティック空間の体積が無限大であることから来る発散を除去する、解決する効果があるということです。もう 1 ついいところは、Ω 変形した体積というのは、対称性の固定点からの寄与の和として、空間全体に関する積分を顕わに実行しなくても固定点の情報だけを切り取って簡単に計算することができる、そういう定理があります。

Ω 変形の特徴を書いておくと、1 つ目は赤外正則化です。2 つ目は固定点定理というのがあって、積分を実行できます。

■Duistermaat-Heckman の固定点定理

では Duistermaat-Heckman の固定点定理というのを紹介したいと思います。まず固定点というのが何かということですけど、それはベクトル場 V が消える点です。それでこのシンプレクティック形式が非退化であることを思い出すと、これを言い換えることができて、ハミルトン関数の微分が消える点です：

$$\text{固定点：} V(x) = 0 \text{ なる点} \ \leftrightarrow\ \partial_i H = 0 \text{ なる点} \tag{112}$$

固定点が離散的に存在するということは仮定しまして、各々の固定点におけるウェイトというのを次のように定義します。ウェイトを定義するために各々の固定点の周りでうまい座標をとることが

できたとして、固定点の周りで ω と H が次のように近似的に簡単に書けたとします：

$$\omega \simeq \sum_{i=1}^{n} dx_{2i-1}dx_{2i}, \qquad H \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon_i}{2}\left(x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2\right) \qquad (\text{固定点周り}) \tag{113}$$

ここで現れる $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ を、その固定点の周りにおける対称性のウェイトといいます。それで、固定点が離散的にいくつかあってそれぞれの周りのウェイトが見つかったとすると、Ω 変形された空間の体積は、Duistermaat-Heckman 公式を使うと固定点からの寄与の和として書けます：

$$Z(\beta) = \sum_{p:\text{固定点}} \frac{e^{-\beta H}|_p}{e(p)}, \qquad e(p) \equiv \prod_{i=1}^{n} \epsilon_i \tag{114}$$

どんなに難しいシンプレクティック空間も対称性を使って Ω 変形された体積を求めると、固定点が離散的になっていれば、固定点の周りの情報さえ調べておけば体積が決まります。

質疑応答

質問： すみません、シンプレクティック空間が無限次元の場合でも今の議論は成り立つのですか?

回答： やろうとしているのです。今は簡単な模型でやって訓練を積んで、それを後ほど、Pestun という人が球面上の分配関数にこの手法を適用したのですけれど、それをこの簡単な例を一般化したものとして理解する、という話を後ほどしたいと思います。

ではこの固定点定理の応用を 2 つ紹介しようと思います。1 つ目の例は n 個の調和振動子の位相空間です。位相空間の体積を計算します。シンプレクティック形式とハミルトン関数は次のような形です：

$$\omega = \sum_i dq_i dp_i \tag{115}$$

$$H = \sum_i \frac{\epsilon_i}{2}(p_i^2 + q_i^2) \tag{116}$$

p も q も $-\infty$ から $+\infty$ まで走るならシンプレクティック体積は普通は無限大じゃないか、という話ですけど、この Ω 変形した体積は有限になるわけです。それで定義式 (111) に従って Ω 変形した体積を計算すると、それは何のことはないガウス積分をやるだけになります。その答えは

$$Z(\beta) = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \epsilon_i} \tag{117}$$

です。こうなるのはガウス積分を何回もやったことのある皆さんなら知っているはずです。これが最も簡単な応用例ですけれど、ここで学びたいことは何かというと、Ω 変形というものが素朴にやると無限大の体積を対称性を使って有限に正則化しているということです。

2 つ目の例を紹介します。2 つ目は単位球の体積です。単位球面上のシンプレクティック形式を

$$\omega = \sin\theta d\theta d\varphi \tag{118}$$

とします。球面には回転対称性がありますから、その 1 つとして北極と南極を固定する回転対称性を生成するベクトル場 V は次のようになり、また定義に従ってハミルトン関数の取り方も分かります：

$$V = \frac{\partial}{\partial\varphi} \;\to\; H = \cos\theta \tag{119}$$

このとき Ω 変形された体積を計算すると、固定点定理を使って計算してもいいし、単に初等的な積分をやってもいいのですが、どちらでやっても答えは同じで

$$Z(\beta) = \frac{2\pi}{\beta}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) \underset{\beta\to 0}{\longrightarrow} 4\pi \tag{120}$$

となります。特に北極と南極でそれぞれウェイトを掛けたものをこの等式で使ったと思うと、第 1 項が北極からきています。北極というのは $\cos\theta$ が $+1$ です。第 2 項が南極からきていて、$\cos\theta$ が -1 です。北極の回りで回転のウェイトは $+1$、南極の回りで回転のウェイトは -1 なので、e の肩は第 1 項が $+$ で第 2 項が $-$ になっています。この式は普通の体積 4π を一般化したものに確かになっています。

では、この Duistermaat-Heckman 公式を超対称版の理論で考えたいと思います。

3.1.2 DH 公式と SUSY

$Z(\beta)$ の式を微分形式を使って次のように書いてもいいでしょう：

$$Z(\beta) = \int e^{\omega - \beta H} \tag{121}$$

これを場の理論のようにグラスマン変数 ψ^i で書いてしまうこともできます：

$$Z(\beta) = \int \prod_{i=1}^{2n} dx^i d\psi^i \, \exp\left[\frac{1}{2}\omega_{ij}\psi^i\psi^j - \beta\cdot H(x)\right] \equiv \int \prod_{i=1}^{2n} dx^i d\psi^i \, e^{-S} \tag{122}$$

これは単に $dx^i \to \psi^i$ としただけです。この表式は確かに x と ψ という場を含む 0 次元の場の理論の経路積分に見えなくもありません。この式の面白いところは超対称性があることです。S は超対称性のもとで不変ですが、超対称性では場が次のように変換します[*7]：

$$QS = 0 \;\leftarrow\; \begin{cases} Qx^i = \psi^i \\ Q\psi^i = \beta V^i(x) \end{cases} \tag{123}$$

これは有限個の経路積分変数しかないおもちゃの場の理論ですけれども、超対称性があります。この系は Duistermaat-Heckman 公式から積分が固定点からの寄与の和に簡単化する模型にもなっ

[*7] 初め β は書かれていなかったが受講者からの指摘により修正された。

ています。場の理論の言葉で固定点というものの特徴付けをやってみようと思います。経路積分がどこに局所化するかといいますと、超対称性のある経路積分に出くわしたときは、経路積分へのノンゼロの寄与はその固定点に局在化するのですが、固定点を特徴付ける性質は何かといいますと、$V^i(x) = 0$ ですから、(123) 式からフェルミオンの超対称変分が消えます。つまり、超対称性のある経路積分へのノンゼロの寄与はすべてのフェルミオンの超対称変分が消えるような点に局所化します。これが固定点定理と SUSY 局所化のあらましです。

では、このテクニックを使ってもう少し難しい空間の体積を評価しようじゃないかという話に移りたいと思います。どんな空間を扱うかというと、ゲージ理論に興味があって、インスタントンというのはゲージ理論で重要な量ですけども、そのインスタントンに関わる空間です。

3.2 インスタントンモジュライ空間

昨日はインスタントンって何かという話をしたと思いますが、ちょっと簡単におさらいしたいと思います。ゲージ場は色々なトポロジカルに非自明な配位をとるようになるんですけど、そのトポロジーというのはインスタントン数でラベルされます。インスタントン数というのは整数 k です。k が正のとき、ユークリッド符号の Yang-Mills 作用の実部を最小化するゲージ場の配位は反自己双対でなくてはなりません。反自己双対というのは以下の方程式が満たされるということです：

$$F^+_{mn} = 0 \tag{124}$$

この方程式の解のことをインスタントン解と呼びました。インスタントン数が k のときは、この方程式の解は k-インスタントン解という。そういうことでした。皆さん、簡単に想像できるのではないかと思うんですけど、ある 1 個の解が与えられたときに、その解に対称性変換を施してやると別の解になるわけです。例えば今、インスタントン方程式を $\mathbb{R}^4$ の上で考えているので、ある解があったら、$\mathbb{R}^4$ の回転変換を施してやると、インスタントンの散らばり具合が回転して別の解になるわけです。或いは、無限遠で消えない定数ゲージ回転をしてやると、1 個の解から別の解に移るわけです。なので、与えられたインスタントン数に対しても、この反自己双対方程式を満たす解というのは一意ではないということがすぐわかります。なので、インスタントン解というのは族を成すわけです。有限次元のモジュライ空間、パラメーター空間が出てきます。今、ゲージ群を $\mathrm{U}(N)$ とすると、$\mathbb{R}^4$ 上の k-インスタントンのモジュライ空間というのはどういう空間かというのを考えたいと思います。これを $\mathcal{M}_{n,k}$ と書くことにします。このモジュライ空間については色々なことが知られています。まず、複素数で数えた次元は $2nk$ ということが知られています：

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{n,k} = 2nk \tag{125}$$

次に、もっと華々しいことが知られていて、ADHM 構成法という話があります。これはどういう話かといいますと、今からいくつかの行列のセットを書くのですが、そのセットが与えられると、$\mathrm{U}(N)$ ゲージ理論の k-インスタントン解を機械的に構成する手順が知られている、そういう話です。

　では ADHM 構成を詳しく書くことにしましょう。次の”ADHM データ”から U(N) ゲージ理論の k-インスタントン解が作れます。”ADHM データ”とは複素行列の組であって、まず $k \times k$ の行列 B_1, B_2 があり、それから $k \times n$ の行列 I、そして $n \times k$ の行列 J という、行列のセットがあります：

$$\left\{B_{1(k\times k)},\ B_{2(k\times k)},\ I_{(k\times n)},\ J_{(n\times k)}\right\} \tag{126}$$

そして、何でもいいわけではなくて、これらは ADHM 方程式という方程式に従います：

$$[B_1, B_2] + IJ \equiv \mu_{\mathbb{C}} = 0 \tag{127}$$

$$[B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger + J^\dagger J \equiv \mu_{\mathbb{R}} = 0 \tag{128}$$

この 2 つの方程式を満たす行列のセットを ADHM データと呼びます。この ADHM データが与えられると、U(N) の k-インスタントン解が自動的に作れるというのが知られていて、それが ADHM 構成というものです。ただし、一見異なる ADHM データの間に実はゲージ対称性のようなものがあって、それも書いておくと

$$\{B_1,\ B_2,\ I,\ J\} \simeq \left\{UB_1U^{-1},\ UB_2U^{-1},\ UI,\ JU^{-1}\right\}, \qquad U \in U(k) \tag{129}$$

となります。ここで、U は k 次元のユニタリ行列です。このようなユニタリ変換で関係付いている 2 つの ADHM データは、同じインスタントン解を与えるので、同一のデータとみなすべきであるというわけです。

　これからやりたいことは、モジュライ空間の体積の計算で、その体積を計算するときに便利な座標がこの ADHM データなわけです。ちょっと細かい話をするのですが、時にはモジュライ空間の複素多様体としての性質だけに興味がある場合があって、もう少し簡単化した定義を使う場合があります。ここに書いた定義はですね、$\mu_{\mathbb{C}} = \mu_{\mathbb{R}} = 0$ というのを U(k) というゲージ同一視で割った空間のことを説明しました。しかし、時にはもっと簡単な定義を使うときがあって、それはどういう定義かというと、$\mu_{\mathbb{C}}$ だけを 0 とおいて、それをユニタリ群の元ではなく $GL(k)$ っていうので割ったもの：

$$\{\mu_{\mathbb{C}} = \mu_{\mathbb{R}} = 0\}\Big/U(k) \quad = \quad \{\mu_{\mathbb{C}} = 0\}\Big/GL(k) \tag{130}$$

こちらの方が定義としてはさっぱりした感覚の定義になっているので、こちらを時には使います。この空間の体積を計算したいということは、この空間はシンプレクティック空間なのという話ですけど、もちろんこの空間はシンプレクティック空間です。実はより特別な空間になっていて、インスタントンモジュライ空間は Hyper-Kähler 空間と呼ばれる特別な性質を持っています。ただ、なまのモジュライ空間には色々厄介な性質があって、それは特異点があるということです。どういう特異点かというと、U(k) のゲージ理論の k-インスタントン解というのを想像すると、その k というのはまず量子化されていると言いました。インスタントン数というのは量子化されているわけです。有限なインスタントン数があるわけです。そうすると、インスタントン密度の散らばり具合がどのようになっているかと言うと、空間のあちらこちらにインスタントン密度のだまのようなもの

があって、この辺に選択積分するとインスタントン密度 1 のだまがあって、この辺にだまがあって・・・そのような解に普通はなっているという印象です。それが一般のインスタントン解なのですが、特別なインスタントン配位を考えることができて、そういう特別なインスタントン配位がインスタントンモジュライ空間の特異点にあたるわけです。特異点の 1 つは紫外特異点と呼ばれるもので、今、だまの話をしましたけど、だまが無限に小さくなることができる、というのが紫外特異点です。他にもインスタントンモジュライ空間上の積分を考えるときに、赤外の特異点、赤外の発散というのもあって、赤外の発散というのは勿論、各々のだまが $\mathbb{R}^4$ の中を動き回ることを想像できるわけですから、インスタントンモジュライ空間というのは素朴には体積無限大となります。この赤外の問題を解決するのは先ほど導入した Ω 変形になります。また、この紫外の問題を解決するのはモジュライ空間の非可換変形と呼ばれる操作で、この $\mu_{\mathbb{R}}$ というのを、今 0 とおきましたが、何かノンゼロのパラメーター ζ に、左辺は $k \times k$ の行列なので、$k \times k$ の単位行列を掛けたものとします：

$$\mu_{\mathbb{R}} = \zeta \times \mathbf{1}_{k\times k} \tag{131}$$

このように少し変形した方程式を持ってくると、モジュライ空間の性質がよくなるらしいです。この変形で紫外特異点が解消されるということが知られています。インスタントンモジュライ空間はこのような形で定義されます。そのインスタントンモジュライ空間の体積を今から計算しようと思います。

3.2.1 $\mathcal{M}_{n,k}$ の体積

体積を計算するというのは、数学的に面白いという話も勿論ありますが、ゲージ理論の経路積分は Yang-Mills 結合定数がすごく小さい場合に、勿論インスタントンの効果は指数的に小さくなります。では、ノンゼロ-インスタントンセクターの上での経路積分がどのような数になるかというと、大雑把にはモジュライ空間上の積分ですごくよく近似できるわけです。なので、物理的にも非常に重要な積分の問題を今議論していることになります。先ほども言いましたが、インスタントンモジュライ空間にこのような特異点があって、特に赤外発散の問題を Ω 変形を使って解決できます。これからやるのは、今導入した ADHM データと Duistermaat-Heckman の公式を使って体積を調べるということです。固定点公式を使うので、体積は固定点からの寄与の和になるわけです。皆さん、Nekrasov の分配関数とか勉強しようとしたことがあるかもしれないませんが、インスタントンモジュライ空間上の固定点は Young 図のセットでラベルされる、ということが知られています。それを今日説明したいと思います。体積を計算するのですが、先ほども言ったように Ω 変形した体積を計算するわけです。Ω 変形というのは対称性を使う変形です。どのような対称性を使うかというと、2 つの種類の対称性を使います。1 つ目は、今 $\mathbb{R}^4$ のインスタントンの話をしているので、$\mathbb{R}^4$ の回転の対称性 $SO(4)$ があります。その回転対称性 $SO(4)$ のうち、次のような元をとります：

$$\epsilon_1 J_{12} + \epsilon_2 J_{34} \tag{132}$$

J_{12}、J_{34} というのは、$\mathbb{R}^4$ のうちのそれぞれ x_1-x_2、x_3-x_4 の平面を回すような回転の生成子であり、この ϵ_1 と ϵ_2 というのが、簡単な模型で出てきた β に相当する Ω 変形のパラメーターになります。2 つ目は、今 U(n) ゲージ理論を考えているので、U(n) 定数ゲージ変換の対称性があります。定数ゲージ変換に対応する U(n) の Lie 代数の元は

$$\mathrm{U}(n)\ \text{定数ゲージ変換} \quad \ni \quad \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \tag{133}$$

となります。U(n) の元のうち、このような特別な元を持ってきて、それを対称性の種にし、局所化をするわけです。これらの ϵ_1, ϵ_2、そして $a_1, a_2, \cdots, a_n$ というパラメーターは、先ほどの β というパラメーターの役割をします。インスタントン解があると、それを回転対称性で回すことで勿論別の解になり、またこのゲージ対称性で回すことで勿論別のインスタントン解になります。特別なインスタントン解に限っては、これらの回転・ゲージ回転で固定されます。これらの対称性で不変な、即ち固定されるインスタントン配位がどのようなものかを想像してみます。先ほども言いましたが、インスタントン解というのは、k 個のだまが散らばっているものだとして、回転で不変でなければならないとすると、それらのだまは原点付近に局在してなければなりません。それから、ゲージ回転でも不変でなければならないということは、U(n) のインスタントン解が、実は U(1) のインスタントン解の n 乗のようなものに簡単化されるということです。このような素朴な想像ですが、そのようなことが起こるのではないか、という話です。今、ADHM データの空間の中にこれらの対称性がどのように作用するかというのを知っておく必要があります。これらの対称性が ADHM データにどのように作用するかというと、ADHM データが与えられるとインスタントン解が求まり、そのインスタントン解がこのような対称性で回るわけなので、それを逆に辿っていことで、ADHM データへのこの対称性の作用も分かるというわけです。答えを書くと、これらの対称性は ADHM データに次のように作用します：

$$\delta\,(B_1,\ B_2,\ I,\ J) = (\epsilon_1 \cdot B_1,\ \epsilon_1 \cdot B_2,\ Ia,\ -aJ + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot J) \tag{134}$$

これから大雑把にやることは、B_1, B_2, I, J でパラメトライズされる空間についての積分なのですが、Ω 変形したのでその積分は固定点からの寄与になります。即ち簡単化します。まず、どんなところに固定点があるかというのを列挙しなければなりません。それから、各々の固定点周りで、対称性が固定点からの揺らぎに働くウェイトを計算しなければなりません。では、どこに固定点があるかというのを調べることにしましょう。

3.2.2　固定点列挙

固定点というと、B_1, B_2, I, J の組の中で、この δ という変換の下で不変なものを探し出しなさいという話のように思えますが、先ほど ADHM データを説明した中にゲージ対称性というものがありました。先ほどは有限のゲージ回転の表式を書きましたが、無限小のゲージ回転をここに書い

てみると

$$\delta_{\rm gauge}\,(B_1,\ B_2,\ I,\ J) = ([\varphi, B_1],\ [\varphi, B_2],\ \varphi I,\ \ -J\varphi) \tag{135}$$

となります。ここで φ は $n \times n$ の行列です。先ほど有限の U(k) ゲージ変換を書きましたが、その無限小変換版がこのゲージ対称性となります。B_1, B_2, I, J というのはこのゲージ対称性の下で同一視しないといけないので、固定点を探すときにはこのゲージ対称性を考慮しなければなりません。従って固定点の条件は

$$\text{固定点の条件：}\ \delta(\cdots) = \delta_{\rm gauge}(\cdots)\ \text{なる}\varphi\ \text{がある。} \tag{136}$$

となります。少し複雑ですが、ゲージ同一視が働く空間の中で固定点を探せと言われると、どうしてもこのようになります。条件を書き連ねてみると

$$\epsilon_1 B_1 = [\varphi, B_1], \quad \epsilon_2 B_2 = [\varphi, B_2], \quad Ia = \varphi I, \quad -Ja + (\epsilon_1 + \epsilon_2)J = -J\varphi \tag{137}$$

となり、これが固定点の条件となります。この連立方程式を解くわけです。そして、これに加えて ADHM 方程式も考慮しなければなりません：

$$[B_1, B_2] + IJ = 0 \tag{138}$$

$$[B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta\ (> 0) \tag{139}$$

この非可換変形のパラメーター ζ を、正負は今どちらでもいいのですが、正とおくことにします。このような連立方程式を解くと、固定点がばらばらっと出てくるのですが、主張は、それらの固定点が k の箱で作られる n 組の Young 図形でラベルされるということです。その様子を、今から証明のスケッチを紹介しつつお話ししたいと思います。何か質問はありますか。

質疑応答

質問： 今、体積を計算する際に、2 種類の対称性でいくつか $\epsilon_1, \epsilon_2, a$ って言ったんですけども、体積を計算するときにそういうのって、どれぐらい持ってくればいいとかって・・・

回答： どれぐらい持ってくればいいか・・・えっと、多分、回転対称性とゲージ対称性を今フルに使ったので、固定点が孤立した集まりみたいになるんじゃないかと思います。もっと少ない済ませようとすると、そこまで簡単化しないです。

主張は、 固定点というのが k 個のボックスからなる n 個の Young 図形を作るということです。これを証明しようという話ですが、丁寧な証明は時間の関係でとてもできませんし、他の話も色々したい気がするので、証明のスケッチをすることにします。まず最初に、非可換変形のパラメーター ζ が正だと仮定して色々頑張ると、次のことが言えます。この事実を認めて先に進んでみるこ

とにしましょう。まず J がゼロでなければならず、それから、B_1 と B_2 が交換しなければならないということが頑張ると証明できます：

$$\underline{\text{ステップ (i)}}: \quad \zeta > 0 \ \Rightarrow\ J = 0, \quad [B_1, B_2] = 0 \tag{140}$$

これを示すのはけっこう大変なのですが、Young 図とあまり関係のない主張なので、ここでは説明を飛ばすことにします。これが言えたとして、これから言うことがこの Young 図でラベルされるのですが、それを書こうと思います。ADHM データの中で I というものに注目すると、これは $k \times n$ の行列なので、k 成分ベクトルが n 個並んでいると考えられます：

$$I_{(k\times n)} = \left(\vec{I}_1, \vec{I}_2, \cdots, \vec{I}_n\right) \tag{141}$$

このように $k \times n$ の行列を列ベクトル表示しました。そして、j 番目の列ベクトル $\vec{I}_j$ がもしノンゼロならば、φ という行列の a_j という固有値をもった固有ベクトルとなります。これは先ほど書いた (137) 式の一部

$$\epsilon_1 B_1 = [\varphi, B_1] \tag{142}$$

$$\epsilon_2 B_2 = [\varphi, B_2] \tag{143}$$

$$Ia = \varphi I \tag{144}$$

から分かります。これら 3 つ目の式を見ると、この I という行列があって、その j 番目の列ベクトルに φ が対応すると a_j 倍の自分自身になります。しかし、I の j 番目の列ベクトルがゼロベクトルの場合もありますので、もしノンゼロならばという仮定があります。

同様に、今 B_1^m、B_2^n が交換することを仮定しているのであまり順序は重要ではありませんが、もし

$$B_1^m B_2^n \vec{I}_j \tag{145}$$

というベクトルがノンゼロならば、やはり φ という $k \times k$ 行列の固有ベクトルになっていて、その固有値は

$$\varphi = m\epsilon_1 + n\epsilon_2 + a_j \tag{146}$$

となります。

これを認めて、次は 1 行目 (142) 式と 2 行目 (143) 式を見てみます。この B_1 というのが φ との交換子をとると ϵ_1 倍の B_1 を出します。つまり、ある φ の固有ベクトルに B_1 を掛けると、その固有値が ϵ_1 だけ大きくなるということです。B_1 の役割というのはこのようなもので、B_2 にも同様のことが言えます。従って、主張としては (146) 式になります。

$\underline{\text{ステップ (ii)}}$:

$$\begin{aligned} \vec{I}_j \neq 0 \ &\Rightarrow\ \vec{I}_j \text{は固有値 } a_j \text{をもつ} \varphi \text{ の固有ベクトル} \\ B_1^m B_2^n \vec{I}_j \neq 0 \ &\Rightarrow\ B_1^m B_2^n \vec{I}_j \text{は固有値 } m\epsilon_1 + n\epsilon_2 + a_j \text{をもつ} \varphi \text{ の固有ベクトル} \end{aligned} \tag{147}$$

そしてステップ (iii) は、これも非自明なステップなのですが、示すのが大変な割に Young 図とあまり関係が無いので、さらっと書いて認めることにすると

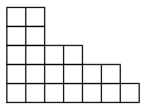
$$\underline{\text{ステップ (iii)}}: \quad \varphi\text{ のすべての固有ベクトルは今作ったもので尽きている。} \tag{148}$$

ということです。

まずこのような形で今解が求まったとしましょう。そうして、今求めた解について φ の固有値の分布を考えると、その固有値の分布は他でもない n 個の Young 図でラベルされます。n 個の Young 図の組を

$$\vec{Y} = \{Y_1, \cdots .Y_j, \cdots, Y_n\}, \tag{149}$$

のように $\vec{Y}$ と書きます。Young 図というのは



というような箱の集まりですが、これを Y_j とすると、左下隅の箱が $\varphi = a_j$ に対応します。では、中間ぐらいにある箱が φ のどのような固有値の固有ベクトルに対応するかというと、左下隅から右に n 個、上に m 個進んだ場合

$$\varphi = a_j + m\epsilon_1 + n\epsilon_2 \tag{150}$$

に対応することになります。

φ の固有値というのはこの Young 図のセットにすべて収まります。このようにして、インスタントンモジュライ空間の体積を計算するときの固定点は、Young 図の組でラベルされるということが言えました。

何か質問はありますか？

質疑応答

質問： Young 図ですので脚の長さに制限があると思うのですが、それはどのようにして決まるのですか？

回答： この Young 図の横と縦の長さの制限ですか？

質問： 絶対下の方が長いわけですよね？

回答： なるほど。例えば

$$\varphi = a_j + m\epsilon_1 + n\epsilon_2 \tag{151}$$

に対応する箱を考えたとします。この箱は

$$B_1^m B_2^n I_j \tag{152}$$

というベクトルに相当するわけです。これがノンゼロだと仮定したので、(151) 式の φ がある。じゃあ、この一個下の箱を考えてみましょう。この箱に B_2 をかけてやれば上の箱 ((151) 式の φ に対応する箱) に移る訳ですね。質問は、“ある箱があったらどうしてその下に箱がなければならないのか” ということだと思いますが、

$$B_1^m B_2^{(n-1)} I_j \tag{153}$$

は (152) 式がノンゼロだったら当然ノンゼロなわけですね。そういうルールで作られているので、自然に Young 図の形になります。

固定点が Young 図の組でラベルされるということが分かりました。次に、各々の固定点にに対して対称性が働くウェイトを計算する必要があります。そのステップを紹介したいと思います。

3.2.3 各固定点ごとのウェイトの計算

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{n,k}$ は複素 $2nk$ 次元ですが、それに対応して $2nk$ 個あるウェイト

$$\{W_1, \cdots, W_{2nk}\} \tag{154}$$

の計算をします。ここでモジュライ空間の体積が必要になるのですが、この体積

$$\prod_{i=1}^{2nk} W_i \tag{155}$$

を計算したいわけです。これと等価な情報として、キャラクター χ というのを考えます：

$$\chi \equiv \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{\delta}) = \sum_{i=1}^{2nk} \mathrm{e}^{W_i} \qquad \text{(キャラクター)} \tag{156}$$

ここで、δ はインスタントンモジュライ空間に作用する対称性を表しています。そして、モジュライ空間の中のどこかに固定点があり、その固定点上の接空間に δ が働きます。そのウェイトを計算するということです。

今、ゲージ不変性のある空間の上でのウェイトを計算したいので、e^{δ} ではなく

$$\mathcal{O} \equiv \mathrm{e}^{\delta - \delta_{\mathrm{gauge}}} \tag{157}$$

のトレースの計算を考えます。この $\mathcal{O}$ が ADHM データにどう作用するかというと

$$\mathcal{O}: \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ I \\ J \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\epsilon_1}\mathrm{e}^{-\varphi}B_1\mathrm{e}^{\varphi} \\ \mathrm{e}^{\epsilon_2}\mathrm{e}^{-\varphi}B_2\mathrm{e}^{\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\varphi}I\mathrm{e}^{a} \\ \clubsuit \end{pmatrix} \tag{158}$$

のように作用します。もう少し各成分について詳しく見るために、例として $(B_1)_{ij}$ について見てみると

$$(B_1)_{ij} \ \to \ (B)_{ij}\mathrm{e}^{\epsilon_1 - \varphi_i + \varphi_j} \tag{159}$$

となります。ですので

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{O}|_{B_1} = \sum_{ij} \mathrm{e}^{\epsilon_1 - \varphi_i + \varphi_j} \tag{160}$$

となります。これは

$$\mathrm{e}^{\epsilon_1}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\varphi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{\varphi} \tag{161}$$

とも書けます。

同じ計算が B_2、 I、 J にも出来て、その答えを足すことで求めたいものが導出できるのですが、これらの項を全部足したものというのは、実際に必要なウェイトの数よりも大きいものが出てきてしまいます。なぜかというと、実際のモジュライ空間は B_1、B_2、I、J のうち、ADHM 方程式を満たすものに限らなければならなかったからです。それに加えて、ゲージ等価性も考慮しなければなりません。従って B_1、B_2、I、J のゆらぎのうち、ADHM 方程式を満たさない方向へのゆらぎの寄与を引かなければならないということになります。当然、ゲージ等価性の方向も引かなければなりません。

それをどうやって引くかということを次に考えましょう。ADHM 方程式 $\mu_{\mathbb{C}}$ への $\mathcal{O}$ の作用は

$$\mathcal{O}: \begin{pmatrix} \mu_{\mathbb{C}} \\ U \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\epsilon_1+\epsilon_2}\mathrm{e}^{-\varphi}\mu_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\varphi}U\mathrm{e}^{\varphi} \end{pmatrix} \tag{162}$$

となります。ですので、$2nk$ 個のウェイトについて計算しようと思ったら、このように $\mathrm{Tr}\,\mathcal{O}$ を B_1、B_2、I、J 上で評価した結果から、$\mathrm{Tr}\,\mathcal{O}$ を $\mu_{\mathbb{C}}$、U 上で評価した結果を引けば良いということになります。

今まで述べたことのあらましは (色々な計算の後)

$$\begin{aligned}\chi &= \sum_{i=1}^{2nk} \mathrm{e}^{W_i} = \mathrm{Tr}\,\mathcal{O}|_{(B_1,B_2,I,J)-(\mu_{\mathbb{C}},U)} \\ &= \cdots = -(1-\mathrm{e}^{\epsilon_1})(1-\mathrm{e}^{\epsilon_2})\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{\varphi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\varphi} + \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\varphi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{a} + \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{\varphi}\end{aligned} \tag{163}$$

ということになります。ここに出てきた正の寄与と負の寄与の相殺によって、最終的には $2nk$ 個のウェイトの寄与になるということです。その結果を導出したのが Nakajima-Yoshioka の仕事です。この結果を使うと、体積の計算に必要な

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{2nk} W_i} \tag{164}$$

が計算できることになります。つまり、まず固定点が Young 図を使って計算できます。そして、求めたそれぞれ固定点の寄与をこの式を使って計算すると、モジュライ空間の体積が計算できるというわけです。

3.2.4 Nekrasov 分配関数

最後に、Nekrasov のインスタントン分配関数 $Z_{inst}\left(a,\ \epsilon_1,\ \epsilon_2,\ q\right)$ がどのようにこの結果から定義されるかを考えましょう。先ほどまでの結果を用いると、$Z_{\mathrm{inst}}\left(a,\ \epsilon_1,\ \epsilon_2,\ q\right)$ は

$$\mathrm{vol}\mathcal{M}_{n,k} = \sum_{\{Y\}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{2nk} W_i\left(\{Y\}\right)} \tag{165}$$

$$Z_{\mathrm{inst}}\left(a,\epsilon_1,\epsilon_2,q\right) = \sum_{k\geq 0} q^k \mathrm{vol}\mathcal{M}_{n,k} \tag{166}$$

となります。

何か質問はありますか？

質疑応答

質問： 今経路積分の意味で分配関数 $Z_{\mathrm{inst}}\left(a,\epsilon_1,\epsilon_2,q\right)$ を考えるといったとき、ゲージ場のみを積分していると考えればいいですか？

回答： この分配関数が 4 次元のゲージ理論の分配関数からどのように出てくるかは今考えているところですので、もう少し待ってください。

では、一旦きりがいいのでここで休憩を挟みましょう。

3.3 位相的ゲージ理論 (Witten)

先ほどの 1 時間半で Nekrasov 分配関数というものを、インスタントンモジュライ空間の体積の母関数として与えました。そして、Nekrasov はそのインスタントン分配関数を定義したのですが、それがどのようにゲージ理論側の経路積分から出てくるか、ということも考えます。どんなゲージ理論から出てくるかというと、位相的ゲージ理論というものから出てくるのですが、それがどんなゲージ理論であるかというのを紹介します。位相的ゲージ理論というのは、元々 Witten が発明した位相的な場の理論です。それをどのようなモチベーションで発明したかというと、それより少し前に Donaldson という数学者が 4 次元多様体の新しいトポロジーの理論を作りました。どのように作ったかというと、4 次元の曲がった空間の上にゲージ場を置き、そのゲージ場にインスタントン方程式を課し、そしてその解のモジュライ空間を考えて新しいトポロジーを作ろうというわけです。恐らくそのような研究があったようなのですが、僕は数学者ではないのでよく知らないのです。Donaldson のそのような研究があって、Atiyah という人が、Donaldson の研究結果を場の理論を使って理解しようとしたらどのような話になるのかと Witten に尋ねたところ、Witten が位相的ゲージ理論を発明したそうです。従って、インスタントンモジュライ空間のコホモロジーに関わる量を、場の理論の経路積分を使って表すことができるという面白い理論になっています。それを 4 次元の $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論からどのように作るかと言いますと、位相的ツイストという方法を使います。

3.3.1 $\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論の位相的ツイスト

位相的ツイストというのがどういう操作かと言いますと、この話でも簡単のためにハイパー多重項のないベクトル多重項のみの理論を考えるとして、ベクトル多重項にどんな場がいたか思い出しますと

$$A_m, \quad \phi, \quad \bar{\phi}, \quad \lambda_{\alpha A}, \quad \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{A}, \quad D^A_B \tag{167}$$

のような場がありました。全て Lie 代数に値を持っています。インスタントンの問題を考える際には、ミンコフスキー符号ではなくユークリッド符号で考えます。そうすると Lorentz 不変性でなく回転不変性になります。つまり、場は $\mathrm{SO}(1,3)$ の表現ではなく $\mathrm{SO}(4)$ の表現になります。点つきスピノルと点なしスピノルは、$\mathrm{SO}(4)$ を $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ に分解した時のそれぞれの二重項になっている、そういうスピノルになっています。$\mathcal{N}=2$ の理論には R 対称性というものがありました。そのうちの $\mathrm{SU}(2)$ の R 対称性に着目します。$\mathrm{SU}(2)$ の R 対称性は $\lambda_{\alpha A}$ と $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{A}$ を R 対称性の二重項とし、D は R 対称性の三重項です。この A という添え字が $\mathrm{SU}(2)$ の添え字なのですが、ツイストというのは、短い説明で済ませると、この A を点付きスピノルの添え字とみなすということです。そうすると $\lambda_{\alpha A}$ と $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{A}$ というのはスピノル量かと思われたのですが、この A というのを点つきスピノル添え字に変えてしまうと、スピノル表示ではなくなってしまうのです。どのようなこと

かと言うと、$\lambda_{\alpha B}$ の B を点付きスピノル添え字に変えてしまうと

$$\lambda_{\alpha B} \to \lambda_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}\,\lambda_m \tag{168}$$

のようにベクトルとなります。従ってカイラルスピノルがベクトルに変化します。それから $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{B}$ の B を点付きスピノル添え字にすると

$$\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{B} \to \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,\eta + (\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,\chi^{+}_{mn} \tag{169}$$

のように、スカラー η と自己双対テンソル χ_{mn} で表されます。元々の超対称ゲージ理論には 8 個の超対称性電荷、$\mathcal{N}=2$ の 4 次元の超対称性があったのですが、この位相的ツイストをすると 8 個の SUSY $Q_{\alpha A}$, $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{A}$ のうち

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} Q \tag{170}$$

という、たった 1 成分の超対称性電荷のみに着目し、この Q の下で不変な理論と思って、ゲージ理論を書き換えるという操作を考えます。これが位相的ゲージ理論と言えます。そして D^{A}_{B} という補助場もありました。

$$D^{A}_{B} \to D^{+}_{mn} \tag{171}$$

にのように、前の式と同様にして自己双対テンソルに化けます。この 8 個の SUSY のうち 1 個の SUSY に着目し、その下で色々な場がどのように変換するかというと、超対称変換とかはすごく簡単になってしまって、例えばこの Q の下で

$$\begin{aligned} Q : A_m &\to \lambda_m \to D_m\phi \\ \bar{\phi} &\to \eta \to i[\phi,\bar{\phi}] \end{aligned} \tag{172}$$

となります。この変換を見て気付く人がいるかもしれませんが、Duistermaat-Heckman の公式を場の理論のように書き換えるとき

$$dx \to \psi \tag{173}$$

のように書き換えるという話をしました。その話を思い出すと、この λ_m というのは、A_m をある空間の座標と思うと、それに対応する微分形式と思うことができます。従って先ほどした、dx を ψ で置き換えてコホモロジー積分を場の理論のように書き換える、という話と同じ話にどんどん近づいていきます。なので位相的ゲージ理論というのは、ゲージ場の配位空間の上でのコホモロジー、この Q という演算子で表現されるコホモロジーの理論を考えていく、そういうことになります。でも、この Q という演算子の二乗は 0 になっていなくて、これは A というゲージ場の ϕ をゲージパラメーターとするゲージ変換

$$\begin{aligned} Q : A_m &\to \lambda_m \to D_m\phi = \mathrm{gauge}(\phi)A_m \\ \bar{\phi} &\to \eta \to i[\phi,\bar{\phi}] = \mathrm{gauge}(\phi)\bar{\phi} \end{aligned} \tag{174}$$

で変換したものです。

言いたいことは

$$Q^2 = \mathrm{gauge}(\phi) \tag{175}$$

ということで、即ち Q^2 は 0 ではなく ϕ をパラメーターとするゲージ変換になっています。(172) 式の変換性の中にまだ登場してない場がいますが、その変換性は

$$\chi^+_{mn} \;\to\; D^+_{mn} \;\to\; i[\phi, \chi^+_{mn}] \tag{176}$$

のようになります。χ^+_{mn} と D^+_{mn} は同じように、このスカラー超対称電荷 Q についてペアを成しています。A_m と λ_m がペア、$\bar{\phi}$ と η がペアになっていて、χ^+_{mn} と D^+_{mn} がペアになっているのですが、A_m と λ_m や、$\bar{\phi}$ と η のペアは親がボゾンで娘がフェルミオンになっていて、一方、χ^+_{mn} と D^+_{mn} のペアは親がフェルミオンで娘がボゾンという、普通と逆のペアになっています。上の 2 つ (A_m と λ_m、$\bar{\phi}$ と η) は A_m を dx、$\bar{\phi}$ を ψ と同一視するという話がうまくいくのですが、こちら (χ^+_{mn} と D^+_{mn}) はその逆になっているので、このペアというのは普通の座標とは違う役割、つまり反対の役割をします。上 (A_m と λ_m、$\bar{\phi}$ と η) は積分を考えたい空間の上の座標です。そして、下 (χ^+_{mn} と D^+_{mn}) はその空間の座標を減らす役割をします。統計が逆だからです。どのように減らすかというと、予想されるかもしれませんが、こちらはゲージ場の成す空間全体に

$$F^+_{mn} = 0 \tag{177}$$

を課すラグランジュ乗数のような役割をし、その結果積分しないといけない次元が下がるというわけです。なのでこの位相的ツイストを行うと、位相的ゲージ理論というのは、場の理論の経路積分からインスタントンモジュライ空間上の積分を行う仕組みになっています：

$$\text{Path integral} \;\to\; \left(F^+_{mm} = 0/\mathrm{gauge}\right) \tag{178}$$

何か質問はありますか。

質疑応答

質問： コホモロジーのところが理解できなかったんですけど、コホモロジーなら $Q^2 = 0$ だと思うんですけど、$Q^2 = \mathrm{gauge}(\phi)$ というのはどういうことなんですか？

回答： コホモロジーっていうときは二乗してゼロになる演算子が存在するときのことを言いますね。この場合は二乗してゼロになってないですけど、ゲージ変換になっています。ゲージ不変な演算子全体を考えると、その中ではこの Q についてのコホモロジーを定義できます。

もう少し位相的ゲージ理論の説明をしていきます。$\mathcal{N} = 2$ の超対称性ゲージ理論から出発し、脚の付け替えだけを行うことで位相的ゲージ理論が出てきました。この位相的ゲージ理論におい

ては、専ら Q 不変な演算子の期待値に興味を感じることにします。この制限がないと、Q 不変でない演算子の性質も合わせて考えるとすると、元の超対称性ゲージ理論に戻ってしまいます。そして、興味のある演算子を Q 不変な演算子に限ると、位相的になって、その枠内では何か演算子の Q 変換として書けるような演算子をゼロと見なします。先ほど話したようにコホモロジーの議論ができるというわけです。Q 不変な演算子に限った時は Q 完全な演算子は忘れて構いません。特に面白いのは、この理論のストレステンソルは Q 完全であるということです。ということは、この場の理論の物理量は考えている空間の計量に依らず、それ故、位相的ゲージ理論と呼ぶわけです。位相的ゲージ理論だから、きっと Donaldson が展開した多様体の新しいコホモロジー理論を再現できる仕組みになっているんだと思います。

何か質問はありますか。

質疑応答

質問： その計量に依らないっていうのは、計量で変分を取った時に、T_{mn} が出てきてそれが Q 完全だから、その経路積分で計算するとゼロになっているから・・・

回答： そう、そう。

Nekrasov は Ω 変形というものを導入しましたが、それが位相的ゲージ理論の中でどのように実現できるか、そのあらすじをこれから説明します。まず元の Yang-Mills 理論の作用を取ります。新しい位相的ゲージ理論の変数で書くと、とても簡単になって

$$S = Q(\cdots) - 2\pi i\tau \dot{k} \tag{179}$$

のようにインスタントン数 k を用いて書けます。従って、Q 不変な物理量の期待値は

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_{k\geq 0} e^{i\pi i\tau k} \cdot (\text{integral on } \mathcal{M}_{k,n})_{\mathcal{O}} \tag{180}$$

のようにインスタントン数 k についての足し上げになります。$e^{i\pi i\tau k}$ の部分は超対称 Yang-Mills 理論の作用から来ています。それから、それに掛かっているインスタントンモジュライ空間上の積分、そしてその積分は今興味のある演算子に依っています。一般の物理量の経路積分表示はこのようなものに帰着します。無限次元の経路積分から出発しているのですが、その経路積分はインスタントンモジュライ空間の上に局所化します。一般的な公式はこのようになるのですが、この公式に則り、Nekrasov はインスタントンモジュライ空間の体積の母関数を表す経路積分がどのようなものかを考えました。

3.3.2 インスタントンモジュライ空間の体積の母関数

Nekrasov のインスタントン分配関数というのは、インスタントンモジュライ空間の体積の母関数です。なので、それを経路積分から計算しようとすると

$$\mathcal{Z}_{\text{instanton}} = \langle e^{\hat{\omega}} \rangle \tag{181}$$

のように、何かある演算子の期待値を計算しないといけないのですが、この演算子というものが何かと言うと、ゲージ場の配位空間のシンプレクティック 2 形式 $\hat{\omega}$ を持って来れば良いです。そのシンプレクティック 2 形式はフェルミオンの 2 次式になってるはずだと考えます。しかも、シンプレクティック 2 形式は閉でなければならないので、Q 閉である必要があります。そんなものがあるかと考えますと、もっともらしいものはありまして、$\hat{\omega}$ は

$$\hat{\omega} = \int d^4x \ \mathrm{Tr}[\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + \phi(F_{12} + F_{34})] = \int \omega \wedge \mathrm{Tr}[\lambda \wedge \lambda + \phi F] \tag{182}$$

のように書けます。ここで ω は $\mathbb{R}^4$ 上のシンプレクティック 2 形式

$$\omega = dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4 \tag{183}$$

です。この体積の定義には 1 つ問題があって、先ほどモジュライ空間の体積を計算する際に言った通り、これは素朴な体積の定義になっていて、赤外発散の問題を解決していないわけです。なので、先ほどの有限次元 Ω 変形を導入したのですが、同じ変形を経路積分形式の中でも導入しないといけないわけです。なので Nekrasov は位相的ゲージ理論の Ω 変形というのを考えました。

■Ω 変形

位相的ゲージ理論の Ω 変形、詳しくは時間の都合で書けないのですが、位相的ゲージ理論のうまい変形で、スカラー超対称電荷の二乗が

$$Q_{\text{new}}^2 = \text{gauge}(\phi) + \epsilon_1 J_{12} + \epsilon_2 J_{34} \tag{184}$$

となるものがあります。詳細を紹介することはできないのですが、こういうものがあります。この Q_{new} は先ほどの Q とは違うので "new" が付いています。こうすると、この新しいスカラー超対称電荷の下で、あのシンプレクティック 2 形式は不変ではないのですが、不変になるように修正することができます：

$$Q_{\text{new}}(\hat{\omega} - \hat{H}) = 0 \tag{185}$$

何を足すかと言うと

$$\hat{H} = \frac{1}{8} \int d^4x \, H(x) \cdot \mathrm{Tr}[\epsilon^{klmn} F_{kl} F_{mn}] \tag{186}$$

というものを足します。ここで、この $H(x)$ は

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[\epsilon_1(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon_2(x_3^2 + x_4^2) \right] \tag{187}$$

というものです。$\hat{\omega}$ を $\hat{H}$ だけずらしなさいということは、このような演算子の真空期待値

$$\langle e^{\hat{\omega}-\hat{H}} \rangle_{(\mathrm{new})} \tag{188}$$

を計算するということになります。これを Ω 変形された理論の中で評価します。そうすると、前に出てきた Nekrasov のインスタントン分配関数

$$\langle e^{\hat{\omega}-\hat{H}} \rangle_{(\mathrm{new})} = \mathcal{Z}_{\mathrm{inst}} \tag{189}$$

を経路積分の言葉を使って再現したことになっているはずです。

3.3.3 Nekrasov の分配関数

そして、Nekrasov は位相的ゲージ理論の枠内で、モジュライ空間の体積の母関数がこのように再現できると言っただけではなく、このように再現できるので、Nekrasov の分配関数の適当な極限を取ると、ゲージ理論のプレポテンシャルが再現できるという話も示しました。それを紹介して、何の説明にもなってない気がしますが、位相的ゲージ理論の説明を終わりたいと思います。

■Nekrasov の公式

Nekrasov は、演算子の期待値

$$\langle e^{\hat{\omega}-\hat{H}} \rangle \tag{190}$$

はゲージ理論の τ を $2\pi i\tau \to 2\pi i\tau + \omega + H(x)$ と置き換えて経路積分した結果と解釈することもできる、という主張をしました。τ というものを 2 形式でずらしなさいということは、すごくふざけた主張だと思いますが、この主張を正確に説明しようとすると、位相的ゲージ理論というのは、$\mathcal{N}=2$ の超場形式というものを使って書き直す作業がどうも必要になる気がするので、その詳しい話は説明できませんが、τ というものに時空の座標に依存するような変形をし、そして ω を加え、そうした後で経路積分してみると Nekrasov の分配関数が出る、という主張です。それを信じると、インスタントン分配関数というのは $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ という極限で

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{inst}} \underset{\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0}{\to} \exp\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}(\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} + \mathcal{O}(\epsilon_1,\epsilon_2)) \tag{191}$$

となるということを Nekrasov は主張しました。この $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ というのは、プレポテンシャルからループによる寄与を差し引いた、インスタントンからの効果のみを含んだものになります。インスタントン分配関数から、理論のパラメーターをゼロに持っていく極限を取ると、ゲージ理論のプレポテンシャルが読み取ることができる、という主張です。これを何とか夏の学校でもう少しまともに説明できるかと思ったのですが、色々な制限があって、これが僕の精一杯ということで勘弁していただきたいと思います。Nekrasov の原論文にはもう少し詳しい説明があると思いますので、興味のある方はご覧になってください。

何か質問はありますか。Nekrasov の分配関数のあらましと位相的ゲージ理論のあらましなどについて。

質疑応答

質問： ϵ_1, ϵ_2 とかっていうのは、物理的な解釈ってできるんですか？その τ の変換で、Yang-Mills の作用は変わるんですか？

回答： ええ、Yang-Mills の作用は変わりますよ。Yang-Mills 作用の最初に $1/g^2$ っていうのが掛かりますよね。その分の影響を受けている。

質問： その時 ϵ_1, ϵ_2 とかっていうのは、物理的な解釈って・・・

回答： 物理的な解釈・・ϵ_1, ϵ_2 は H に入っているので、結合定数は空間依存性を持っているんですけれども、空間依存性自体が ϵ_1, ϵ_2 に依ってますね。

4　球面上の分配関数

ここからは、2007 年に Pestun という人が $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の 4 次元球面上の分配関数と Wilson ループの期待値を厳密に導いたという話をして、周辺の発展の話題を時間が十分あればしたいと思います。ここまでは色々な量が厳密に計算できるという話をしてきましたが、専ら理想的なゲージ理論とかコホモロジーとかそういう場面での厳密な計算の結果でした。しかし Pestun がやったのは、球面の上に位相的ではない普通のゲージ理論を乗せて、その経路積分を厳密に行う、そういうすごい華々しい発見で、それが最近の超対称ゲージ理論の発展のきっかけになったわけです。

4.1　球面上の SUSY

今までは平坦な空間の上で超対称を議論してきました。一方、ここからは曲がった空間での超対称をどのように定義するのかという話です。色々な場の理論について同じようなことが言えると思いますが、4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論は、物質場の質量がゼロの時、古典的には共形不変であることが知られています。共形不変というのはスケール不変よりもより強い不変性で、どんな不変性かということを書くと

$$S[g_{\mu\nu},\{\Phi_I\}]=S[e^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu},\{e^{-w_I\sigma(x)}\Phi_I(x)\}] \tag{192}$$

ということです。作用積分を曲がった空間上で考えようとすると、計量が必要になります。計量については経路積分しないので、他のダイナミカルな場と分けて書くことにします。$\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の作用は (192) 式のような形であり、それが計量をこのように $e^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu}$ へ変換をしたとき、それに応じてダイナミカルな場 $\{\Phi_I(x)\}$ に $e^{-w_I\sigma(x)}$ を掛けることで対称性が保たれます。即ち、計量を座標依存性のあるスケールでスケール倍をしても、ダイナミカルな場をそれに応じてスケール倍すれば、全体の作用積分は不変に留まるというような不思議な性質を持っています。この w_I というのを Φ_I の共形ウェイトと言います。

それから球面のもつ特別な性質が、平坦空間と共形同値、より短くいうと共形平坦というものです。どういう意味かというと、球面の計量を次のように書けます：

$$ds^2_{S^4}=f(x)\cdot\sum_{i=1}^{4}dx_idx_i \tag{193}$$

後ろのところだけ見ると平坦な空間です。これに x に依存する関数を掛けてやるという形で S^4 の計量が書けます。これが共形平坦ということの定義です。なので、共形変換を除いて、球面と平坦空間は一緒だと言えます。従って、平坦空間の理論が平坦空間の共形不変が知られていたら、それを共形変換を使って球面上の理論に写像することが出来ます。そのため、球面上の超対称というものは、この共形変換を使って平坦空間の SUSY から写像することが出来ます。

4.1.1 曲がった空間上のスピノル

それで、曲がった空間上の SUSY を真面目に作ろうと思うと、そもそも曲がった空間のスピノルをどのように定義するかという話が必要になります。その話をしたいと思います。曲がった空間上でスピノルがどのように変換するかとか、スピノルのディラック作用をどのように書くかとかいう話です。これからの話は 4 次元球面の話をするので、計量の符号はユークリッド空間の符号を専ら考えます。

曲がった空間の計量を g_{mn} としましょう。ここで、曲がった空間上にスピノルを考えるときには、まず多脚場 (vielbien) というものを導入する必要があります。多脚場は $e_m^a(x)$ のように書かれ、計量テンソルが

$$g_{mn} = e_m^a e_m^b \delta_{ab} \tag{194}$$

のように書けるというのが多脚場の定義です。ここに δ_{ab} が来ているのはユークリッド空間の符号であるからで、もしミンコフスキー空間の符号の話に興味がある場合は、ミンコフスキー空間の計量 η_{ab} が来るわけです。これが多脚場です。

それで、スピノルを考えようとするとまずこの多脚場を導入する必要があります。ここで計量が与えられたときに、多脚場の選び方は一意ではなく任意性があります。その任意性がどのようなものかというと

$$e_m^a(x) \text{ と } \tilde{e}_m^a(x) = \Lambda^a_{\ b}(x) e_m^b(x) \text{ は同じ } g_{mn} \text{を与える} \tag{195}$$

というものです。ただし、$\Lambda^a_{\ b}$ は以下の条件に従わなければなりません：

$$\delta_{ab} \Lambda^a_{\ c} \Lambda^b_{\ d} = \delta_{cd} \tag{196}$$

この任意性のことを局所ローレンツ対称性と言います。それで曲がった空間上のスピノルですが、この局所ローレンツ変換の下でスピノルとして振る舞います。まず、局所ローレンツ変換の無限小版を書きますと、多脚場は以下のように変換します：

$$\text{無限小版：} \ \delta e_m^a = \omega^a_{\ b}(x) e_m^b(x), \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \tag{197}$$

この $\omega^a_{\ b}$ というのは、添え字を下げると反対称テンソルになります。無限小のローレンツ変換が多脚場をこのように変換するとき、スピノル場は以下のように変換を受けます：

$$\delta\psi = \frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi \tag{198}$$

この変換性が曲がった空間上のスピノルの定義となります。では次に、スピノルがこのように定義されたときに、曲がった空間上のディラックラグランジアンをどう書くかを考えます。

普通の平坦空間上のディラックラグランジアンは皆さんがご存知の通り、無質量の場合は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^m\partial_m\psi \ (\mathbb{R}^4) \tag{199}$$

のように書けますが、曲がった空間のディラックラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^a e_a^m \left[\partial_m + \frac{1}{4}\omega_m^{ab}\gamma_{ab}\right]\psi \tag{200}$$

となります。即ちガンマ行列が来て、それに多脚場の逆行列を掛け、そしてさらに、普通の偏微分ではなく、スピン接続と呼ばれるゲージ場 ω_m^{ab} をここに入れる必要があって、(200) 式のようになります。スピン接続は局所ローレンツ変換に対応するゲージ場になっています。このスピン接続は、このラグランジアンが局所ローレンツ変換で不変であることを保証するためにどうしても必要なものになります。このラグランジアンに局所ローレンツ不変性を要請すると、スピン接続の変換性が多分決まるはずです。このスピン接続は独立な場ではなく、普通は多脚場とその逆、そしてその微分で書けるということが知られています。曲がった空間上でスピノルを定義しようと思ったら、このような手順をとりあえず踏まないといけません。

曲がった空間上でこのようにしてスピノルを定義するのですが、では曲がった空間上で SUSY をどのように定義するかというと、Killing スピノルと呼ばれるものを使って特徴付けます。

4.1.2 Killing スピノル

色々と超対称性を保つ空間の例を勉強しながら、超対称がどのようなスピノルで特徴付けられるかを調べて議論します。まず、平坦空間で $\mathcal{N}=2$ の超対称性の話をしているときは、定数スピノル $(\xi_{\alpha A}, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}_A)$ でパラメーター化しました。では、曲がった空間での SUSY はどうでしょうか。色々と曲がった空間の例を書こうと思いますが、弦理論で特によく出てくる、SUSY を保つ曲がった空間の例が K3 曲面や Calabi-Yau 多様体であり、これを考えてみます。この空間が保つ SUSY を特徴付ける方程式が Killing スピノル方程式

$$D_m\xi = \left[\partial_m + \frac{1}{4}\omega_m^{ab}\gamma_{ab}\right]\xi = 0 \tag{201}$$

です。このスピノルが何成分かというのは空間の次元による話です。Killing スピノル方程式の解で超対称性が特徴付けられます。それから先ほど言ったように、D 次元の球面も平坦空間と共形同値なので、超対称を乗せることが出来ると思えます。球面の上にはこのような方程式に従うスピノルは無いですが、このように少し形の違う Killing スピノル方程式に従うスピノルがあります。球面のサイズを l とすると

$$D_m\xi = \frac{\pm i}{2l}\gamma_m\xi \tag{202}$$

のように、左辺は同じですが、右辺はゼロではなく、元のスピノルにガンマ行列を掛けたものになります。このような Killing スピノル方程式に解が存在して、それが超対称を特徴付けます。ですが、このようなことを延々と話してもシステマティックな感じがしないので、ある空間が超対称を保つということはどのような Killing スピノル方程式を解けばいいか、という疑問が当然生じるのではないかと思います。実は、当然の疑問に基づいた発展が近年のゲージ理論における話題の 1 つでした。その 1 つに、「ある空間が SUSY を保つ一般的な条件は何か、即ち Killing スピノル方程

式のフルな一般形は何か」という議論がありました。さらに、その問題が解かれたとして、じゃあ、「Killing スピノルが存在するための空間に対する一般的な条件は何か」ということが色々と議論されました。

近年の話題

1. Killing スピノル方程式の一般形は何か？
2. Killing スピノルが存在するための条件はどのような条件か？

何が面白いかとおっしゃる方がいらっしゃるかも知れませんが、実は Pestun が 4 次元球面の上のゲージ理論の分配関数の厳密公式を与えて、それはそれですごかったのですが、すごかったのみならず、後にその厳密な公式がきっかけになって、4 次元場の理論と 2 次元場の理論の間の思いがけない対応が見つかったのです。俗に AGT 関係式と呼ばれるものですが、そんなものが見つかってすごく話題になりました。それで 4 次元球面上だけではなく、色々な球面とか他の曲がった空間上にゲージ理論を実現し、色々な量を計算することが出来れば、すごい発見に繋がるかもしれないという期待もあります。

先ほど挙げた近年の話題のうち、1 つ目の問題は答えが落ち着きまして、Festuccia と Seiberg が、フルな一般化をしようと思った場合には超重力理論を参照すれば良いと言いました。

どうやって参照すれば良いかを説明しようと思います。そもそも、皆さんは超重力理論がどんな理論かを知っていますか。アインシュタインの重力理論は一般座標不変な理論ですが、超重力理論というのはそれを超対称に拡張した理論です。なので、座標に依存する超対称性変換というものがあって、その下で不変な理論になります。そしてこれまでの僕の講義は、座標に依存しない超対称性変換の下で不変な理論を専ら使っていて、その座標に依存しない SUSY の下で変換する多重項とか、そのような話をしてきましたが、超重力理論には重力子を含む多重項があって、それを超重力多重項と言いますが、どのような場から成っているかと言いますと

$$\text{超重力多重項}:\ (e_m^a,\ \psi_{\alpha m}^A,\ \bar{\psi}_{mA}^{\dot{\alpha}},\cdots) \tag{203}$$

というものです。多脚場があって、多脚場の超対称性パートナーや、カイラルスピノルと反カイラルスピノルがあり、そして、他にも何か興味のある次元と超対称性の多重項に応じて、(203) 式の $\cdots$ の辺に色々な補助場が現れるかもしれません。多くの場合はあります。

それで、座標に依存する超対称性変換というのが、これらの場合どのように作用するかというのを書いてみると、座標に依存する SUSY を局所的な超対称性 (local SUSY) と呼んだりしますけど、局所的な超対称性は、例えば多脚場を

$$\text{local SUSY}:\ \delta e_m^a = \clubsuit\, \xi^A \sigma^a \bar{\psi}_{mA} + \spadesuit\, \bar{\xi}_A \bar{\sigma}^a \psi_m^A \tag{204}$$

のように変換したり、それからグラヴィティーノの変換則は、少し真面目に 4 次元の $\mathcal{N}=2$ の超

重力理論の場合を書こうとすると

$$\delta\psi_{\alpha mA} = \partial_m \xi_{\alpha A} + \frac{1}{4}\omega_m^{ab}(\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta}\xi_{\beta A} + i\xi_{\alpha B}V_{m\ A}^{\ B} + T^{kl}(\sigma_{kl}\sigma_m)_{\alpha\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta}_{\ A} + \cdots \tag{205}$$

$$T^{kl}:\ \text{反自己双対テンソル} \tag{206}$$

のようになります。実際にはまだ続くのですが、とりあえず残りは省略することにして、このような形の変換性に従うわけです。それで出発点をここで、補助場が色々とあるかもしれないという話をしたのですが、例えば 4 次元の $\mathcal{N}=2$ の超重力理論では、そこに R 対称性をゲージ化したゲージ場が出て来ますし、あとここに何か反自己双対なテンソルが出て来ます。そして、4 次元の $\mathcal{N}=2$ の例ではこのような場は全て補助場と呼ばれるもので、上のようなものになります。なので、曲がった空間上で超対称を考えようと思うと、まず、計量を曲がった計量に選ぶだけではなく、このような補助場を導入するという可能性も色々と考えなければならないというわけです。

それで、超重力理論というものを考えると、計量の中に色々なボソン場があり、g_{mn}、$(V, T, \cdots)$ をうまく選ぶと、このグラヴィティーノ変換則がゼロという式 $\delta\psi_{mA}=0$ が、$\xi_{\alpha A}$、$\bar\xi^{\dot\alpha}_A$ の方程式として非自明な解を持つ場合があります。そして、そのような場合に、その選んだ計量と補助場は超対称なバックグラウンドというわけです。このグラヴィティーノの SUSY 変換がゼロという式を超対称パラメーターの方程式として解いたときに、その非自明な解を Killing スピノルと呼びます。Festuccia と Seiberg が唱えた、Killing スピノル方程式のフルな一般化というものは超重力理論を参照しなさいというものですが、そうするとグラヴィティーノの SUSY 変換則がゼロにする方程式を解きなさいということになります。

では、Festuccia と Seiberg の唱えたことに基づいて見つかった実例を 1 つ紹介したいと思います。先に紹介したように、丸い球面には Killing スピノルがたくさんありますが、球面を歪ませたときに Killing スピノルがあるかという問題を考えます。それは僕が考えたのですが、球面を楕円体 (ellipsoid) にするということです。楕円体というのは形を以下のものに限って考えます。r とか l というのは時空の長さですが、このような式で表される曲面が平坦な $\mathbb{R}^5$ の中に埋め込まれている、これが楕円体の式です：

$$\text{楕円体}:\ \frac{x_0^2}{r^2} + \frac{x_1^2+x_2^2}{l^2} + \frac{x_3^2+x_4^2}{\tilde{l}^2} = 1 \tag{207}$$

ここで、「このような空間は ($\mathcal{N}=2$ の)SUSY を保つか、Killing スピノルがあるか」ということを、我々はある理由があって考えたわけです。そして答えは「イエス」でした。補助場 (V, T) をうまく選ぶと、Killing スピノル方程式の解 $(\xi, \bar\xi)$ がたった 1 つ出てきます。そして、元々の Pestun の業績は丸い球面の上のゲージ理論の分配関数を綺麗に計算したものですが、球面を歪ませた後に SUSY が 1 個残るので、その SUSY を使って同じ計算を実行することが出来ます。そこで、今後の議論は楕円体の話をすることにします。

これからする話では、この Killing スピノル方程式の解、Killing スピノルがどんな性質を満たすかというのを紹介します。Killing スピノル方程式の解 $(\xi, \bar\xi)$ を詳しく調べると、この楕円体に北

極と南極という特別な点があって

$$\text{北極：}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (+r,\ 0,\ 0,\ 0)\ \to\ \xi_{\alpha A} = 0 \tag{208}$$

$$\text{南極：}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-r,\ 0,\ 0,\ 0)\ \to\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}_A = 0 \tag{209}$$

となります。北極ではカイラルな成分が全てゼロで、南極では反カイラルな成分がゼロになっています。それで、この上に色々なゲージ理論を乗せて分配関数を計算するのですが、そのときに超対称ゲージ理論に超電荷 Q が 1 つあり、Duistermaat-Heckman 公式を使って体積を計算するときには Q^2 が重要でした。Q^2 というのはゲージ理論の計算でも重要で、それを書いておくと

$$\text{超電荷}\ Q\text{：}\ Q^2 = \epsilon_1 J_{12} + \epsilon_2 J_{34} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) J^3_{\mathrm{SU}(2)_R} + (\cdots),\quad \epsilon_1 = \frac{1}{l},\quad \epsilon_2 = \frac{1}{\tilde{l}} \tag{210}$$

となります。残りは楕円体の上にどのようなゲージ理論を乗せるかにもよるので、ここでは書けないのですが、Ω 背景とよく似た式があります。この ϵ_1 というのは楕円体の定義の中に入っている l を使っていて、同様に ϵ_2 には $\tilde{l}$ を使っています。以降、楕円体の上で Killing スピノル方程式のどのような解が見つかったかを述べ、その解を元にゲージ理論の厳密な分配関数を局所化原理に基づいて計算します。今まで超重力理論の話をしたのですが、これからゲージ理論の話になります。では、分配関数を球面や楕円体の上でどのように計算すればいいか見ていきます。

4.2 分配関数の計算

では、分解関数の上の楕円体の上での計算法について考えてみましょう。分配関数なので、無限次元の積分をやるということになります。どのような場合について積分するかというと、今簡単のためにベクトル多重項だけの SYM 理論の場合を考えると

$$Z \equiv \int D\left(A_m,\ \phi,\ \bar{\phi},\ \lambda_{\alpha A},\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha} A},\ D_{AB}\right) \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{SYM}}} \tag{211}$$

のようにたくさんの場があります。そして、楕円体の上には超対称性があるということが分かったので、SYM 理論の作用を作ることができて、その作った結果をこの指数の肩に乗せておきます。このような無限次元の経路積分をやって、分配関数を計算しようという問題です。

この無限次元の積分を、今日の最初の方で話をしたのと同じように、対称性を使って対称性の固定点に積分へのノンゼロの寄与を集中させて簡単化するという手順で行います (DH 公式を使う)。そうすると、まず固定点がどこにあるかを求める必要があります。固定点の定義は、最初のほうに話をした中で少し出てきましたが、超対称な場の理論の経路積分の固定点が、すべてのフェルミオンについてその SUSY 変換が消えなさいという条件：

$$Q(\text{fermion}) = 0 \quad {}^{\forall}\text{fermion} \tag{212}$$

この条件によって、どこにノンゼロの積分が局在するかというのが分かります。有限次元の積分の問題を解いているときと同じ話を、無限次元の積分にも応用しようというわけです。そうすると、この SYM 理論の超対称な経路積分の場合の固定点がどこにあるかというのは

$$Q\lambda = Q\bar{\lambda} = 0 \tag{213}$$

を満たすようなボソン場の配位を探すことで調べられ、これを解くと固定点は

$$A_m = 0, \quad \phi = \bar{\phi} = a \text{ (定数 (Lie 代数の結果))}, \quad D_{AB} = a \cdot (\spadesuit)_{AB} \tag{214}$$

のように定数 a でラベルされます。ここで a というのは定数なのですが、Lie 代数の対称性を使って a は Cartan に値をとると思っても構いません。このように、とりあえず DH 公式を使うと、無限次元の経路積分が何か Lie 代数上の有限次元積分に落ちてしまうというわけです。この固定点を尽くした式というのは、ゲージ対称性の任意性を除きます。そして、固定点の上で (211) 式の SYM 理論の作用積分を評価すると

$$\mathrm{Sym}\Big|_{\text{固定点}} = \frac{8\pi^2}{g^2}\,\mathrm{Tr}(l\tilde{l}a^2) \tag{215}$$

のようなノンゼロの値が出てきます。ただし $A_m = 0$ については、固定点の条件は北極と南極では緩くなっていて、北極では $F^+_{mn} = 0$ なる点状インスタントン配位、南極では $F^-_{mn} = 0$ なる点状反インスタントン配位が許されます。Pestun が気づいたことは、これらの点状 (反) インスタントンの寄与は Nekrasov の分配関数 (Z_{inst}) で表されるということです。この点状 (反) インスタントンたちの寄与がインスタントンの分配関数で書けるという根拠をもう少し書いておきますと、先ほども同じような式を書いたのですが、楕円体上の理論の SUSY の二乗は

$$Q^2 = \epsilon_1 J_{12} + \epsilon_2 J_{34} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) J^3_{\mathrm{SU}(2)_R} + \mathrm{Gauge}(a) \tag{216}$$

のような表式に落ち着きます。このゲージ変換というのは、位相的ゲージ理論を調べたときにゲージ変換の引数は場の成分の 1 つでしたが、今適切なゲージ固定を施した後では、a でラベルされる固定点の上でこのようになります。

この Q^2 の公式を見ると、インスタントン-モジュライ空間の体積を ADHM データを使って評価したときに対称性を使いましたが、そのときと同じ対称性がここで出てくるということになります。Killing スピノルの性質をもう 1 回書くと、北極では

$$\xi = 0, \quad \bar{\xi} \neq 0 \tag{217}$$

のようになります。このノンゼロの成分は、実はゲージ変換を使って

$$\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}{}_A = \delta^{\dot{\alpha}}{}_A \tag{218}$$

とできます。より詳しい球面上の性質を北極付近で調べてみると、北極付近の理論は Ω 背景上の位相的ゲージ理論 ($\epsilon_1 = 1/l,\ \epsilon_2 = 1/\tilde{l}$) にほぼ一致していることが分かります。従って、Pestun は点状インスタントンの寄与はインスタントンの分配関数で書けると結論付けました。

ここまでの議論の内容をまとめますと、楕円体上の分配関数というのは

$$Z = \int da\, \mathrm{e}^{-\mathrm{Sym}|_a} Z^{NP}_{\mathrm{inst}}\left(\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ a,\ q = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}\right) Z^{SP}_{\mathrm{inst}}\left(\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ a,\ \bar{q} = \mathrm{e}^{-2\pi i\tau}\right) Z_{\text{1-loop}} \tag{219}$$

のように固定点をラベルするパラメーター a についての積分なのですが、それに $\mathrm{e}^{-\mathrm{Sym}}$ を固定点で評価した値 $\mathrm{e}^{-\mathrm{Sym}}\big|_a$ があって、さらに北極の点状インスタントンからの寄与を集めたもの $\left(Z^{NP}_{\mathrm{inst}}\right)$

と南極の点状反インスタントンからの寄与を集めたもの $\left(Z^{SP}_{\text{inst}}\right)$ があります。加えて、これから計算しなくてはならない量 $Z_{1-\text{loop}}$ があります。この $Z_{1-\text{loop}}$ が何かというと、休憩前に色々な有限次元の DH 公式の適用の話をしましたが、これはウェイトの積 $1/\left(\prod_i W_i\right)$ の経路積分版であり、これから計算していく必要があります。有限次元の Ω 変形した体積の計算のときもこのような因子は存在し、ウェイトの積を各々の固定点に応じて計算しないといけませんでした。これと同じことを場の理論の経路積分でもやろうということです。しかし、場の理論の経路積分には変数が無限個ありますから、この積というのは無限積になります。そこで、この無限個のウェイトの積を計算する方法を紹介したいと思います。

局所化原理を使って分配関数が厳密に計算できる例は、Pestun の仕事以降、次元や SUSY の数を変えて色々な例で見つかったのですが、このウェイトの積の計算を最も手早く行う方法は、経路積分変数 (すべての場) を球面調和関数に展開し、そのモードに関する積分に書き直すというものです。そうすると場の理論の積分ではなくなって、無限次元の行列の行列式を計算するという問題になります。しかしながら、一番最初にこの厳密な分配関数の計算を行った解析では、この 4 次元球面の問題についてその真面目な方法をやるよりももっとエレガントな方法があって、それを紹介したいと思います。

Pestun に倣って $Z_{\text{1-loop}}$ という量を計算します。これの成り立ちは

$$Z_{\text{1-loop}}(a) = \int D\left(A_m,\ \phi,\ \bar{\phi},\ \lambda,\ \bar{\lambda},\ D_{AB};\ c,\ \bar{c},\ B\right) \mathrm{e}^{-Q(\cdots)}\Big|_{\text{固定点}\ (a)} \tag{220}$$

のような固定点 a からの揺らぎについての積分となります。今はゲージ理論なのでゲージ固定した後の積分を考えます。ゲージ固定した後ではゴーストもいます。そして経路積分のウェイトとしては、Q の具体的な何か (なんでもよい) を用います。この積分は、経路積分での固定点 a からの揺らぎについての積分であるということを覚えておいてください。この経路積分変数はたくさんありますが、ボソンとフェルミオンがそれぞれ何個あるのか調べてみると、A_m には 4 個のボソン、$\phi, \bar{\phi}$ には 2 個のボソン、$\lambda, \bar{\lambda}$ にはそれぞれ 4 個のフェルミオン、D_{AB} には 3 個のボソン、$c, \bar{c}$ には 2 個のフェルミオン、B には 1 個のボソンがあると分かります。つまり、ボソンとフェルミオンの数を数えると 10 個ずつあることになります。このようなたくさんの変数について積分をしようということになります。そこで、この変数そのものについて積分するよりも、うまい変数変換を行って計算の見通しがもっとよくなる別の変数に取り替えることを考えます。どのような変数の取り替えを行うかというと、位相的ゲージ理論の際に変数の再定義をしましたが、この場合とよく似た取り替えを行います。例えばゲージ場 A_m に着目し、A_m の SUSY 変換を書いてみると、それは色々なゲージーノの線形結合で書けていて、それからゲージ固定した後では SUSY の定義が少し変わって BRS 対称性を含むようになります (ゴーストも入ってくる)：

$$QA_m = \spadesuit\, \xi^A \sigma_m \bar{\lambda}_A + \clubsuit\, \bar{\xi}^A \bar{\sigma}_m \lambda_A + D_m c \tag{221}$$

ゲージ場の超対称性からこのように少し長くなるのですが、これをとりあえず Ψ_m と書いてみます ($QA_m = \Psi_m$)。この Ψ_m はベクトルの脚をもったフェルミオンというものです。さて、これから行うことは、位相的ゲージ理論の場合と同じように、λ と $\bar{\lambda}$ の代わりにベクトルの脚をもったフェ

ルミオンや、テンソルの脚をもったフェルミオンを導入し、変換則が簡単に見えるように書き換えることです。このような Ψ_m を導入すると

$$A_m \xrightarrow{Q} \Psi_m \xrightarrow{Q} Q^2 A_m \tag{222}$$

のように書くことができ、この Q^2 というのは (216) 式に書いたものになります。そして変数のうまい取り替えを行うと、SUSY が色々な場に作用する様がすっきりします。この手順を 20 個の場について行った結果として、新しい変数 $\vec{X} \equiv (A_m, \phi - \bar{\phi})$ と $\vec{\varXi} \equiv (\varXi_{AB}, c, \bar{c})$ を導入します。ただし、$\vec{X}$ には 5 個のボソンが含まれていて、この SUSY 変換は 5 個のフェルミオンを生じ、A_m の SUSY 変換は先ほど書いたように Ψ_m となります：

$$\vec{X} \equiv (A_m,\ \phi - \bar{\phi}) \xrightarrow{Q} Q\vec{X} = (\Psi_m,\ \spadesuit) \tag{223}$$

また、$\vec{\varXi}$ には 5 個のフェルミオンが含まれていて、これは SUSY 変換によって 5 個のボソンを出します ($\varXi_{AB}$ はゲージーノのうまい線形結合を表す)。$\varXi_{AB}$ はうまく取ってあるので、この SUSY 変換は $D_{AB} + (\cdots)$、また、$\bar{c}$ の SUSY 変換は B となります：

$$\vec{\varXi} \equiv (\varXi_{AB},\ c,\ \bar{c}) \xrightarrow{Q} Q\vec{\varXi} = (D_{AB} + (\cdots),\ \clubsuit,\ B) \tag{224}$$

このように元の経路積分変数から新しい経路積分変数 $\vec{X}$ と $\vec{\varXi}$ に移りました。

$$\vec{X} \xrightarrow{Q} Q\vec{X} \xrightarrow{Q} Q^2\vec{X}, \quad \vec{\varXi} \xrightarrow{Q} Q\vec{\varXi} \xrightarrow{Q} Q^2\vec{\varXi} \tag{225}$$

この古い変数から新しい変数への変数変換というのは局所的な変数変換であって、さらに逆変換も存在します。従って、普通、このような場の理論の変数変換を行うときはヤコビアンを気にする必要がありますが、今の場合その必要はありません。また、$\vec{X}, Q\vec{X}$ は親がボソン、娘がフェルミオンという普通のペアであり、一方で $\vec{\varXi}, Q\vec{\varXi}$ は逆の統計に従うペアです。今、計算したい量がウェイトの積 $1/\left(\prod_i W_i\right)$ でしたが、その代わりにキャラクター $\sum_i \mathrm{e}^{W_i} \equiv \chi$ を計算します。キャラクター χ というのは

$$\chi = \mathrm{Tr}_{(X)}\, \mathrm{e}^{Q^2} - \mathrm{Tr}_{(\varXi)}\, \mathrm{e}^{Q^2} \tag{226}$$

のように任意の Q^2 のトレースの計算を意味します。ただし、この $\vec{X}$ というのは今経路積分をする興味のある空間となります。また、この $\vec{\varXi}$ というのはその経路積分をする空間の次元を下げる働きがあるので、キャラクターを計算するときにはまず任意の Q^2 という演算子が $\vec{X}$ に作用する、そのウェイトの和を計算します。そして $\vec{\varXi}$ という場に同じ演算子が作用する、そのウェイトを足し上げたものを計算し、これらの差をとったものがキャラクターとなります。

■Atiyah-Bott の固定点公式

ウェイトの積の代わりにキャラクターを計算するといいというもう 1 つの理由があって、それは Atiyah-Bott の固定点定理です。これがどのような定理かといいますと、前にも書きましたが

$$Q^2 = \underbrace{\epsilon_1 J_{12} + \epsilon_2 J_{34}}_{\text{回転}} + (\epsilon_1 + \epsilon_2) J_R^3 + \mathrm{gauge}(a) \tag{227}$$

というものを考えます。回転と書いてあるところが楕円体を回す回転の生成子です。Q^2 が無限小回転の生成子になっているので、e^{Q^2} は有限の回転を引き起こす演算子になるわけです。有限回転というのは一種の座標変換です：

$$e^{Q^2}\text{は楕円体の北極・南極を固定する有限回転}\quad(\text{一種の座標変換 } X^\mu \to f^\mu(X))$$

この e^{Q^2} というものが有限の回転を含む演算子なので、Atiyah-Bott の固定点定理というのが使えます。その主張というのは、「キャラクター χ は $(\vec{X},\vec{\Xi})$ と Q^2 の北極・南極付近での局所的な振舞いにのみ依存する」というものです。その理由を説明したいのですが、一般に場 X の配位空間に作用する線形演算子 $\mathcal{O}$ は積分表示を持つという事を考えます。つまり、作用の仕方は

$$\mathcal{O}X(x) = \int dy\, \hat{\mathcal{O}}X(y) \tag{228}$$

であるでしょうということです。そのときに、この演算子のトレースは

$$\mathrm{Tr}\mathcal{O} = \int dx\, \hat{\mathcal{O}}(x,x) \tag{229}$$

のように書いていいでしょう。しかし、$\mathcal{O} = e^{Q^2}$ のときにトレースを考えると

$$\hat{\mathcal{O}}(x,y) = \spadesuit \cdot \delta(y - f(x)) \tag{230}$$

のようにデルタ関数に比例することが分かります。[*8]なぜなら、e^{Q^2} というのは有限の座標変換を引き起こす演算子だからです。そうすると、これのトレースを取ることで

$$\mathrm{Tr}\mathcal{O} = \int dx\, \delta(x - f(x)) \tag{231}$$

のような積分を評価してやれば良く、このノンゼロの寄与は $f(x) = x$ という対称性の固定点からの寄与しかありません。すると、キャラクターというのは結局有限の回転演算子のトレースに基づいて定義されているので、北極と南極からの寄与しかなく、

$$\chi = \sum_{p:\ \text{固定点}\ (f(x)=x)} \frac{\spadesuit(p)}{\left|\det(1 - \frac{\partial f}{\partial x})\right|(p)} \tag{232}$$

のように、分子には固定点に依存する因子があって、デルタ関数を積分することでこのようなものがでてきます。ただし、ここでは記法を節約して 1 次元積分のように書いていますが、本当は 4 次元積分で、従ってヤコビアンを計算することになります。これが Atiyah-Bott の固定点定理のあらましです。復習しますと、Q^2 は無限小の変換を生成する生成子だったので、それの指数乗は有限の座標変換を施します。従って、その演算子のトレースはその対称性の固定点からの寄与しかないという話でした。

[*8] $\spadesuit$ は固定点に依存する係数である。

ここで、固定点の 1 つである北極に注目すると、北極付近の局所複素座標 $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 - ix_4$ に対し、e^{Q^2} は $z_1 \to z_1 q_1, z_2 \to z_2 q_2$ と作用します。ここに $q_{1,2} \equiv e^{i\epsilon_{1,2}}$ です。そうすると (232) 式の分母というのは

$$(分母) = (1-q_1)(1-q_1^{-1})(1-q_2)(1-q_2^{-1})$$

となります。一方、分子の因子ですが、e^{Q^2} という演算子が $\vec{X}$ や $\vec{\Xi}$ という場の北極での値にどのように作用するか、その量子数を調べるとわかります。まず、$\vec{X}$ というのがゲージ場とスカラー場から成っていました：$\vec{X} = \{A_m, \phi - \phi\}$。$A_m$ というのはベクトルの脚を持っているので有限回転が作用します。その量子数を考えると、分子に $(q_1 + q_1^{-1} + q_2 + q_2^{-1})$ という寄与を与えます。スカラー場の方は R チャージも何も持っていないので 1 を与えます。次に $\vec{\Xi} = (c, \bar{c}, Z_{AB})$ という場の北極での値を考えると、c と $\bar{c}$ はスカラーなので 1 と 1 を与え、Z_{AB} は R 対称性の三重項なので、$q_1 q_2 + 1 + q_1^{-1} q_2^{-1}$ という寄与を分子に与えます。更に、$\mathrm{U}(N)$ ゲージ群の寄与を最後にかけてまとめると

$$(分子) = [(q_1 + q_1^{-1} + q_2 + q_2^{-1}) + 1 - (1 + 1 + (q_1 q_2 + 1 + q_1^{-1} q_2^{-1}))] \sum_{i,j} e^{a_i - a_j}$$

となります。この辺の説明を丁寧にできてなくて申し訳ありません。それで、今まで計算した結果をまとめてキャラクターを書いてみると、南極からくる同じ項を入れて

$$\chi = \sum_{i,j} e^{a_i - a_j} \left\{ \left[-\frac{1 + q_1 q_2}{(1-q_1)(1-q_2)} \right]_{北極} - (南極) \right\} \tag{233}$$

のようになります。この表式をさらに q_1 と q_2 で冪展開すると、結局

$$\sum_i e^{W_i} = \chi = -\sum_{i,j} e^{a_i - a_j} \sum_{m,n \geq 0} [q_1^m q_2^n + q_1^{m+1} q_2^{n+1} + q_1^{-m} q_2^{-n} + q_1^{-m-1} q_2^{-n-1}] \tag{234}$$

のようになります。猛烈な駆け足で最終的なキャラクターの表式を書いてしまいました。復習しますと、固定点の定義を使うと、キャラクターが q_1, q_2 の有理式になるのですが、その結果が (233) 式です。これを冪展開しなくてはなりません。展開するときに q_1 の正冪か負冪かどちらで展開するかの不定性があるのですが、どのように展開するのが正しいのかは、実は説明するのが非常に難しいのですが、正しい正則化を行うと (234) 式が正しいということが分かります。結局、(234) 式からウェイト W_i が読み取れ、$Z_{\text{1-loop}}$ が計算できます。

4.3 応用例と活用例

球面上の 1 ループ行列式の計算は多少厄介なのですが求まりまして、球面上の分配関数が有限個の積分の表式に落ち着きました。それが著しい結果だと思います。このような形で Pestun は 4 次元球面上の分配関数を計算しました。2007 年の論文だったのですが、彼はすべてを 1 人でやって

しまいました。[*9]曲がった空間の上に超対称な理論を構成するということをまずやって、それで局所化のところで言ったように無限次元の積分を応用すればいいのではないかということをきちんと説明し、球面上、或いは曲がった空間上の経路積分を厳密に行う方法を編み出したわけです。それに従って、他の色々な次元の曲がった空間上の超対称理論の厳密な物理量が、色々計算されているということになっています。例えば次に述べるようなものがあります。

球面に限らず、球面 × 円周などの空間の厳密な計算も行われています。厳密な分配関数というのは超弦理論に対しても示唆に富んでいて、例えば 3 次元の $\mathcal{N} \geq 2$ ゲージ理論の球面上の分配関数というのは、M2 ブレーンの多体理論を調べるのに非常に役に立ちました。M2 ブレーンが何枚も重なっている状況を調べようとするとき場の理論的な手法を使うのですが、どのような場の理論を使うかというと、2008 年に提唱された ABJM 模型というものです。この模型の球面上の分配関数の性質もよく調べられています。

2 次元の例というのは、Calabi-Yau 空間上の弦理論を調べる新しい道具として注目を浴びている結果があります。5 次元球面上の分配関数というのは、M5 ブレーンの物理と関係付いていたりします。球面上の分配関数には他にも意味があって、2 次元の場の理論の繰り込み群のフローを調べたりするときに Zamolodchikov の c-定理というのが出てきますが、例えば 3 次元球面上の分配関数が 3 次元版の c-関数になっているという結果も報告されており、他にも最近話題のエンタングルメントエントロピーも球面上の分配関数と関係があるなどの話もあります。

最後に、Pestun の論文というのは、AGT 関係式というものの発見をもたらしました。[*10] もうさすがに時間なので、これでやめようと思います。最後尻切れトンボになってしまいましたが、ありがとうございました。

[*9] 応用例：ハイパー多重項を随伴表現に選んだ理論を $\mathcal{N}=2^*$ SYM 理論という（$\mathcal{N}=2^*$SYM 理論は $\mathcal{N}=4$ SYM 理論を質量変形して得られる）。逆に $\mathcal{N}=2^*$SYM 理論のハイパー随伴表現の質量を調節すると $\mathcal{N}=4$SYM 理論になる。質量をうまく選ぶことで $Z_{\text{1-loop}}, Z_{\text{inst}}$ が簡単化できて、

$$\begin{aligned} Z &= \int da\, e^{-(8n^2/g^2)\mathrm{Tr}(\vec{a}^2)} \prod_{i<j}(a_i - a_j)^2 \\ &= \int d^{n^2}\mathbf{M}\, \exp[-(8n^2/g^2)\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^2)] \end{aligned}$$

のような Gaussian 行列積分になる。Pestun は、この論文の中で、曲がった空間上に SUSY 理論を構成する手続きや分配関数を求める経路積分の局所化の手続きを一人で整えた。

[*10] クラス **S** 理論と **AGT** 関係式　Gaiotto は、N 枚の M5 ブレーンを Riemann 面 $\Sigma_{g,n}$ にコンパクト化すると、4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $T_N[\Sigma_{g,n}]$ が得られると主張した：$T_N[\Sigma_{g,n}] = (\mathcal{N}=2$ SU(N)SQCD, $2n$ fundamental hyper)、 $T_N[\Sigma_{g,n}] = (\mathcal{N}=2^*SU(N)$SYM with $\beta=0)$。また、AGT 関係式とは次のようなものである：$Z_{S^4}[T_N(\Sigma)] = (\Sigma$ 上の 2 次元 CFT(Liouville 理論 $(\mathcal{N}=2)$、もしくは、Toda 理論 $(\mathcal{N}\geq 3)$) の相関関数)。

質疑応答

質問： 分配関数のオーバーオールのノーマリゼーションはどのように決めているのですか？

回答： ここではあまり気にしないでやっています。それは非常に難しい問題なのですけど、経路積分って例えばゲージ理論の場合は異なるインスタントン数でラベルされるいろんなセクターについての和を取らないといけないじゃないですか。その異なるセクターを足し上げるときには、ある程度のノーマリゼーションは考えます。経路積分それそのものを眺めるだけでは難しいかもしれなくて、他の方法で決める話もあります。例えば球面上の分配関数がファクトリゼーションにきちんと従わないといけないだとかそういう話です。

質問： Pestun は Wilson ループを計算しようとしていたし、他のいろんな話でも局所化で Wilson ループとか分配関数を計算しているのが多いと思うんですけど、他に何か計算できる物理量はあるのでしょうか。超対称不変ならいろいろ計算できるのでしょうか。

回答： 超対称不変ならできます。まず Wilson ループって非局所的な演算子のループに沿った期待値ですが、このループの形を超対称不変な量に選びます。同じようにして、いろんな次元を持ったゲージ理論のディフェクト演算子—サーフェスディフェクトとか—のようなものの期待値を計算するような話もあります。そのディフェクトを超対称性を壊さないように置けば局所化を使って厳密に計算できる場合があることが知られています。

質問： では、局所的な演算子の期待値などは計算されていないのでしょうか。

回答： 今日みたように、4 次元球面なら超対称変換の二乗は北極と南極を固定する対称性じゃないですか。だから、北極や南極にうまい演算子を入れれば、超対称性は保たれますね。同じような話を 3 次元球面とかでやろうとすると、3 次元球面上では超対称変換の固定点がどこにもないので、3 次元球面上だと局所演算子の期待値を計算するのは難しいと思います。

5 参考文献

本講義で取り上げた話題を原論文で学びたい方のために，以下を参考文献として挙げておく．

[1] N. Seiberg and E. Witten, "Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory", Nucl. Phys. B 426, 19 (1994),Erratum-ibid. B 430, 485 (1994) [hep-th/9407087]; "Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in N=2 Supersymmetric QCD",Nucl. Phys. B 431, 484 (1994) [hep-th/9408099].

[2] E. Witten, "Solutions of four-dimensional field theories via M theory," Nucl. Phys. B **500**, 3 (1997) doi:10.1016/S0550-3213(97)00416-1 [hep-th/9703166].

[3] N.A. Nekrasov, "Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting", Adv. Theor. Math. Phys. 7,831 (2004) [hep-th/0206161]; N. Nekrasov and A. Okounkov, "Seiberg-Witten theory and random partitions", [hep-th/0306238].

[4] V.Pestun, "Localization of Gauge Theory on a Four-Sphere and Supersymmetric Wilson Loops", Commun. Math. Phys. 313 (2012) 71. [hep-th/0712.2824]; N. Hama and K. Hosomichi, "Seiberg-Witten Theories on Ellipsoids", JHEP 1209 (2012) 033, Addendum-ibid. 1210, 051 (2012) [hep-th/1206.6359].

また超弦理論や超対称ゲージ理論について導入部分で紹介した事項は，以下を参考にした．

[1] Yuji Tachikawa, "N=2 supersymmetric dynamics for pedestrians", Lecture Notes in Physics, vol. 890, 2014, [hep-th/1312.2684]

[2] Joseph Polchinski, "String Theory vol 1,2", Cambridge University Press, 2005; Elias Kiritsis, "String Theory in a Nutshell", Princeton University Press, 2007

講義の後半部分は以下の解説記事でもまとめられている．

[1] 細道和夫， " 超対称ゲージ理論における局所化の方法", 日本物理学会誌　第 69 巻 第 5 号 p288

6　おわりに ― 講義録作成校より

はじめに、台湾に赴任されているにもかかわらず今年度の三者夏の学校での講義依頼を快諾してくださった国立台湾大学の細道和夫教授に深く感謝いたします。細道教授には、夏の学校で弦理論と超対称ゲージ理論の基礎から発展的な内容までわかりやすい講義をしていただくとともに、講義録作成にあたっては内容の確認を何度も快く引き受けていただきました。

また、センター校の北海道大学、準備校の東北大学など多くの役職校の大学の方の協力により、この講義録を作成するまで至れました。ここに感謝いたします。

最後に、基礎物理学研究所、素粒子論グループをはじめとする 2015 年度原子核三者夏の学校を後援・協賛してくださった団体に深く感謝いたします。