

# 量子アインシュタイン重力は 量子非可換ゲージ理論よりやさしい

中西 襄<sup>\*1</sup>

## 概要

最近、「なぜ、量子重力は（QCD に比べて）難しいのか？」という深谷英則氏の論文が素研電子版に発表されたが、理論形式に関する限り話は逆で、量子アインシュタイン重力のほうが量子非可換ゲージ理論よりも簡明で美しい理論であることを強調したい。ついでに、発散の問題や重力子の存在について論ずる。

## 1 量子ゲージ理論と量子アインシュタイン重力

最近の素研電子版で、深谷という人の論文を見た<sup>1)</sup>。彼は QCD の専門家のようで、ゲージ理論の定式化という立場から重力場の量子化を目指した。ゲージ・ポテンシャルに相当するものは接続であるから、四脚場と接続を基本量とする 1 階形式の重力理論を考えたのである。しかし、一般相対論は (擬) リーマン幾何学に基づいて定式化されているので、接続をも基本量に採用するのは無駄なことである。そのようなやり方で重力場の量子化は難しいと結論しても、「そのアプローチでは難しかった」という体験談に過ぎないのではないだろうか。量子アインシュタイン重力の定式化は、古典アインシュタイン重力の特性を最大限に活かして行うのが正しいアプローチの仕方であると筆者は信ずる。

量子非可換ゲージ場の非摂動的オペレータ形式の理論は、すでに 40 年も前に、BRS 不変性に基づいて見事に定式化されている (九後・小嶋理論<sup>2)</sup>)。そしてそのすぐ後、同じく BRS 不変性に基づいて量子アインシュタイン重力<sup>3)</sup> も定式化された。両者は同じ手法で構成されており、整合性は抜群によい。筆者はあちこちにオペレーター形式の量子アインシュタイン重力について紹介する記事を書いた。たとえば、深谷氏が引用している筆者の解説論文「重力場の量子論と一般相対論」<sup>4)</sup>にも簡単に紹介してあるので、彼が上記の量子重力理論の存在を知らなかったはずはないと思うのであるが、それについての言及はなかった。

アインシュタイン重力の量子化が非可換ゲージ理論のそれより難しく見えるのは、一般座標変換群の構造をよく理解していないからである。一般座標変換群

<sup>\*1</sup> 京都大学 (数理解析研究所) 名誉教授. e-mail: nbr-nak@trio.plala.or.jp

は並進群の局所化であり、並進群は可換群なのだ。非可換性は局所化に伴って随分的に現れたもので、その効果はある程度分離できるのである。そうすれば、量子アインシュタイン重力は量子非可換ゲージ理論よりも量子可換ゲージ理論によく似ていることがわかる。内山氏や DeWitt 氏のような量子重力研究の先駆者たちは、この事実を見落としていた。

ド・ドンデア条件をゲージ固定にした量子アインシュタイン重力では、144 個の生成子をもつ 16 次元ポアンカレ的超対称性があることが示されている<sup>3)</sup>。ランダウ・ゲージでゲージ固定をした量子非可換ゲージ理論は、ゲージ理論として最も対称性の高い共変理論だが、対称性の美しさの点では量子アインシュタイン重力にまったく及ばないのである。(ただし、四脚場形式で現れる内部ローレンツ対称性については、量子アインシュタイン重力は量子非可換ゲージ理論と同じ構造をもつが。)

さらに、ゲージ固定において現れる B 場は、量子可換ゲージ理論では、4 次元交換関係 (すなわち任意時刻での交換関係) において「古典ゲージ理論で現れる局所ゲージ変換の生成子」の役割を演ずる (無限小任意関数はパウリ・ヨルダンの D 関数に置き換わる。)。これを非可換ゲージ理論に拡張したものは、かなり複雑な付加項がつく交換関係になるが<sup>5)</sup>、量子アインシュタイン重力に拡張したものは、それよりずっとすっきりした美しい交換関係 (幾何学的交換関係) になるのである (D 関数はもちろん q 数に拡張される。)<sup>3)</sup>。

## 2 発散の問題

量子アインシュタイン重力を摂動論で計算すれば、くりこみ不可能な紫外発散が現れることはよく知られている。しかし、くりこみ不可能性は、量子アインシュタイン重力の定式化ともそのコンシステンシーの問題とも無関係である。量子アインシュタイン重力を否定しておかないと都合が悪い人は、いつもそのくりこみ不可能性を持ち出す。だが、この批判はまったくのナンセンスなのである。摂動論では、その第 0 近似として重力場は特定の時空計量になるものと勝手に決め込んでしまうのだが、その仮定は時空構造のみならずその座標系の選定まで指定するということから、明らかに一般相対性原理 (量子論では BRS 不変性) と矛盾している\*2。量子アインシュタイン重力において、重力場の第 0 近似が特定の時空計量であるなどということはありません。そんなものを最初から無反省に第 0 近似として採用している摂動論は、正しいアプローチではありません。

\*2 このことは、数学的には重力場の BRS 量子化を使って簡単に証明できる。BRS 生成子  $Q_b$  は、アインシュタイン定数  $\kappa$  に依存しないように定義できる。重力場  $g_{\mu\nu}$  とこれとの交換子  $[Q_b, g_{\mu\nu}]$  は  $g_{\mu\nu}$  の BRS 変換 (の  $-i$  倍) に等しい。もし、 $\kappa \rightarrow 0$  のとき  $g_{\mu\nu}$  がゼロではない c 数 (計量) になったとすると、この交換関係の左辺はゼロ、右辺はノンゼロ ( $g_{\rho\nu}\partial_\mu c^\rho$  ( $c^\rho$  は FP ゴースト) のような項があるから) となり、矛盾を生ずる。 $\kappa \rightarrow 0$  のとき  $g_{\mu\nu}$  は q 数でなければならないのである。

ないのである\*3。摂動論が使えないのはけしからんと怒るのは、自分の知っている解法では解けない問題が出題されたら、出題者が悪いと怒る受験生みたいなものだ。

量子アインシュタイン重力は、相互作用描像ではなく、ハイゼンベルク描像で解かなくてはならないのである。場の量子論のハイゼンベルク描像での一般的な解法はすでに 20 年前に定式化されている<sup>6)</sup>。とくに量子アインシュタイン重力の正しい第 0 近似は具体的に完全に求められた。もちろんそれは  $c$  数の時空計量などではない。座標系を指定する  $c$  数の時空計量は、時空対称性の自発的破れの結果として現れるもので、そのさいの南部・ゴールドストーン・ボゾンが重力子に他ならないのである<sup>7),3)</sup>。

ハイゼンベルク描像での場の量子論の解法は、もちろん摂動論のファインマン・ダイアグラムを用いた計算法のように整備されていないのは事実である。しかし、摂動論でも、ファインマン・ダイソンの共変的摂動論が定式化される以前の計算はたいへんであった。ハイゼンベルク描像での場の量子論の解法はいまだ旧式摂動論 (old-fashioned perturbation theory) 的発展段階にあるといえる。このアプローチで実際に解が具体的に求められるのは、簡単なモデルに限られる。比較的高級なモデルで正確に解けるのは、ド・ドンデア・ゲージでの 2 次元量子アインシュタイン重力であろう\*4。これのアノーマリー部分を取り除き、次元数を変えたものはちょうど (4 次元) 量子アインシュタイン重力の第 0 近似に一致する。ハイゼンベルク描像での解法では、相互作用描像での摂動論とは異なり、展開パラメータはアインシュタイン定数  $\kappa$  の平方根ではなく、 $\kappa$  そのものであり、第 1 近似と第 0 近似のクロスタームから最低次における量子重力の「物理」が現れる\*5。残念ながら第 1 近似を具体的に計算するのは非常に大変な仕事で、いまだ遂行できていない。しかし、量子非可換ゲージ理論をハイゼンベルク描像で解析的に解くのは、量子アインシュタイン重力を解くよりもさらに大変であることを指摘しておこう。解を解析的に求めるということは、一般に非常に難しいことなのである。量子アインシュタイン重力よりはるかにはるかに簡単な流体力学の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式でさえも、いまだにすっきりと解けたという状態からはほど遠いのだ。

量子アインシュタイン重力のハイゼンベルク描像での高次近似はいまだ計算できる状況にないので、そこにおいて発散の困難があるかないかはまったくわからない。しかし、別の角度から、量子アインシュタイン重力が発散の困難を解決してくれる可能性があるという示唆が得られている。通常の場合の量子論でスカ

\*3 いわゆる背景場法では、後から一般座標変換不変性を回復しようとするが、誤った推論で得られた結果をいじくってみても正しい結果は得られない。

\*4 厳密解が求まるのは、2 次元では重力場のダイナミクスがないので、前述の幾何学的交換関係が付加項なしに厳密に成立するおかげである。

\*5 摂動論では第 0 近似が  $c$  数であるため、「物理」は  $\sqrt{\kappa}$  のオーダーの項の 2 乗から始まる。

ラー場  $\phi(x)$  のファインマン・プロパゲーターを考えてみよう。それは運動量空間で、定数係数を除き  $1/(m^2 - p^2 - i0)$  で、4次元運動量  $p_\mu$  が無限大に行くとき、それに関してマイナス2次で落ちる。もしもこれがそれよりも速く落ちてくれば、 $\phi^5$  理論のようなくりこみ不可能な理論でも、発散がすべて無くなるのではないかと期待できる。そこで高次補正をすべて考慮すればそういう可能性があるのでないかと考えられた時代があった。しかしその期待を打ち砕いたのはレーマンの定理である。ハイゼンベルク描像での正確なプロパゲーター  $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  (T は時間順序積を表す) の  $x^\mu - y^\mu$  に関するフーリエ変換は

$$\int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - p^2 - i0}$$

と書ける。ここに  $\rho(s)$  は  $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  のフーリエ変換である。中間状態を挿入して計算すると、すべての中間状態のノルムが正であれば、 $\rho(s) \geq 0$  である。したがって、正確なプロパゲーターの漸近形がファインマン・プロパゲーターのそれより改善されることはありえないのである (レーマンの定理)。ゆえに摂動論的にくりこみ不可能な理論が、正確に計算するとくりこみ可能になったりすることはないと考えられる<sup>\*6</sup>。負ノルム状態すなわちゴーストを導入すれば、このレーマンの定理の呪縛から逃れられるわけだが、今度は確率解釈に抵触してしまう。ゴーストを入れても確率解釈と矛盾しないのは量子ゲージ理論であるが、残念ながら  $\phi(x)|0\rangle$  が物理的状態<sup>\*7</sup>である限り、中間状態として効くのは物理的状態のみであってゴーストは寄与できない。しかし、量子アインシュタイン重力ではこの呪縛から解放されるのである。BRS 変換すなわち局所変換の量子論版が時空変換であるため、 $\phi(x)|0\rangle$  が物理的状態ではなくなるのだ。つまり、 $s$  が  $\kappa^{-1}$  のオーダーより大きい領域では  $\rho(s)$  は負になりうる<sup>3)</sup>。したがって、プランク質量が自然なカットオフの働きをするという夢物語が、ちゃんとした理論として実現する可能性があるわけである。量子アインシュタイン重力には、通常のパワー・カウンティングの常識は通用しないのである。

### 3 重力子

人類のもつテクノロジーでは、ここ当分、量子重力理論のプロパーな予言を実験的にチェックすることは不可能である。このため、いろんな量子重力理論が提起され、どれが本物かの確実な決め手がないという状況になっている。しかし、1つだけかなり確実な実験的チェックが可能だ。量子論が正しいことは確実なの

<sup>\*6</sup> 解析接続を用いて発散がないことを示す話 (たとえば、ミンコフスキー空間で計算すべきものをユークリッド空間に解析接続して計算するなど) がよくあるが、解析接続は不等式を保持しないので、実際上負ノルムをこっそり密輸入していることになっている。また、くりこみ群方程式の理論において異常次元が現れるが、このことは、自由場が正定値ノルムの状態空間で量子化されている、結合定数の値が大きくなるとノルムの正値性は必ずしも保証されないという事実に起因すると思われる。

<sup>\*7</sup> BRS 不変な状態、すなわち BRS 生成子を用いさせるとゼロになる状態をいう (九後・小嶋条件)。

だから、実験的に重力波の存在が確認された以上、重力子の存在は疑えない。万有引力も重力波も、光速で伝わるのは絶対確実であろう\*8。したがって重力子の質量が正確にゼロであるのも非常に確実である。そうでなければ宇宙の極めて遠方から地上に到達できるはずがない。

量子アインシュタイン重力は、座標系の選定の自由度に対応する南部・ゴールドストーン・ボゾンとして重力子を予言するので、その質量は厳密にゼロでなければならない。しかし理論的には、線形近似を使わない限り、重力子の質量がゼロであるのは当然のことではない。たとえば、量子超重力理論では、グラヴィティーノの質量はゼロではないとされている。超弦理論では、閉弦から質量ゼロでスピン2の粒子の存在が予言されるが、背景時空はそれと無関係に設定されているので、それを重力子と同定する根拠がない。重力場の量子化を時空多様体の汎関数積分（経路積分）として幾何学的な方法で定式化する理論では、重力子の存在は説明できない。同様に、スピンネットワークに基礎をおくループ量子重力では、どうやって重力子の存在を導くつもりなのかまったく不明である。このように質量ゼロの重力子の存在が論理的にきちんと導かれるか否かは、量子重力理論の正当性のチェックに使えるのである。

#### 文 献

- 1) 深谷英則, 素粒子論研究電子版 **25**, No.2 (2017).
- 2) T. Kugo and I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **66**, 1 (1979).  
九後汰一郎, ゲージ場の量子論 I, II (培風館, 1989).
- 3) N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990), Chap. 5.  
N. Nakanishi, Publications *RIMS*(Kyoto University) **19**, 1095 (1983).  
中西 襄, 重力場の量子論 (大槻義彦編「物理学最前線 3」(共立出版), 1983).
- 4) 中西 襄, 素粒子論研究電子版 **1**, No.3 (2009).
- 5) H. Kanno and N. Nakanishi, Z. Phys. C - Particles and Fields **28**, 407 (1985).
- 6) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111**, 301 (2004).
- 7) N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A29**, 1450034 (2014).

---

\*8 重力波と電磁波の伝播速度の差がゼロであることを直接証明する実験は、できないものだろうか。