

## シンポジウム報告:

### 日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウム

開催日程: 2016年10月15日(土)、16日(日)

開催場所: キャンパスプラザ京都 4階 第4講義室

#### 概要

第6回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウムが、日本大学理工学部素粒子論研究室と京都産業大学益川塾の連携の下、上記の日時・場所において開催された。本シンポジウムは、私立大学が連携して素粒子物理学に関する研究交流を図ることを目的とし、「素粒子と時空」および「現象から探る素粒子」の2つをテーマとして企画され、計20件の講演が行われた。講演は場の量子論から素粒子現象論にわたる理論に関するものが中心であるが、最新のLHC実験の成果やインフレーション理論に関する講演も含め、幅広い内容であった。日本大学と京都産業大学を中心に、東京大学、京都大学、大阪大学、東京工業大学、埼玉大学、奈良女子大学、近畿大学などから約40名が参加し、大変に有意義なシンポジウムとなった。

#### 世話人

- 小路田 俊子 (京都産業大学 益川塾)
- 九後 汰一郎 (京都産業大学 益川塾)
- 桑木野 省吾 (京都産業大学 益川塾)
- 益川 敏英 (京都産業大学 益川塾)
- 長井 稔 (京都産業大学 益川塾)
- 仲 滋文 (日本大学 理工学部)
- 二瓶 武史 (日本大学 理工学部)
- 梅津 光一郎 (日本大学 理工学部)
- 山中 真人 (京都産業大学 益川塾)
- 山津 直樹 (京都産業大学 益川塾)

## 第6回 日大理工・益川塾連携 素粒子物理学シンポジウム

10月15日(土) 素粒子と時空／現象から探る素粒子

12:30~	受付開始	
13:00-14:40	座長:原 哲也(益川塾)	
13:00-13:15	益川 敏英(益川塾)	挨拶
13:15-13:20	主催者	シンポジウムに関する連絡事項
13:20-14:20	中山 和則(東京大学)	インフレーション理論の現状
14:20-14:40	九後 汰一郎(益川塾)	Spontaneous Supersymmetry Breaking, Negative Metric and Vacuum Energy
14:40-15:00	休憩	
15:00-16:00	座長:原 哲也(益川塾)	
15:00-15:20	梅津 光一郎(日大理工)	Nonequilibrium model inspired from black hole
15:20-15:40	Amir Khan (SYSU)	Probing New Physics in Low Energy Solar Neutrino Oscillation Data
15:40-16:00	細谷 裕(大阪大学)	New dimensions from gauge-Higgs unification
16:00-16:30	休憩	
16:30-18:10	座長:江成 隆之(日大理工)	
16:30-17:30	橋本 幸士(大阪大学)	AdS/CFTとカオス
17:30-17:50	小路田 俊子(益川塾)	Joining-Splitting型の弦の場の理論の古典解
17:50-18:10	杉田 和優(日大理工)	超弦の場の理論における"多重Half-brane" Solutionについて
18:30~20:30	懇親会 場所:cafe&RestaurantBar Ginyuba 京都駅前店	

10月16日(日) 素粒子と時空／現象から探る素粒子

9:30-10:50	座長:二瓶 武史(日大理工)	
9:30-10:30	陣内 修(東工大)	LHC実験Run2の最新結果
10:30-10:50	植松 恒夫(益川塾)	CP-odd Higgs Production in Two-photon Processes
10:50-11:10	休憩	
11:10-12:10	座長:二瓶 武史(日大理工)	
11:10-11:30	長井 稔(益川塾)	グラビティノー暗黒物質を持つ高エネルギー超対称性模型
11:30-11:50	仲 滋文(日大理工)	Deformed extra dimension
11:50-12:10	曾我見 郁夫(京産大)	Beyond the Standard Model in multi-spinor field formalism
12:10-13:30	休憩	
13:30-14:50	座長:吉岡 興一(大阪薬大)	
13:30-14:30	佐藤 丈(埼玉大学)	ニュートリノ物理
14:30-14:50	山中 真人(益川塾)	長寿命スタウ
14:50-15:20	休憩	
15:20-16:20	座長:吉岡 興一(大阪薬大)	
15:20-15:40	山津 直樹(益川塾)	Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building
15:40-16:00	出口 真一(日大量子科学研)	有質量粒子のツイスター模型における非斉次変換
16:00-16:20	太田 信義(近畿大)	Renormalization Equations for f(R) Gravity and Some of Their Solutions
16:20-16:40	休憩	
16:40-17:25	座長:大谷 聡(日大理工)	
16:40-17:00	桑木野 省吾(益川塾)	ヘテロ弦模型における高次元項
17:00-17:20	三輪 光嗣(日大理工)	On string Hamiltonian in the sigma-gauge
17:20-17:25	主催者	シンポジウムに関する連絡事項

## 目次

九後 汰一郎 (益川塾)	Spontaneous Supersymmetry Breaking, Negative Metric and Vacuum Energy
梅津 光一郎 (日大理工)	Nonequilibrium model inspired from black hole
Amir Khan (SYSU)	Probing New Physics in Low Energy Solar Neutrino Oscillation Data
細谷 裕 (大阪大学)	New dimensions from gauge-Higgs unification
橋本 幸士 (大阪大学)	AdS/CFT とカオス
小路田 俊子 (益川塾)	Joining-Splitting 型の弦の場の理論の古典解
杉田 和優 (日大理工)	超弦の場の理論における”多重 Half-brane” Solution について
陣内 修 (東工大)	LHC 実験 Run 2 の最新結果
植松 恒夫 (益川塾)	CP-odd Higgs Production in Two-photon Processes
長井 稔 (益川塾)	グラビティーノ暗黒物質を持つ高エネルギー超対称性模型
仲 滋文 (日大理工)	Deformed extra dimension
曾我見 郁夫 (京産大)	多重スピノール場形式による標準模型の拡張
佐藤 丈 (埼玉大)	ニュートリノ物理
山中 真人 (益川塾)	長寿命スタウ
山津 直樹 (益川塾)	Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building
出口 真一 (日大量子科学研)	有質量粒子のツイスター模型における非斉次変換
太田 信義 (近畿大)	Renormalization Group Equations for $f(R)$ Gravity and Some of Their Solutions
桑木野 省吾 (益川塾)	ヘテロ弦模型における高次元項
三輪 光嗣 (日大理工)	On string Hamiltonian in the sigma-gauge

# Spontaneous Supersymmetry Breaking, Negative Metric and Vacuum Energy

Taichiro Kugo

*Department of Physics and Masakawa Institute for Science and Culture,  
Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan*

## Abstract

The supersymmetric Nambu-Jona-Lasinio model proposed by Cheng, Dai, Faisel and Kong is re-analyzed by using an auxiliary superfield method in which a hidden local U(1) symmetry emerges. It is shown that, in the healthy field-space region where no negative metric particles appear, only SUSY preserving vacua can be realized in the weak coupling regime and a composite massive spin-1 supermultiplets appear as a result of spontaneous breaking of the hidden local U(1) symmetry. In the strong coupling regime, on the other hand, SUSY is dynamically broken, but it is always accompanied by negative metric particles.

## 1 Introduction

Global supersymmetry (SUSY) implies the non-negative definite vacuum energy. This indeed follows from the SUSY algebra

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P^\mu \quad (1)$$

and the assumption of the positive metric of the state vector space; that is, using  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha)^\dagger$ , we have

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \dot{\alpha}=1,2} \langle 0 | (\bar{Q}_{\dot{\alpha}})^\dagger \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + Q_\alpha^\dagger Q_\alpha | 0 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \dot{\alpha}=1,2} \left( \| \bar{Q}_{\dot{\alpha}} | 0 \rangle \|^2 + \| Q_\alpha | 0 \rangle \|^2 \right) \geq 0. \quad (2)$$

The VEV of the Hamiltonian could be negative only when the zero-momentum *Goldstino* states  $Q_\alpha | 0 \rangle$ ,  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} | 0 \rangle$  have *negative metric*, which would, however, imply the disaster for the theory.

Thus the potential energy of the vacuum is bounded from below and the minimum value zero is saturated by the normal SUSY vacuum. Therefore, the dynamical breaking of SUSY, or any other symmetries, is generally very *difficult* in the globally supersymmetric theory.

Well-known examples realizing the spontaneous SUSY breaking are Fayet-Iliopoulos[1] and Fayet-O’Raifeartaigh[2][3] models; the vanishing conditions of the D- and F-terms (in the former), or various F-terms (in the latter) in the tree-level potential cannot simultaneously be satisfied so that SUSY stationary points do not exist. More dynamical SUSY breaking models are also known but they are rather implicit and highbrow gauge theory models[4][5][6], some of which are shown dual to the Fayet-O’Raifeartaigh models via Seiberg’s duality[7].

It is, therefore, highly desirable to find an explicit simple model which exhibits dynamical SUSY breaking. If such a tractable model is found, it would have much utility in phenomenological models for generating the soft SUSY breaking terms dynamically<sup>1</sup>, just as the old Nambu-Jona-Lasinio model has long been used as a semi-quantitative parallel model for the dynamical chiral symmetry breaking realized in QCD[12].

Recently, Cheng, Dai, Faisel and Kong (CDFK)[8, 9] proposed a *supersymmetric NJL model* which, they claim, realizes the dynamical SUSY breaking. This model is indeed very simple one. So, if it is really a healthy model suffering no negative metric problem, it is very important and will become the desired useful model of dynamical SUSY breaking.

Their paper is, however, not written in a crystalclear way. We therefore re-analyze their model in this paper, and make clear what actually happens there, in particular, from the viewpoint of the positive/negative metric problem of the particles.

## 2 Supersymmetric NJL model by Cheng-Dai-Faisel-Kong

### 2.1 The massless model and an equivalent auxiliary field model with hidden $U(1)$ symmetry

The supersymmetric NJL-like model considered by Cheng-Dai-Faisel-Kong (CDFK) reads

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left( \bar{\Phi}\Phi - \frac{G}{2N} (\bar{\Phi}\Phi)^2 \right), \quad \bar{\Phi}\Phi \equiv \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \Phi^i \quad (3)$$

where  $\Phi^i = [A^i, \psi^i, F^i]$  is matter chiral superfields carrying the flavor index  $i$  of  $SU(N)$ . We analyze this model in the leading order in  $1/N$  expansion. Actually, CDFK considered the massive model possessing the mass term

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \int d^2\theta m \Phi\Phi + \text{h.c.} \quad (4)$$

in which case the flavor symmetry reduces to  $SO(N)$ . We first concentrate in this section on the simpler massless case, and defer the discussion for the massive case to the next section.

Keep in mind that this model has a dangerous kinetic term like

$$\left(1 - \frac{G}{N} A^\dagger A\right) (-\partial_m A^\dagger \cdot \partial^m A - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m \partial_m \psi) \quad (5)$$

which becomes of negative metric in the field space region  $A^\dagger A > N/G$ . If the realized vacuum point is well inside of this boundary, i.e.,  $\langle A^\dagger A \rangle < N/G$ , then this negative metric poses no problem.

---

<sup>1</sup>Ohta and Fujii have shown that all the soft SUSY breaking terms can be generated by a kind of spontaneous SUSY breaking by ‘dipole ghost mechanism’[10, 11] They there discussed also the connection between the positivities of the vacuum energy and of the Goldstino’s norm.

Similarly to the usual non-SUSY NJL case, this model (3) can also be equivalently rewritten by adding a Gaussian term of an auxiliary vector superfield  $U$ : [8, 9]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int d^4\theta \left( \bar{\Phi}\Phi - \frac{G}{2N} (\bar{\Phi}\Phi)^2 + \frac{N}{2G} \left( U + \frac{G}{N} \bar{\Phi}\Phi \right)^2 \right) \\ &= \int d^4\theta \left( \bar{\Phi}\Phi (1 + U) + \frac{N}{2G} U^2 \right)\end{aligned}\quad (6)$$

This auxiliary superfield  $U$  stands for the superfield pair  $\bar{\Phi}\Phi$  by the equation of motion:

$$U = -\frac{G}{N} \bar{\Phi}\Phi \quad \text{so that} \quad \langle U \rangle = 0 \text{ at } G = 0 \quad (7)$$

Now, we rewrite this auxiliary vector superfield  $U$ , or the shifted one  $U + 1$  by 1, into

$$U + 1 = \bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma \quad (8)$$

by introducing a chiral superfield  $\Sigma$  and a vector superfield  $V$ . This rewriting is, of course, *redundant* so that  $U + 1$  remains invariant under the following *hidden U(1)-gauge transformation* with a chiral superfield parameter  $\Lambda$ :

$$\begin{cases} \Sigma & \rightarrow e^{-i\Lambda} \Sigma, & \bar{\Sigma} & \rightarrow e^{+i\Lambda} \bar{\Sigma}, \\ 2V & \rightarrow 2V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}) \end{cases} \quad (9)$$

Of course, this gauge symmetry is *fake*, but it is very useful nevertheless. If we fix this gauge invariance by taking an ‘axial gauge’  $\Sigma = 1$ , then this is merely an equivalent rewriting  $U \rightarrow V = (1/2) \ln(U + 1)$  of vector superfield variable. But we can take any other gauges which must be gauge-equivalent with one another. We shall take Wess-Zumino gauge below.

Further, if we redefine the original chiral matter  $\Phi^i$  into  $\phi^i$  as

$$\Sigma \Phi^i \equiv \phi^i, \quad \bar{\Sigma} \bar{\Phi}^i \equiv \bar{\phi}^i, \quad (10)$$

then, the Lagrangian (6) becomes

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left( \bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i + \frac{N}{2G} (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2 \right) \quad (11)$$

which is hidden U(1)-gauge invariant under

$$\begin{cases} \phi^i & \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi^i, & \bar{\phi}_i & \rightarrow e^{+i\Lambda} \bar{\phi}_i, \\ \Sigma & \rightarrow e^{-i\Lambda} \Sigma, & \bar{\Sigma} & \rightarrow e^{+i\Lambda} \bar{\Sigma}, \\ 2V & \rightarrow 2V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}) \end{cases} \quad (12)$$

Using this, we can take the Wess-Zumino gauge in which

$$V = [ C, Z_\alpha, H, K, v_m, \lambda, -D ] \rightarrow [ 0, 0, 0, 0, v_m, \lambda, -D ] \quad (13)$$

and  $\Sigma$  becomes a normal chiral ‘matter’:

$$\Sigma = [ z, \chi, h ]. \quad (14)$$

Note that we are taking *negative* sign convention for the  $D$  field of the vector multiplet  $V$  for later convenience.

## 2.2 Effective potential in the leading order in $1/N$

We use the covariant derivative  $\mathcal{D}_m$  which is defined to be  $\mathcal{D}_m \equiv \partial_m + iqv_m$  on every component fields  $\varphi_q$  of chiral superfields with  $U(1)$ -charge  $q$ , transforming  $\varphi_q \rightarrow e^{-iq\Lambda}\varphi_q$ . Then the part of the Lagrangian for the chiral matter field  $\phi^i = [A^i, \psi^i, F^i]$  with  $q = 1$  reads

$$\int d^4\theta \bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i = (A_i^\dagger \ \bar{\psi}_i \ F_i^\dagger) \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m - D & \sqrt{2}i\lambda & 0 \\ -\sqrt{2}i\bar{\lambda} & -i\bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \Delta} \begin{pmatrix} A^i \\ \psi^i \\ F^i \end{pmatrix} \quad (15)$$

aside from the total derivative terms. In the leading order in  $1/N$  expansion, the effective action  $NS$  is given by

$$NS = N \left[ +i \text{STr} \text{Ln}(-\Delta) + \int d^4x d^4\theta \frac{1}{2G} (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2 \right] \quad (16)$$

with  $\text{STr}$  denoting the functional supertrace. How this supertrace term can be evaluated diagrammatically is explained in the Appendix. Noting that only the bosonic scalar fields can take the constant ( $x$ -independent) VEV's

$$\langle \Sigma \rangle = [z, 0, h], \quad \langle V \rangle = [0, 0, -D] \quad (17)$$

and inserting these VEV's into the action (16), we find the effective potential  $V$  given by

$$V(z, h, D) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\ln(k^2 + D) - \ln(k^2)) - \int d^4\theta \frac{1}{2G} (\langle \bar{\Sigma} \rangle e^{2\langle V \rangle} \langle \Sigma \rangle - 1)^2. \quad (18)$$

(Note that the true potential is  $N$  times this  $V$ .) Here  $k^\mu$  denotes the *Euclidean* 4-momentum. As is usual in NJL model, this one-loop integral is divergent so we put the ultra-violet momentum cut-off  $\Lambda$  on the Euclidean 4-momentum integration as  $k^2 \leq \Lambda^2$ . Performing the momentum integration  $\int d^4k$  and Grassmann integration  $d^4\theta$ , we finally obtain the explicit form of effective potential in the  $1/N$  leading order:

$$\boxed{GV(z, h, D) = \frac{G}{32\pi^2} \left[ \Lambda^4 \ln\left(1 + \frac{D}{\Lambda^2}\right) - D^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{D}\right) + D\Lambda^2 \right] + (1 - 2|z|^2)|h|^2 + (|z|^2 - 1)|z|^2 D} \quad (19)$$

Stationarity conditions of this potential lead to

$$\frac{\delta V}{\delta h} = 0 \Rightarrow (2|z|^2 - 1)h^* = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ or } |z|^2 = 1/2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta z} = 0 &\Rightarrow [2|h|^2 - (2|z|^2 - 1)D]z^* = 0 \\ &\Rightarrow h = 0 \text{ and } (D = 0 \text{ or } |z|^2 = 1/2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\delta V}{\delta D} = 0 \Rightarrow \frac{G}{32\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 - 2D \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{D}\right) \right] = (1 - |z|^2)|z|^2 \quad (22)$$

In (21), we have excluded the possibility  $z^* = 0$ . This is because the first component of  $U + 1$ , being proportional to  $|z|^2$  by Eq. (8) and giving the coefficient of the kinetic term of the matter field  $\Phi^i$  by Eq. (6), should not vanish. From Eqs. (20) and (21),  $h$  must vanish in any case and  $D = 0$  or  $|z|^2 = 1/2$ .

The right hand side (RHS) of Eq. (22),  $(1 - |z|^2)|z|^2$ , takes the value between  $0 \leq \text{RHS} \leq 1/4$  for  $1 \geq |z| \geq 0$ : At free theory limit  $G = 0$ , Eqs. (7) and (8) implies

$$|z|^2 = 1, \quad \text{so that, by Eq. (21), } D = 0. \quad (23)$$

As  $G$  becomes larger starting from 0,  $|z|^2$  becomes smaller from 1 until it reaches the point  $|z|^2 = 1/2$ . Until then, the stationary point has to keep  $D = 0$  because of Eq. (21) so that the value  $|z|^2$  is determined by Eq. (22) as

$$\frac{G}{32\pi^2} 2\Lambda^2 = (1 - |z|^2)|z|^2. \quad (24)$$

This continues until the coupling constant  $G$  reaches the critical value  $G_{\text{cr}}^0$  where  $|z|$  comes down to the point  $|z|^2 = 1/2$  realizing the maximum  $1/4$  of the RHS  $(1 - |z|^2)|z|^2$ :

$$\frac{G_{\text{cr}}^0}{32\pi^2} 2\Lambda^2 = 1/4 \quad \Rightarrow \quad G_{\text{cr}}^0 = 4\pi^2/\Lambda^2. \quad (25)$$

When  $G$  further becomes larger beyond this critical value,  $|z|^2$  stays at this maximum point of the RHS,  $|z|^2 = 1/2$ , so that  $D$  can no longer be zero, as determined by Eq. (22):

$$\frac{D}{\Lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{D}\right) = 1 - \frac{G_{\text{cr}}^0}{G} \quad (26)$$

That is, the SUSY is *spontaneously broken*.

Note that *there is no stationary point which keeps SUSY* in this strong coupling region  $G > G_{\text{cr}}^0$ . Indeed, the SUSY points realizing  $D = 0$  and  $h = 0$  surely realizes vanishing value of the potential  $V(z, h, D)$  in (19) and the stationarity  $\partial V/\partial z = 0$  and  $\partial V/\partial h = 0$  with respect to  $z$  and  $h$ , as Eqs. (21) and C(20) show, independently of the  $G$ -value. However, any SUSY points on the line  $D = 0$  (with  $h = 0$ ), have *non-vanishing gradient*  $\partial V/\partial D|_{D=0} \neq 0$  for  $G > G_{\text{cr}}^0$  since

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial D} \Big|_{D=h=0} &= \frac{G}{32\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 - 2D \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{D}\right) \right] \Big|_{D=0} - (1 - |z|^2)|z|^2 \\ &= \frac{G}{32\pi^2} 2\Lambda^2 - (1 - |z|^2)|z|^2 \geq \frac{1}{4} \left( \frac{G}{G_{\text{cr}}^0} - 1 \right) > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

because of  $(1 - |z|^2)|z|^2 \leq 1/4$ , so that they cannot be the vacuum candidate.

### 2.3 What about negative metric?

The above analysis shows that the SUSY is really spontaneously broken dynamically for the strong coupling region  $G > G_{\text{cr}}^0$  in this model. However, this model had a *potential danger*

of *negative metric particles* which might appear depending on the vacua characterized by VEV's of the fields. So let us examine it.

The original chiral supermultiplets  $\Phi^i$  are redefined into  $\phi^i$  which possesses ordinary gauge-invariant kinetic term  $\bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i$  and have no more complicated interaction in this leading order in  $1/N$ . So they remain to have *positive metric* irrespectively of the VEV's of the fields  $D$ ,  $h$  and  $z$ .

Therefore, we have only to analyze the kinetic term of the vector multiplet  $V = [\lambda, v_m, D]$  and the chiral matter  $\Sigma = [z, \chi, h]$ . First, the vector multiplet is described by a slightly complicate-looking 'kinetic term'  $i \text{STr Ln}(-\Delta)$  in the action (16) in the leading order in  $1/N$ , but it actually appears as a mere one-loop diagrams of the 'healthy' chiral multiplet fields  $\phi^i$  possessing normal minimal gauge coupling  $\bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i$  as seen in (15), and thus, there is no reason for the negative metric to appear for the vector multiplet fields  $V = [\lambda, v_m, D]$ .

Thus, we have only to consider the problem only for the chiral matter  $\Sigma = [z, \chi, h]$ . To see this we need an explicit component field expression for the term  $\int d^4\theta (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2$  in the leading order action (16), which can be obtained most easily as done in the Appendix:

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2 \\ &= 2(2|z|^2 - 1) \left( |h|^2 - \mathcal{D}_m z^* \mathcal{D}^m z - \frac{i}{2} \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m \chi + \sqrt{2} i (z^* \lambda \chi - z \bar{\lambda} \bar{\chi}) \right) \\ & - 2|z|^2 (|z|^2 - 1) D - 2i (\bar{\chi} \bar{\sigma}^m \chi) (z^* \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m z) - 2(z h \bar{\chi}^2 + z^* h^* \chi^2) + \chi^2 \bar{\chi}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

The first line give the kinetic terms of the fields  $z$  and  $\chi$ . We note that those kinetic terms have a common field-dependent coefficient  $(2|z|^2 - 1)$ . The value of this coefficient is not positive definite(!) and becomes *negative* if  $|z|^2$  becomes smaller than  $1/2$ . So clearly, this model becomes disastrous in the region  $|z|^2 < 1/2$  owing to the appearance of negative metric modes.

In the above, however, we have analyzed the effective potential  $V(z, h, D)$  in Eq. (19) and found the stationary points at  $1 \geq |z|^2 > 1/2$  with  $h = 0$  and  $D = 0$  for the weak coupling region  $0 \leq G < G_{\text{cr}}^0$ . So there are no problems in this weak coupling region.

However, as  $G$  reaches the critical point  $G_{\text{cr}}^0$  or goes beyond,  $|z|^2$  exactly takes the value  $1/2$ ! What happens there? At first sight, it merely means that the kinetic terms of  $z$  and  $\chi$  disappear, or, they become of zero-norm particles. If these were true, then, there were no problems at all and the present CDFK model gives a simple healthy model exhibiting dynamical SUSY breaking.

Unfortunately, however, a severe problem is there. The point is that the scalar field  $z$  fluctuates around the VEV  $|\langle z \rangle| = 1/\sqrt{2}$  and the fluctuating scalar modes would have problematic indefinite metric. To see this, let us parametrize the scalar field  $z$ , taking the VEV be real, as

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)} (1 + \phi(x)), \quad (29)$$

then,  $2|z|^2 - 1 = 2\phi + \phi^2$  and the scalar kinetic term in the above Lagrangian reads

$$2(2|z|^2 - 1) \mathcal{D}_m z^* \mathcal{D}^m z = (2\phi + \phi^2) (\partial_m \phi \partial^m \phi + v'_m v'^m (1 + \phi)^2) \quad (30)$$

Here the NG boson field  $\theta(x)$  of the spontaneously broken U(1) was absorbed into the vector field  $v'_m = v_m + \partial_m \theta$ . The kinetic term of  $\phi$ , which looks like (since  $\phi \gg \phi^2$  around  $\phi \sim 0$ )

$$\phi \partial_m \phi \partial^m \phi \quad (31)$$

is problematic since it has the *fluctuating (metric) sign* around  $\phi = 0$ . When  $\phi$  goes into the negative side  $\phi < 0$ ,  $\phi$  becomes of negative metric, which is a disaster to the theory.

If the kinetic term had a non-negative definite coefficient function  $f^2(\phi) \geq 0$ , then it could be rewritten into a normal kinetic term by field redefinition:

$$f^2(\phi) \partial_m \phi \partial^m \phi = \partial_m \Phi \partial^m \Phi, \quad \text{with} \quad \Phi = \int d\phi f(\phi) \quad (32)$$

Note that the vanishingness itself of  $f(\phi)$  at  $\phi = 0$  poses no problem; for instance, take the simplest example,  $f(\phi) = \phi$ , then  $\Phi = \phi^2$ . Important is the non-negative definiteness of the sign.

If we applied blind-mindedly this formula (32) to the present case (31), then we would have obtained a normal form of kinetic term for the new scalar field  $\Phi = (2/3)\phi^{3/2}$ . But, this also implies that the relation with the original scalar field  $z$  is singular and actually the very point  $\phi = 0$  is a branch point; if  $\phi$  goes into the negative side  $\phi < 0$ , then  $\Phi \propto \phi^{3/2}$  becomes purely imaginary, again implying the appearance of the disastrous negative metric.

Although we have discussed only the scalar modes up to here, the same problems occur also for the fermion mode, whose kinetic term reads

$$2(2|z|^2 - 1) \frac{-i}{2} \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m \chi = -i(2\phi + \phi^2) \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m \chi \quad (33)$$

This kinetic term also has the same problematic *fluctuating (metric) sign* around  $\phi = 0$ . So this model becomes disastrous for the strong enough coupling region  $G \geq G_{\text{cr}}^0$  for which  $|\langle z \rangle|^2 = 1/2$  is realized.

## 2.4 Spontaneous breaking of hidden U(1) gauge symmetry

So as a model of dynamical SUSY breaking in the strong coupling region, the present model is unfortunately not a healthy model. However, the model always realizes  $|z| \neq 0$  for  $G > 0$ , so that the hidden U(1) gauge symmetry is always spontaneously broken. If we take  $\langle z \rangle$  real, then,  $\text{Im } z$  is the NG boson absorbed in the vector  $v_m$  in  $V = [v_m, \lambda, D]$ .

For the weak coupling region  $0 < G < G_{\text{cr}}^0$ , the SUSY is not broken so that  $(\text{Re } z, \chi) \in \Sigma$  form a *massive vector multiplet*  $0 \oplus 1/2 \oplus 1$  with  $(v_m, \lambda) \in V$ . (But actually this massive vector multiplet is unstable.) Their mass terms appear in the first line of the action (28) as

$$= 2(2|z|^2 - 1) \left( |h|^2 - \underbrace{\mathcal{D}_m z^* \mathcal{D}^m z}_{\text{kinetic term of Re } z + \text{vector mass}} - \frac{i}{2} \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m \chi + \sqrt{2} i \underbrace{(z^* \lambda \chi - z \bar{\lambda} \bar{\chi})}_{\text{Dirac mass}} \right) \quad (34)$$

As far as  $G < G_{\text{cr}}^0$ , the VEV of the scalar  $z$  gives  $|z|^2 > 1/2$  so that the appearing mass terms of this vector multiplet carry correct signs. The kinetic terms for the hidden gauge boson and gaugino multiplet are dynamically generated by the one-loop diagrams  $i\text{Str Ln}(-\Delta)$  (whose expansion is given in Appendix). This massive vector multiplet for  $G < G_{\text{cr}}^0$  case does not give a true stable particles since the ‘constituent’ matter multiplets  $\phi^i = [A^i, \psi^i, F^i]$  are *massless* into which the vector multiplet can energetically decay. So in order to make the vector multiplet truly stable, it is necessary to put the mass term for the original matter multiplets  $\Phi^i$ .

### 3 Supersymmetric NJL model with massive constituent

Let us now analyze the more complicated case; the CDFK NJL model which possesses the mass term (4),  $\int d^2\theta m\Phi\Phi + \text{h.c.}$ , of the original constituent chiral superfield  $\Phi^i$ . In the massless case we have used the auxiliary chiral  $\Sigma$  and vector superfields  $V$  and the matter fields  $\phi^i$ . Recall, however, that  $\phi^i$  is not the original matter fields  $\Phi^i$  but  $\phi^i \equiv \Sigma\Phi^i$  in (10). In the massless case the matter fields appeared only in the combination of  $\phi^i$ , but here in massive case, the original matter fields  $\Phi^i$  appear which are now written in a slightly complicated expression  $\Phi^i = \Sigma^{-1}\phi^i$ , and the mass term reads in terms of the component fields of  $\phi^i = [A^i, \psi^i, F^i]$  and  $\Sigma = [z, \chi, h]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \int d^2\theta \frac{1}{2} m\Phi^i\Phi^i + \text{h.c.} = \int d^2\theta \frac{1}{2} m\Sigma^{-2}\phi^i\phi^i + \text{h.c.} \\ &= \int d^2\theta m \left( z^{-2}A_iF_i - z^{-3}A_iA_ih - \frac{1}{2}z^{-2}\psi_i\psi_i + z^{-3}A_i\chi\psi_i - \frac{3}{2}z^{-4}A_iA_i\chi\chi \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (35)$$

We take the mass parameter  $m$  real and positive. Elimination of the auxiliary fields  $F_i$  by the e.o.m.  $F_i^* + mz^{-2}A_i = 0$ , yields the following ‘mass term’ in the potential:

$$V = +m^2 |z|^{-4} A_i^\dagger A_i \quad (36)$$

Now, in the presence of the background fields  $z, h, D$ , the mass terms for the constituent bosons  $A_i$  and fermions  $\psi_i$  are given by

$$-(D + m^2 |z|^{-4})A_i^\dagger A_i - m(z^{-3}h A_iA_i - \frac{1}{2}z^{-2}\psi_i\psi_i + \text{h.c.}) \quad (37)$$

The mass square eigenvalues are given by

$$\begin{aligned} A_i : & D + M^2 \pm mH, & \psi_i : & M^2, \\ \text{with } & H \equiv 2|h||z|^{-3}, & M^2 \equiv & m^2/|z|^4 \end{aligned} \quad (38)$$

---

<sup>2</sup>Actually, the stationarity condition (22), which determines the value of VEV  $|z|$ , is *symmetric* under the reflection of  $|z|^2$  around the point  $|z|^2 = 1/2$ ; i.e.,  $|z|^2 \longleftrightarrow 1 - |z|^2$ . So, the solution  $|z|^2 > 1/2$  for  $G < G_{\text{cr}}^0$ , is always accompanied by another solution  $|z'|^2 = 1 - |z|^2 < 1/2$  which equally satisfies the stationarity of (22) and realizes even the same value of the potential  $V(z, h = 0, D)$ . Those reflection solutions  $|z'|$  are, however, in the region  $|z'|^2 < 1/2$ , where the kinetic term of  $\Sigma$  is of negative metric there, and must be discarded.

Therefore the effective potential (19) in the leading order in  $1/N$ , is now replaced by the

$$\begin{aligned}
32\pi^2 V(z, h, D) &= F(D + M^2 + mH) + F(D + M^2 - mH) - 2F(M^2) \\
&\quad + \frac{32\pi^2}{G} \left[ -\frac{1}{4}(2|z|^2 - 1)H^2 |z|^6 + (|z|^2 - 1)|z|^2 D \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

in terms of the function

$$F(x) \equiv 16\pi^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\ln(k^2 + x) - \ln(k^2)] = \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + x) - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) + x \right]. \tag{40}$$

In this expression and hereafter, we set the cutoff  $\Lambda$  equal to 1 for simplicity of writing. It would easily be recovered, if necessary, by considering the dimension. Note that the potential (39) clearly reduces when  $m = 0$  to the previous expression (19) ( $\times 32\pi^2/G$ ) for massless case.

The analysis of the stationary points of this potential for massive case becomes rather complicated and difficult to do systematically, but was performed by CDFK rather extensively. They found several peculiar stationary points realizing  $h \neq 0$ , which are usually difficult to understand the behavior physically.

As far as we have analyzed, those peculiar stationary points seem to realize *negative* vacuum energy, thus suggesting the existence of the negative norm states. Indeed the examples we checked corresponded to the vacua realizing the scalar VEVs  $|z|^2 < 1/2$ . However, the kinetic term of the chiral multiplet  $\Sigma = [z, \chi, h]$  is still given by (28) possessing the coefficient  $(2|z|^2 - 1)$ . Therefore, for the theory to give a healthy theory, the stationary points should exist in the region

$$|z|^2 > 1/2. \tag{41}$$

The stationary points in the region  $|z|^2 \leq 1/2$  correspond to the vacua on which negative norm chiral multiplet particles appear so that they must be discarded.

So here we analyze the potential restricting only in the healthy region  $|z|^2 > 1/2$ , and shall prove that there appears no dynamical SUSY breaking vacua, unfortunately. This conversely implies that many dynamical SUSY breaking solutions found by CDFK exist only in the unhealthy region  $|z|^2 \leq 1/2$ .

As three independent variables of the effective potential  $V$ , let us take the variables  $D, H = 2|h||z|^{-3}, Z \equiv |z|^2$  in place of the original ones  $D, h, z$ . Stationarity conditions of the potential (39) are given by

$$\frac{\delta V}{\delta D} = 0 \Rightarrow I(D + M^2 + mH) + I(D + M^2 - mH) = \frac{32\pi^2}{G} Z(1 - Z) \tag{42}$$

$$\frac{\delta V}{\delta H} = 0 \Rightarrow m \left( I(D + M^2 + mH) - I(D + M^2 - mH) \right) = \frac{16\pi^2}{G} (2Z - 1) Z^3 H \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta V}{\delta Z} = 0 &\Rightarrow \left( I(D + M^2 + mH) + I(D + M^2 - mH) - 2I(M^2) \right) (-2m^2 Z^{-3}) \\
&= \frac{32\pi^2}{G} \left[ \frac{H^2}{4} Z^2 (8Z - 3) + (1 - 2Z) D \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

where

$$I(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 16\pi^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + x} = 1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (45)$$

First of all, from the stationarity condition (43) with respect to  $H(= 2|h||z|^{-3})$  which must be non-negative by definition, we immediately see that  $H$  must vanish.  $H = 0$  clearly satisfies (43), but any positive  $H$  cannot satisfy it. This is because  $I(x)$  is a monotonically decreasing function from 1 to 0 for  $0 \leq x < \infty$ . Therefore, if  $H > 0$ ,

$$I(D + M^2 + mH) - I(D + M^2 - mH) < 0 \quad \text{while} \quad (2Z - 1)Z^3H > 0, \quad (46)$$

so that both sides of (43) have opposite sign in the present healthy region  $1/2 < Z < 1$ .

This fact  $H = 0$  is the reason why the potential analysis remains very simple in this healthy region. Then, with  $H = 0$ , the stationarity (42) with respect to  $D$  gives the condition

$$I(D + m^2Z^{-2}) = \frac{16\pi^2}{G}Z(1 - Z). \quad (47)$$

Since  $I(x)$  is monotonically decreasing from 1 to 0 as  $x$  goes from 0 to  $\infty$ , the solution  $D = D(Z)$  to this equation is formally written in the form

$$D(Z) = I^{-1}\left(\frac{16\pi^2}{G}Z(1 - Z)\right) - m^2Z^{-2} \quad \text{for} \quad 1 > \frac{16\pi^2}{G}Z(1 - Z) \geq 0 \quad (48)$$

$I^{-1}(x)$  is the inverse function of  $I$  existing for  $0 < x < 1$ ;  $I^{-1}(0) = +\infty$  and  $I^{-1}(1) = +0$ .  $I^{-1}(x)$  is also monotonically decreasing function and  $D(Z)$  is monotonically increasing function of  $Z$ . When  $Z$  approaches the free point  $Z = 1$ ,  $D(Z)$  becomes very large and behaves like

$$D(Z) \sim \frac{G}{32\pi^2} \frac{1}{1 - Z} \quad \text{as} \quad Z \rightarrow 1. \quad (49)$$

If  $G$  is smaller than the previous critical value  $G_{\text{cr}}^0$  for the massless case,

$$G < G_{\text{cr}}^0 \equiv 4\pi^2 \quad \rightarrow \quad \frac{16\pi^2}{G} \frac{1}{4} > 1, \quad (50)$$

as  $Z$  comes down from 1 towards  $1/2$ , the argument  $(16\pi^2/G)Z(1 - Z)$  reaches the value 1 at some  $\exists Z_0 > 1/2$  before  $Z = 1/2$ ;  $(16\pi^2/G)Z_0(1 - Z_0) = 1$ . That is, the stationary point  $D(Z)$  of the potential with respect to  $D$  exists only for the region  $Z_0 \leq Z \leq 1$ , but no stationary point for  $1/2 \leq Z < Z_0$ . For  $G > G_{\text{cr}}^0$ , the stationary points  $D(Z)$  always exist for the whole healthy region  $1/2 \leq Z \leq 1$ .

Note that even the coupling constant  $G$  reaches the massless critical value  $G_{\text{cr}}^0$ , the stationary point  $D(Z)$  at  $Z = 1/2$  is negative  $D(Z = 1/2) = -m^2/4 < 0$  so that the  $D(Z) = 0$  is realized at some  $Z > 1/2$ . A massive case critical coupling  $G_{\text{cr}}^m$  may be defined to be the coupling constant at which  $D(Z = 1/2) = 0$  is realized; that is,

$$I(m^2/4) = 4\pi^2/G_{\text{cr}}^m, \quad \text{so} \quad G_{\text{cr}}^m > G_{\text{cr}}^0. \quad (51)$$

Below this critical point  $G < G_{\text{cr}}^m$ , the  $D(Z) = 0$  stationary point always exist in the healthy region  $1/2 < Z < 1$ .

Finally consider the stationarity condition (44) with respect to  $Z$ , which reads now setting  $H = 0$

$$I(D + M^2) - I(M^2) = \frac{8\pi^2}{G} \frac{Z^3}{m^2} (2Z - 1)D \quad (52)$$

If we put  $D = D(Z)$ , then, this equation determines the stationary point  $Z$ . This equation is very similar to the previous  $H$ -stationarity condition (43). If  $D$  is positive, then the LHS of (52) is negative since  $I$  is monotone decreasing, while the RHS is positive in the healthy region  $1/2 < Z < 1$ . If  $D$  is negative, then the LHS is positive while the RHS is negative. So the only possibility for this equation to hold is  $D = 0$  case. We have seen above that the  $D(Z) = 0$  solution exists in the healthy region iff  $G$  is below the critical coupling  $G < G_{\text{cr}}^m$ . So in this weak coupling regime, there is a unique stationary point of the potential in the healthy region  $1/2 < Z < 1$ , and the SUSY remains unbroken since  $H = D = 0$ .

In the strong coupling region above the critical coupling  $G > G_{\text{cr}}^m$ , on the other hand,  $D$ -stationary points  $D(Z)$  are always positive  $D(Z) > 0$  in the healthy region, so that the  $Z$ -stationarity condition (44) cannot be satisfied. This means that there are no stationary points of the potential in the healthy region  $1/2 < Z < 1$ .

Indeed, outside the healthy region, i.e.,  $Z < 1/2$ , one can find many stationary points which possess non-vanishing values of  $H$  and/or  $D$  and realize the negative vacuum energy values. Analysis is not easy. We, here, do not enter this problem, since whatever solutions may be found they necessarily represent unphysical theories.

## 4 Conclusion

We have re-analyzed an interesting supersymmetric NJL model proposed by Cheng-Dai-Faisel-Kong, by using a new type of auxiliary field method in which a hidden U(1) gauge symmetry emerges. Unfortunately, the model is shown to have no dynamical SUSY breaking vacua in the healthy field-space region in which no negative metric particles appear; if the coupling constant  $G$  is weaker than a critical value  $G_{\text{cr}}^m$ , the stationary point of the effective potential is uniquely SUSY vacuum, and if the coupling constant is larger than the critical value,  $G > G_{\text{cr}}^m$ , there is no stationary point at all in the healthy field-space region. Above critical, the stationary points exist only in the un-healthy region so that the theory necessarily contain the negative metric particles.

The model, therefore, represents healthy theory only in the weak coupling region  $G < G_{\text{cr}}^m$ , where SUSY remains unbroken while the hidden U(1)-gauge symmetry is spontaneously broken and massive spin-1 supermultiplet dynamically appear as composite particles.

The author would like to thank Otto Kong and Yifan Cheng for informing him of their work and valuable discussions. The discussions with Naoki Yamatsu and Nobuyoshi Ohta are also acknowledged.

## 5 Appendix

### 5.1 Calculation of $\int d^4\theta(\bar{\Sigma}e^{2V}\Sigma - 1)^2$

From the Wess-Bagger[13]'s result for the chiral multiplet  $\Sigma = [z, \chi, h]$  and the vector multiplet in the Wess-Zumino gauge,  $V = [\lambda, v_m, -D]$ , we have

$$\bar{\Sigma}e^{2V}\Sigma\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = |h|^2 - |\mathcal{D}_m z|^2 - \frac{i}{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m\chi + \sqrt{2}i(z^*\lambda\chi - z\bar{\lambda}\bar{\chi}) - |z|^2 D. \quad (53)$$

Then, the action for the square term  $(\bar{\Sigma}e^{2V}\Sigma)^2$  is most easily obtained by applying this formula to the chiral superfield  $\Sigma^2 = [z^2, 2z\chi, 2zh - \chi^2]$  which carries the  $q = 2$  U(1) charge:

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}e^{2V}\Sigma)^2\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= (\bar{\Sigma})^2 e^{4V}(\Sigma)^2\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\ &= (2z^*h^* - \bar{\chi}^2)(2zh - \chi^2) - \mathcal{D}_m(z^{*2})\mathcal{D}^m(z^2) - \frac{i}{2}(2z^*\bar{\chi})\bar{\sigma}^m\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m(2z\chi) \\ &\quad + \sqrt{2}i(z^{*2}(2\lambda)(2z\chi) - z^2(2\bar{\lambda})(2z^*\bar{\chi})) - |z|^4(2D) \end{aligned} \quad (54)$$

From Eqs. (53) and (54), we find the expression cited in (28):

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}e^{2V}\Sigma - 1)^2\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} &= 2(2|z|^2 - 1) \left( |h|^2 - \mathcal{D}_m z^* \cdot \mathcal{D}^m z - \frac{i}{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m\chi + \sqrt{2}i(z^*\lambda\chi - z\bar{\lambda}\bar{\chi}) \right) \\ &\quad - 2|z|^2 \left( |z|^2 - 1 \right) D - 2i(\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\chi)(z^*\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_m z) - 2(zh\bar{\chi}^2 + z^*h^*\chi^2) + \chi^2\bar{\chi}^2. \end{aligned} \quad (55)$$

### 5.2 Expansion of the supertrace term $+i\text{STr Ln}(-\Delta)$

$$\begin{aligned} i\text{STr Ln}(-\Delta) &= i\text{Tr Ln}(-\mathcal{D}_m\mathcal{D}^m + D) - i\text{Tr Ln}(i\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m - 2\bar{\lambda}(-\mathcal{D}_m\mathcal{D}^m + D)^{-1}\lambda) \\ &= i\text{Tr Ln}(-\mathcal{D}^2 + D) - i\text{Tr Ln}(i\bar{\mathcal{P}}) - i\text{Tr Ln}\left(1 - 2\frac{1}{i\bar{\mathcal{P}}}\bar{\lambda}\frac{1}{-\mathcal{D}^2 + D}\lambda\right) \end{aligned} \quad (56)$$

where in the second line we have used the notation

$$\mathcal{D}_m\mathcal{D}^m \equiv \mathcal{D}^2, \quad \bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m \equiv \bar{\mathcal{P}}. \quad (57)$$

The last term can be expanded as

$$-i\text{Tr Ln}\left(1 - 2\frac{1}{i\bar{\mathcal{P}}}\bar{\lambda}\frac{1}{-\mathcal{D}^2 + D}\lambda\right) = +i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{Tr}\left[2\left(\lambda\frac{1}{i\bar{\mathcal{P}}}\bar{\lambda}\right)\frac{1}{-\mathcal{D}^2 + D}\right]^n$$

Furthermore, when evaluating these action diagrammatically, we separate the free and interacting parts for  $-\mathcal{D}^2 + D$  and  $i\bar{\mathcal{P}}$ :

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}^2 + D &= \underbrace{(-i\partial_m)^2 + \langle D \rangle}_{\Delta_A} + \underbrace{(-i\partial_m)v^m + v^m(-i\partial_m) + v^2 + \tilde{D}}_{-\mathcal{L}_{\text{int}}} = \Delta_A - \mathcal{L}_{\text{int}} \\ i\bar{\mathcal{P}} &= i\bar{\not{\partial}} - \bar{\not{p}} \end{aligned} \quad (58)$$

with  $\tilde{D} = D - \langle D \rangle$ . Then

$$\begin{aligned}
i \operatorname{Tr} \operatorname{Ln}(-\mathcal{D}^2 + D) &= i \operatorname{Tr} \operatorname{Ln}(\Delta_A) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left[ \frac{1}{\Delta_A} \mathcal{L}_{\text{int}} \right]^n \\
-i \operatorname{Tr} \operatorname{Ln}(i\overline{\mathcal{D}}) &= -i \operatorname{Tr} \operatorname{Ln}(i\overline{\phi}) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left[ \frac{1}{i\overline{\phi}} \overline{\psi} \right]^n \\
\frac{1}{-\mathcal{D}^2 + D} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_A} \left( \mathcal{L}_{\text{int}} \frac{1}{\Delta_A} \right)^k \\
\frac{1}{i\overline{\mathcal{D}}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i\overline{\phi}} \left( \overline{\psi} \frac{1}{i\overline{\phi}} \right)^k
\end{aligned} \tag{59}$$

## References

- [1] P. Fayet and J. Iliopoulos, Phys. Lett. **51B** (1974) 461. doi:10.1016/0370-2693(74)90310-4
- [2] P. Fayet, Phys. Lett. **58B** (1975) 67. doi:10.1016/0370-2693(75)90730-3
- [3] L. O’Raifeartaigh, Nucl. Phys. B **96** (1975) 331. doi:10.1016/0550-3213(75)90585-4
- [4] K. I. Izawa and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 829 doi:10.1143/PTP.95.829 [hep-th/9602180].
- [5] K. A. Intriligator and S. D. Thomas, Nucl. Phys. B **473** (1996) 121 doi:10.1016/0550-3213(96)00261-1 [hep-th/9603158].
- [6] K.-I. Izawa, F. Takahashi, T. T. Yanagida and K. Yonekura, Phys. Rev. D **80** (2009) 085017 doi:10.1103/PhysRevD.80.085017 [arXiv:0905.1764 [hep-th]].
- [7] K. A. Intriligator and N. Seiberg, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC** (1996) 1 [Subnucl. Ser. **34** (1997) 237] doi:10.1016/0920-5632(95)00626-5 [hep-th/9509066].
- [8] Y. Cheng, Y. M. Dai, G. Faisel and O. C. W. Kong, arXiv:1507.01514 [hep-ph].
- [9] Y. Cheng, Y. M. Dai, G. Faisel and O. C. W. Kong, arXiv:1603.00724 [hep-th].
- [10] N. Ohta, Phys. Lett. **112B** (1982) 215. doi:10.1016/0370-2693(82)90965-0
- [11] N. Ohta and Y. Fujii, Nucl. Phys. B **202** (1982) 477. doi:10.1016/0550-3213(82)90411-4
- [12] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** (1994) 221 doi:10.1016/0370-1573(94)90022-1 [hep-ph/9401310].
- [13] J. Wess and J. Bagger, Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p

# Nonequilibrium model inspired from Black Hole

梅津 光一郎

日本大学理工学部

## 1 ブラックホール物理と熱力学

ブラックホール物理を理解するために、最も有用な考察の一つは「ブラックホール物理に一般化された熱力学の法則を適応させる」ことであろう。その熱力学の法則が適応できるという理由としてはブラックホール物理と熱力学の間には数多くの対応関係があるからである [1]。この対応関係をより堅固なものとするため、Hawking はブラックホールが放射するメカニズムを考案した [2]。具体的に彼はブラックホール時空を背景とした場の量子論の考察をもとに、Bogoliubov 変換を用いて粒子数期待値

$$\langle n \rangle_{\text{boson}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega} - 1}, \quad (1)$$

を評価した。ここでは、放出される粒子はエネルギー  $\omega$  を持つスカラー場であるとし、 $\kappa$  はブラックホールの表面重力を表す。また以下においては、自然単位系を用いる。これを黒体放射の式と比較することによって、ブラックホールがある特別な温度

$$T_{\text{BH}} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2)$$

を持つ黒体のように振舞うことを示した。この特別なブラックホールの温度は、Hawking 温度と呼ばれている。

この Hawking 放射と呼ばれるブラックホールの放射を説明するメカニズムによって、ブラックホール物理と熱力学とが完全な対応関係を持つことが示された。係数も含めて温度が分かった今、熱力学第一法則からブラックホールエントロピーも一意的に決定される。また、宇宙背景放射との比較から現存する典型的なブラックホールが物質吸収優勢であることを示すことができる一方で、ブラックホール蒸発のような興味深い現象を予言した [3]。さらには、Stefan-Boltzmann の法則を用いて、ブラックホールの蒸発時間が計算されており、例えば宇宙初期に作られた  $10^{11}$  [kg] 程度の質量を持つミニブラックホールの蒸発時間はおおよそ 137 億年であり、ちょうど今頃に蒸発することが期待される。

## 2 ブラックホール蒸発過程

このブラックホールの蒸発過程は、段階的に次の 3 つの過程に分類されることが考えられる (Figure 1)。まず第一段階として、放出される粒子の持つエネルギーが、ブラックホールの質量エネルギー

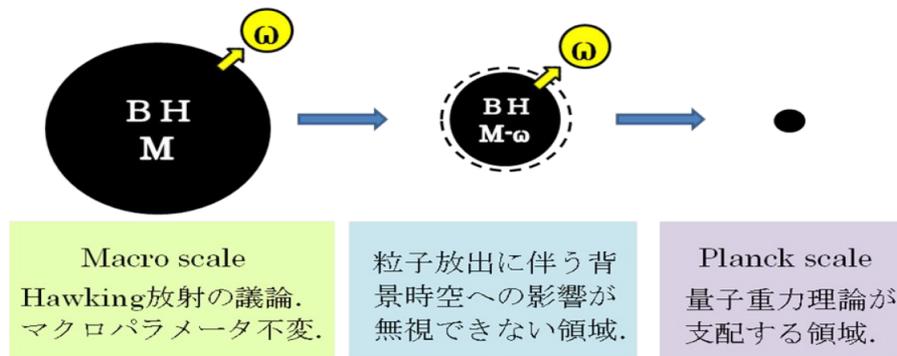


Figure 1: ブラックホール蒸発過程

ギーに比べて非常に小さく、ブラックホールのマクロパラメーターの変化が十分に無視される場合である。Hawking のオリジナルの論文 [2] においても得られた結果はこの議論に基づいている。

しかしながら、実際にはこの Hawking 放射によってエネルギーを減少させているため、放射優勢のブラックホールは自身の質量エネルギーを失いながら、徐々に粒子放出に伴う背景時空への影響が無視できない領域に入ると考えられる。これは、まさに非平衡系物理の 1 つのモデルになると考えられ、この過程を第二段階とする。この場合、ブラックホールエントロピーや Hawking 温度にはある種の補正項が与えられることが知られている [4]。もし正しい量子重力理論であれば、ある近似において、この補正項が係数を含めて正しく導出されることが期待される。理論構築のための手掛かりが少ない現状においては、正しい理論となり得るかの判定に使えるかもしれない。

第三段階においては、さらに放射が進み、ブラックホール自身が Planck スケールまで小さくなるであろう。この過程においては、量子重力理論が支配する領域となり、もしこれらの現象が観測されるならば、量子重力理論を構築するための数多くの重要な手掛かりが得られると考えられる。

### 3 ブラックホール蒸発から想起される黒体放射モデル

Hawking 放射によって、ブラックホールは Hawking 温度を持つ黒体放射のように振舞うことが示され、さらには蒸発などの興味深い現象も提供してくれる。我々は先述のようにブラックホール蒸発時間を求める際に、Stefan-Boltzmann の法則を用いるが、ブラックホールの蒸発過程のような温度変化するような現象を Stefan-Boltzmann の法則が厳密に適応できるかどうかは明確なことではない。なぜならば、通常の黒体放射の実験においては、熱浴があり、熱を通じて内部エネルギーが供給されるため、温度が常に一定となるからである。Hawking の議論によって、ブラックホールが黒体放射のように振舞うことが示されたのも、放射に伴う背景時空への影響を無視したために、ブラックホール自身の温度が常に一定であることを仮定したために得られた結果である

ということができる。

これからの議論を明確にするために、まずは通常空洞放射の実験について簡単に説明することにする。空洞放射の実験においては、容器の中には光子気体が無数に存在している。光子気体は Bose 粒子であるため、同じ基底状態が無数に存在することが可能であり、これらが本質的に物理量に影響を与えることはないと考えられる。容器内の光子のうち、一部の光子は熱浴を付けられた容器の壁面と相互作用によって、光子が励起され、容器内の光子気体の温度が、熱浴の温度に一致すると考えられる。空洞放射では容器にあげられたごく小さな穴から光子が放出される。光子の放出によって、系の内部エネルギーが減少する。この光子気体の内部エネルギーは空洞内の体積  $V$  と温度  $T$  を用いて、

$$U = \frac{4\sigma}{c}VT^4 \quad (3)$$

によって与えられる [5]。ここで、 $c$  は光速、 $\sigma$  は Stefan-Boltzmann 定数を表す。したがって、内部エネルギーの減少により系の温度は低くなるが、系は熱浴と接しているため、熱浴から失った内部エネルギーと等量の熱が供給される。一見、粒子数は減少しているようにも思えるが、基底状態の光子は無数に存在することが可能なので、熱浴に接している限り、連続的に放射し続けることが可能となる。それゆえ、熱力学関数 (3) が粒子数に依存しない。

ここで、我々は熱浴を取り外すことを考える。さらに容器はマイクロにみても断熱的な壁であったと仮定する。このとき、熱浴からの新しい熱が供給されなくなるため容器にあいた穴から放出された光子の持つエネルギー  $\omega$  の数だけ系は内部エネルギーを減少させ、それに伴い温度も減少すると考えられる：

$$T^4 = \frac{c}{4\sigma} \frac{U - \sum \omega_i}{V}. \quad (4)$$

これは、熱力学変数である温度や内部エネルギーのようなマクロパラメータが光子のエネルギー  $\omega$  というマイクロパラメータによって記述されることを示唆している。

## 4 まとめと議論

我々はブラックホール熱力学から得られた知見を黒体放射の議論に還元し、単純な非平衡熱力学系の 1 つのモデルについて考察した。さらに Parikh と Wilczek らによって、Schwarzschild ブラックホールの背景において、粒子放出に伴う背景時空への影響を考慮するとき、Boltzmann 分布は

$$\Gamma = e^{-\beta\omega + 4\pi\omega^2} \quad (5)$$

によって与えられる [4]。但し、この結果は準古典近似が用いられている。ここで、 $\beta$  は温度の逆数を表す。(5) 式には、2 つの解釈の仕方がある。1 つは宇宙背景放射の議論で用いられる化学ポテンシャル  $\mu$  を含む Boltzmann 分布

$$\Gamma = e^{-\beta(\omega - \mu_{\text{eff}})} \quad (6)$$

である。ここで、有効的な化学ポテンシャルは  $\mu_{\text{eff}} = 4\pi\omega^2/\beta$  となる。この場合、 $\beta$  は常に一定となるので、粒子放出に伴う温度依存性を記述できないことになってしまう。もう一つの解釈はこの補正項を温度のマイクロパラメータによる補正項として理解することである：

$$\Gamma = e^{-\beta_{\text{eff}}\omega}. \quad (7)$$

ここで、有効的な温度逆数を  $\beta_{\text{eff}} = \beta - 4\pi\omega$  と定義した。この場合、温度に  $\omega$  依存性現れるが、熱力学第一法則やエントロピーがどのように修正されるかを明らかにしていく必要がある。

最後に、黒体（空洞）放射の実験において、我々は理想的にマイクロに見て完全な断熱壁を用いたが、これは非現実的である。この問題を解決するためには、同じ2つの空洞放射装置を用意する。このとき、一方には容器に小さな穴をあけ、もう一方には穴のない容器を用いる。穴のある場合と穴のない場合の温度変化の差を測定すれば良い。この変化は微小であるが、バックグラウンド次第では、有意な結果が得られる可能性がある。

## References

- [1] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) Erratum: [Commun. Math. Phys. **46**, 206 (1976)].
- [3] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [4] M. K. Parikh and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000)
- [5] Akira Shimizu, “Principles of Thermodynamics,” University of Tokyo Press (2007)

# Probing New Physics in Low Energy Solar Neutrino Oscillation Data

Amir N. Khan<sup>a</sup> (ntrnphysics@gmail.com), Douglas W. McKay<sup>b</sup> (dmckay@ku.edu)

<sup>a</sup>School of Physics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, P. R. China

<sup>b</sup>Department of Physics and Astronomy, University of Kansas, Lawrence, KS 66045, USA

## Introduction

Solar neutrinos have a long history since its first detection in 1970 in the Homestake experiment, the epic of solar neutrino problem, which was an apparent discrepancy between the Homestake observation and the theory based on the solar standard model. This discrepancy or the solar neutrino problem was confirmed in 1980s by Kamiokande, GNO/GALLEX, SAGE and Super-Kamiokande (1990s) [1]. The solar neutrino problem was finally solved by SNO experiment in 2002 using the  $^8\text{B}$  component of the solar neutrino spectrum and was shown consistent with the expectations of the solar standard model in addition to the theory of neutrino oscillations [2].

Solar neutrinos have some unique characteristics. They cover the energy range of sub-MeV to several MeVs. Having low energies they require difficult detections techniques. They play complimentary role to the reactor neutrinos. Both have approximately the same energy window for their detections (0-10) MeV. In case of solar neutrinos, the neutrino flavor is produced as result of the thermonuclear conversion of proton into neutrons and positrons, while electron-antineutrinos are produced as a result of neutron beta decay along with electrons. In both cases the neutrinos are detected in the disappearance experiments using the similar detection techniques.

Before the Borexino experiment, the solar neutrino fluxes were only known indirectly by the radiochemical experiments. It was only very recently when the Borexino experiment gave the first real-time flux observations of the lowest energy components of the solar neutrinos (pp [3],  $^7\text{Be}$  [4] and pep [5]). Being at the lower end of the solar neutrino spectrum, these components are predominantly controlled by the vacuum oscillations. The LMA-MSW contribution to the three components are  $<2\%$  for pp,  $<4\%$  for  $^7\text{Be}$  and  $<8\%$  for pep. Based on this observation the recent solar neutrino flux observations by the Borexino experiment are ideal to probe for nonstandard neutrino interactions (NSIs) at the sun and at the detector while the NSIs at the propagation inside the sun can be safely ignored because of the low contribution from the LMA-MSW effect to pp,  $^7\text{Be}$  and pep components of the spectrum.

## Calculational Framework:

We estimate the source and detector NSI parameters in terms of the neutrinos detection

event rates at the Borexino detector which we define as

$$R_\nu = N_e \int_0^{E_{max}} dE_\nu \phi(E_\nu) (\sigma_e(E_\nu) \langle P \rangle_{ee} + \sigma_{\mu,\tau}(E_\nu) [1 - \langle P \rangle_{ee}]), \quad (1)$$

where  $N_e$  are the number of target electrons at the Borexino detector,  $\phi(E_\nu)$  is neutrino flux for the three pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep taken from Refs. [3], [4] and [5], respectively.  $\sigma_e(E_\nu)$  and  $\sigma_{\mu,\tau}(E_\nu)$  are the total  $\nu_e$ -e and  $\nu_{\mu/\tau}$ -e cross-sections and  $\langle P \rangle_{ee}$  is the probability averaged over the oscillation length that  $\nu_e$  survives in the trip from the Sun's core to the detector.  $\langle P \rangle_{ee}$  contains all of the standard mixing parameters and all of the source NSI parameters while  $\sigma_e(E_\nu)$  and  $\sigma_{\mu,\tau}(E_\nu)$  contains the standard weak mixing angle as well as all of the detector NSI parameters. For the statistical estimates of standard weak mixing angle and all of the source and detector NSI parameters we use the following  $\chi^2$ -model

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{R_i^{\text{exp}} - R_i^{\text{obs}}}{\Delta_i^{\text{stat}}} \right)^2, \quad (2)$$

where  $R_i^{\text{exp}}$  are expected event rates as given in Eq. (1),  $R_i^{\text{obs}}$  are the observed event rates as given in Refs. [3], [4] and [5] with  $\Delta_i^{\text{stat}}$  as the statistical uncertainty. Index "i" designates the three fluxes corresponding to pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep.

### Analysis Details, Results and Discussion:

For the SM fit, we set all NSI parameters to zero and fit the weak mixing angle to Borexino data of pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep spectra. For all the NSI parameter fits, we perform two parameters space analyses, while set all the other parameters to zero, in the order source-only, detector-only and then source vs. detector. For the whole NSIs analyses, we assume the PDG-14 values of all the standard parameters to calculate the expected event rates. All the two parameter regions are taken at 68%, 90% and 95% C.L.. The bounds are extracted in all of the above three cases at the 90% C.L..

In case of the standard mixing model parameter analysis we find the value of  $\sin^2\theta_W$  at the lowest energy to-date. From the fitting with the source-only, detector-only and source vs. detector only NSI parameters we find the bounds comparable to the existing bounds of Ref. [6] in some cases and stronger or weaker in the other cases. The 90% C.L. boundaries of the flavor conserving nonuniversal NSIs parameters (left panel) and the flavor-changing parameters (right panel) for the new physics effects at detector for the Borexino's data for pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep spectra are shown in Fig. 1 for illustration. We also find the future prospects estimates of the confidence level boundaries by incorporating 1% of the statistical uncertainty in regards to the future experiments for the solar flux measurements at its lower energy end at Borexino (upgraded), CJPL [7], SNO+ [8], LENA [9], JUNO [10] etc. With 1% uncertainty we find an over all of one order of magnitude or more improvement of the source and detector NSI parameters.

Moreover, we also check the impacts of the NSI phases on the C.L. boundaries of various NSI parameters. The 90% C.L. boundaries of the flavor conserving nonuniversal NSI parameters (left panel) and the flavor-changing parameters (right panel) for the new physics effects at the detector with the prospected data for pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep spectra with 1% uncertainty are shown in Fig. 2 for illustration.

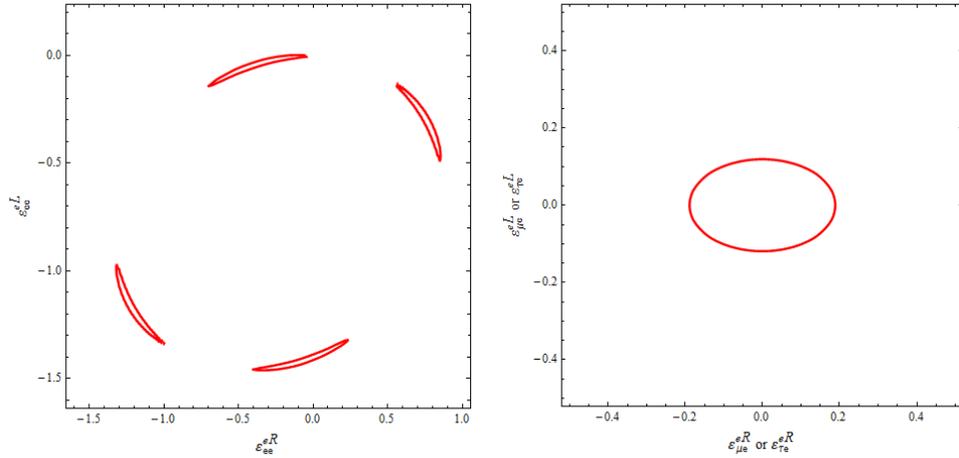


Figure 1: The 90% C.L. boundaries of the flavor conserving nonuniversal NSIs parameter (right panel) and the flavor-changing parameters(left panel) at detector for the Borexino's data for pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep spectra.

**Conclusions:** The recent real-time measurements of low energy components of the solar spectrum at Borexino have very low LMA-MSW contribution, thus provide a good testing ground for new physics study at source (Sun) and detector. We found the best fit value of  $\sin^2 \theta_W$  at the lowest energy to-date using the Borexino results. We have put new constraints on the NSI parameters at the production point at Sun and at detector using the current data and have future prediction study for the future proposals/planned experiments Borexino (upgrade) [3], CJPL [7], SNO+ [8], LENA [9], JUNO [10] etc. An improvement in sensitivity to the 1% level will either reveal very small deviations from the SM or reduce possibilities for NSI parameters by factors from 2-3 to more than an order of magnitude. Our results show the complementarity between solar and reactor data to probes NSIs simultaneously. As a crucial background in the dark matter experiments, solar neutrino experiments and theory can anticipate a long future. In return, they provide the key to nailing down details of solar structure and dynamics and can play a vital part of progress in resolving the neutrino properties.

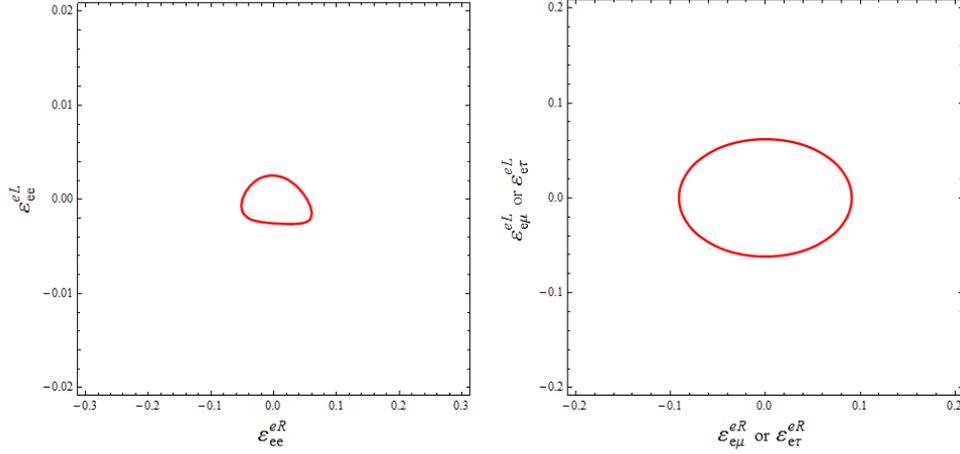


Figure 2: The 90% C.L. boundaries of the flavor conserving nonuniversal NSIs parameter (left panel) and the flavor-changing parameters (right panel) at detector for the prospected data for pp,  ${}^7\text{Be}$  and pep spectra at the future facilities.

**Acknowledgement:** A. N. Khan is very thankful to Professor Joe Sato and Professor Osamu Yasuda who supported his visit and stay at Saitama University, Japan. He also thanks to the organizers of the Japan theoretical physics annual meeting at Maskawa Institute, Kyoto-Sangyo University, for their kind hospitality during his stay there and giving him the opportunity to present this work. This work was financially supported by the Sun Yat-Sen University, China, under the Post-Doctoral Fellowship program.

## References

- [1] K. Olive et al., (Particle Data Group), Chin. Phys. C 38, 090001 (2014).
- [2] Q.R. Ahmad et al., [SNO Collab.], Phys. Rev. Lett. 89, 011301 (2002).
- [3] G. Bellini et al, (Borexino Collaboration) , Nature 512, 383, (2014)
- [4] G. Bellini et al, (Borexino Collaboration) , Phys. Rev. Lett. 107, 141302 , (2011)
- [5] G, Bellini et al, (Borexino Collaboration) , Phys. Rev. Lett. 108, 051302, (2012)
- [6] O. G. Miranda and H Nunokawa, New J. Phys. 9, 095002(2015)

- [7] J. Beacom et al. (The CJPL Collaboration), "Letter of Intent: Jinping Neutrino Experiment", arXiv: 1602.01733 v4 [physics.insdet], (2016).
- [8] SNO+ Collaboration (F. Descamps (LBL, Berkeley), Nucl.Part.Phys.Proc. 265-266 (2015) 143-145
- [9] M. Wurm et al. (LENA Collaboration), Astropart. Phys. 35, 685 (2012).
- [10] Y.-F. Li, "Overview of the Jiangmen Underground Neutrino Detector (JUNO), arXiv:1402.6143v1 [physics.ins-det] (2014).

# New dimensions from gauge-Higgs unification

Yutaka Hosotani

*Department of Physics, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan*

## Abstract

The Higgs boson is unified with gauge fields in the gauge-Higgs unification. The  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs electroweak unification in the Randall-Sundrum warped space yields almost the same phenomenology at low energies as the standard model, and gives many predictions for the Higgs couplings and new  $W', Z'$  bosons around  $6 \sim 8$  TeV, which can be tested at 14 TeV LHC. The gauge-Higgs grand unification is achieved in  $SO(11)$  gauge theory. It suggests the existence of the sixth dimension (GUT dimension) in addition to the fifth dimension (electroweak dimension). The proton decay is naturally suppressed in the gauge-Higgs grand unification.

## 1 Standard model

The Standard Model (SM) is very successful at low energies. It is gauge theory of  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , whose Lagrangian density consists of four parts;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} , \\
 \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} , \\
 \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= |D_\mu \Phi|^2 - V[\Phi] , \\
 \mathcal{L}_{\text{fermion}} &= \sum \bar{\psi}_j i \gamma^\mu D_\mu \psi_j , \\
 \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= \sum \{ y_{jk}^d \bar{\psi}_j \Phi \psi_k + y_{jk}^u \bar{\psi}_j \tilde{\Phi} \psi_k \} + (h.c.) . \tag{1}
 \end{aligned}$$

The form of the parts  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$  is determined by the gauge principle, and is beautiful. The form of the Higgs potential  $V[\Phi]$  in  $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ , however, is given in ad hoc manner. The Yukawa couplings  $y_{jk}^{u,d}$  in  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  are arbitrary as well. The parts  $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  lack a principle.

The electroweak (EW) gauge symmetry breaking in the SM is brought about by an intentional choice of  $V[\Phi]$  which is assumed to have a global minimum at  $\langle \Phi \rangle \neq 0$ . In other words, the EW gauge symmetry breaking is enforced by hand. The Higgs boson remains mysterious in the SM.

## 2 Gauge-Higgs unification

In the gauge-Higgs unification one starts with gauge theory in higher dimensions.[1, 2, 3] The Higgs field becomes a part of the extra-dimensional component of gauge fields. Schematically

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} \implies \mathcal{L}_{\text{gauge}}^{5\text{d}} ,$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \implies \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{5\text{d}} . \quad (2)$$

The effective Higgs potential is generated dynamically at the quantum level from  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{5\text{d}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{5\text{d}}$ . In short, the theory is governed by the gauge principle, and becomes concise and beautiful.[4, 5]

In the gauge-Higgs unification in five dimensions ( $x^\mu, y$ )

$$A_M = \begin{cases} A_\mu \supset \gamma, W, Z \\ A_y \supset \text{Higgs boson} \sim \text{Aharonov-Bohm (AB) phase } \theta_H \end{cases} \quad (3)$$

When the fifth dimension is not simply connected, the Higgs field appears as an Aharonov-Bohm phase  $\theta_H$  in the fifth dimension. The effective potential  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  becomes nontrivial at the one-loop level. When  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  is minimized at  $\theta_H \neq 0$ , the EW symmetry is dynamically broken. Finite Higgs mass is generated. The gauge-hierarchy problem is solved.

### 3 $SO(5) \times U(1)$ gauge-Higgs EW unification

The Randall-Sundrum (RS) warped space is specified with the metric

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} dx^\mu dx_\mu + dy^2 , \\ \sigma(y) = \sigma(-y) = \sigma(y + 2L) , \quad \sigma(y) = k|y| \text{ for } |y| \leq L . \quad (4)$$

The RS space has topology of  $M^4 \times (S^1/Z_2)$ , in which  $(x^\mu, y), (x^\mu, -y)$  and  $(x^\mu, y + 2L)$  are identified. Its fundamental region is 5d AdS space sandwiched by two branes, UV and IR branes, at  $y_0 = 0$  and  $y_1 = L$ . The  $SO(5)$  and  $U(1)_X$  gauge fields,  $A_M$  and  $B_M$ , satisfy

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ A_y \end{pmatrix} (x, y_j - y) = P_j \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_y \end{pmatrix} (x, y_j + y) P_j^{-1} , \quad P_j \in SO(5) , \quad P_j^2 = 1 , \\ \begin{pmatrix} B_\mu \\ B_y \end{pmatrix} (x, y_j - y) = \begin{pmatrix} B_\mu \\ -B_y \end{pmatrix} (x, y_j + y) , \quad (5)$$

Although gauge potentials themselves are not single-valued, physical gauge-invariant quantities are single-valued.[6]-[10]

The set of the matrices  $P_0, P_1$  is called the orbifold boundary condition. We take

$$P_0 = P_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & +1 \end{pmatrix} , \quad (6)$$

by which gauge symmetry  $\mathcal{G} = SO(5) \times U(1)_X$  is reduced to  $\mathcal{H} = SO(4) \times U(1)_X$ . Zero modes (parity even-even modes) appear in the  $\mathcal{H}$  part of  $A_\mu, B_\mu$ , and in the  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  part of  $A_y$ .

The latter is an  $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$  vector, or an  $SU(2)_L$  doublet, corresponding to the 4d Higgs field in the SM.

Quark-lepton multiplets are introduced in the vector representation of  $SO(5)$  in the bulk. In addition, one introduces dark fermions in the spinor representation in the bulk. On the UV brane at  $y = 0$  brane fermions in  $SU(2)_L$  doublet and a brane scalar  $\Phi$  in  $SU(2)_R$  doublet are introduced. The brane scalar  $\Phi$  spontaneously breaks  $SU(2)_R \times U(1)_X$  to  $U(1)_Y$ , and at the same time gives rise to additional mass terms for fermions. The resultant spectrum at low energies ( $< 1$  TeV) is that of the SM. The effective potential  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  is evaluated at the one loop. Contributions from the top quark multiplet and dark fermions triggers the EW gauge symmetry breaking with a Higgs boson mass  $m_H = 125$  GeV.

## 4 Success and predictions

The  $SO(5) \times U(1)_X$  gauge-Higgs unification is successful. The gauge principle governs the theory, including dynamics of the 4d Higgs boson.[10]-[24]

(1) The 4d Higgs boson, the four-dimensional fluctuation mode of the AB phase  $\theta_H$  in the fifth dimension, is massless at the tree level but acquires a nonvanishing mass at the one loop level which is free from divergence and independent of regularization methods employed. The gauge hierarchy problem, a cumbersome problem in many theories, is naturally solved.

(2) The phenomenology at low energies ( $\leq 1$  TeV) for  $\theta_H < 0.15$  is almost the same as in the SM.

(3) There is no vacuum instability problem associated with the 4d Higgs scalar field.[25] The effective potential for the 4d Higgs field  $H(x)$  is given by  $V_{\text{eff}}(\theta_H + H/f_H)$ . The large gauge invariance guarantees the periodicity  $V_{\text{eff}}(\theta_H + 2\pi) = V_{\text{eff}}(\theta_H)$ , which in turn implies that there never occurs the instability. It has been explicitly shown that  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  is finite at the one loop level.

(4) Dynamical EW symmetry breaking takes place in the RS space. The existence of a heavy quark, the top quark  $m_t > m_W$ , is crucial.  $V_{\text{eff}}(\theta_H)$  is controlled by the  $W$  and  $Z$  bosons, the top quark multiplet, and the dark fermions. Light quarks and leptons multiplets are irrelevant for the EW symmetry breaking in the RS space.

The gauge-Higgs unification gives many predictions to be confirmed by the forthcoming and future experiments. Although the model contains several parameters, most of physical quantities are parametrized by the AB phase  $\theta_H$ .

(a) The Yukawa couplings of quarks and leptons,  $Y_\alpha$ , the three-point couplings of the Higgs boson to  $W, Z$  bosons,  $g_{HWW}, g_{HZZ}$ , are given, in good approximation, by[8, 11]

$$Y_\alpha, g_{HWW}, g_{HZZ} \simeq (\text{SM values}) \times \cos \theta_H . \quad (7)$$

The deviation from the SM is less than 1% for  $\theta_H < 0.1$ .

(b) Decay of the Higgs boson to  $\gamma\gamma, Z\gamma$ , and two gluons take place through one-loop diagrams. In the gauge-Higgs unification an infinite number of various Kaluza-Klein (KK) modes run

inside the loop. Each of their contributions gives  $O(1/n)$  correction to the decay width where  $n$  is the KK number. There appears miraculous cancellation among them so that the sum of all contributions turns out finite and small. It gives less than 1% correction to those in which SM particles run inside the loop for  $\theta_H < 0.1$ . The cancellation in the process  $H \rightarrow Z\gamma$  is highly nontrivial, as the KK number can change inside the loop.[10, 19]

(c) An immediate consequence of (a) and (b) is that both the production rate of the Higgs boson at LHC and decay widths of the Higgs boson to various modes are all suppressed in good approximation by a factor  $\cos^2 \theta_H$  compared to those in the SM. Branching fractions of various decay modes are nearly the same as in the SM. The signal strengths of the various decay modes are suppressed by a factor  $\cos^2 \theta_H$ . For  $\theta_H < 0.1$  the deviation from the SM is less than 1%.

(d) The Higgs cubic and quartic self-couplings,  $\lambda_3^H, \lambda_4^H$ , deviate from those in the SM, which can be tested in future. Although the model has several parameters to be fixed, many of physical quantities such as  $\lambda_3^H, \lambda_4^H$ , the KK mass scale  $m_{\text{KK}}$ , and the masses of the first KK modes  $\gamma^{(1)}, Z^{(1)}, W^{(1)}$  depend only on  $\theta_H$  in very good approximation. This property is called the universality.

The universality leads to strong prediction power to the gauge-Higgs unification. Suppose that the first KK mode  $Z^{(1)}$  is found at  $m_0$ . From the relation  $m_{Z^{(1)}}(\theta_H) = m_0$ , the value  $\theta_H$  is determined. Then other quantities  $\lambda_3^H(\theta_H), \lambda_4^H(\theta_H), m_{W^{(1)}}(\theta_H)$  etc. are determined, and can be checked experimentally.

(e) The prediction of  $Z'$  events gives the cleanest test of the model. The first KK modes of the photon,  $Z$  boson, and  $Z_R$  boson appear as  $Z'$  events. ( $Z_R$  is associated with  $SU(2)_R$ , and has no zero mode.) For  $\theta_H = 0.114$ , their masses are  $(m_{Z_R^{(1)}}, m_{Z^{(1)}}, m_{\gamma^{(1)}}) = (5.73, 6.07, 6.08)$  TeV and the widths are  $(\Gamma_{Z_R^{(1)}}, \Gamma_{Z^{(1)}}, \Gamma_{\gamma^{(1)}}) = (482, 342, 886)$  GeV. For  $\theta_H = 0.073$ , their masses are  $(m_{Z_R^{(1)}}, m_{Z^{(1)}}, m_{\gamma^{(1)}}) = (8.00, 8.61, 8.61)$  TeV and the widths are  $(\Gamma_{Z_R^{(1)}}, \Gamma_{Z^{(1)}}, \Gamma_{\gamma^{(1)}}) = (553, 494, 1040)$  GeV.[24]

## 5 $SO(11)$ gauge-Higgs grand unification

It is necessary to incorporate strong interactions in the framework of gauge-Higgs unification. This leads to gauge-Higgs grand unification.[26]-[37] We look for a scenario in which the EW Higgs boson appears as the extra-dimensional component of gauge potentials, and electromagnetic, weak, and strong interactions are unified in a single group, and no exotic particles appears at low energies.

One might think that the gauge group should contain  $SO(5) \times U(1)_X \times SU(3)_C$  as a subgroup. It turns out that this is not the case. It is seen that  $SO(11)$  gauge theory does a job, keeping good features of the  $SO(5) \times U(1)_X$  gauge-Higgs EW unification.[34, 36]

One starts with  $\mathcal{G} = SO(11)$  gauge theory in the Randall-Sundrum warped space (4). The orbifold boundary condition is given by

$$\begin{aligned} P_0^{\text{vec}} &= \text{diag}(I_{10}, -I_1), & P_1^{\text{vec}} &= \text{diag}(I_4, -I_7), \\ P_0^{\text{sp}} &= I_{16} \otimes \sigma^3, & P_1^{\text{sp}} &= I_2 \otimes \sigma^3 \otimes I_8 \end{aligned} \quad (8)$$

in vectorial and spinorial representations. At the UV brane  $SO(11)$  is broken to  $SO(10)$  by  $P_0$ , whereas at the IR brane it is broken to  $SO(4) \times SO(7)$ . As a whole  $\mathcal{G} = SO(11)$  is broken to  $\mathcal{H} = SO(4) \times SO(6)$ . Note that  $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ , and  $SO(6) \simeq SU(4)$ . At this stage  $A_\mu$  has zero modes in the block  $\mathcal{H}$ , on the other hand  $A_y$  has zero modes in the block  $[\mathcal{G}/SO(10)] \cap [\mathcal{G}/SO(4) \times SO(7)]$ . In the vectorial representation  $A_y$  has zero modes in the components  $A_y^{a11}$  ( $a = 1 \sim 4$ ), which correspond to the 4d Higgs field in the SM.

On the IR brane a brane scalar  $\Phi_{\mathbf{16}}$  is introduced.  $\Phi_{\mathbf{16}}$  spontaneously breaks  $SO(10)$  to  $SU(5)$ . As a result  $\mathcal{G} = SO(11)$  is reduced to  $\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$ . Note that  $SU(3)_C \subset SO(6)$ , whereas  $U(1)_Y$  is a combination of  $SU(2)_R$  and  $SO(6)$ .  $\mathcal{G}_{\text{SM}}$  is dynamically broken to  $U(1)_{\text{EM}} \times SU(3)_C$  through the Hosotani mechanism. The Weinberg angle at the GUT scale becomes  $\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}$ , the same value as in the  $SU(5)$  or  $SO(10)$  GUT in four dimensions.

Fermions are introduced in the spinor ( $\Psi_{\mathbf{32}}$ ) and vector ( $\Psi_{\mathbf{11}}$ ) representations of  $SO(11)$ .  $\Psi_{\mathbf{32}}$ , for instance, satisfies  $\Psi_{\mathbf{32}}(x, y_j - y) = -\gamma^5 P_j^{\text{SP}} \Psi_{\mathbf{32}}(x, y_j + y)$ . The content of  $\Psi_{\mathbf{32}}$  is given by

$$\Psi_{\mathbf{32}} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{16}} \\ \Psi_{\overline{\mathbf{16}}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{16}} = \begin{pmatrix} \nu \\ e \\ \hat{e} \\ \hat{\nu} \\ u_k \\ d_k \\ \hat{d}_k \\ \hat{u}_k \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\overline{\mathbf{16}}} = \begin{pmatrix} \nu' \\ e' \\ \hat{e}' \\ \hat{\nu}' \\ u'_k \\ d'_k \\ \hat{d}'_k \\ \hat{u}'_k \end{pmatrix}, \quad (k = 1 \sim 3),$$

$$\text{zero modes : } \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{kL} \\ d_{kL} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu'_R \\ e'_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_{kR} \\ d'_{kR} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

$\hat{e}$ ,  $\hat{u}$ , and  $\hat{d}$  fields have charges  $+1$ ,  $-\frac{2}{3}$ , and  $+\frac{1}{3}$ , respectively. Zero modes appear only for the components of quarks and leptons. Vector multiplets  $\Psi_{\mathbf{11}}$  are introduced to reproduce the mass spectrum of down-type quarks and leptons.

One interesting feature is that all quarks and leptons appear in  $\Psi_{\mathbf{32}}$  as particles with the  $\Psi$ -fermion number  $N_\Psi = +1$ .  $N_\Psi$  is conserved even in the presence of  $\Psi_{\mathbf{11}}$ . A proton has  $N_\Psi = 3$ , whereas  $\pi^0 e^+$  has  $N_\Psi = -1$ . The proton decay  $p \rightarrow \pi^0 e^+$  is forbidden. This should be contrasted to the situation in the 4d GUT. In  $SO(10)$  GUT in four dimensions a fermion multiplet is introduced in the spinor representation  $\Psi_{\mathbf{16}}$  for left-handed fields. In the notation in (9),  $(u_k, d_k) \rightarrow (u_{kL}, d_{kL})$  and  $(\hat{u}_k, \hat{d}_k) \rightarrow (u^c_{kL}, d^c_{kL})$ . As  $u^c_{kL} \sim u_{kR}^\dagger$ , gauge and Higgs interactions convert a particle to an anti-particle, which induces proton decay. In the gauge-Higgs grand unification such process is absent and the proton decay is naturally suppressed.

However, there is a problem. Careful examination reveals that in the first and second generations  $\hat{u}$ ,  $\hat{d}$ ,  $\hat{e}$  have light masses, which contradicts the observation. The source of this difficulty lies in the fact that the parity at  $y = 0$  and  $y = 1$  is (even, odd) or (odd, even) for  $\hat{u}$ ,  $\hat{d}$ ,  $\hat{e}$ . In the RS warped space it leads to light masses. In other words,  $P_0 \neq P_1$  in the RS warped space gives rise to a trouble.

## 6 Gauge-Higgs grand unification in 6 dimensions

The difficulty is solved in gauge-Higgs unification in six-dimensional hybrid-warped space.[38] Consider the six-dimensional space with a metric

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)}(dx^\mu dx_\mu + dv^2) + dy^2 ,$$

$$\sigma(y) = \sigma(-y) = \sigma(y + 2L_5) , \quad \sigma(y) = k|y| \text{ for } |y| \leq L_5 . \quad (10)$$

We identify

$$(x^\mu, y, v) \sim (x^\mu, y + 2L_5, v) \sim (x^\mu, y, v + 2\pi R_6) \sim (x^\mu, -y, -v) . \quad (11)$$

The spacetime has topology of  $M^4 \times (T^2/Z_2)$ . The fundamental region can be taken as  $\{0 \leq y \leq L_5, 0 \leq v < 2\pi R_6\}$ . The metric (10) solves the Einstein equation with five-dimensional branes at  $y = 0$  and  $y = L_5$ . Six-dimensional spacetime is an AdS space with  $\Lambda = -10k^2$ . The sixth dimension is curled up in a circle with a very small radius  $R_6$ . We suppose that  $z_L = e^{kL_5} \gg 1$  and

$$m_{\text{KK}} = \frac{\pi k}{e^{kL_5} - 1} \sim \pi k e^{-kL_5} \ll \frac{1}{R_6} . \quad (12)$$

Under  $Z_2$  parity  $(y, v) \rightarrow (-y, -v)$  there appear four fixed points;

$$(y_0, v_0) = (0, 0), \quad (y_1, v_1) = (L_5, 0), \quad (y_2, v_2) = (0, \pi R_6), \quad (y_3, v_3) = (L_5, \pi R_6) . \quad (13)$$

We consider  $SO(11)$  gauge theory in the 6-dimensional hybrid-warped space (10). Gauge potentials  $A_M$  satisfy

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ A_y \\ A_v \end{pmatrix} (x, y_j - y, v_j - v) = P_j \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_y \\ -A_v \end{pmatrix} (x, y_j + y, v_j + v) P_j^{-1} ,$$

$$P_j \in SO(11) , \quad P_j^2 = 1 , \quad P_3 = P_1 P_0 P_2 = P_2 P_0 P_1 . \quad (14)$$

Note that only three of the four  $P_j$ 's are independent, and the condition  $P_1 P_0 P_2 = P_2 P_0 P_1$  must be satisfied for the consistency. We take, in place of (8),

$$P_0^{\text{vec}} = P_1^{\text{vec}} = \text{diag}(I_4, -I_7) ,$$

$$P_2^{\text{vec}} = P_3^{\text{vec}} = \text{diag}(I_{10}, -I_1) . \quad (15)$$

Fermion multiplets  $\Psi_{\mathbf{32}}$  and  $\Psi_{\mathbf{11}}$  are introduced in the bulk.  $\Psi_{\mathbf{32}}$  is a 6d Weyl fermion, and satisfies  $\Psi_{\mathbf{32}}(x, y_j - y, v_j - v) = P_j^{\text{sp}} \bar{\gamma} \Psi_{\mathbf{32}}(x, y_j + y, v_j + v)$  where  $\bar{\gamma} = -i\Gamma^5 \Gamma^6$ . With this boundary condition zero modes appear chiral, with the quark-lepton content given in (9). Furthermore, the lightest modes of hat fields  $\hat{e}, \hat{d}, \hat{u}$  etc. have large masses of  $O(R_6^{-1})$ .

The symmetry breaking pattern is similar to the five-dimensional case. The orbifold boundary condition in the sixth dimension reduces  $SO(11)$  to  $SO(10)$ , and the condition in

the fifth dimension reduces  $SO(11)$  to  $SO(4) \times SO(7)$ . A brane scalar  $\Phi_{\mathbf{32}}(x, v)$  is introduced on the five-dimensional UV brane at  $y = 0$ . It spontaneously breaks  $SO(11)$  to  $SU(5)$ . As a result the SM symmetry  $SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$  survives. By the Hosotani mechanism the symmetry is further broken to  $U(1)_{\text{EM}} \times SU(3)_C$ . Zero modes of  $A_y$  correspond to the 4d Higgs doublet. There appear zero modes of  $A_v$  in the same  $SO(11)$  components as  $A_y$ , which acquire masses of order  $gR_6^{-1}$  by the Hosotani mechanism.

## 7 Summary

The gauge-Higgs unification is promising. The  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs EW unification gives definitive predictions to be tested in the forthcoming LHC experiments. The incorporation of strong interactions leads to the  $SO(11)$  gauge-Higgs grand unification. It seems necessary to introduce the sixth dimension to have a spectrum consistent at low energies. The fifth dimension serves as an EW dimension, whereas the sixth dimension as a GUT dimension. We are entering into an era of “New Dimensions”.

### Acknowledgement

This work was supported in part by the Japan Society for the Promotion of Science, Grants-in-Aid for Scientific Research No 15K05052 .

### References

- [1] Y. Hosotani, *Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions*, *Phys. Lett. B* **126**, 309 (1983); *Dynamics of Nonintegrable Phases and Gauge Symmetry Breaking*, *Ann. Phys. (N.Y.)* **190**, 233 (1989).
- [2] A. T. Davies and A. McLachlan, *Gauge group breaking by Wilson loops*, *Phys. Lett. B* **200**, 305 (1988); *Congruency class effects in the Hosotani model*, *Nucl. Phys. B* **317**, 237 (1989).
- [3] H. Hatanaka, T. Inami and C.S. Lim, *The gauge hierarchy problem and higher dimensional gauge theories*, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 2601 (1998).
- [4] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Gauge-Higgs Grand Unification*, *PoS PLANCK2015*, 058 (2015). arXiv:1511.01674 [hep-ph].
- [5] Y. Hosotani, *Gauge-Higgs EW and Grand Unification*, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1630031 (2016). arXiv:1606.08108 [hep-ph].
- [6] K. Agashe, R. Contino and A. Pomarol, *The Minimal Composite Higgs Model*, *Nucl. Phys. B* **719**, 165 (2005).
- [7] A. D. Medina, N. R. Shah, and C. E. Wagner, *Gauge-Higgs Unification and Radiative Electroweak Symmetry Breaking in Warped Extra Dimensions*, *Phys. Rev. D* **76**, 095010 (2007).
- [8] Y. Hosotani and Y. Sakamura, *Anomalous Higgs couplings in the  $SO(5) \times U(1)_{B-L}$  gauge-Higgs unification in warped spacetime*, *Prog. Theoret. Phys.* **118**, 935 (2007).

- [9] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, *Dynamical Electroweak Symmetry Breaking in  $SO(5) \times U(1)$  Gauge-Higgs Unification with Top and Bottom Quarks*, *Phys. Rev. D* **78**, 096002 (2008); *Erratum-ibid.* **D79**, 079902 (2009).
- [10] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa, and T. Shimotani, *Novel universality and Higgs decay  $H \rightarrow \gamma\gamma, gg$  in the  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs unification*, *Phys. Lett. B* **722**, 94 (2013).
- [11] Y. Hosotani and Y. Kobayashi, *Yukawa couplings and effective interactions in gauge-Higgs unification*, *Phys. Lett. B* **674**, 192 (2009).
- [12] N. Haba, Y. Sakamura and T. Yamashita, *Tree-level unitarity in Gauge-Higgs Unification*, *JHEP* **1003**, 069 (2010).
- [13] Y. Hosotani, S. Noda and N. Uekusa, *The Electroweak gauge couplings in  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs unification*, *Prog. Theoret. Phys.* **123**, 757 (2010).
- [14] Y. Hosotani, M. Tanaka, and N. Uekusa, *Collider signatures of the  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev. D* **84**, 075014 (2011).
- [15] M. Kakizaki, S. Kanemura, H. Taniguchi and T. Yamashita *Higgs sector as a probe of supersymmetric grand unification with the Hosotani mechanism*, *Phys. Rev. D* **89**, 075013 (2014).
- [16] N. Kurahashi, C.S. Lim, K. Tanabe, *Anomalous Higgs interactions in dimensional deconstruction*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2014**, 123B04 (2014).
- [17] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa and T. Shimotani, *LHC signals of the  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev. D* **89**, 095019 (2014).
- [18] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa and T. Shimotani, *Dark matter in the  $SO(5) \times U(1)$  gauge-Higgs unification*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2014**, 113B01 (2014).
- [19] S. Funatsu, H. Hatanaka and Y. Hosotani,  *$H \rightarrow Z\gamma$  in the gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev. D* **92**, 115003 (2015).
- [20] N. Kitazawa and Y. Sakai, *Constraints on gauge-Higgs unification models at the LHC*, *Mod. Phys. Lett. A* **31**, 1650041 (2016).
- [21] Y. Matsumoto and Y. Sakamura, *Yukawa couplings in 6D gauge-Higgs unification on  $T^2/Z_N$  with magnetic fluxes*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2016**, 053B06 (2016).
- [22] Y. Adachi and N. Maru, *Trilinear gauge boson couplings in the gauge-Higgs unification*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2016**, 073B06 (2016).
- [23] K. Hasegawa and C.S. Lim, *A few comments on the Higgs boson decays in gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev. D* **94**, 055021 (2016).
- [24] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani and Y. Orikasa, *Collider signals of  $W'$  and  $Z'$  bosons in the gauge-Higgs unification*, arXiv: 1612.03378 [hep-ph]. To appear in *Phys. Rev. D*.
- [25] G. Degrandi, S. Di Vita, J. Elias-Miro, J.R. Espinosa, G.F. Giudice, G. Isidori, A. Strumia, *Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO*, *JHEP* **08**, 098 (2012)
- [26] G. Burdman and Y. Nomura, *Unification of Higgs and gauge fields in five dimensions*, *Nucl. Phys. B* **656**, 3 (2003).

- [27] N. Haba, Masatomi Harada, Y. Hosotani and Y. Kawamura, *Dynamical rearrangement of gauge symmetry on the orbifold  $S^1/Z_2$* , *Nucl. Phys.* **B657**, 169 (2003); *Erratum-ibid.* **B669**, 381 (2003).
- [28] N. Haba, Y. Hosotani, Y. Kawamura and T. Yamashita, *Dynamical symmetry breaking in gauge Higgs unification on orbifold*, *Phys. Rev.* **D70**, 015010 (2004).
- [29] C.S. Lim and N. Maru, *Towards a realistic grand gauge-Higgs unification*, *Phys. Lett.* **B653**, 320 (2007).
- [30] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *Grand gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev.* **D84**, 051701(R) (2011).
- [31] M. Frigerio, J. Serra and A. Varagnolo, *Composite GUTs: models and expectations at the LHC*, *JHEP* **1106**, 029 (2011).
- [32] K. Yamamoto, *The formulation of gauge-Higgs unification with dynamical boundary conditions*, *Nucl. Phys.* **B883**, 45 (2014).
- [33] F. J. de Anda, *Left-right model from gauge-Higgs unification with dark matter*, *Mod. Phys. Lett.* **A30**, 1550063 (2015).
- [34] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Gauge-Higgs grand unification*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2015**, 111B01 (2015).
- [35] N. Yamatsu, *Gauge coupling unification in gauge-Higgs grand unification*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2016**, 043B02 (2016).
- [36] A. Furui, Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Toward realistic gauge-Higgs grand unification*, *Prog. Theoret. Exp. Phys.* **2016**, 093B01 (2016). arXiv:1606.07222 [hep-ph].
- [37] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *Gauge symmetry breaking patterns in an  $SU(5)$  grand gauge-Higgs unification*, *Phys. Rev.* **D95**, 015021 (2017). arXiv:1608.05496 [hep-ph].
- [38] Y. Hosotani and N. Yamatsu, in preparation.

# AdS/CFT とカオス (講演抄録)

橋本幸士

大阪大学大学院理学研究科

## 1 カオスと場の量子論

素粒子物理学において、標準模型を超えた物理の Lagrangian を探ることが究極の目標になっていることは疑いない。ここで、Lagrangian を記述する際には、対称性やその表現と場の種類を指定するのが常である。はたして、この記述に、「場の量子論の複雑性」のような新しい指標を追加することは可能だろうか。カオスの応用におけるチャレンジは、場の量子論における複雑性の概念を定式化し、そこから現れる、様々な場の量子論にユニバーサルなダイナミクスを指標化することである。

例えば、QCD のゲージ対称性は  $SU(3)$  であるが、それを  $SU(5)$  に変更したとしよう。この変更は Lagrangian の変更であり、それに伴ってダイナミクスは変更される。安直には、 $SU(5)$  に拡大すると、その分グルーオンやクォークの種類が増えるために、理論の複雑性はますます思われる。しかし、QCD などの非可換ゲージ理論に特有な閉じ込め現象を念頭に置けば、ゲージ群が  $SU(3)$  か  $SU(5)$  か、ということは、ゲージ不変な観測可能量においては影響が異なってくる。単に複雑性が増すのではなく、閉じ込め相においては、複雑さの度合いがどちらが大きいのか、はトリビアルな問題ではなくなる。

## 2 古典カオスと場の量子論の関係の問題

カオス度を測るものとして、Lyapunov 指数がある。これは、初期状態の微小な違いが、時刻  $t$  が経過した後に  $e^{Lt}$  だけ相空間内で離れる場合の、この指数  $L$  のことである。Lyapunov 指数が正であれば、システムはカオスを持っている。この指数はエネルギーに依存し、また初期状態に依存する。

さて、Lyapunov 指数を計算するためには、初期状態の微小なずれを考える必要がある。このずれを定式化するには、決定論的な古典力学系において、位相空間の中での初期条件における微小なずれを考える必要があるが、システムを量子化した場合に、初期条件の無限小のずれをどう定式化すれば良いかは難しい問題である。また、シュレーディンガー方程式は線形であるので、一般に非線形性が引き起こすカオスが、量子化すると定式化が難しくなる理由となってしまう。すなわち、量子化してしまうと、古典系で明確に定義される Lyapunov 指数が、定義されなくなってしまうという問題が生じる。

そこで、量子系の半古典極限をとることで Lyapunov 指数を定義することが試みられる。通常の半古典極限は  $\hbar \rightarrow 0$  であるが、これを QCD に適用しようとする、カイラル凝縮などの重要な量子指標が消え失せてしまい、また、閉じ込めなどの低エネルギーで重要な物理が記述できな

なくなってしまう。従って、通常の半古典極限は、QCD の Lyapunov 指数を議論するためには使用することが難しい。

### 3 Large $N$ 強結合極限とカオス

論文 [1] では、 $\hbar \rightarrow 0$  極限ではなく、large  $N$  極限をとることとした。large  $N$  極限では  $1/N$  展開が可能となり、これは弱結合展開に代わる異なる古典化と考えることができる。特に AdS/CFT 対応によって、large 't Hooft 結合の極限も同時にとれば、QCD 的な理論は古典重力の理論に移り変わり、古典系へと写像される。この重力側で Lyapunov exponent を計算してやれば、場の量子論の強結合のダイナミクスを取り入れたまま、カオス度を測ることが可能となる。

論文 [1] では、 $\mathcal{N} = 2$  超対称 QCD において、カイラル凝縮が空間一様で運動する場合のカオスの Lyapunov 指数を数値的に計算した。結果、面白いことに、 $N$  が大きくなればなるほど、Lyapunov 指数は小さくなり、カオス度が減ることが判明した。

AdS/CFT 対応によるカオスの計算は、Maldacena-SHenker-Stanford のカオスの上限予想 [2] などと相まって、爆発的に進展している。今後の発展により、場の量子論の複雑性に関する理解について新しい地平が拓かれることを期待したい。

#### References

- [1] K. Hashimoto, K. Murata and K. Yoshida, “Chaos of chiral condensate,” arXiv:1605.08124 [hep-th].
- [2] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, “A bound on chaos,” JHEP **1608**, 106 (2016) doi:10.1007/JHEP08(2016)106 [arXiv:1503.01409 [hep-th]].

# Joining-Splitting 型の弦の場の理論の古典解

小路田 俊子

京都産業大学益川塾

## 1 Introduction

摂動論的な弦理論では、SUSY を保つ設定でなければ、一般にその振動モードにタキオンが現れる。タキオンの存在はその真空周りの摂動論が不安定であることを示し、タキオンポテンシャルの極小値周りの安定な世界へと遷移が起こると予想される。これは非摂動論的效果であり、タキオン凝縮と呼ばれる。タキオン凝縮は、ボゾニックな弦理論や超弦理論における非 BPS ブレイン上の開弦、 $D_p\text{-}\bar{D}_p$  ブレイン系など、様々な状況において考えられる。ここでは特に、ボゾニック弦理論のタキオン凝縮について議論する。

開弦のタキオン凝縮は、ボゾニックな開弦の場の理論である Cubic String Field Theory (CSFT) [1] において、不安定な D-brane の崩壊として理解された。[2, 3] が見つけた場の古典解は、摂動論的弦理論の真空より、D ブレイン一枚分だけエネルギーが低い真空を表し、開弦の物理的励起が存在しなかった。

一方、閉弦理論にもタキオンが存在し、摂動論的に不安定な理論となっているが、安定な真空の解析は進んでいない。固定された背景時空中で D ブレインが崩壊する開弦の場合に比べて、閉弦のタキオン凝縮では背景時空全体が変化すると予想されるので難しいのである。更に、以下に述べるように、閉弦の場の理論が定式化上の問題を抱えており、解析が出来ないことが大きな原因である。例えばこれまでに、局在化したタキオンの凝縮について調べられたりしているが、厳密な解析は未だ無い [4, 5]。

明白な共変性を持つ閉弦の場の理論は、相互作用 (vertex) の仕方によって、中点相互作用型 (Mid 型) と joining splitting 型 (JS 型) の二種類に分けられる (図.1)。Mid 型相互作用は、弦の中点が一致するように相互作用し、JS 型相互作用は、二つの弦が一点でくっついたり離れたりして相互作用をする。JS 型の vertex には、弦の長さを指定する  $\alpha$  というパラメーターが入っているのが特徴である。前述の CSFT は、Mid 型相互作用であり、作用は三点相互作用だけで書かれている。この Mid 型相互作用を閉弦へ拡張すると、作用は三点相互作用では閉じず、無限項の相互作用が必要になることが知られている [6, 7]<sup>1</sup>。無限項の相互作用は複雑な入り方をしているために、運動方程式の解を見つけることは困難である。作用を有限項で切って数値評価などを行うことはできるが (例えば [5])、作用を有限項で切ることが良い近似になっているという正当性が保証されるものではない。

<sup>1</sup>更に悪いことに、量子補正を考えると、tree の vertex だけでは閉弦のモジュライを覆うことが出来ず、ループの vertex も無限項必要になる。このような状況は局所場の理論では無かったことで、非常に興味深い。閉弦を素朴な場の理論として記述できるのかという疑問を提示している。

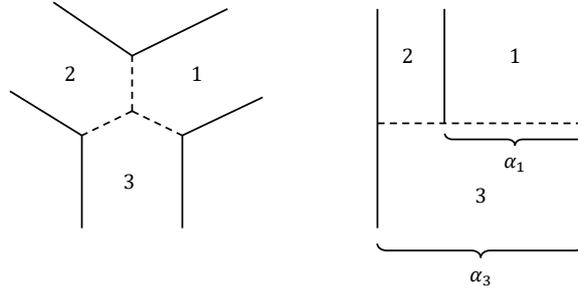


Figure 1: 開弦の三点相互作用の様子。左図は中点相互作用 (Mid 型)、右図は joining splitting 型 (JS 型) の相互作用を表す。 $\alpha_1, \alpha_3$  はそれぞれ一番目と三番目の弦の長さを表す。

他方、JS 型の相互作用を採用した HIKKO 理論 [8] では、開弦は三点と四点、閉弦は三点相互作用で作用が書ける。しかし、量子補正を考慮すると、弦の長さを表すパラメーター  $\alpha$  (図.1) に起因する発散が生じて定義できなくなる ( $\alpha$  問題)。この困難を解決する方法として、 $\alpha = p^+$  ( $p^+$  は光円錐方向の運動量) と取る方法が知られているが、これでは明白な共変性が失われ、また古典解の解析が原理的に不可能になる。なぜなら、静的な真空解 ( $p = 0$ ) を考えると、長さゼロ ( $\alpha = 0$ ) の弦同士の積 (相互作用) が  $0/0$  という不定性を持ってしまうからである。

### comment

研究会では、閉弦の場の古典解は既に構成されているのではないかという質問があったので、筆者の知っているものについてコメントしておく。

[9, 10, 11] によって議論されているディラトン凝縮解 (ディラトン状態) は、運動方程式の線形部分の解であり、運動方程式全体の解ではない。また、この解はポテンシャルのフラットな方向への摂動になっており (マージナル変形解)、作用のエネルギーを変化させない解である。

[12] で議論された古典解は、代数的に運動方程式を満たすものの、作用の値が常にゼロとなる特異な解である。この解の表す真空は運動項が消えているため、このままではコホモロジーが議論できない。

## 2 OSp invariant string field theory

HIKKO 理論の  $\alpha$  問題の原因は、zero-mode 空間が BRS 四重項を組めていないために、非物理的な  $\alpha$  が物理的空間から分離できていないことにある。Non-zero mode の空間では、物理的な  $\alpha_n^\pm$  の空間と、BRS 四重項

$$\begin{array}{ccc} \alpha_n^+ & \xrightarrow{Q_B} & c_n \\ \alpha_n^- & \xleftarrow{Q_B} & b_n \end{array}$$

$(c_n, b_n)$  は (反) ゴーストのモード) から成り、非物理的なモード  $\alpha^\pm$  が Parisi-Sourlas 機構によって物理的空間から排除される。ところが zero-mode 空間は、 $\alpha$  単独で存在し、この機構が働いていないのである。

そこで、足りない三つの zero-mode を追加し、zero-mode の BRS 四重項を完全にして  $\alpha$  問題の解決を図ったのが、“covariantized light cone string field theory” である [13, 14, 15]。Zero-mode 空間の拡張は、HIKKO 理論に近似的に成り立っていた OSp 対称性が完全になるように成される。そこでこの理論を以後 “OSp-SFT(string field theory)” と呼ぶことにする。

OSp-SFT の構成は、光円錐型ゲージの場の理論の横波方向の添え字  $i(i = 1 \sim 24)$  を、 $M = (\mu, c, \bar{c})$  に “OSp 拡張” して共変化する。

$$X^i \rightarrow X^M = (X^\mu, X^c, X^{\bar{c}}), \quad \delta_{ij} \rightarrow \eta_{MN} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \nu & c & \bar{c} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mu \\ c \\ \bar{c} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & & \\ & 0 & -i \\ & i & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

各成分のモード展開は以下のように取る。

$$\begin{aligned} \text{zero mode : } & (x^\mu, c_0, \bar{c}_0) \quad \text{or} \quad (p^\mu, -\pi_0, \bar{\pi}_0) \\ \text{oscillators : } & (\alpha_n^\mu, \alpha_n^c, \alpha_n^{\bar{c}}) = (\alpha_n^\mu, -\gamma_n, \bar{\gamma}_n) \end{aligned} \quad (2)$$

代数構造も OSp 拡張する。

$$[X^M(\sigma), P^N(\sigma')]_{\pm} = i\eta^{MN} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3)$$

但し、 $M, N$  が  $\mu$  の場合は交換関係、 $c, \bar{c}$  の場合は反交換関係とする。

ここで、 $\gamma_n, \bar{\gamma}_n$  と加藤-小川のゴースト演算子  $c_n^{\text{KO}}, \bar{c}_n^{\text{KO}}$  との対応は、vertex から読み取れば

$$\gamma_n = in\alpha c_n^{\text{KO}} \quad (n \neq 0), \quad c_0 = \frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_0} = \alpha c_0^{\text{KO}} \quad (4)$$

$$\bar{\gamma}_n = \alpha^{-1} \bar{c}_n^{\text{KO}} \quad (\forall n) \quad (5)$$

となることが分かる。光円錐型ゲージの場の理論から OSp 拡張することで、HIKKO には無かったゴーストゼロモード  $\gamma_0 = \pi_0(4)$  が導入される。HIKKO 理論では non-zero mode 空間にだけ OSp 対称性が成り立っていたのだが、OSp-SFT では  $\pi_0$  のお陰で、理論全体で OSp 対称性が成り立っている。

そしてこの  $\pi_0$  が  $\alpha$  の BRS パートナーになる。光円錐型ゲージの弦の場の理論が、一見  $O(24)$  の対称性しか持っていないのに、実は Lorentz 対称性  $SO(25, 1)$  を持っていたように、OSp-SFT も OSp(27, 1|2) 対称性を持っている。OSp(27, 1|2) 対称性の生成子  $M^{MN}$  は

$$M^{MN} = \int_0^{2\pi} d\sigma : (X^M(\sigma)P^N(\sigma) - (-)^{|M||N|} X^N(\sigma)P^M(\sigma)) : \quad (6)$$

で与えられるが、特に  $M^{c-}$  と  $M^{c\bar{c}}$  は BRS 代数を成している。

$$\{M^{c-}, M^{c-}\} = 0, \quad [M^{c\bar{c}}, M^{c-}] = M^{c-}, \quad [M^{c\bar{c}}, M^{c\bar{c}}] = 0 \quad (7)$$

そこで、OSp-SFT の BRS 電荷を  $M^{c-}$  に、FP ゴースト数演算子を  $M^{c\bar{c}}$  と見なすことにする<sup>2</sup>。BRS 電荷をモードで書くと

$$-M^{c-} = Q_B = -\frac{c_0}{\alpha} L_0 + i\pi_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-n} L_n - L_n \gamma_n}{n} \quad (8)$$

$$= Q_B^{KO} + \frac{i\pi_0}{\alpha} \left( N_{FP} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) \quad (9)$$

となる。ここで  $L_n$  とは、OSp 拡張された virasoro 演算子

$$L_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} : \alpha_{n+m}^M \eta_{MN} \alpha_{-m}^N : - \delta_{n,0} \quad (10)$$

である。

光円錐型ゲージの zero-mode には  $\alpha$  の他にもう一つ  $\tau$  に共役な  $E$  という非物理的モードも存在したので、 $E$  の BRS パートナーを  $\pi_\theta$  として導入し、(8) に  $-E \frac{\partial}{\partial \pi_\theta}$  を追加する。 $\pi_\theta$  は他の zero-mode と可換である。こうして zero-mode 空間に BRS 四重項が出来上がった。

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{Q_B} & \pi_0 \\ E & \xrightarrow{Q_B} & \pi_\theta \end{array}$$

作用と、作用を不変に保つゲージ変換はそれぞれ

$$S = \frac{1}{2} \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{g}{3} \Phi \cdot (\Phi * \Phi) \quad (11)$$

$$\delta \Phi = Q_B \Lambda + 2\Phi * \Lambda \quad (12)$$

で与えられる。 $\Phi$  は閉弦の場、 $\cdot$  は BPZ 内積、 $*$  は、図.1 右図の弦の貼り合わせを表す。但し、 $*$  積をモード展開すると、HIKKO 理論と OSp-SFT では zero-mode 空間が異なっている。

OSp-SFT では  $\alpha$  と運動量は独立な変数であり、静的真空解の構成の際も、 $\alpha$  を有限に保つことができる。よって光円錐型ゲージの場の理論や、 $\alpha = p^+$  HIKKO 理論のような古典解構成の困難は回避できている。

<sup>2</sup>時空の対称性と BRS 電荷が結びつくというのは興味深い。平坦時空以外でも成り立つのだろうか。

### 3 古典解の構成へ向けて

Introduction で述べた通り、タキオン凝縮などに代表される閉弦の非摂動論的物理の理解は開弦に比べて遅れている。現時点で、弦の場の理論を使った解析を行うのに、原理的な問題を抱えていないのは、OSp-SFT だけである。もし、OSp-SFT によって閉弦の非摂動論的真空を求めることが出来れば、閉弦の真空構造が理解できるだけでなく、OSp-SFT が閉弦の場の理論として有力であることの証拠にもなる。しかしこれまで、OSp-SFT による古典解の構成は行われてこなかった。理由の一つに数値的解析すら困難であることが挙げられる。Mid 型相互作用である CSFT では、解析解 [2] 発見以前にも、数値的にタキオン凝縮真空が調べられていた。CSFT の (ボゾニックな) zero-mode 空間には重心運動量しか無いので、真空解の場合 zero-mode 積分が自明になり、数値計算が実行できた。しかし JS 型理論の zero-mode には、重心運動量の他に、 $\alpha, E$  の積分があるため、場の  $\alpha, E$  依存性を決めなければならない。このためか、OSp-SFT ではこれまで数値計算すら行われてこなかった。

研究会では、古典解の構成に向けて現在取り組んでいる、以下に述べる方法を紹介した。

先ずタキオン凝縮真空の数値評価であるが、上にも述べた通り、zero-mode 空間  $(\alpha, E)$  の依存性を仮定して計算する必要がある。実は、物理的状態 (運動方程式の線形部分) は、BRS 四重項  $\{\alpha, E, \pi_0, \bar{\pi}_\theta\}$  を BRS 電荷と可換な特別な組み合わせ  $\chi = \alpha E - i\pi_0 \bar{\pi}_\theta$  でのみ含む。そこで、zero-mode 空間の依存性を  $e^{a\chi}$  ( $a$  は定数) と仮定してフルの運動方程式を調べている。但し、場のゲージ自由度を固定して自由度を減らさなければいけない。[13] では、加藤-小川ゲージ ( $b_0 \Phi = 0$ ) と Siegel ゲージ ( $(b_0 - \bar{\pi}_\theta) \Phi = 0$ ) の二種類が調べられているので、両方をつなぐ  $\xi$  ゲージ ( $(b_0 - \xi \bar{\pi}_\theta) \Phi = 0$ ) で計算を行っている。  $e^{a\chi}$  という形は一般には  $*$  積で閉じないので、数値計算の表式は複雑である。ゲージをうまく取って、解析しやすい表式に持っていけるか検討中である。

次に解析的な方法として、古典解を trivial な真空からのゲージ変換で表すということを考える。(12) から有限ゲージ変換は

$$\Phi = \left( \frac{e^{2\Lambda*} - 1}{2\Lambda} \right) Q_B \Lambda = \left( 1 + \Lambda* + \frac{2^2}{3!} \Lambda* \Lambda* + \dots \right) Q_B \Lambda \quad (13)$$

で与えられる。 $\Lambda$  はゲージパラメーターを表す弦の場である。この表示は積の種類に依らない。そこで既に見つかっている CSFT のタキオン凝縮解と比較することで、古典解を構成できるかもしれないと考えている。CSFT の古典解では Mid 型の積  $*$  に対して加法性  $|W_t\rangle * |W_s\rangle = |W_{t+s}\rangle$  を示す wedge state と呼ばれる状態が重要な役割を果たしている。そこで、JS 型の積  $*$  で閉じる状態空間を見つけることが解析解構成の手がかりとなる。実は [16] によって、境界状態 (D ブレインを表す閉弦のヒルベルト空間の状態) は HIKKO 理論の積で閉じることが指摘されている。

$$|B(\alpha_1)\rangle * |B(\alpha_2)\rangle \propto |B(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle \quad (14)$$

現在、この関係式を OSp-SFT の  $*$  積の場合に検証している段階である。

## References

- [1] E. Witten, Nucl. Phys. B **268**, 253 (1986).
- [2] M. Schnabl, Adv. Theor. Math. Phys. **10**, 433 (2006) [hep-th/0511286].
- [3] T. Erler and M. Schnabl, JHEP **0910**, 066 (2009) [arXiv:0906.0979 [hep-th]].
- [4] A. Adams, J. Polchinski and E. Silverstein, JHEP **0110**, 029 (2001) [hep-th/0108075].
- [5] Y. Okawa and B. Zwiebach, JHEP **0403**, 056 (2004) [hep-th/0403051].
- [6] M. Saadi and B. Zwiebach, Annals Phys. **192**, 213 (1989).
- [7] T. Kugo, H. Kunitomo and K. Suehiro, Phys. Lett. B **226**, 48 (1989).
- [8] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, Nucl. Phys. B **283** (1987) 433, Phys. Rev. D **34**, 2360 (1986), Phys. Rev. D **35**, 1356 (1987).
- [9] T. Yoneya, Phys. Lett. B **197**, 76 (1987).
- [10] H. Hata and Y. Nagoshi, Prog. Theor. Phys. **80**, 1088 (1988).
- [11] T. Kawano, Prog. Theor. Phys. **88**, 1181 (1992).
- [12] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, Phys. Lett. B **175**, 138 (1986).
- [13] T. Kugo, Covariantized Light.Cone String Field Theory; in Quantum Mechanics of Fundamental System 2, ed. C. Teitelboim and J. Zanelli (Plenum Publishing Corporation, 1989).
- [14] A. Neveu and P. C. West, Nucl. Phys. B **293**, 266 (1987).
- [15] S. Uehara, Phys. Lett. B **190**, 76 (1987), Phys. Lett. B **196**, 47 (1987).
- [16] I. Kishimoto, Y. Matsuo and E. Watanabe, Phys. Rev. D **68**, 126006 (2003), Prog. Theor. Phys. **111**, 433 (2004) [hep-th/0306189].

# 超弦の場の理論における”多重 Half-brane” Solution について

杉田 和優

日本大学理工学部

## 1 Half-brane Solution

Schnabl が tachyon vacuum solution[1] を見つけて以降、弦の場の理論の運動方程式の解に対する理解は進んだ。ここでは modified cubic string field theory [2, 3] における新たな解の例を示す。Modified cubic string field theory は NS sector の開弦を記述する弦の場の理論である。この理論の action は以下である。

$$S = -\text{Tr}_{Y_{-2}} \left[ \frac{1}{2} \Psi Q \Psi + \frac{1}{3} \Psi^3 \right] \quad (1)$$

ここで  $Y_{-2}$  は inverse picture changing operator と呼ばれる演算子である。運動方程式は以下を考える。

$$Q\Psi + \Psi^2 = 0 \quad (2)$$

ここで bosonic cubic string field theory の時に [4] によって導入された  $*$  積と  $Q$  の演算のもとで閉じる string field の代数、 $KBc$  代数の super 版、即ち、 $KBcG\gamma$  代数 [5]

$$\begin{aligned} [K, B] = 0, \{B, c\} = 1, \{B, B\} = \{c, c\} = \{B, \gamma\} = \{c, \gamma\} = 0, \\ \{G, G\} = 2K, [G, B] = 0, [G, c] = 2\gamma, \{G, \gamma\} = \frac{1}{2} \partial c \end{aligned} \quad (3)$$

$$QK = QG = 0, QB = K, Qc = cKc - \gamma^2, Q\gamma = c\partial\gamma + \frac{1}{2}\gamma\partial c \quad (4)$$

を基に解を構成する。この代数を使用した modified cubic string field theory の解として half-brane solution [5] というものがある。これは pure-gauge form で書かれている。

$$\begin{aligned} \Psi_{\frac{1}{2}} &= U_{\frac{1}{2}}^{-1} Q U_{\frac{1}{2}} \\ &= -(Q(cB) + cBGc) \frac{1}{1-G} \end{aligned} \quad (5)$$

ここでゲージパラメーターは

$$U_{\frac{1}{2}} = Bc + cB \left( \frac{-G}{1-G} \right) \quad (6)$$

であり、tachyon vacuum solution[6]  $\Psi_0 = U_1^{-1} Q U_1 = -(Q(cB) + c) \frac{1}{1-K}$  でのゲージパラメータ  $U_1 = Bc + cB \left( \frac{-K}{1-K} \right)$  における  $K$  を  $G$  にしたものである。また、Half-brane solution のエネルギーは

$$E(\Psi_{\frac{1}{2}}) = E(\Psi_0) + \frac{1}{2} E(\text{D9-brane}) \quad (7)$$

となり、D9-brane の半分のエネルギーである。

## 2 “多重 Half-brane Solution”

今回、我々は  $KBcG\gamma$  代数を用いた新たな解の例を作った。その解の構成は bosonic での double-brane solution [7, 8] の状況を参考に作られている。

まず、bosonic での double-brane solution について簡単に review する。Double-brane solution は以下である。

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= U_1 Q U_1^{-1} \\ &= cB \frac{K^2}{1-K} c \frac{1}{-K}\end{aligned}\quad (8)$$

double-brane solution にあらわれている  $1/K$  という string field は  $KBc$  代数が定義されている CFT の座標 sliver frame [9] でよく定義されていない。このため  $K_\epsilon$  regularization [8] を行う必要がある。 $K_\epsilon$  の定義は

$$K_\epsilon \equiv K - \epsilon, \quad \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad (9)$$

で、この regularization のもとで  $1/K$  は以下のように理解される

$$\frac{1}{K} \rightarrow \left[ \frac{1}{K} \right]_\epsilon = \frac{1}{K_\epsilon} = - \int_0^\infty dz e^{-\epsilon z} e^{zK} \quad (10)$$

ここで弦場  $e^{zK}$  は sliver frame で幅  $z$  の wedge state を表し、 $K$  を  $K_\epsilon$  に置き換えるという操作を  $[\cdot]_\epsilon$  と書いた。ここで [8] で EOM in the strong sense とよばれている以下の量を考える

$$\text{EOMS}(\Psi) \equiv \text{Tr}[\Psi(Q\Psi + \Psi^2)] \quad (11)$$

double-brane solution はこれを満たす

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{EOMS}([\Psi_2]_\epsilon) = 0 \quad (12)$$

が、triple-brane solution  $\Psi_3 \equiv U_1^2 Q U_1^{-2} = U_1^3 (Q + \Psi_0) U_1^{-3}$  はこれを満たさない。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{EOMS}([\Psi_3]_\epsilon) \neq 0 \quad (13)$$

また double-brane solution の energy は以下である。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E([\Psi_2]_\epsilon) = E(\Psi_0) + 2E(\text{D25-brane}) \quad (14)$$

我々の modified cubic string field theory の解の話に戻る。Double-brane solution は tachyon vacuum solution の逆の gauge 変換で書かれている。

$$\Psi_0 \xrightarrow{U_1^{-1}} 0 \xrightarrow{U_1^{-1}} \Psi_2 \quad (15)$$

これを参考に”multiple-half-brane solution”を構成する。

$$\Psi_{\frac{1}{2}} \xrightarrow{U_{\frac{1}{2}}^{-1}} 0 \xrightarrow{U_{\frac{1}{2}}^{-1}} \Psi_? \quad (16)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \Psi_? &= U_{\frac{1}{2}} Q U_{\frac{1}{2}} \\ &= (-cBKc + B\gamma^2 + cBK \frac{1}{1-G} c) \frac{1}{-G} \end{aligned} \quad (17)$$

この解には bosonic double-brane solution での  $1/K$  と同様に  $1/G$  が含まれている。したがって、我々は、 $K_\epsilon$  regularization と consistent なように  $G$  に対する regularization を導入する。定義は以下である。

$$G_\epsilon \equiv G \otimes \sigma_1 - \sqrt{-\epsilon} \otimes \sigma_3 \quad (18)$$

${}^1G_\epsilon$  は二乗すると  $K_\epsilon$  になるように定義されている。

$$\{G_\epsilon, G_\epsilon\} = 2K_\epsilon \quad (19)$$

解に対して regularization を施した後、EOM in the strong sense を確認すると、満たすことが計算するとわかる。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{EOMS}([\Psi_?]_\epsilon) = 0 \quad (20)$$

また、この解のエネルギーは計算すると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E([\Psi_?]_\epsilon) = E(\Psi_0) + \frac{3}{2} E(\text{D9-brane}) \quad (21)$$

となる。これは half-brane solution から更にもう一度 half-brane solution を作る gauge trans. を施した解  $U_{\frac{1}{2}}^{-2} Q U_{\frac{1}{2}}^2$  が tachyon vacuum solution と gauge equivalent であること

$$\Psi_0 \sim U_{\frac{1}{2}}^{-2} Q U_{\frac{1}{2}}^2 \xleftarrow{U_{\frac{1}{2}}} \Psi_{\frac{1}{2}} \xleftarrow{U_{\frac{1}{2}}} \Psi_1 \quad (22)$$

から、 $\Psi_?$  が D-brane のない tachyon vacuum から half-brane を作る gauge 変換を 3 度繰り返して、できていると理解できるため、この”多重 half-brane”解のエネルギーが D9-brane のエネルギーの  $3/2$  倍であることは consistent である。

しかし、これらの half-brane 解は物理的意味が未だ明らかになっていないため、より信頼できる理論である Berkovits' string field theory[10, 11] での解析が必要であると考えられる。

<sup>1</sup>ここで弦場に直積されている Pauli 行列は、modified cubic string field theory で弦場の GSO(+) と GSO(-) sector を同時に扱うために必要となる。

## References

- [1] M. Schnabl, *Adv. Theor. Math. Phys.* **10**, no. 4, 433 (2006)
- [2] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, *Nucl. Phys. B* **337**, 363 (1990).
- [3] I. Y. Arefeva, P. B. Medvedev and A. P. Zubarev, *Nucl. Phys. B* **341**, 464 (1990).
- [4] Y. Okawa, *JHEP* **0604**, 055 (2006)
- [5] T. Erler, *JHEP* **1104**, 107 (2011)
- [6] T. Erler and M. Schnabl, *JHEP* **0910**, 066 (2009)
- [7] M. Murata and M. Schnabl, *JHEP* **1207**, 063 (2012)
- [8] H. Hata and T. Kojita, *JHEP* **1201**, 088 (2012)
- [9] L. Rastelli and B. Zwiebach, *JHEP* **0109**, 038 (2001)
- [10] N. Berkovits, *Nucl. Phys. B* **450**, 90 (1995)
- [11] N. Berkovits, *Fortsch. Phys.* **48**, 31 (2000)

# LHC実験Run2の最新結果

東京工業大学理学院物理学系

陣内修

2016年10月15–16日 第6回日大理工・益川塾連携シンポジウム

## 1 はじめに

欧州原子核研究機構 (CERN) で行われている LHC 実験は、2015 年から Run2 に入り世界最高エネルギーの衝突データを順調に収集している。これに伴い、数多くの実験論文が公表されている。本講演では、これら数多くの成果の中から選別した結果を報告する。特に新しく、超過事象が見られる解析チャンネルを中心に (2016 年 10 月時点における) ATLAS, CMS 両実験からの結果を紹介する。

## 2 LHC の運転状況

2016 年の運転では 2015 年に引き続き、順調にデータ収集が続けられており、本講演が行われた時点では ATLAS 実験は本年目標値の  $26 \text{ fb}^{-1}$  に対し、 $31.0 \text{ fb}^{-1}$  の積算ルミノシティを既に取得していた。CMS も同様である。物理解析データ向けの安定したビーム衝突を得られる割合は物理 Run の期間中 65% にも達し、この割合が本年度の大躍進の理由であった。瞬間ルミノシティの増加に伴ない、一回のバンチ交叉当たり平均 20 個の非弾性衝突が起きている。このような事象はパイルアップと呼ばれ、信号事象と重なって観測される。2016 年度末の加速器のシャットダウンは 2017 年 4 月までである。これは最終的に 14 TeV までエネルギーをあげるための加速器トレーニングを一部の双極電磁石に対して行うために長めに確保してあるからである。2017 年は衝突エネルギー 13 TeV を維持し、 $40\text{--}50 \text{ fb}^{-1}$  のデータ取得が計画されている。

## 3 ATLAS, CMS の Run2 における検出器性能

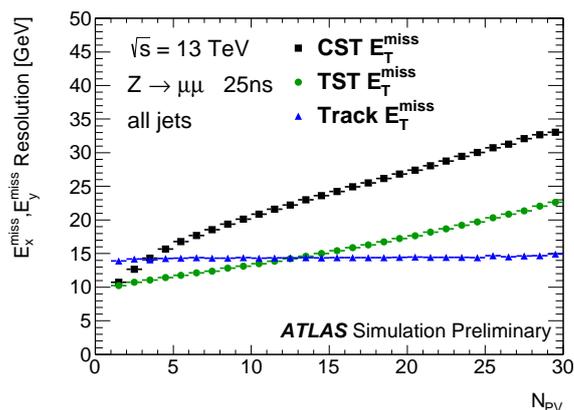


図 1: 消失エネルギー測定分解能のパイルアップ依存性をシミュレーションで評価したもの。カロリメータベース (CST), トラックだけを用いたもの (Track) である。それらを組み合わせたもの (TST) を用いることで依存性を大きく緩和できていることが分かる。

ATLAS 実験では、2014 年の長期シャットダウン中に新たに設置した最内層検出器 (IBL) が Run2 に入り稼働しており、荷電粒子飛跡検出能力を大幅に改善している。また設計値よりも高いルミノシティに対応するために、様々な対応策が採られている。検出器の読み出しにおいては、占有率の増加、読み出し帯域の圧迫を抑えるために、読み出し方法を高パイルアップのものに切り替えている。トリガーに関してもより高頻度衝突におけるデータ収集のメニューに切り替えている。約 2000 種類のメニューの中で、レベル 1 トリガーで 85kHz, High

レベルトリガーで1kHzまでに抑えている。オフライン処理用記録データは設計値の約2倍の速度（毎秒約1GB）で書き込んでいる。Prescaleなしのメニューにおけるしきい値は、電子は $E_T = 24 - 26$  GeV, ミューオンは $p_T = 24 - 26$  GeV, 横消失エネルギー $E_T^{miss} = 90 - 110$  GeV, ジェット $E_T = 380$  GeV, 光子 $E_T = 140$  GeVとなっている。

また、特に物理オブジェクトの再構成においてパイルアップ依存性を抑制するために飛跡検出器の情報を最大限活用した。例えばジェットの再構成ではHard process vertex由来のジェットであることを要求する、また消失エネルギーでは、電子・光子、 $\tau$ 、ジェットなどのオブジェクトはカロリメータで、それ以外のソフトな粒子は飛跡検出器を用いて、その組み合わせを用いることで、パイルアップへの依存性を抑制している（図1）。このように、強いパイルアップ環境にありながらも測定精度を維持した実験を継続している。

## 4 ヒッグス粒子の物理

LHC Run1 (7 TeV: 約 $5 \text{ fb}^{-1}$ , 8 TeV: 約 $20 \text{ fb}^{-1}$ )において、ヒッグス粒子の質量が精密に測定され ( $m_H = 125.09 \pm 0.24$  GeV), また質量全幅の上限も22.7 MeVの精度まで求まっている。Spin=0, parity=+ という量子数, そして標準模型素粒子との結合定数の大きさは、これまでのところ標準模型と無矛盾であることが確認されている。Run1で未確認のままである事項としては、 $H \rightarrow b\bar{b}$  チャンネルの観測,  $t\bar{t}H$  結合の観測がある。ところで、ATLAS および CMS 実験では Run2 に入り 2 光子チャンネル, さらに 4-lepton チャンネルにおける観測を通じ, 125 GeV 付近にヒッグス粒子の明確な信号を $10\sigma$ 程度の有意度で既に観測している [1, 2]). これは Run1, Run2 間の長期シャットダウンを経てもなお, LHC でヒッグス粒子が再確認されたことを示している。これら 2 つのチャンネルに関しては断面積測定が行われている。重心エネルギー依存性は概ね標準模型の予言通りである (図2)。また、部分断面積, 結合定数測定に向けた生成プロ

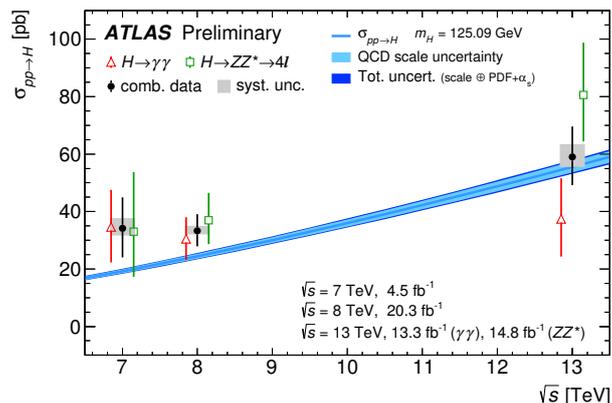


図 2: ヒッグス粒子生成断面積の陽子陽子衝突エネルギー依存性。  $H \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow ll$  の 2 チャンネル, およびその combination. 曲線は理論予想 (QCD の  $\text{NNN}^3\text{LO}$  計算) である。

セス別の解析が進められている。  $H \rightarrow b\bar{b}$  に関しては、ボトム・クォークの湯川結合の測定のために重要であり、 $W/Z + H$  生成チャンネルを通じて探索を継続している [3]。これは非常に背景事象が多く困難な解析である。  $W/Z$  の崩壊モードをレプトン数で 3 つに分類し、  $b\bar{b}$  不変質量などを用いた多変量解析を行い感度を最大限にあげている。この解析手法のクロスチェックに用いている、標準模型  $WZ(\rightarrow b\bar{b})$  は同じ手法を用いて  $3.2\sigma$  の観測結果を得ており、手法は確立されていると考えている。 3 チャンネルは同程度の不定性を持ち Run-1 [4] の結果同様、どれも低めにでている。信号強度の Combined 結果は有意度  $0.42\sigma$  であり、0 とも無矛盾な結果を得ている。  $t\bar{t}H$  チャンネルはトップ・クォークの湯川結合の測定のために重要なチャンネルである。  $t\bar{t}$  からのレプトン数とヒッグスの崩壊モードを合わせて分類し、計 9 つの解析を最適化している [5]。誤差の範囲で標準模型と無矛盾であり、信号強度の観測有意度は  $2.8\sigma$  となった (期待値は  $1.8\sigma$ )。これらクォークとの結合に関する直接測定には更なる統計量が必要であり、  $H \rightarrow b\bar{b}$  は Run1 との統合により、  $t\bar{t}H$  に関しては 2016 年の全終状態を足したデータによって、観測に到ることが目標である。ヒッグス粒子に関連する今後

の課題としては第2世代との結合の発見、全崩壊幅測定などがあげられる。特に後者は既に標準模型予想の4倍の大きさまで迫っており今後の急増するデータ量に期待したい。

## 5 超対称性粒子探索

標準模型を超えた物理として最有力候補となる超対称性 (SUSY) は、徹底した多岐にわたる探索にも関わらず Run1 ではその兆候を確認できなかった。Run2 では、衝突エネルギーの上昇に伴い、超対称性粒子のような重粒子の生成断面積が大幅に増加するため、発見の感度が向上している。LHC での典型的な SUSY 事象としては、生成されたグルイーノ、スクォークなどがより軽い粒子へ崩壊する際に多数のジェットを放出し、最終段の一番軽い SUSY 粒子 (LSP) が検出を逃れるために、大きな横消失エネルギーが観測される。これらの量を Run2 でも用いるためにはパイプアップ事象への対策を適正に行なう必要がある。また、消失粒子が2つあるため崩壊の kinematics を完全には解けず、新粒子に起因する超過はピークではなく幅広い bump となる。したがって実効質量分布の高端領域における背景事象の十分な理解が必須となる。これらが Run2 における SUSY 探索の課題となる。背景事象の評価方法としては、分布の高端領域であるため、いわゆる Side band 分布を利用することができない。また非常に限られた位相空間の隅が対象となるため、シミュレーションに頼れない。そのためデータ自体 (制御領域) を用い、それをシミュレーションの助けを借りて、信号領域に外挿する。そして外挿の妥当性は確認領域を用いて評価する、ということを行う。2015年までに ATLAS, CMS 両実験で幾つかの SUSY 探索チャンネルで  $2\sigma$  以上の超過が見られており、それらのチャンネルで 2016 年度データを早急に確認することが重要である。強い相互作用による生成チャンネルの中で、特に注目度の高い4チャンネルについて以下にまとめる。(1) グルイーノ探索 (1レプトンチャンネル) アトラス実験の 2015 年データ ( $3.2\text{fb}^{-1}$ ) で  $2.1\sigma$  の超過が見られた

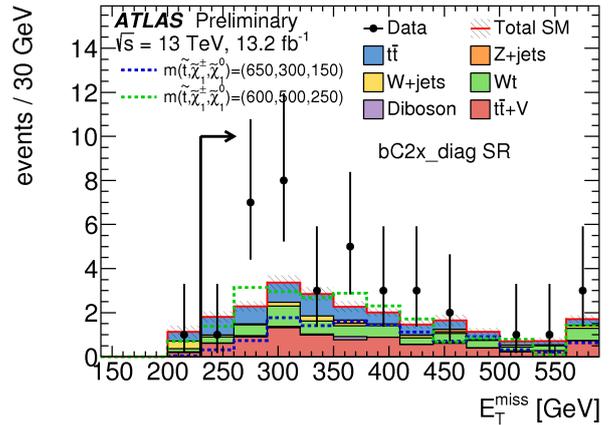


図3: Stop探索の1レプトンモードにおける横消失エネルギー分布 [14]. 基本選別に加え更に  $N_{bjet} \geq 2$  を要求している。  $2.6\sigma$  の超過が確認されている。

[6]. 同チャンネルの 2016 年度データでは  $14.8\text{fb}^{-1}$  を用いたが  $1.5\sigma$  の超過まで減退することが確認された [7]. CMS でも高い  $H_T(450 - 600\text{ GeV})$  領域,  $N_{jet} = 5 - 8, n_{bjets} \geq 1$  条件で  $2\sigma$  程度の超過を確認している。(2) 崩壊生成物中に  $Z(\rightarrow \ell\ell \text{ on shell}) +$  消失エネルギーを含むグルイーノ対生成チャンネル。こちらは Run1 の ATLAS 実験 ( $3.2\text{fb}^{-1}$ ) で  $3\sigma$  [8], 2015 年の 13 TeV データで  $2.2\sigma$  の超過 [9] を確認している。2016 年データ ( $14.7\text{fb}^{-1}$ ) での追試では  $1.2\sigma$  程度まで減退した [10]. CMS でもほぼ同じ信号領域を使用しているが、これまでのところ超過は見られていない。(3) 崩壊生成物中に  $Z(\rightarrow \ell\ell \text{ off shell}) +$  消失エネルギーを含むグルイーノ対生成チャンネル。こちらは Run1 の CMS 実験 ( $19.4\text{fb}^{-1}$ ) で  $2.6\sigma$  の超過 [11], 2015 年の 13 TeV データでは確認できず、2016 年に  $3.1\sigma$  [12] の超過を確認している。(4) その他, Stop 1-lepton 探索では、2015 年の 13 TeV データで  $2.3\sigma$  [13] の超過が見られた。これは  $N_{jet} \geq 4, N_{bjet} \geq 1$ , さらに  $m_T > 175\text{ GeV}, MET > 260\text{ GeV}$  を要求するものである。CMS 側の同じチャンネルに超過はなし。2016 年度の  $13.2\text{fb}^{-1}$  を用いた ATLAS の探索では  $2.2\sigma$  [14] の超過がみられた。これは更に  $N_{bjet}$  を課すことで  $2.6\sigma$  まであがる (図3)。SUSY の電弱生

成探索は、複数のレプトンを要求するチャンネルである ( $1L(+bb)$ ,  $2L$ ,  $3L$ ,  $4L$ ). Run1 では ATLAS, CMS の両実験で徹底した探索が行われたが兆候は見られていない [15, 16]. このチャンネルでは質量縮退領域は暗黒物質残存密度とも密接に関連しており、重要な領域である. 特に Run1 では低消失エネルギー側のデータに超過があり、棄却領域を狭めていた一因となっている. Run2 の CMS 実験による探索 [17] では、1 jet + 2 ソフトレプトンで事象選別し、質量が縮退する領域への感度も持たせた. 縮退領域に  $1\sigma$  程度の超過があり、ATLAS Run1 と似た状態となっている. ATLAS 実験側では、電弱生成探索のオーソドックスなチャンネルである.  $2/3\text{-leptons} + \text{MET}$  を用いた解析により、これまでの質量制限を大幅に更新した [18].

## 6 750 GeV 付近の 2 光子共鳴

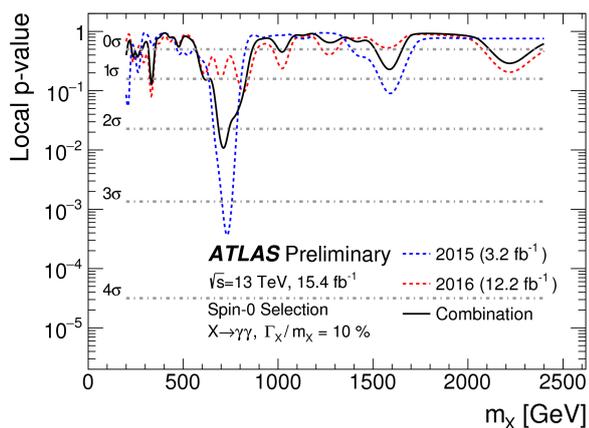


図 4: 背景事象仮定と測定データとの一致度を Spin-0 粒子質量の関数として表示したもの. 10% の共鳴幅を仮定. 2015 年のデータで見られたような共鳴ピークが、2016 年のデータでは確認されなかった. [20]

ヒッグス粒子の発見以降、新物理の明確な兆候がなかなか見えていなかったが、2015 年の Run2 開始後 2 光子不変質量の 750 GeV 付近に統計的に有意な "bump" が ATLAS, CMS 両実験で観測さ

れた [19, 21]. 有意度は ATLAS (local  $3.9\sigma$ , global  $2.1\sigma$ ), CMS (local  $3.4\sigma$ , global  $1.6\sigma$ ) であり、13 TeV の初年度に独立した 2 実験で、同じ質量領域に超過が見られたため、世界的に大きな注目を集めた. これにより、異例に数多く (500 本以上) の現象論論文が書かれた. 2016 年は 13 TeV ランの 2 年目であり、本講演の時点では 2015 年に比べて約 4 倍のデータ量が溜まっている. この統計量を用いて再検証した. 信号のベンチマークモデルとしては Higgs-like のスピン 0 ステート、もしくは RS-graviton like のスピン 2 ステートを用いる. 背景事象としては本物の 2 光子を含む irreducible 背景事象と、偽光子を含む reducible 背景事象に分類される. 大まかな解析の流れとしては、2 光子トリガーによるデータ収集、オフライン事象選別、そして不変質量分布解析となる. 2016 年のデータ解析の結果、ATLAS 実験では 750 GeV 付近の超過は見られなかった. 両年の無矛盾度は 730 GeV において  $2.7\sigma$  である. 2015 年と 2016 年のデータを合わせた超過の統計的有意度は  $2.3\sigma$  (710 GeV) であった (図 4 [20]). 一方、CMS でも 2016 年データを元に検証が行われたが、同様に 750 GeV 付近に超過はなかった. 両年の無矛盾度は  $2.7\sigma$ . 2015 年、2016 年データを合わせた有意度は  $1\sigma$  以下であった.

## 7 di-boson 共鳴探索

LHC に於ける新粒子探索が進み、より大きな質量の粒子探索を行なう際、その崩壊により発生する W/Z, top, Higgs 等の標準模型粒子はより高運動量をもつようになる. これらを概して 'Boosted object' と呼ぶ. 新物理への感度を高めるためには、これらの object を高効率で再構成することが必要となる. 高運動量の W/Z, Top, Higgs の崩壊で出てきた 2 ジェットの分離角は  $\Delta\phi = 2m/p_T(m, p_T)$  は崩壊粒子の質量、と横方向運動量) となり、例えば W の崩壊では  $p_T > 200 \text{ GeV}$  で  $\Delta\phi < 0.8$  となり、半径  $R = 0.4$  のジェットの場合には 2 つのジェットが重なり始める. このような Boosted オブジェクトの再構成を新アルゴリズムを用いて行う.

ここでは始め  $R = 1.0$  の大ジェットとして再構成し、まずはジェット内部から pile-up の影響を排除する (Glooming), その後内部を  $R = 0.2$  の複数小ジェットで再構成する.  $W/Z/H$  の場合は 2-prong らしさ, top の場合は 3-prong らしさを更に要求する. di-boson 共鳴探索では大まかに分けて全ハドロニック ( $2J + 0\ell$ ), セミ・レプトニック ( $J + 1\ell, J + 2\ell, J + 0\ell$ ), 全レプトニック ( $2\ell, 4\ell$ ) の 3 種類がある (ここで  $J$  は大ジェットを表す). Run1, Run2 において  $2\sigma$  以上の超過があったものをまとめると, Run1 の全ハドロニックでは ATLAS 実験

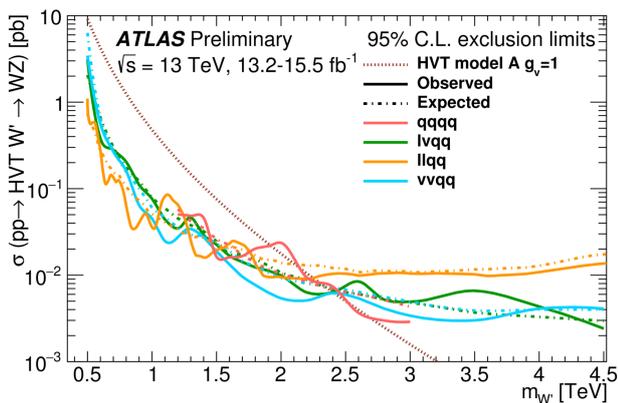


図 5: 重ベクターボソンの質量関数として, (断面積) $\times(WZ$ への分岐比)を表したもの. 期待制限 (点線) と観測制限 (実線) を示す. 崩壊モード毎に異なる色で表している.

の  $3.4\sigma(WZ \rightarrow JJ$  at 2.0 TeV)[22], Run1 のセミ・レプトニックでは CMS 実験の  $2.9\sigma(WH \rightarrow e\nu b\bar{b}$  at 1.8 TeV)[23], Run2 の全ハドロニックでは ATLAS 実験の  $< 2.0\sigma(WZ \rightarrow JJ$  at 2.0 TeV)[24], Run2 のセミ・レプトニックでは CMS 実験の  $3.9\sigma(ZH \rightarrow \ell\ell J$  at 0.65 TeV)[25], となる. ATLAS 実験で超過の傾向がみられる全ハドロニックのチャンネルは, CMS 側では見えておらず, また同様に CMS 実験のセミ・レプトニックのチャンネルと同じ事象選別を行ったところ, ATLAS 側では超過を確認できていない. 制限としては, 両グループともに統計的なふらつきがあるものの, 2.3 TeV 付近までを HVT 模型にて棄却した (図 5). またこの他に, ATLAS

実験の全ハドロニック ( $WH(\rightarrow b\bar{b})$ ) では, 1.6 TeV と 3.0 TeV に  $2\sigma$  強の超過が見られた [26].

## 8 LHC での暗黒物質探索

原子核の反跳を利用した地下検出器による暗黒物質 (DM) の直接探索や, 宇宙線の観測による間接探索とは直行する相補的な手法として, 加速器を用いた DM 探索では DM を人工的に実験室で直接生成することを目指す. Run2 では力学的な制限をうけない, 媒介粒子 (Mediator) と標準模型粒子 (SM) や DM との結合を基礎とした Simplified Model を基本模型として採用し, 系統的に DM 模型を調査している. Simplified Model では 4 つの基本パラメータに帰着する ( $m_{DM}$ : DM 質量,  $M_{MED}$ : 媒介粒子質量,  $g_q$ : クォーク-媒介粒子結合,  $g_{DM}$ : DM-媒介粒子結合). Simplified model では一般的に mediator を介するため, mono-X チャンネルと di-jet チャンネルが相補的な探索チャンネルとなる. mono-X チャンネルは  $X=$ ジェット, 光子,  $W/Z$ , ヒッグス等, 様々あるが, なかでも Mono-Jet は最大の断面積を有し最も感度が高い. 2016 年 13 TeV の CMS 実験の結果 ( $12.9\text{fb}^{-1}$  [27]) では背景事象を上回る超過は見られなかったが Axial Vector Mediator 仮定で mediator 質量にして 2 TeV 付近までを棄却している. これは WIMP-原子核衝突断面積にして  $10^{-43}\text{cm}^2$  までの棄却に相当する. 一方, Di-jet 共鳴探索はその高い断面積から, 新物理に対する感度が最も高いチャンネルの一つである. Mediator が DM ではなく SM 粒子ペアに崩壊すると仮定すると, Di-jet の測定により Mediator 質量に制限を加えることができる. ATLAS 実験 ([28]), CMS 実験 ([29]) とともに背景事象から有意な逸脱はない. また近年, DM や Mediator が弱い結合しかせず低質量領域に潜んでいる可能性が危惧されている. 低質量領域は非常に断面積が高く, 実験的な読み出しバンド幅とデータ保存量を大幅に超えるため全てをデータとして記録できない. LHC で行われている 4 実験では, トリガーレベルの再構成ジェットのみ (保存データ量は標準の形式に

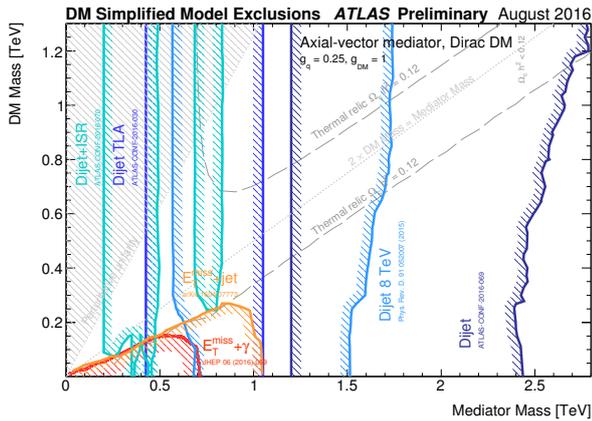


図 6: 暗黒物質質量 vs. 媒介粒子質量の平面において 95% CL で棄却された領域を表示する

比べ 5%未満) を高頻度で記録する手法を導入した。これによりこれまで Prescale のないトリガメニューの最小しきい値は 360 GeV であったが、これ以下のしきい値のものも Prescale せずに収集できるようになった。可能になった [30]。この他、ISR JET/Photon を使ってトリガーしきい値を下げる試みも行われている。Mono-Jet, Di-jet の相補的探索により、Mediator 質量にして 0.2–2.5 TeV に渡り広く棄却している (図 6,  $g_q = 0.25, g_{DM} = 1.0$  を仮定)。

## 9 まとめ

以上をまとめると、

- LHC の運転状況：非常に順調。
- ATLAS, CMS 実験の状況：効率的に稼働中。
- ヒッグス粒子：様々な測定を継続中, quark との結合確認に向けて統計増を期待。
- 超対称性粒子探索：明確な兆候は見られていない。幾つかのチャンネルで 2–3 $\sigma$  の超過は見られているが、二実験、チャンネル間で一致するものはまだ見られていない。

- 750 GeV 共鳴探索：2016 年のデータでは超過を確認できず。
- その他の共鳴探索：2–3 $\sigma$  の超過はある。上記 SUSY と似た状況である。
- DM 探索：兆候は見えてない。

最新の結果はこちらのサイト (ATLAS[31], CMS[32]) にて随時更新しているので、興味のある方は参照してほしい。

## 参考文献

- [1] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-067
- [2] The CMS Collaboration, CMS-PAS-HIG-16-020
- [3] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-091
- [4] The ATLAS Collaboration, JHEP 01 (2015) 069
- [5] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-080
- [6] The ATLAS Collaboration, Eur. Phys. J. C76 (2016) 565
- [7] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-054
- [8] The ATLAS Collaboration, Eur. Phys. J. C75 (2015) 318
- [9] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2015-082
- [10] The ATLAS Collaboration, Eur. Phys. J. C77 (2017) 144
- [11] The CMS Collaboration, JHEP 04 (2015) 124

- [12] The CMS Collaboration, CMS-PAS-SUS-16-021
- [13] The ATLAS Collaboration, Phys. Rev. D 94 (2016) 052009
- [14] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-050
- [15] The ATLAS Collaboration, Phys. Rev. D 93, 052002 (2016)
- [16] The CMS Collaboration, Eur. Phys. J. C 74 (2014) 3036
- [17] The CMS Collaboration, CMS-PAS-SUS-16-02
- [18] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-096
- [19] The ATLAS Collaboration, JHEP 09 (2016) 1
- [20] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-059
- [21] The CMS Collaboration, Phys. Rev. Lett. 117 (2016) 051802
- [22] The ATLAS Collaboration, JHEP 12 (2015) 55
- [23] The CMS Collaboration, Eur. Phys. J. C 76 (2016) 237
- [24] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-055
- [25] The CMS Collaboration, CMS PAS-B2G-16-010
- [26] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-083
- [27] The CMS Collaboration, CMS PAS-EXO-16-037
- [28] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-069
- [29] The CMS Collaboration, CMS PAS-EXO-16-032
- [30] The ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2016-030
- [31] <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/AtlasPublic/>
- [32] <http://cms-results.web.cern.ch/cms-results/public-results/publications/>

# CP-odd Higgs Production in Two-photon Processes

京都産業大学益川塾/京都大学国際高等教育院

植松 恒夫

## 1 はじめに

昨年の本シンポジウムでは、Higgs 粒子の 2 光子への崩壊モード ( $H \rightarrow 2\gamma$ ) とは逆の過程である  $e^+e^-$  または  $e\gamma$  衝突での 2 光子融合による標準模型 Higgs 粒子の生成について報告した [1]。特に、遷移形状因子 (Transition Form Factor) というある種の form factor の  $Q^2$  依存性と生成断面積について述べた。今回は、標準模型を超えた模型、具体的には Two-Higgs Doublet 模型 (2HDM) あるいは最小超対称標準模型 (MSSM) で現れる CP-odd の Higgs 粒子  $A^0$  の場合について、Transition Form Factor と生成断面積を 1-loop のオーダーで調べる [2]。

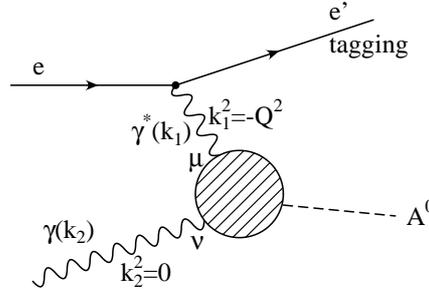


Figure 1: 電子・光子衝突過程での CP-odd Higgs 粒子  $A^0$  の生成

## 2 2HDM/MSSM への拡張

$e^+e^-$  または  $e\gamma$  衝突での  $2\gamma$  融合過程での Higgs 生成について、標準模型での Higgs Sector の minimal な拡張を考える。すなわち、ここでは MSSM を含む Two-Higgs Doublet Model (2HDM) の type II の場合を考察する。標準模型で 2 つの  $Y = 1$  の  $SU(2)_L$  doublet,  $H_1, H_2$  を 2 種類の複素スカラー場,  $\phi_1, \phi_2$  で以下のように表す。

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{0*} \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで考察する type II の場合,  $\phi_1$  ( $\phi_2$ ) は down-type (up-type) のクォーク, レプトンにのみ couple する。これらが, 自発的対称性の破れの結果, 以下の真空期待値をとるものとする。

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \tan \beta = v_2/v_1 \quad (2)$$

2 種類の複素スカラー場で自由度が 8 つあるうち, 3 つは  $W^\pm, Z$  の縦成分に吸われて残りの 5 つの物理的自由度が以下の 5 種類の Higgs 粒子となる。

$$\text{Charged } H^+, H^-; \quad \text{CP-even } h^0, H^0; \quad \text{CP-odd } A^0 \quad (3)$$

ここでは, CP-odd の Higgs 粒子  $A^0$  に着目し, その Transition Form Factor と  $\gamma^* \gamma$  融合過程での生成断面積について述べる。

そこでまずは, この type II での  $A^0$  の coupling の特徴について触れる。

- $A^0$  は CP-even の  $h^0$  や  $H^0$  と異なり, tree level で  $W^+W^-$ ,  $ZZ$  のゲージボソン対に couple しない。したがって, W ボソンや Z ボソンの 1-ループは  $A^0$  生成に効かない。
- また  $A^0$  は cubic 相互作用で他の 2 個の physical Higgs boson と couple しない。
- $A^0$  の fermion への coupling はフェルミオンの質量に比例する。

最後の性質から  $A^0$  とフェルミオンの coupling は, 特に top quark のみを考えればよいことが分かる。より具体的には,  $A^0$  のクォークへの coupling  $\lambda\gamma_5$  は以下の式で与えられる。

$$-\frac{gm_U \cot \beta}{2m_W} \gamma_5 \quad \text{for up-type quarks} \quad -\frac{gm_D \tan \beta}{2m_W} \gamma_5 \quad \text{for down-type quarks} \quad (4)$$

### 3 CP-odd Higgs $A^0$ の Transition Form Factor

Figure 2 に示すように  $e + \gamma \rightarrow e' + A^0$  での遷移振幅は

$$A_{\mu\nu} = \frac{-ige^2 \cot \beta}{(4\pi)^2} \frac{\tau}{2m_W} \frac{1}{1 + \rho\tau} [g(\rho) + 4f(\tau)] \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \equiv \tilde{S}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \quad (5)$$

と表される。ここで,  $p_1^2 = -Q^2 < 0$ ,  $p_2^2 = 0$ , また  $(p_1 + p_2)^2 = m_A^2$  ( $m_A$ :  $A^0$  の質量) である。 $\tau = 4m_t^2/m_A^2$ ,  $\rho = Q^2/4m_t^2$  として  $A^0$  の Transition Form Factor は以下の式で定義される。

$$\tilde{F}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \equiv \tilde{S}(m_t^2, Q^2, m_A^2) / \left( \frac{ige^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m_W} \right) = -\frac{1}{2} \cot \beta \frac{\tau}{1 + \rho\tau} [g(\rho) + 4f(\tau)] \quad (6)$$

ここで、2つの関数  $f(\tau)$ ,  $g(\rho)$  は以下の式で与えられる。

$$f(\tau) = \begin{cases} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{\tau}} \right]^2 & \tau \geq 1 \\ -\frac{1}{4} \left[ \log \frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} - i\pi \right]^2 & \tau < 1 \end{cases}$$

$$g(\rho) = \left[ \log \frac{\sqrt{\rho + 1} + \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho + 1} - \sqrt{\rho}} \right]^2$$

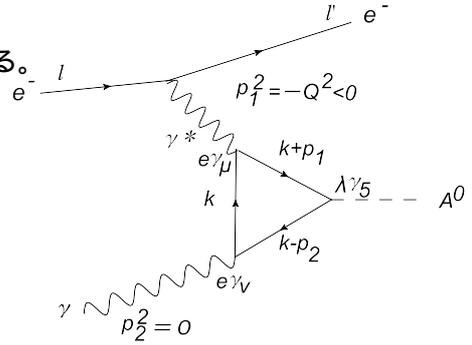


Figure 2:  $e\gamma$  衝突での  $A^0$  の生成

今、 $\tau = (2m_t/m_A)^2$  なので、この値の大小に応じて  $f(\tau)$  を場合分けする。

$$m_A < 2m_t \quad \text{すなわち} \quad \tau > 1 \quad \text{のとき} \quad f(\tau) = \left[ \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{\tau}} \right]^2$$

$$m_A > 2m_t \quad \text{すなわち} \quad \tau < 1 \quad \text{のとき} \quad f(\tau) = -\frac{1}{4} \left[ \log \frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} - i\pi \right]^2$$

前者は real であるのに対し、後者は complex となる。これらの場合に対応して、 $m_A = 300\text{GeV}$  と  $400\text{GeV}$  の2つの場合を考える。

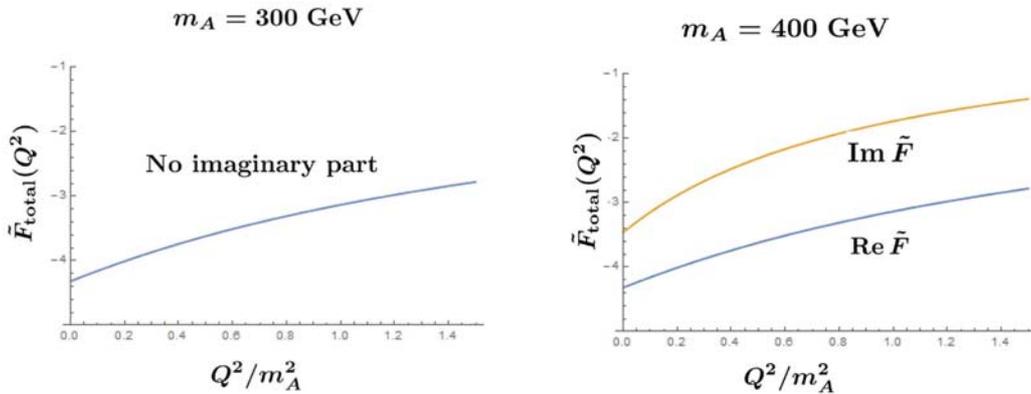


Figure 3: (a)  $m_A = 300\text{GeV}$  の場合 (b)  $m_A = 400\text{GeV}$  の場合

## 4 $A^0$ 生成微分断面積

$e\gamma \rightarrow eA^0$  における  $\gamma^*\gamma$  融合過程を通して生成される CP-odd ヒッグス粒子  $A^0$  の微分断面積は

$$\frac{d\sigma(\gamma^*\gamma)}{dQ^2} = \frac{\alpha_{\text{em}}^3 g^2}{64\pi 4\pi} \frac{1}{Q^2} \left[ 1 + \frac{u^2}{s^2} \right] \frac{1}{m_W^2} |\tilde{F}_{\text{total}}(Q^2)|^2 \quad (7)$$

で与えられる。ただし,  $u = m_A^2 + Q^2 - s$ ,  $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$  で

$$\tilde{F}_{\text{total}}(Q^2) = \sum_f N_c e_f^2 \tilde{F}(\rho_f, \tau_f) \simeq 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \tilde{F}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \quad (8)$$

である。  $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$ ,  $m_t = 173 \text{ GeV}$ ,  $\cot \beta = 1$  とすると微分断面積は Figure 4 のようになる。

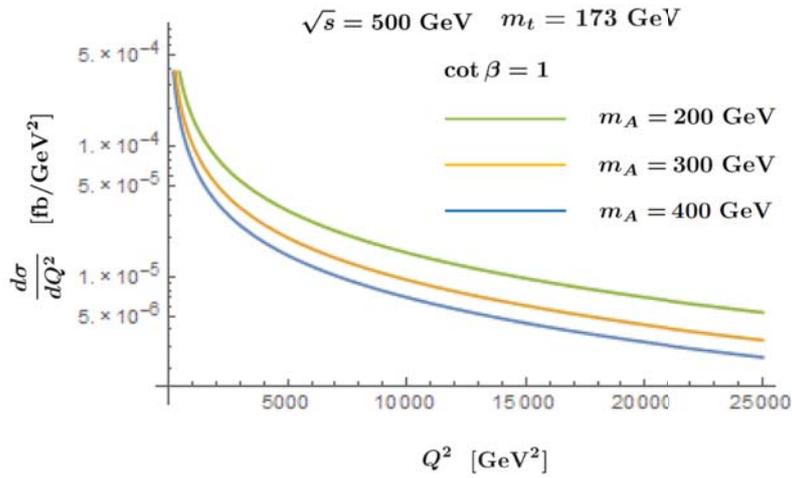


Figure 4: CP-odd Higgs 粒子  $A^0$  の生成微分断面積

## 5 結論と今後の課題

ここでは、標準模型を超えた模型、具体的には最小超対称標準模型 (MSSM) を含む type-II の Two-Higgs Doublet 模型 (2HDM) で現れる CP-odd の Higgs 粒子  $A^0$  の場合について、Transition Form Factor と生成断面積を調べた。今後は MSSM/2HDM の場合をさらに詳細に調べるとともに、より一般の BSM についても研究を進める。

### References

- [1] N. Watanabe, Y. Kurihara, K. Sasaki and T. Uematsu, Phys. Lett. **B728** (2014) 202 (MISC-2013-10); Phys. Rev. **D90** (2014) 033915 (MISC-2014-03).
- [2] K. Sasaki and T. Uematsu, in preparation.

# グラビティーノ暗黒物質を持つ高エネルギー超対称模型

長井 稔

京都産業大学 益川塾

## 1 高エネルギー超対称性模型とグラビティーノ暗黒物質

LHC 実験において新物理の探索が行われているが、超対称性粒子の発見には未だ至っていない。また測定されたヒッグス粒子の質量 125 GeV を自然に再現することから、超対称性粒子が数 10 ~ 1000 TeV の重さにある高エネルギー超対称性模型が注目を浴びている。

このとき超対称性粒子が重いにもかかわらずフレーバー観測量は依然としてこの領域に感度がある為、フレーバー実験の制限を回避する為には、1 PeV 程度の重めの超対称性粒子を考えるか、超対称性粒子は数 10 TeV のままで、なんらかのフレーバーや CP の破れを抑制する機構を考える必要がある。前者の場合は、アノマリー伝達機構によって生じる軽いウィーノ粒子が暗黒物質の候補となる。一方後者では、フレーバーや CP の破れの起源となる重力伝達機構を抑制する為に、グラビティーノが軽いと考えるのが自然であり、それが暗黒物質の候補となる。

このようなグラビティーノ暗黒物質を持つ高エネルギー超対称性の中で、最も単純で現象論的に許される模型 [?] について説明する。

## 2 フリーパラメータの無い最小超対称性標準模型

標準模型をミニマムに拡張した超対称性模型である最小超対称性標準模型では 100 を超える未知のパラメータを導入することとなり、特にフレーバーや CP を破る項は厳しく制限されている。そうした制限を回避する為に、超対称性を破る項に対して以下のような条件が大統一模型 (GUT) スケールで成立すると仮定する。

$$m_f^2 = 0 \quad (f = q, l, u, d, e, H_u, H_d), \quad A = B = 0. \quad (1)$$

つまり、超対称性の破れはゲージノの質量項にのみに伝わり、GUT スケールにおいて、

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_{1/2}, \quad (2)$$

のように GUT を尊重するように超対称性の破れが伝わると仮定する。するとこの模型の持つ基本的パラメータはゲージノ質量項  $M_{1/2}$  と超対称なヒグシーノ質量項  $\mu$  のみとなるが、この二つのパラメータは観測されているヒッグスの質量と Z ボソンの質量を再現する為に、値が固定されることになる。したがって、この模型は原理的にフリーパラメータが無く、全ての超対称性粒子のスペクトルやヒッグスセクターのパラメータが決まることになる。

このような超対称性の破れのセットアップはゲージノ伝達機構などで実現可能であるが、ここでは具体的な模型を考える代わりにグラビティーノ暗黒物質の質量をフリーパラメータとし、

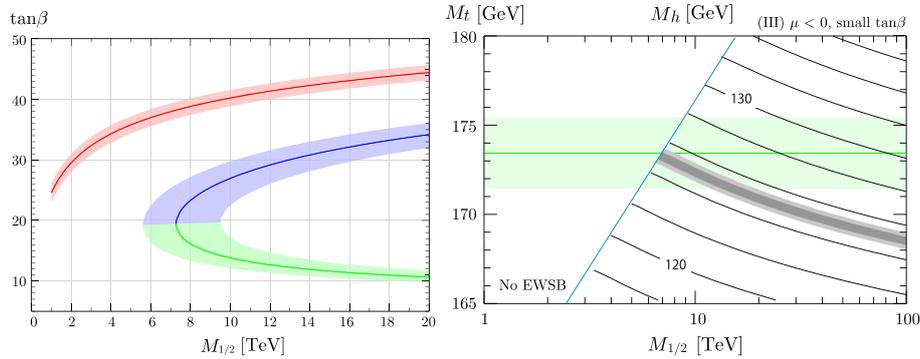


Figure 1: (左)  $\tan\beta$  の値の予言値。(右) 正しいヒッグスの質量を与えるパラメータ領域。

他の超対称性粒子の崩壊から作られるとしたときに残存量を再現するような値に固定することにする。

電弱対称性の破れの条件は超対称性スケールにおいて、

$$\frac{m_Z^2}{2} = -|\mu|^2 + \frac{m_{H_u}^2}{\cot^2\beta - 1} - \frac{m_{H_d}^2}{1 - \tan^2\beta}, \quad \sin 2\beta = -\frac{B\mu}{2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2},$$

のように課されるが、これを解くことにより  $Z$  ボゾンの質量を再現する為の  $\mu$  と二つのヒッグスの真空期待値の比である  $\tan\beta$  が決められる。図??左に、 $M_{1/2}$  を動かしたときに正しく電弱対称性の破れを与える  $\tan\beta$  の値を図示する。 $\tan\beta$  の一番大きな赤い線は  $\mu > 0$  ( $B < 0$ ) の解に対応し、 $M_{1/2}$  が大きいときにのみ存在する青と緑の線は  $\mu < 0$  ( $B > 0$ ) の解に対応する。特に、 $\mu < 0$  の解には  $\tan\beta$  の小さな解が存在することにより、グラビティーノ暗黒物質を考えたときのビッグバン軽元素合成 (BBN) からの制限や重力伝達による超対称性の破れから生じる電気双極子 (EDM) の制限を回避することができる。 $\tan\beta$  が小さいと右巻きスタウの質量が重くなり、その崩壊から生じるグラビティーノ暗黒物質の質量は、残存量を説明するためには比較的小さめであればならなくなる。これにより右巻きスタウの崩壊が早まり BBN の制限を回避できる。またグラビティーノが軽いことにより、重力伝達により生じる  $B$  の CP を破る位相も小さくなり、 $\tan\beta$  が小さいときには現在の EDM からの制限を回避し、近い将来の実験において検証可能となる。

図1右に、 $M_{1/2}$  とトップクォークの質量  $M_t$  を変化させたときに、 $\mu < 0$  の小さな  $\tan\beta$  の解について、ヒッグスボゾンの質量がどのように変化するかを図示する。灰色の領域が実験で決められたヒッグスの質量であり、緑の線がトップクォークの質量である。また、青い線の左側の領域では正しく電弱対称性の破れを起こすことができない。図からわかるように、 $M_{1/2} \sim 10\text{TeV}$  の領域において、ヒッグスの質量を説明するパラメータ領域が存在できることが明らかとなった。

## References

- [1] R. Kitano, R. Motono and M. Nagai, Phys. Rev. D **94** (2016) no.11, 115016.

## Deformed Extra dimension

K. Aouda<sup>a</sup>, N. Kanda<sup>a</sup>, S. Naka<sup>a</sup>, and H. Toyoda<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Department of Physics, College of Science and Technology, Nihon University;*

<sup>b</sup>*Junior College, Funabashi Campus, Nihon University*

The non-local field theories based on modern quantum field theories originated from Yukawa's attempts of the bi-local field theories in 1949[1]. During the same period, H.S. Snyder proposed an idea of non-commutative spacetime, which has a close relationship to non-local field theories. The purpose of those attempts was to overcome the problems inherent in local field theories. Yukawa asserted the importance of non-local field theories from two points of view; one is the uniform explanation of the variety of elementary particles and the other is to get rid of the divergence problem. Nowadays it becomes common idea to introduce some sort of non-local structure of elementary particles such as the string models, although the importance of such an idea was not so recognized in those days.

Now, after the attempt in 1949, Yukawa tried to develop the non-local field theories mainly into two directions. The one in early stages was the extension of bi-local field theories so as to get a consistent relativistic description of those fields with their interactions without the problem of the ghosts, which spoils the causality. The original idea of Yukawa's bi-local field theory is not difficult. Therein, the bi-local quantum fields are assumed to have the matrix elements such as  $\langle x|\Phi|x'\rangle = \Phi(X, \bar{x})$ , ( $X = \frac{1}{2}(x+x')$ ,  $\bar{x} = x-x'$ ) instead of  $\langle x|\Phi|x'\rangle = \phi(x)\delta^4(x-x')$  with the field equations

$$[P^2 + \{\bar{p}^2 + m^2(\bar{x})\}] \Phi(X, \bar{x}) = 0, \quad (1)$$

$$\Lambda(P \cdot \bar{p}, P \cdot \bar{x})\Phi(X, \bar{x}) = 0, \quad (2)$$

where  $P$  and  $\bar{p}$  are momenta conjugate to  $X$  and  $\bar{x}$  respectively. The Eq.(1) is the wave equation of the bi-local field  $\Phi$ , and Eq.(2) is its physical state condition. The explicit forms of Eq.(1) and Eq.(2) are determined by the first construction of bi-local system; the popular one by Takabayasi[2] is to put  $m^2(\bar{x}) = \kappa^2\bar{x}^2 + \omega$ , ( $\kappa, \omega = \text{const.}$ ) and  $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}(\kappa\bar{x} + i\bar{p}) \cdot P$ . This type of bi-local fields[3] may be considered as a prototype of the string model and the matrix field.

Another approach to the non-local field theories proposed by Yukawa in 1968 includes more drastic changes in field equations; he requires a difference equation along a timelike direction instead of a differential equation such that[4]

$$\exp\left(\sum_{\alpha=1}^4 \lambda_{\alpha} \epsilon_{\mu}^{\alpha} \partial / \partial X_{\mu}\right) \Psi = \exp(-i\lambda S) \Psi, \quad (3)$$

where  $\lambda_{\alpha} \epsilon_{\mu}^{\alpha}$  and  $S$  are respectively vector and scalar dynamical variables constructed out of internal degrees of freedoms of the system<sup>1</sup>. Unfortunately, this type of non-local field theories

---

<sup>1</sup>Yukawa called the extended object described by the wave function  $\Psi$  in Eq.(3) as "elementary domain".

could not progress no further due to the lack of guiding principles to construct such a difference field equation. In recent frameworks of field theories, however, it is not uncommon to deal with difference field equations instead of differential ones; thus, the purpose of this work is to study the background of Eq.(3) type of field equations from a modern point of view.

We, here, remark the two possible backgrounds about the non-local operations containing infinite higher derivatives: the non-commutative structure of dynamical variables and the presence of extra-dimension. As for the non-commutative structure, we can take i)  $q$ -deformed phase space  $\hat{x}\hat{p} - q\hat{p}\hat{x} = i$ , ii) non-commutative spacetime  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$  in a D-brane background, iii)  $\kappa$ -Minkowski spacetime  $[\hat{x}^0, \hat{x}^i] = -i\kappa^{-1}\hat{x}^i$ ,  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) as the suggestive examples. As is well known, those examples are realized in the spaces of commutative variables. In the first case i), one can put  $\hat{x} = x$  and  $\hat{p} = -i\frac{q+1}{2q}D$ , where  $D$  is the difference operation defined by  $Df(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})x}$ . The second case ii) can be realized by the Moyal star product

$$f(x) \star g(x') = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{x'_\nu}\right) f(x)g(x') \Big|_{x=x'} \quad (4)$$

in the usual commutative spacetime. The last example iii) is closely related to Snyder's non-commutative spacetime and can be represented by the  $SO(1, 4)$  generators as  $\hat{x}^0 = M^{04}$ ,  $\hat{x}^i = M^{i0} + M^{i4}$  in  $dS_4$  spacetime. This representation doesn't contain any infinite higher derivatives; but the  $SO(1, 3)$  invariant field equation can be constructed so that[5]

$$\left[ \cosh(i\kappa^{-1}\partial_0) - \frac{1}{2}e^{i\kappa^{-1}\partial_0}(i\kappa^{-1}\nabla)^2 + (\text{const.}) \right] \Psi = 0, \quad (5)$$

which has a structure similar to Eq.(3). Thus one can expect to derive Eq.(3) type of field equations by requiring some kind of non-commutative or deformed structure of spacetime variables.

Another key to get at a difference field equation like Eq.(3) may be the presence of extra dimension. To understand this meaning, let us consider the  $AdS_5$  spacetime  $(x^\mu, y)$  with warped metric  $\text{diag}(g_{AB}) = (e^{-2ky}\eta_{\mu\nu}, 1)$ , ( $A, B = \mu, 5$ ). The classical motion of the particle embedded in this spacetime can be solved simply, and its trajectory is illustrated by (Fig.1)[6]; that is, if we observe the particle in a brane with a fixed  $y$ , then the particle appear at discrete positions in that brane.

This is, however, the result of classical dynamics; and, the description based on the quantum mechanics is fairly different. In order to see this, in what follows, let us consider a particle with mass  $m$  embedded in the five-dimensional Minkowski spacetime  $(x^\mu, y)$ , in which the fifth dimension is bounded within  $0 \leq y \leq L$  by the infinite square well potential. Then using

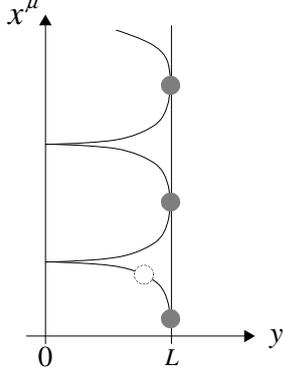


Figure 1. The trajectory of a particle in  $(x^\mu, y)$  plane of  $AdS_5$  spacetime. The particle starting from  $(x^\mu, L)$  to  $x^\mu > 0$  direction will be observed at discrete positions, the gray circles, in  $y = L$  brane.

$\phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n}{L} y)$  and  $\lambda_n = \frac{\pi n}{L}$ , the propagator of the particle can be evaluated as

$$\begin{aligned} G_{ba} &= \langle x_b, y_b | (\hat{p}_{\bar{\mu}} \hat{p}^{\bar{\mu}} + m^2 + i\epsilon)^{-1} | x_a, y_a \rangle \\ &= \frac{i}{2} \int_0^\infty d\tau \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{i} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi i \tau}} \right)^4 e^{i\frac{1}{2} \left\{ \frac{(x_b - x_a)^2}{\tau} - \tau(\lambda_n + m^2 - i\epsilon) \right\}} \phi_n(y_b) \phi_n(y_a) \\ &= \frac{i}{2} \int_0^\infty d\tau \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{i} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi i \tau}} \right)^5 (-1)^n e^{i\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\tau} \left\{ (x_b - x_a)^2 + (y_b^{(n)} - y_a)^2 \right\} - \tau(m^2 - i\epsilon) \right]}, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $y^{(n)} = nL + y$  (for  $n = 2r$ ) and  $y^{(n)} = (n+1)L - y$  (for  $n = 2r - 1$ ). In the last step of Eq.(6), we have used the Poisson's summation rule. Then, in terms of [7]

$$\Delta_{ba}^{(n)} = m^2 \left\{ x_{ba}^2 + (y_b^{(n)} - y_a)^2 \right\} = \begin{cases} m^2 [x_{ba}^2 + (\bar{y} + 2rL)^2] \equiv \Delta_{ba}^{[e,r]}, & (\text{even } n = 2r) \\ m^2 [x_{ba}^2 + \{2(y + rL)\}^2] \equiv \Delta_{ba}^{[o,r]}, & (\text{odd } n = 2r - 1) \end{cases} \quad (7)$$

where  $\bar{y} = y_b - y_a$ ,  $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y_b + y_a)$  and  $x_{ba} = x_b - x_a$ , the propagator takes the form

$$G_{ba}(x_{ba}; \bar{y}, \tilde{y}) = \sum_{r=-\infty}^\infty \left[ K(\Delta_{ba}^{[e,r]}) - K(\Delta_{ba}^{[o,r]}) \right]. \quad (8)$$

By definition, it is obvious that  $G_{ba}(x_{ba}; \bar{y}, \tilde{y}) = G_{ba}(x_{ba}; \bar{y}, \tilde{y} \pm L) = G_{ba}(x_{ba}; \bar{y} \pm 2L, \tilde{y})$  and  $G_{ba}|_{y_a=0, L} = G_{ba}|_{y_b=0, L} = 0$ . In a fixed  $y$  plane such as  $y_a = y_b = y_0$  ( $0 < y_0 < L$ ,  $\bar{y} = 0$ ), the  $G_{ba}$  obey a difference equation with respect to  $y$ . One can also verify that  $K(\xi)$  behaves as a Gaussian dumping function for  $\xi \rightarrow \infty$ ; and so, the  $x_{ba}$  and  $y$  are loosely related only through their dispersions in such a way that  $\Delta x_{ba} \sim \Delta(2y) \sim m^{-1}$ .

However, if we introduce a deformation between the fifth direction  $e^{(5)} = (\mathbf{0}, 1)$  and a timelike direction  $n = (n^\mu, 0)$ , ( $n^\mu n_\mu = -1$ ) in 4-dimensional Minkowski spacetime, then the situation will be changed. Let us consider, for trial, the Lorentz transformation for  $x_n = n \cdot x$  and the  $y$  such that  $x'_n = x_n \cosh(\epsilon) + y \sinh(\epsilon)$ ,  $y' = x_n \sinh(\epsilon) + y \cosh(\epsilon)$ ; then, the components

$x_{\perp}^{\mu} = x^{\mu} - n^{\mu}x_n$  stay unchanged. Further we require the boundary conditions of square well potential to  $y'$ ; then, the propagator after the Lorentz transformation is obtained simply by the substitution  $(x_{\perp}, x_n; y)_{a,b} \rightarrow (x_{\perp}, x'_n, y')_{a,b}$ . After that, we put the  $y$  plane condition on the original  $y$  coordinate such that  $\bar{y} = 0$ ,  $y_a = y_b = y_0 (\neq 0, L)$ . Therefore, the propagator takes the form  $G_{ba} = G_{ba} [(x_{\perp})_{ba}, (x'_n)_{ba}; (\tilde{y}')_{ba}, (\bar{y}')_{ba}]$ , where  $(x'_n)_{ba} = (x_n)_{ba} \cosh(\epsilon)$ ,  $\tilde{y}' = y_0 \cosh(\epsilon) + [x_n]_{ba} \sinh(\epsilon)$  and  $\bar{y}' = (x_n)_{ba} \sinh(\epsilon)$ , where  $(x)_{ba} = \frac{1}{2}(x_b - x_a)$  and  $[x]_{ba} = \frac{1}{2}(x_b + x_a)$ .

The wave function with initial state  $\Phi(x_{\perp}, x_n; y_0)$  is defined by

$$\Psi_b = \Psi(x_{\perp b}, x_{nb}; y_0) = \int d^4x_a G_{ba} \Phi(x_{\perp a}, x_{na}; y_0). \quad (9)$$

Remembering  $\tilde{y}' \equiv \tilde{y}' \pm L$ , one can obtain with  $L_{\epsilon} = L/\sinh(\epsilon)$

$$\begin{aligned} e^{\pm(L_{\epsilon}\partial_n)_b} \Psi_b &= \int d^4x_a \left[ e^{\mp(L_{\epsilon}\partial_n)_a} G_{ba} ((x_{\perp})_{ba}, (x'_n)_{ba}, \tilde{y}' \pm L, \bar{y}') \right] \Phi(x_{\perp a}, x_{na}; y_0) \\ &= \int d^4x_a G_{ba} e^{\pm(L_{\epsilon}\partial_n)_b} \Phi(x_{\perp a}, x_{na}; y_0), \end{aligned} \quad (10)$$

We note that the discrete  $\tilde{y}$  symmetry of the propagator plays an essential role in the integration by parts in Eq.(11). The initial state  $\Phi$  is free in this stage; and, if we put

$$\Phi(x_a, y_0) = N e^{-\frac{x_n}{L_{\epsilon}} \cosh^{-1}(D_a)} \Phi_0(x_{\perp a}) \left( D = \frac{L_{\epsilon}^2}{2} (\partial_{\perp}^2 - m^2) \right), \quad (11)$$

then we can obtain a difference/differential field equation such as

$$\left[ \cosh(L_{\epsilon}\partial_n) - \frac{L_{\epsilon}^2}{2} (\partial_{\perp}^2 - m^2) \right]_b \Psi_b = 0, \quad (12)$$

which tends to the Klein-Gordon equation according as  $L_{\epsilon} \rightarrow 0$ . The result should be compared with Eq.(3) or Eq.(5), though there are no principle to choose the initial state. We also note that the discrete property of the propagator with respect  $x_n$  arises by the deformation of  $y$  through the Lorentz transformation. Those facts are expected to give new insights for the theory of elementary domain in future.

## References

- [1] H. Yukawa, Phys. Rev. **77**, 219 (1950); *ibid.* **80**, 1047 (1950)
- [2] T. Takabayasi, Nuovo Cim. **33**, 668 (1964).
- [3] T. Gotō, S. Naka and K. Kamimura, Prog. Theor. Phys. Suppl. **67**, 69 (1979).
- [4] Y. Katayama and H. Yukawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41**, 1 (1968); Y. Katayama, I. Umemura and H. Yukawa, *ibid.* **41**, 22 (1968).
- [5] S. Naka, H. Toyoda, T. Takanashi, and E. Umezawa, PTEP **2014**, 043B03 (2014).
- [6] K. Aouda, S. Naka, and H. Toyoda, JHEP **10** 090 (2016).
- [7] M. Goodman, Am. J. Phys. **49**, 843 (1981).

# 多重スピノール場形式による標準模型の拡張

曾我見郁夫

京都産業大学、益川塾  
京都大学、基礎物理学研究所

## 1 序論

LHCによるヒッグス粒子の発見 [1, 2, 3] は、素粒子の標準模型 (SM) が電弱スケール以下のエネルギー領域の現象を記述する唯一の有効な理論形式であることを確証した。しかし、SMは多くの未解決の課題と未知量を含んでおり、発展途上にある未完成の体系と見なさざるを得ない。とくに、(A)「通常の物質の基本構成単位であるクォーク族とレプトン族が、なぜ3家族の構成を持つのか?」という疑問に答えることが出来ていない。また、WMAP [4] と Planck [5] の観測によれば、宇宙は光と相互作用をしない大量の暗黒物質で構成されており、SMの要素である明るい物質は宇宙のごく一部分を占めているに過ぎない。したがって、(B)「暗黒物質が通常のクォーク族やレプトン族とどのような関係にあるのか?」という疑問にも答えなければならない。

これらの疑問を解きSMを発展させるためには、既存の枠組みに縛られることなく、新しい概念や形式を見出すことが必要である。その際、もっとも重要なポイントはクォーク族とレプトン族のすべてがスピン  $1/2$  を持っている事実である。これはハドロン族と異なる最大の特色である。ハドロン族の場合には、スピン  $3/2$  などの状態が出現し、それを手がかりにすることによって複合粒子描像に基づくクォーク模型が成功した。このスピン  $1/2$  以外のフェルミ場が存在しないという特性は、素朴な複合粒子の描像が無効であることを端的に示している。この特色は、これまで自然界の構造を解明してきた“階層的・還元主義的なものの見方”に変革を迫るものである。そこには、複合粒子模型とは異なる複合場模型とでも表現すべき“融合的なものの見方”が隠されているのではないだろうか?

そのような複合粒子模型を越える試みの一つとして、筆者は、多自由度のスピノール場に基づく新しい繰り込み可能な局所場理論を提唱した [6, 7, 8, 9]。その形式では、ディラックスピノールの三重テンソル積と同じ振る舞いをする「三重場 (*triplet field*)」 $\Psi(x)$  が宇宙を構成するすべてのフェルミ場の基本単位となり、SMは「宇宙の可視部分を構成する3家族のクォーク族とレプトン族」および「暗黒部分の主成分となる1家族の暗黒クォーク族とレプトン族」を包摂するように拡張される。

一对のディラックスピノール場は  $(2 \times 4 = 8)$  個の自由度をもつ。それらから、自由度4の左巻きの電弱2重項と自由度2の二つの右巻きの電弱1重項を、 $(8 = 4 + 2 + 2)$  のように組み直すことにより、電弱対称群  $G_{EW} = SU_L(2) \times U_Y(1)$  をもちニュートリノ1重項  $\nu_R$  を含む拡張されたワインバーグ・サラム (WS) 理論が構成される。この手法に倣って、一对の三重場  $\Psi(x)$  から  $(2 \times 64 = 128)$  個の自由度をもつ合成場  $\Psi(x)$  を構成する。この合成場が含む3家族の成分は通常の電弱対称性  $G_{EW}$  をもち、残りの1家族の成分は左右の入れ替わった電弱対称性  $G_{EW^*} = SU_R(2) \times U_{Y^*}(1)$  をもちと要請するのである。

この理論のボソン部分では、可視セクターはSMの対称群  $G = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$  のゲージ場とヒッグス場を含み、暗黒セクターはそれと同型な対称群  $G_* = SU_{c*}(3) \times SU_{R*}(2) \times U_{Y*}(1)$  のゲージ場とヒッグス場を含む。すなわち、通常の3家族のフェルミオン場は専ら対称群  $G$  のボーズ場と相互作用し、第4番目の家族に属する暗黒フェルミオン場は対称群  $G_*$  のボーズ場と相互作用する。

この理論には、宇宙の暗黒セクターを可視セクターに結びつける三つの自然な窓口（ポータル）が存在する。ここでは、ヒッグス場を介する窓口を少し詳しく分析し、暗黒ハドロンと核子の弾性衝突を論じる。残りの窓口は、可換なゲージ場の特性から生じる可視および暗黒の電磁相互作用に関係するものと可視および暗黒ニュートリノ相互作用に関係する。それらについては簡単な紹介にとどめる。

また、暗黒セクターのシナリオとして、付加的な暗黒ダウクォークから構成される安定なスピン  $3/2$  のハドロンが暗黒物質の主成分となる理論を考察する。そのスピン  $3/2$  をもつ暗黒ハドロンの質量の上限は  $15.1 \text{ GeV}/c^2$  と評価される。

現段階では、「複合粒子モデル」とは著しく異なる「多重スピノール場」の形式は、初期の試論的な段階にある。したがって、三重場  $\Psi(x)$  や合成場  $\Psi(x)$  を構成するより基本的な要素が何であるのか、そして「基本的な要素はどのような機構で結び付けられているのか」などの問いは不問に付す。それらの問いかけに答えることは、将来、取り組むべき課題であると解釈しなければならない。

## 2 三重場と三重積代数

標準理論の全フェルミオン族と暗黒物質の主成分であるエキゾチックなフェルミオン族を記述する単位として、4成分のディラック・スピノール  $\psi$  の三重テンソル積として振舞う三重場  $\Psi(x)$  を

$$\Psi = (\Psi_{abc}) = \psi_a \psi_b \psi_c \quad (1)$$

のように導入する。三重場  $\Psi(x)$  は ( $4^3 = 64$ ) のスピノール自由度をもつ。それに対して、3家族の可視フェルミオン場の自由度は ( $3 \times 32 = 96$ ) である。したがって、単一の三重場で、それらを記述することはできない。3節では、可視と暗黒成分のフェルミオン族のすべてを含むように、二組の三重場から成る合成場を導入する。

三重場に作用する演算子は、ディラック代数  $A_\gamma = \{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5\}$  の要素の三重テンソル積によって：

$$\begin{aligned} A_T &= \{p \otimes q \otimes r : p, q, r \in A_\gamma\} \\ &= \langle \gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes \gamma_\mu \otimes 1, 1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

と構成される。これを三重積代数  $A_T$  と呼ぶ。大きい三重積代数  $A_T$  は数多くの部分代数を含んでいる。そこで

“三重テンソル積の要素に作用する置換群  $S_3$  の下で閉じ既約である  $A_T$  の部分代数”

を  $S_3$ -既約な代数と定義し、 $S_3$ -既約な部分代数のみが S M のエネルギー領域では物理的な意味を有するものと要請 [6, 8, 9] する。以下で示されるように、三重積代数  $A_T$  は  $S_3$ -既約な三つの代数に分解される。

## 2.1 外部ローレンツ自由度のための部分代数

三重積代数  $A_T$  に含まれる 4 個の元

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu \in A_T, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (3)$$

は、反交換関係

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} I, \quad I = 1 \otimes 1 \otimes 1. \quad (4)$$

を満たして、以下の部分代数  $A_\Gamma$  を構成する：

$$A_\Gamma = \langle \Gamma_\mu \rangle = \{ I, \Gamma_\mu, \Sigma_{\mu\nu}, \Gamma_5 \Gamma_\mu, \Gamma_5 \} \quad (5)$$

ここで

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) = \sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu} \quad (6)$$

および

$$\Gamma_5 = -i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 = \Gamma^5 = \gamma_5 \otimes \gamma_5 \otimes \gamma_5 \quad (7)$$

である。この部分代数  $A_\Gamma$  は  $S_3$ -既約で、ディラック代数  $A_\gamma$  と同型であり、三重場の外部特性を記述すると要請することが出来る。すなわち、我々が観測者として存在する四次元ミンコフスキー時空  $\{x^\mu\}$  中の三重場  $\Psi(x)$  に対して、 $A_\Gamma$  の部分代数  $M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}$  がローレンツ変換を引き起こす。要素  $\Gamma_\mu$  の足は時空  $x^\mu$  の上付き添え字と縮約される。

## 2.2 家族自由度とカラー自由度の部分代数

三重積代数  $A_T$  は、外部代数  $A_\Gamma$  以外にどのような部分代数を含むであろうか？その答えを得るために、 $A_\Gamma$  の中心化代数：

$$C_\Gamma = \{X \in A_T : [X, \Gamma_\mu] = 0\} \quad (8)$$

の元は、任意の  $\mu$  のディラック代数要素  $\gamma_\mu$  を偶数個含む三重テンソル積であること [7] に注目する。すなわち、

$$C_\Gamma = \langle 1 \otimes \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu, \gamma_\mu \otimes 1 \otimes \gamma_\mu \rangle \quad (9)$$

であり、三重積代数  $A_T$  は  $A_T = A_\Gamma C_\Gamma = C_\Gamma A_\Gamma$  且つ  $A_\Gamma \cap C_\Gamma = \{I\}$  のように分解される。明らかに、中心化代数  $C_\Gamma$  は、その任意の元がローレンツ変換の全ての生成子  $M_{\mu\nu}$  と可換であるから、三重場の内部特性を記述すると解釈することができるのである。

ディラック代数  $A_\gamma$  は、同型で互いに可換な  $su(2)$  リー部分代数

$$A_\sigma = \{ \sigma_1 = \gamma_0, \sigma_2 = i\gamma_0\gamma_5, \sigma_3 = \gamma_5 \} \quad (10)$$

および

$$A_\rho = \{ \rho_1 = i\gamma_2\gamma_3, \rho_2 = i\gamma_3\gamma_1, \rho_3 = i\gamma_1\gamma_2 \} \quad (11)$$

を含んでいる。それらの元は、パウリ型の積規則  $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c$  および  $\rho_a\rho_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\rho_c$  を満たす。

それぞれの部分代数  $A_\sigma$  と  $A_\rho$  の元から中心化代数  $C_\Gamma$  に含まれるように三重テンソル積をつくると、互いに可換で同型な二つの  $su(4)$  代数を構成することが出来る。それらの  $su(4)$  代数は、 $S_3$ -既約な部分代数に “ $su(3) + u(1)$ ” のように分解される。これらの部分代数によって、三重場  $\Psi(x)$  は “クォーク族+レプトン族” および “可視フェルミ族+暗黒フェルミ族” のようにモード分解されるのである。その詳細は文献 [6, 7, 8, 9] に譲り、ここでは割愛する。

### 3 可視セクターと暗黒セクターのゲージ群 $G \times G_\star$ の基本表現

一对のディラクスピノール場から拡張されたワインバーグ・サラム (WS) 理論を構成する手法に倣って、一对の三重場から ( $2 \times 64 = 128$ ) 個の自由度をもつ局所合成場  $\Psi(x)$  を構成して、この合成場が

$$128 = \begin{array}{c} 3 \times 32 \\ \text{可視セクター} \\ \text{の 3 家族} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \times 32 \\ \text{暗黒セクター} \\ \text{の 1 家族} \end{array}$$

のように、3 家族の可視フェルミオン成分場と 1 家族の暗黒フェルミオン成分場を含むと解釈するのである。そして、3 家族の可視成分が通常 SM のゲージ対称性  $G$  をもち、残りの 1 家族の成分が左右の入れ替わった対称性  $G_\star$  をもつと要請する。こうして、局所合成場  $\Psi(x)$  は

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R = \begin{pmatrix} \Psi_{(v)} & U_{(d)} \\ & D_{(d)} \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} U_{(v)} & \Psi_{(d)} \\ D_{(v)} & \end{pmatrix}_R \quad (12)$$

のように、ゲージ群  $G \times G_\star$  の基本表現を構成する。ここで  $\Psi_{(v)L}, U_{(v)R}, D_{(v)R}$  ( $\Psi_{(d)R}, U_{(d)L}, D_{(d)L}$ ) は、それぞれ、可視 (暗黒) 部分の電弱対称群  $SU_L(2)$  ( $SU_R(2)$ ) に関して、カイラル 2 重項、上向きおよび下向きの右手 1 重項である。このように、宇宙の可視および暗黒部分のすべてのフェルミ場はすべて単一の局所多重スピノール場  $\Psi(x)$  の成分場と解釈されるのである。

暗黒部分のフェルミオン場を表すために、成分場に星印  $\star$  を付けることにする。即ち、アップ暗クォーク場とダウン暗クォーク場はそれぞれ  $u_\star$  および  $d_\star$ 、また暗ニュートリノ場と暗電子場はそれぞれ  $\nu_\star$  および  $e_\star$  と表される。したがって、合成カイラル場  $\Psi_L(x)$  と  $\Psi_R(x)$  が含むクォーク成分場は

$$\Psi_{(v)}^{(q)} = \begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix}_L, \quad U_{(d)}^{(q)} = (u_\star)_L, \quad D_{(d)}^{(q)} = (d_\star)_L \quad (13)$$

および

$$U_{(v)}^{(q)} = (u \ c \ t)_R, \ D_{(v)}^{(q)} = (d \ s \ b)_R, \ \Psi_{(d)}^{(q)} = \begin{pmatrix} u_\star \\ d_\star \end{pmatrix}_R \quad (14)$$

となる。同様に、レプトン成分場は

$$\Psi_{(v)}^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix}_L, \ U_{(d)}^{(\ell)} = (\nu_\star)_L, \ D_{(d)}^{(\ell)} = (e_\star)_L \quad (15)$$

および

$$U_{(v)}^{(\ell)} = (\nu_e \ \nu_\mu \ \nu_\tau)_R, \ D_{(v)}^{(\ell)} = (e \ \mu \ \tau)_R, \ \Psi_{(d)}^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \nu_\star \\ e_\star \end{pmatrix}_R \quad (16)$$

と表される。

こうして、合成カイラル場  $\Psi_L(x)$  および  $\Psi_R(x)$  を用いると、宇宙の全フェルミオン成分場に対するラグランジュアの運動項およびゲージ項は

$$\mathcal{L}_{kg} = \bar{\Psi}_L i \Gamma^\mu D_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \Gamma^\mu D_\mu \Psi_R \quad (17)$$

と表すことが出来る。ここで共変微分は、すべての可視および暗黒ゲージ場を含む。

電弱ゲージ対称性  $G_{EW}$  をスケール  $\Lambda$  で、また  $G_{EW_\star}$  をスケール  $\Lambda_\star$  で破るために、我々は可視および暗黒のヒッグス二重項  $\varphi$  および  $\varphi_\star$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}, \ \varphi_\star = \begin{pmatrix} \varphi_\star^+ \\ \varphi_\star^0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

が存在するとする。それらに対するラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) + (D^\mu \varphi_\star)^\dagger (D_\mu \varphi_\star) - V_H \quad (19)$$

と表される。ここで  $D_\mu$  は共偏微分であり、ヒッグスポテンシャル  $V_H$  は

$$V_H = V_0 - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 - \mu_\star^2 \varphi_\star^\dagger \varphi_\star + \lambda_\star (\varphi_\star^\dagger \varphi_\star)^2 + 2\lambda_I (\varphi_\star^\dagger \varphi_\star) (\varphi^\dagger \varphi) \quad (20)$$

と与えられる。 $\lambda_I$  を含む相互作用は可視セクターと暗黒セクターを繋ぐ重要な役割を演じる。

#### 4 可視および暗黒セクターの電弱対称性 $G_{EW}$ および $G_{EW_\star}$ の破れ

ゲージ群  $G$  と  $G_\star$  が同型であることから、可視セクターと暗黒セクターのゲージ粒子の間には一対一の対応がある。対称性  $G_{EW}$  と  $G_{EW_\star}$  が破れた低エネルギー領域では、その存在が確立された可視ベクトル粒子  $W_\mu^\pm(x)$  および  $Z_\mu(x)$  に対応して、暗黒セクターのベクトル粒子  $W_{\star\mu}^\pm(x)$  および  $Z_{\star\mu}(x)$  が存在する。

条件  $\lambda\lambda_* - \lambda_I^2 > 0$  が満たされると、(20) 式のヒッグスポテンシャルは期待値  $\langle \varphi \rangle = v$  および  $\langle \varphi_* \rangle = v_*$  を有する安定な真空状態をもつ。その状態の周りで、ヒッグス場を

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} U(\vartheta(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_*(\vartheta_*(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ v_* + h_*(x) \end{pmatrix} \quad (21)$$

と展開する。ここで、 $U(\vartheta(x))$  ( $U_*(\vartheta_*(x))$ ) はゲージ群  $G_{EW}$  ( $G_{EW*}$ ) の局所的な位相関数  $\vartheta(x)$  ( $\vartheta_*(x)$ ) を含むユニタリー群要素であり、ゲージ場  $A_\mu^{(2)}(x)$  および  $A_\mu^{(1)}(x)$  ( $A_{*\mu}^{(2)}(x)$  および  $A_{*\mu}^{(1)}(x)$ ) を、質量をもつベクトル場  $W_\mu^\pm(x)$  および  $Z_\mu(x)$  ( $W_{*\mu}^\pm(x)$  および  $Z_{*\mu}(x)$ ) に変容させてゲージアウトされる。その結果、ヒッグスポテンシャルは

$$V_H = \text{constant} + \lambda v^2 h^2 + \lambda_* v_*^2 h_*^2 + 2\lambda_I v v_* h h_* \\ + \lambda v h^3 + \lambda_* v_* h_*^3 + \lambda_I v h h_*^2 + \lambda_I v_* h^2 h_* + \frac{1}{4} \lambda h^4 + \frac{1}{4} \lambda_* h_*^4 + \frac{1}{2} \lambda_I h^2 h_*^2. \quad (22)$$

となる。

(22) 式の間  $h(x)$  と  $h_*(x)$  は、可視セクターと暗黒セクターのヒッグス粒子の間である。尚も、それらは  $2\lambda_I v v_* h h_*$  で相互作用している。そこで、

$$H = \cos \theta h - \sin \theta h_*, \quad H' = \sin \theta h + \cos \theta h_* \quad (23)$$

と置き、対角化をしなければならない。混合角  $\theta$  を

$$\tan 2\theta = \frac{2\lambda_I v v_*}{\lambda_* v_*^2 - \lambda v^2} \quad (24)$$

と選ぶと、重ね合わせられた場  $H$  と  $H'$  の質量は

$$\begin{pmatrix} m_H^2 \\ m_{H'}^2 \end{pmatrix} = (\lambda v^2 + \lambda_* v_*^2) \mp \sqrt{(\lambda_* v_*^2 - \lambda v^2)^2 + (2\lambda_I v v_*)^2}. \quad (25)$$

と定められる。明らかに、我々は低い質量  $m_H$  の場  $H(x)$  を LHC 実験 [1, 2, 3] で発見された 125 GeV 近傍のヒッグス粒子と同定しなければならない。

重ね合わされた場  $H$  と  $H'$  は、暗黒粒子探索の種々の局面で興味深い振る舞いを示す。加速器実験で、二つの場  $H'$  と  $H$  が出現比は  $(\tan \theta)^2$  に比例する。また、散乱過程で暗黒粒子を観測する確率は  $(\sin \theta \cos \theta)^2$  に比例する。このようなヒッグスポータル過程の研究は、理論面では長い歴史 [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] をもっている。

## 5 暗黒核反応を伴わない単調な暗黒セクターの構成

対称性  $G_{EW*}$  がスケール  $\Lambda_*$  ( $\Lambda_* > \Lambda$ ) で自発的に破れる際に、暗黒クォーク  $u_*$  と  $d_*$  が可視セクターの第 1 家族のクォーク  $u$  および  $d$  のように極めて近い質量を獲得する場合には、可視セク

ターと同じように数多くの暗黒原子核が存在することになる。その結果、暗黒セクターは、観測される可視宇宙部分と同じような多様な元素生成を伴う豊かな熱史に沿って進化することを運命づけられることになる。

我々は、暗黒セクターは単調な熱史と構造をもつ [6, 8, 9] と想定する。そのためにここでは、可視セクターの第3家族のクォーク  $t$  および  $b$  と同じように、暗黒クォーク  $u_*$  が  $d_*$  よりも遥かに大きい質量を持ち

$$m_{u_*} \gg m_{d_*} + m_{e_*} + m_{\nu_*}. \quad (26)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $m_{e_*}$  と  $m_{\nu_*}$  は暗黒電子とニュートリノの質量である。その結果、反応  $u_* \rightarrow d_* + \bar{e}_* + \nu_*$  によって  $u_*$  クォークは消滅し、暗黒セクターには  $d_*$  のみが重い成分として残される。この  $d_*$  クォークは、 $SU_{C_*}(3)$  対称性のゲージ場  $A_{*\mu}^{(3)}$  によって閉じ込められて、暗黒カラー1重項の暗黒ハドロン

$$\Delta_*^- = [d_* d_* d_*] = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} d_*^i d_*^j d_*^k \quad (27)$$

を構成することになる。フェルミ統計のため、この暗黒ハドロンはスピン角運動量  $3/2$ 、暗黒電荷  $Q_* = -1$  をもつ。

このシナリオでは、 $\Delta_*^-$  が安定な核種として存在しうる唯一のハドロンである。そのため、核反応は存在せず、暗黒セクターの進化の熱史は単調なものになる。

もう一つ同様のシナリオ [6] が存在する。それは  $d_*$  が  $u_*$  よりも、 $m_{d_*} \gg m_{u_*} + m_{e_*} + m_{\nu_*}$  のように大きい質量をもつ場合であり、 $d_*$  反応過程  $d_* \rightarrow u_* + e_* + \bar{\nu}_*$  で消滅し、残された  $u_*$  クォークが閉じ込められてスピン  $3/2$  の暗黒ハドロン

$$\Delta_*^{++} = [u_* u_* u_*] = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} u_*^i u_*^j u_*^k \quad (28)$$

が形成される。この暗黒ハドロンは暗黒電荷  $Q_* = 2$  をもつ。このシナリオでも、多様な核種は存在せず暗黒核反応も生じない。

## 6 議論

この理論を発展させるためには、暗黒セクターの熱史を分析しなければならない。とくに、宇宙物理学と宇宙論で確立されている種々の結果との整合性を確認すると共に、この理論が予言し得る物理過程の分析を行わなければならない。

ここでは先ず、WMAP [4] と Planck [5] の観測から得られたバリオン的な物質と冷たい暗黒物質の密度に関する宇宙論的パラメータから、簡単な解析 [8, 9] によって安定な暗黒ハドロン  $\Delta_*$  の質量の上限値を求めてみよう。

可視セクターのフェルミオンとボソンは、ヒッグス場  $\varphi$  と  $\varphi_*$  の相互作用によって生じるループの交換を介して、暗黒セクターのフェルミオンおよびボソンと作用しあう。そのため、初期の再加

熱期では、すべての場の量子は共通の高温高密度のスープ状態にある。宇宙膨張に伴って温度が下がり対称性  $G_{EW^*}$  と  $G_{EW}$  が破られる過程で、量子スープの中で‘バリオン数’生成過程 [17, 18] が起こり全てのクォーク種数が平等に生成されると仮定する。その結果として、3家族の可視クォークと1家族の暗黒クォークが残され、やがて重いクォークは軽いクォークへと崩壊して行く。

暗黒セクターでは、 $u_*$  クォークが消滅して残された  $d_*$  クォークは、 $SU_{c^*}(3)$  相互作用によってスピン自由度4の安定な暗黒ハドロン  $\Delta_*$  が形成される。他方、可視セクターでは、重いクォークの崩壊の後に残された  $u$  と  $d$  が  $SU_c(3)$  相互作用によってスピン自由度2とアイソスピン自由度2の核子（陽子+中性子）となり、安定な原子核を造り残存する。

冷たい暗黒物質と可視バリオン物質の存在比は、暗黒セクターと可視セクターに蓄えられている安定な粒子のエネルギー（質量/ $c^2$ ）比である。したがって、暗黒ハドロン  $\Delta_*$  が冷たい暗黒物質の主要成分であると仮定すると、 $\Delta_*$  の質量  $m_{\Delta_*}$  と核子の質量  $m_N$  の間には、以下のような関係式が成立する：

$$2m_{\Delta_*} : 6m_N = \Omega_c h^2 : \Omega_b h^2 = 0.11889 : 0.022161 \quad (29)$$

ここで、宇宙パラメータ  $\Omega_c h^2$  および  $\Omega_b h^2$  は外部データを考慮したプランクのベストフィット値であり、文献 [5] の表 10 に与えられている。故に、暗黒ハドロン  $\Delta_*$  の質量  $m_{\Delta_*}$  の上限値は

$$m_{\Delta_*} = 16.1m_N = 15.1\text{GeV}/c^2 \quad (30)$$

と評価される。

LUX グループ [19] によれば、スピンによらない WIMP-核子弾性衝突の断面積の上限値は、WIMP の質量値  $33 \text{ GeV}/c^2$  に対して  $7.6 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$  以下である。彼等は今年になり [20]、過去のデータを総合し、質量値  $50 \text{ GeV}/c^2$  に対して  $1.1 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$  以下としている。また Panda グループ [21] は、WIMP の質量値  $40 \text{ GeV}/c^2$  に対して  $2.5 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$  以下と報告している。二つのグループの観測結果が文献 [22] にまとめられている。もし暗黒粒子が、我々の理論が示唆する暗黒ハドロン  $\Delta_*$  のように軽い場合は、さらに精度の高い実験が必要となる。

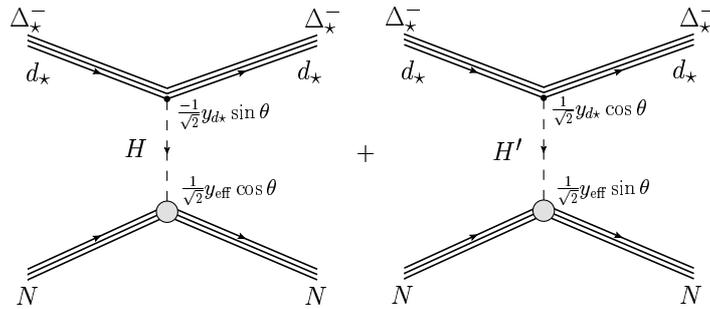


Figure 1: 重ね合わせ場  $H$  および  $H'$  の交換による暗黒ハドロン  $\Delta_*^-$  と核子  $N$  の弾性散乱.

ここで、暗黒物質の探査で、(23) 式の重ね合わせ場  $H$  と  $H'$  が果たす役割を述べる。図.1 は、場  $H$  と  $H'$  の交換によって引き起こされる暗黒クォーク  $d_*$  と核子  $N$  の散乱過程を示してい

る。暗黒ハドロン  $\Delta_{\star}^{-}$  が、低ノイズ環境に置かれたキセノンやゲルマニウムのような重い粒子の中の核子に遭遇すると、暗黒クォーク  $d_{\star}$  と核子  $N$  が  $H$  と  $H'$  を交換して、弾性散乱を受ける。その過程の散乱振幅は

$$\frac{1}{2} y_{d_{\star}} y_{\text{eff}} \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{1}{m_H^2} - \frac{1}{m_{H_{\star}}^2} \right] = \frac{1}{4} \frac{\lambda_I}{\lambda_{\star} \lambda - \lambda_I^2} \frac{y_{d_{\star}} y_{\text{eff}}}{v_{h_{\star}} v_h} \quad (31)$$

と評価することが出来る。ここで  $y_{d_{\star}}$  は暗黒クォークの湯川相互作用であり、 $y_{\text{eff}}$  はヒッグス粒子と核子の間の有効相互作用定数 [23, 24] である。

我々の理論には、§4 で述べたヒッグスポータル以外にも、暗黒セクターを可視セクターに結びつける二つの窓口が存在する。その一つは、アーベル群の特殊性に由来する。即ち、 $U_Y(1)$  と  $U_{Y_{\star}}(1)$  群のゲージ場の曲率テンソル  $F_{\mu\nu}$  と  $F_{\star}^{\mu\nu}$  から構成されるローレンツ不変量が

$$\mathcal{L} = g_{\gamma\gamma_{\star}} F_{\mu\nu} F_{\star}^{\mu\nu}$$

のように、 $G \times G_{\star}$  対称な相互作用を与えてくれる。この窓口は、確立された可視セクターの電弱現象の記述と矛盾を引き起こさない条件の下でのみ開くことが許される。この窓口を閉ざすには、不連続変換

$$(A_{\mu}^{(1)} \rightarrow \pm A_{\mu}^{(1)} \text{ and } g^{(1)} \rightarrow \pm g^{(1)}) \text{ with } (A_{\star\mu}^{(1)} \rightarrow \mp A_{\star\mu}^{(1)} \text{ and } g_{\star}^{(1)} \rightarrow \mp g_{\star}^{(1)}) \quad (32)$$

の下での不変性を、課せばよい。

もう一つの窓口は、ニュートリノセクターに存在する。それを見るには、(15) 式の暗黒左巻きニュートリノ 1 重項  $\nu_{\star}^L = U_{(d)}^{(\ell)}$  と (16) 式の可視右巻きニュートリノ 1 重項  $(\nu_j^R) = U_{(v)}^{(\ell)}$  との間にディラック型の不変量  $\bar{\nu}_{\star}^L \nu_j^R$  ( $\bar{\nu}_i^R \nu_{\star}^L$ ) を構成できることに注意すればよい。このゲートを開けてニュートリノ質量問題を考察する場合は、シーソー機構やレプトジェネシスのような素粒子物理と宇宙物理に跨る問題を同時に考察しなければならない。ニュートリノ質量に関わる一般的な相互作用ラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}_{\nu\text{mass}} = (\lambda_{ij} \bar{\nu}_i^R l_j + \lambda_{\star} \bar{\nu}_{\star}^L r_{\star} + \lambda_{\star i} \bar{\nu}_{\star}^L \nu_i^R + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} M_i \bar{\nu}_i^R \nu_i^R + \frac{1}{2} M_{\star} \bar{\nu}_{\star}^L \nu_{\star}^L \quad (33)$$

で与えられる。ここで  $(l_j) = \Psi_{(v)}^{(\ell)}$  は (15) 式の可視セクターの左巻き電弱 2 重項であり、 $r_{\star} = \Psi_{(d)}^{(\ell)}$  は (16) 式の暗黒セクターの右巻き電弱 2 重項である。また、 $\lambda$  タイプの係数は湯川型相互作用定数であり、 $M$  タイプの係数はマヨラナ型質量を表している。この多様な現象の研究は、将来の課題としたい。

繰り込み可能な局所場理論の上に定式化された SM は不完全ではあるが、微視的宇宙と巨視的宇宙の深い結びつきを解明する為の掛け替えのない体系である。WMAP と Planck の観測や LHC 実験の偉大な成果に応えるためには、固定観念を捨てて新たな視点から SM を更に発展させなければならない。そのような試みの一つである我々の理論では、宇宙の可視セクターの 3 家族

のクォーク族とレプトン族のすべてと暗黒セクターに属する1家族のクォーク族とレプトン族が単一の多重スピノール合成場の成分として統一された。この理論はまだ初期の未熟な段階にあり、様々な試みを通して理論構成の単位である三重スピノール場の数学的・物理的意味づけを行わなければならない。

## References

- [1] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration), Phys. Lett. B **726**, 88 (2013), arXiv:1307.1427 [hep-ex].
- [2] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration), Phys. Lett. B **726**, 120 (2013), arXiv:1307.1432 [hep-ex].
- [3] S. Chatrchyan *et al.* (CMS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **110**, 081803 (2013), arXiv:1212.6639 [hep-ex].
- [4] E. Komatsu *et al.* (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl. **192**, 18 (2011), 1001.4538.
- [5] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), Astron.Astrophys. **571**, A16 (2014), 1303.5076.
- [6] I. S. Sogami, Prog. Theor. Exp. Phys. **123** B02 (2013).
- [7] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **78** 487 (1987); J. Phys.: Conf. Ser. **343**, 012113 (2012).
- [8] I. S. Sogami, Bled Workshops in Physics, (ISSN 1580-4992), **16**, No.2, 129 (2015).
- [9] I. S. Sogami, Int. J. Mod. Phys. **A 31** (18) 1630027 (2016).
- [10] C. Englert, T. Plehn, D. Zerwas and P. M. Zerwas, Phys. Lett. B **703**, 298 (2011).
- [11] M. J. Strassler and K. M. Zurek, Phys. Lett. B **651**, 374 (2007).
- [12] M. J. Strassler and K. M. Zurek, Phys. Lett. B **661**, 263 (2008).
- [13] T. Binoth and J. J. van der Bij, Z. Phys. C **75**, 17 (1997).
- [14] R. Schabinger and J. D. Wells, Phys. Rev. D **72**, 093007 (2005).
- [15] Y. Mambrini, Phys. Rev. D, 115017 (2011).
- [16] A. Djouadi, O. Lebedev, Y. Mambrini and J. Quevillon, Phys. Lett. B **709**, 65 (2012).
- [17] D. Land and E. D. Carlson, Phys. Lett. B **292**, 107 (1992).
- [18] S. Inoue, G. Ovanesyan and M. J. Ramsey-Musolf, Phys. Rev. D **93**(1),124012 (2016), arXiv:[1508.0540v1][hep-ph] and references therein.
- [19] D. S. Akerib *et al.* (LUX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **112**, 091303 (2014).
- [20] D. S. Akerib *et al.* arXiv:1608.07648v3 [astro-ph.CO].
- [21] Andi Tan *et al.* arXiv:1607.07400v3 [hep-ex].
- [22] Xiao-Gang He and J Tandean, arXiv:1600.03551v2 [hep-ph].
- [23] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek and D. V. Nanopoulos, Phys. Rev. Lett. **40**, 692 (1978).
- [24] G. Jungman, M. Mamionkowski and K. Griest, Phys. Rep. 267, 195 (1996).

# ニュートリノ物理

佐藤 丈

さいたま市桜区下大久保 2 5 5 埼玉大学理学部物理学科

## 1 導入

ニュートリノは標準理論では質量がないことになっている。その結果、標準理論においては電子、ミュー、タウという区別（フレーバー）が厳密に成立する。レプトンフレーバーの保存である。これらのフレーバーは荷電レプトンの質量固有状態を基準として定義され、ニュートリノは弱い相互作用を通してそれぞれのフレーバーと結合する状態、 $\nu_\alpha, \alpha = e, \mu, \tau$ 、として定義される。

しかし、質量が存在すると、一般には質量の固有状態、 $\nu_i, i = 1, 2, 3$ 、はフレーバーの固有状態とは異なるので、クオークの時と同様ずれが生じる。そのずれは、最初にニュートリノ振動の可能性に言及した牧、中川、坂田 [1] の頭文字を取った MNS 行列といわれるユニタリ行列で表され、以下の関係式で結ばれる。

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} \nu_i \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ここで、式(2)はニュートリノ振動現象を記述する際によく使われるこのユニタリ行列の表記であり、 $c, s$  はそれぞれ  $\cos, \sin$  の略記である。

さて、ニュートリノは荷電レプトンを通してのみ生成観測されることから、このずれが存在する場合、量子力学的にフレーバー  $\alpha$  として生成されたニュートリノがフレーバー  $\beta$  に成るという現象が起きる。量子力学的現象なので、それは振動確率  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  という形で表され、エネルギー  $E$  のニュートリノが生成地点からの距離  $L$  の地点で観測される場合以下の形を取る。

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \Delta_{ij} + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 2\Delta_{ij} \quad (3)$$

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{(\Delta m_{ij}^2)L}{4E}, \quad \Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad (4)$$

これは、実際に粒子として飛んでいく状態はフレーバーの固有状態ではなく質量の固有状態であるが、生成観測はフレーバーの固有状態として行われることから生じる現象である。なお、上記の式は真空中を伝搬するときの式であり、物質中を通過する場合は屈折現象により変更を受ける [2, 3] が、ここではその詳細には触れない。

では、実際にこの用が起きているのか、であるが、太陽から来るニュートリノが足りないという問題（太陽ニュートリノ欠損）に始まり、大気ニュートリノの観測においてミューニュートリノの数が足りないという問題（大気ニュートリノ問題）などをニュートリノ振動により解決できるということがわかり、現在ではあらゆるニュートリノの観測が式(3)で説明できることが分かっている。つまり、ニュートリノ振動には式(2)に現れる4つのパラメタと2つの質量差（質量は三つあるが、振動に効くのはそれらの差のみなので2つ）の計6つのパラメタが存在する。あらゆるニュートリノの観測がこれらのパラメタで説明できることが分かっている。その値は、文献[4]:によると

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_{13} &= 0.0234 (0.0240), \quad \sin^2 \theta_{23} = 0.567 (0.573), \\ \sin^2 \theta_{12} &= 0.323, \quad \Delta m_{21}^2 = 7.60 \times 10^{-5} \text{ [eV}^2\text{]}, \\ |\Delta m_{31}^2| &= 2.48 (2.38) \times 10^{-3} \text{ [eV}^2\text{]}\end{aligned}\tag{5}$$

である。なお、CPを破る位相である $\delta$ については最適点は存在するものの、まだあらゆる値と無矛盾であるため、ここには載せていない。

以下では、これらについて簡単に説明する。

## 2 振動実験

ニュートリノ振動が重要になる実験観測は多々存在するが、ここでは太陽ニュートリノ、大気ニュートリノ、原子炉ニュートリノ、長基線実験、の結果がどのように解釈されるのか簡単に述べる。紙面の都合で文献は参照していないが、必要なキーワードは載せているので、興味が有れば各自で検索を書けて欲しい。

### 2.1 太陽ニュートリノ

太陽というのは巨大な核融合炉で、端的に言って



という過程でニュートリノを生産している。ニュートリノは相互作用が弱いため、この反応で作られるニュートリノを観測することで太陽内部を観測できるというのがこの観測の要点である。ニュートリノ振動という観点からすると $\nu_e \rightarrow \nu_e$ という振動を測ることに対応する。

ところがDavisらによる太陽から来るニュートリノの観測の結果、どうも期待値より少ないと言いうことになった。これを太陽ニュートリノ欠損（問題）という。その後Kamiokande/SuperKamiokandeやガリウムを使った観測を通して、ニュートリノは質量を持っていてその結果として電子ニュートリノは他の種類のニュートリノに振動しているとすると結果が良く合うということが分かった。そして最後はSNOによる中性カレントの観測結果、ニュートリノ振動で間違いない、それもニュートリノが三種類有るとした振動で間違いない、という結論になった。

振動のパラメタとしては、主に  $\sin \theta_{12}$  と  $\Delta m_{21}^2$  に依っていて、後述の Kamland 実験と併せて、非常に良く決まっている。

## 2.2 大気ニュートリノ

大気上空で宇宙線（主に陽子線）が大気と衝突することで多くのニュートリノは作られている。たとえば

$$p + N \rightarrow \pi^+ + X \quad (7)$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (8)$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \quad (9)$$

という反応によってニュートリノが作られている。ニュートリノ振動という観点からすると、 $\nu_e \rightarrow \nu_e, \nu_e \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  という観測を行っていることに対応する。ニュートリノは、核子崩壊観測の背景事象の要因となるので、それを良く理解したいということで Kamiokande で観測されていたが、上記の生成過程からおおよそ  $\nu_\mu : \nu_e = 2 : 1$  が期待されるにもかかわらず、 $\nu_\mu$  の量が少ないということが分かった。これを大気ニュートリノ異常という。その後 SuperKamiokande による詳細な観測の結果、やはり、この現象もニュートリノ振動で理解できることが分かった。

振動のパラメタとしては、主に  $\sin \theta_{23}$  と  $\Delta m_{31}^2$  に依っていて、後述の長基線実験と併せて、非常に良く決まっている。なお、太陽ニュートリノ欠損と大気ニュートリノを同時にニュートリノ振動で説明するためには  $|\Delta m_{31}^2| \gg \Delta m_{21}^2$  が必要であるため  $|\Delta m_{31}^2| \sim |\Delta m_{32}^2|$  が成立する。

## 2.3 原子炉ニュートリノ

原子炉で生成されるニュートリノの観測はライネスとコーワンによるニュートリノの発見のための実験以降長い歴史を持つが、ニュートリノ振動という意味では Kamland 実験とそれ以外（現在は double chooz、Daya Bay、Reno）の二種類に分かれる。ただし、どちらも振動実験という意味では  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  を測っていることに相当する。

### 2.3.1 Kamland

大雑把に言えば、神岡鉱山に接地された検出器で 180km 離れた新潟県柏崎に存在する原子炉ニュートリノを観測する実験である。原子炉から出てくるニュートリノのエネルギーは数 MeV であることから太陽ニュートリノ欠損を説明するパラメタを追試できることが分かる。その結果は確かに太陽ニュートリノを説明するパラメタと一致した。

### 2.3.2 いわゆる原子炉ニュートリノ

ここまでの測定では  $\sin \theta_{13}$  は決まらないが、これを決めるのが原子炉から出てくるニュートリノの観測である。観測そのものは Kamland 実験と同じであるが、原子炉のすぐそば (100m ~ 1 k

m)に検出器を置くので質量差としては大気ニュートリノと同じところに感度があり、ただし原子炉ニュートリノは電子ニュートリノであるので混合角としては  $\sin \theta_{13}$  に感度を持つ。現在では上述の3実験が結果を出していてそれぞれがお互いに無矛盾で、有意な大きさの混合角であることを見出した。

## 2.4 長基線実験

元々は大気ニュートリノを振動で説明できているかを確認する実験であり、主に  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$  を測る K2K, T2K, MINOS, Nova という実験と、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  を測る OPERA という実験に大別できる。パラメタへの感度という意味では、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  は大気ニュートリノを説明パラメタに対して感度があり、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  はいわゆる原子炉ニュートリノの観測と同じパラメタに加えここまで議論しなかった CP を破る位相である  $\delta$  に感度がある。

結果は当然のことながら、大気ニュートリノを説明するパラメタと無矛盾である。また、いわゆる原子炉ニュートリノが感度を持つパラメタに加え  $\delta$  にも感度があるので、両者の結果を合わせて CP の破れについても議論できるようになってきている。

## 2.5 その他

Superkamiokande では、間接的に  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  の観測も行っており、これと他の観測も整合している。

## 3 まとめ

標準理論では質量を持たないとされているニュートリノは、様々な観測実験を通して質量を持ち、その結果としてレプトンは混合していることが分かってきた。現状では、質量の絶対値と CP を破る位相については分かっていないが、これらを測る努力もされている。

また、ニュートリノは荷電レプトンと SU(2) の対を作ることから、ニュートリノにおいてフレーバーの破れが観測されているので、荷電レプトンにおいても同様の破れが観測できると期待されている。

これらの結果から、標準模型には変更が必要なことが分かり、その変更をどのように行うか理論的研究も進んでいるし、またそれらが巡り巡ってニュートリノ振動にどのような影響を与えるのかについても研究されている。

このように、ニュートリノに関連して研究すべきことがたくさん残されており今後の発展が楽しみな分野である。

## References

- [1] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [2] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978).

- [3] S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985) [*Yad. Fiz.* **42**, 1441 (1985)].
- [4] D. V. Forero, M. Tortola and J. W. F. Valle, *Phys. Rev. D* **90**, no. 9, 093006 (2014)

# 長寿命スタウ

山中 真人

京都産業大学益川塾

## 1 導入

LHC 実験において標準模型を超える物理の探索が行なわれている。2016 年、その候補の 1 つである超対称性模型の兆候と思しきものが報告された (例えば [1] などを参照)。様々な解析の結果、およそ 2TeV の質量を持つグルーイノが生成されたと考えられている。本講演では、この報告を信じ切って話を進める。さらに、数ある超対称性模型シナリオのうち、パラメーターの数が最も限られる Constrained Minimal Supersymmetric Standard Model (CMSSM) が実現していると信じ切る。そのうえで、観測されるべき特徴的な粒子は何か。そして、その粒子を検出する際に注目すべき兆候はどういったものか考えていく。

CMSSM における超対称粒子の質量スペクトラムは次の 2 点が特徴となる [2]: (1) 最も軽い超対称粒子 (Lightest Supersymmetric Particle; LSP) はビーノを主成分に持つニュートラリーノ (2) 最も軽いニュートラリーノとグルーイノとの質量比はおよそ 1 : 6。これを上述の実験報告を結びつけると、およそ 350GeV ほどの LSP ニュートラリーノが期待される。

LSP ニュートラリーノは暗黒物質として働く。その残存量を観測と無矛盾にもたらすため、共対消滅と呼ばれる機構が必要となる [3]。この機構は 2 番目に軽い超対称粒子 (Next LSP; NLSP) がニュートラリーノ暗黒物質とほぼ縮退した質量を持つことを要請する。CMSSM ではスタウが NLSP となる。縮退質量により、ニュートラリーノの対消滅に加え、スタウ-ニュートラリーノ、そして、スタウの対消滅が超対称粒子の数密度を減らす方向に働き、結果として、残存量を観測と無矛盾なものにする。

CMSSM のパラメーター領域において、暗黒物質の残存量、ヒッグス粒子の質量、そして、ミューオン  $g-2$  のアノマリーの説明といった制限を課していくと、NLSP スタウと LSP ニュートラリーノの質量差がタウレプトン質量よりも小さくなるパラメーター領域 ( $\delta m \equiv m_{\tilde{\tau}} - m_{\tilde{\chi}_1^0} < m_{\tau}$ ) が支持される [4, 5]。この領域では、NLSP スタウが 2 体崩壊できなくなることにより、マイクロ秒を超える寿命を持つ粒子となる (図 1 参照) [6]。つまり、CMSSM において観測されるべき特徴的な粒子はこの長寿命荷電粒子スタウとなる。

SUSY 模型では、スレプトンが世代混合を持つ可能性がある。NLSP スタウが世代混合を持つか否かに応じ、加速器で期待される兆候も大きく異なる。仮に世代混合が無くとも、スタウが持つ電荷が正か負かに応じ、質的に全く異なるシグナルが予測される。本講演では、世代混合が入ったシナリオ、入らないシナリオそれぞれにおいて、長寿命スタウがもたらす兆候を紹介し、その兆候を基に探れるスタウの特徴や模型のパラメーターを議論する。

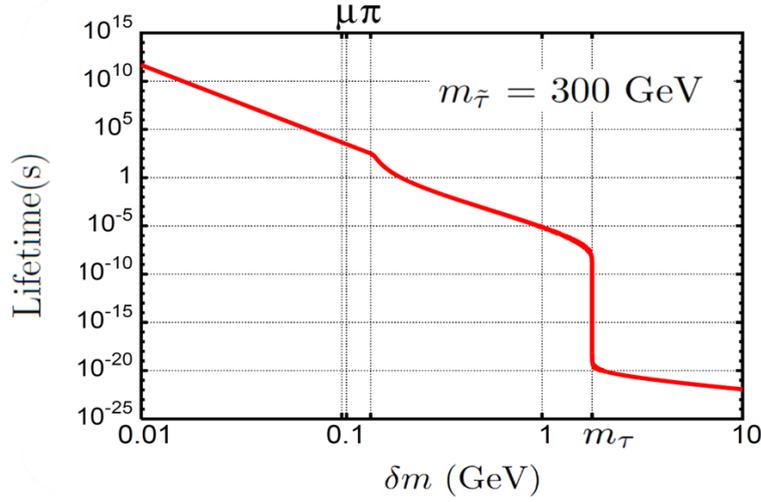


Figure 1: NLSP スタウの寿命。横軸  $\delta m$  は NLSP スタウと LSP ニュートラリーノの質量差。

## 2 レプトンフレーバーが保存するシナリオ

ここでは、スレプトンの世代混合が無いシナリオにおける長寿命スタウの兆候について議論する。数々の先行研究において、電荷の正負によらず、生成されたスタウは荷電飛跡を残し検出器内を突き抜ける、または、荷電飛跡を残したのちに検出器内で止まり、3体・4体崩壊によりパイオンや電子をシグナルとしてもたらすと考えられてきた (例えば [7] など)。正電荷スタウに関してはこの予測が正しいと思われる。娘粒子を検出することで、スタウや LSP ニュートラリーノの情報を得ることができる。しかし、負電荷スタウについては、ことはそう単純ではない。

負電荷スタウ  $\tilde{\tau}^-$  は検出器内で止まると同時に原子核  $N$  と束縛状態 ( $N\tilde{\tau}^-$ ) を形成する。電子捕獲反応と同様の機構により、この束縛状態において核種変換反応 ( $N\tilde{\tau}^- \rightarrow N' + \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau$ ) や原子核破砕反応 ( $N\tilde{\tau}^- \rightarrow N'' + N''' + \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau$ ) が起こる。ここで  $N'$ 、 $N''$ 、 $N'''$  は  $N$  とは異なる原子核、そして、 $\tilde{\chi}_1^0$  は LSP ニュートラリーノを表す。これらの反応率はスタウ崩壊率に比べかなり大きい [8, 9, 10]。つまり、負電荷スタウの痕跡として期待されるものは「大きなミッシングエネルギーへ転換する荷電飛跡」という特殊なものとなる。粒子特定やパラメーターの決定のために注目すべきシグナルは何か、また、そのためにどういった検出器が適しているかなどを検討しなくてはならない。これについては現在進行中である。

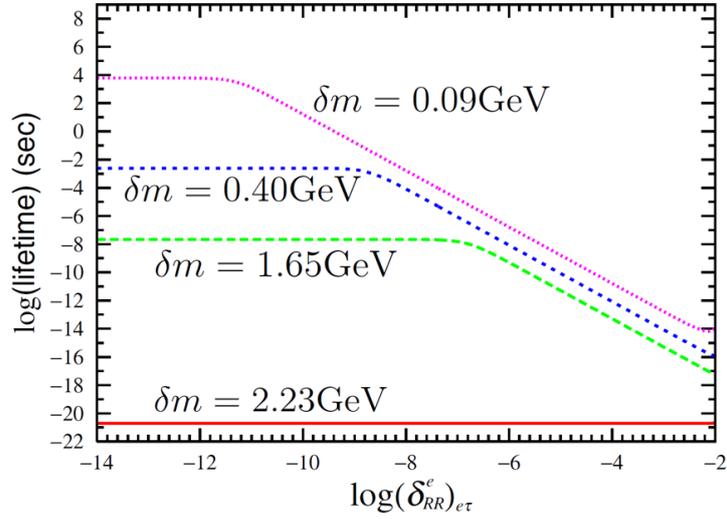


Figure 2: スタウとスエレクトロンの混合度合  $(\delta_{RR}^e)_{e\tau}$  の関数として描いたスタウの寿命。各線はスタウとニュートラリーノの質量差の違いに対応している。

### 3 レプトンフレーバーの破れを伴うシナリオ

次に、スレプトン世代混合が入ったシナリオにおいて長寿命スタウの兆候を議論する。このシナリオでは、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tau \tilde{\chi}_1^0$  の2体崩壊が動学的に許されていなくとも、世代混合を通じ、 $\tilde{\tau} \rightarrow e \tilde{\chi}_1^0$ 、 $\tilde{\tau} \rightarrow \mu \tilde{\chi}_1^0$  の2体崩壊が開く。これらの世代混合崩壊率はスタウ  $\tilde{\tau}_R$  と他のスレプトン  $\tilde{l}_{\alpha R}$  との混合度合  $(\delta_{RR})_{\alpha\tau}$  の2乗に比例する。それゆえ、スタウの寿命、及び、スタウとニュートラリーノの質量差  $\delta m$  を測定することで、世代混合の度合を決めることができる [11]。世代混合の度合を決めることで、スレプトンの質量行列、そして、その構造をもたらす超対称性の破れに関して探りを入れることが可能となる。

図2は混合度合  $(\delta_{RR})_{e\tau}$  の関数としてスタウの寿命をプロットしたものである。スタウとニュートラリーノの質量差に応じ、4つのケースを示した。  $\delta m = 2.23$  GeV の場合、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tau \tilde{\chi}_1^0$  の2体崩壊が圧倒的に優勢となる。そのため、この場合は  $(\delta_{RR})_{e\tau}$  と寿命は相関を持たない。  $\delta m = 1.65$  GeV、0.40 GeV、0.09 GeV の場合、スタウは4つの崩壊モードを持つ： $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \pi$ 、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$ 、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau e \bar{\nu}_e$ 、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 e$ 。それぞれの線が示すように、スタウの寿命と世代混合の度合はきれいな相関を持つ。娘粒子  $e$  や  $\mu$  の崩壊モードに依るスペクトル分布の違いを丁寧に調べ、異なるスペクトル構造を持つイベント数の比を計ることで、世代混合の度合を決めることができる。また、それぞれの質量差に応じ、ある混合度合を境に  $(\delta_{RR})_{e\tau}$  依存性が見えなくなる。これは、スレプトン混合が小さ過ぎるため、世代を保存する崩壊が優勢となるからである。こうなると、寿命は世代混合の測りとならない。

## 4 まとめ

2016年、LHC実験の新粒子探索において $\sim 2\text{ TeV}$ のグルーイノが見え始めたかもしれないという報告がしばしば聞こえる。数ある超対称模型シナリオの中で最も有力視されるCMSSMに注目すると、長寿命を持つスタウの発見が期待される。スタウが世代混合を持つか否かに応じ、また、スタウの電荷が正か負かに応じ、長寿命スタウがもたらすシグナルは大きく異なる。世代混合が無い場合、正電荷を持つスタウは荷電トラック、及び、自身の崩壊により低エネルギーの正電荷電子(ミュオン)を残す。負電荷のスタウは荷電トラックを残したのち、原子核と束縛状態を作り、その後、核種変換によりミッシングエネルギーのみをシグナルとしてもたらす。つまり、世代混合が無い場合、低エネルギーの正電荷レプトンとミッシングエネルギーが特徴的兆候となる。一方、スタウが世代混合を持つ場合、その混合度合に応じスタウの寿命、及び、期待されるシグナルは大きく変動する。混合を通じて起こる電子(ミュオン)への崩壊を丁寧に観測することで、世代混合の度合、ひいては、超対称性の破れに関わる情報を得ることができる。スタウが世代混合を持つにせよ、持たないにせよ、長寿命荷電粒子の飛跡が将来見つかった場合は、長寿命化の理由や世代混合の有無に応じ、検出手段・解析方法を丁寧にアレンジする必要があるだろう。

## References

- [1] <https://www.cc.kyoto-su.ac.jp/project/MISC/menu/symposium/2016/slide/Jinnouchi.pdf>
- [2] S. P. Martin, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **21** (2010) 1.
- [3] K. Griest and D. Seckel, Phys. Rev. D **43** (1991) 3191.
- [4] L. Aparicio, D. G. Cerdeno and L. E. Ibanez, JHEP **1204** (2012) 126.
- [5] N. Desai, J. Ellis, F. Luo and J. Marrouche, Phys. Rev. D **90** (2014) no.5, 055031.
- [6] T. Jittoh, J. Sato, T. Shimomura and M. Yamanaka, Phys. Rev. D **73** (2006) 055009.
- [7] K. Hamaguchi, Y. Kuno, T. Nakaya and M. M. Nojiri, Phys. Rev. D **70** (2004) 115007.
- [8] T. Jittoh, K. Kohri, M. Koike, J. Sato, T. Shimomura and M. Yamanaka, Phys. Rev. D **76** (2007) 125023.
- [9] C. Bird, K. Koopmans and M. Pospelov, Phys. Rev. D **78** (2008) 083010.
- [10] T. Jittoh, K. Kohri, M. Koike, J. Sato, K. Sugai, M. Yamanaka and K. Yazaki, Phys. Rev. D **84** (2011) 035008.
- [11] S. Kaneko, J. Sato, T. Shimomura, O. Vives and M. Yamanaka, Phys. Rev. D **78** (2008) no.11, 116013.

# Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building

山津 直樹

京都産業大学益川塾

## 1 はじめに

有限次元リー代数の必要性を今更説明するまでもないと思いますが，素粒子標準理論を越える統一理論構築への試みで現れる対称性として，クォークやレプトンの世代を統一する世代対称性，標準理論のゲージ対称性の統一やクォークとレプトンを統一する大統一ゲージ対称性，フェルミオンとボソンを統一する超対称性，四次元のゲージとスカラーボソンを統一する高次元時空対称性は，基本的に有限次元リー代数（とその拡張）になっていますので最低限有限次元リー代数の知識がないと理解できませんし，対称性を用いた統一理論構築の基本的なアプローチを考えることができません．

大統一ゲージ対称性を考える動機はいくつかありますが，一例として，標準理論の物質場クォークとレプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目してみると，なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している，なぜか  $U(1)_Y$  の電荷が量子化されている，なぜか  $SU(3)_C$  と  $SU(2)_L$  の基本表現と自明な表現しかない，なぜか標準理論のゲージ群  $G_{SM} := SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  を  $SU(5)_{GUT}$  群に埋め込むとフェルミオンのゲージ群の表現を  $SU(5)$  の基本表現  $10$  と  $\bar{5}$  に埋め込めることなどが知られています．上記すべてが解決する分けではありませんが少なくとも一部は  $G_{SM}$  を  $G_{GUT}$  に埋め込むことにより自然に理解できるように見えます．

本講演では N. Yamatsu (以下 N.Y.) による統一理論構築のための有限次元リー代数の論文 [1] に何が書いてあるのかを R. Slansky による有名な大統一理論のレビュー [2] の内容と比較しながら解説したいと思います．また，有限次元のリー代数の同値類，表現の種類，ワイル次元公式，Dynkin ラベル，二次のカシミア，(二次の) Dynkin 指数，(四次元の) 量子異常数，射影行列，部分代数への表現分解など適用例を示したいと思います．

## 2 R. Slansky と N.Y. の論文の比較

R. Slansky の論文 [2] と N.Y. の論文 [1] の比較に入りたいと思います．

まずは，R. Slansky [2] の目的は，大統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論の基本的な情報を提供することと思われる．一方，N.Y. [1] の目的も基本的に同じなのですが R. Slansky の論文で想定されていなかった高次元時空を含めた大統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論の基本的な情報を提供することを想定しています．ただし，ユーザーからの要望があり一般的なゲージ理論の議論に最低限必要とされる単純リー代数の情報も提供しています．

R. Slansky の論文 [2] の内容の概観としては、当時は四次元での有限自由度系の大統一理論を考えていたため基本的に複素表現を含むリー代数を記載しています。一方、N.Y. の論文 [1] の目的の概観としては、現代的には高次元時空を含めた大統一理論構築を考えることがあるため複素表現を含まない有限次元リー代数も含めて記述しています。

具体的な内容比較を記載して行きたいと思います。以下では、R. Slansky [2] のリー代数の表の情報源である W.G. McKay, J. Patera の論文 [3] も含めて書きたいと思います

まず、有限次元リー代数の種類とランクについて、R. Slansky [2] では複素表現を含みかつランク 8 まで (例外あり)、W.G. McKay, J. Patera [3] では複素表現も含めてランク 8 まで、N.Y. [1] ではランク 15 まで ( $+D_{16} = \mathfrak{so}_{32}$ ) が記載されています。

有限次元リー代数の表現表について、R. Slansky [2] では Dynkin ラベル、次元、同値類、Dynkin 指数、部分代数の自明な表現の数 (例外あり)、N.Y. [1] では Dynkin ラベル、次元、二次のカシミア、Dynkin 指数、量子異常数、同値類、表現の種類、W.G. McKay, J. Patera [3] では Dynkin ラベル、次元、Dynkin 指数、四次の Dynkin 指数、表現の種類が記載されています。

部分代数分解に必要な射影行列について、R. Slansky [2] ではいくつかを W.G. McKay et al. [4] から転写しています。W.G. McKay, J. Patera [3] には具体的な行列の記載はなく W.G. McKay et al. [4] を参照とあります。N.Y. [1] ではランク 15 まで ( $+D_{16}$ ) の全ての最大部分代数分解を記載しています。この射影行列には標準部分リー代数だけでなく特殊部分リー代数も含まれています。

有限次元リー代数の最大部分リー代数への表現分解について、R. Slansky [2] では複素表現を含む代数 ( $+E_{7,8}, F_4$  など) とランク 6 までの 2,3 個の表現 (定義表現や随伴表現)、W.G. McKay, J. Patera [3] ではランク 8 以下のリー代数の全ての最大半単純リー代数を 5,000 次元以下 (例外数は 10,000 次元以下) まで、N.Y. [1] ではランク 15 以下のリー代数 ( $+D_{16}$ ) の全ての最大非半単純部分代数まで含めて最小 10 個程度が記載されています。表現分解について R.M. Fonseca による Susyno(2011) [5] (Mathematica プログラム) や R. Feger, T.W. Kephart による LieART(2012) [6] (Mathematica プログラム) などを用いることにより計算できますが必ずしも必要な射影行列が定義されていないため追加入力をする必要があります。上記で記載したとおり N.Y. [1] にランク 15 まで ( $+D_{16}$ ) の全ての最大部分代数分解を記載しています。

テンソル積について、R. Slansky [2] ではいくつか例が書いてあります。W.G. McKay, J. Patera [3] では計算方法が記載されています。N.Y. [1] では 8,9 個程度の表現について全て記載されています。テンソル積の計算は C プログラム (LiE(1992) [7] by Leeuwen-Cohen-Lisser) や Mathematica プログラム (Susyno(2011) [5] by R.M. Fonseca; LieART(2012) [6] by R. Feger, T.W. Kephart) などを使えば計算できます。

大統一ゲージ群の必要条件について、R. Slansky [2] では四次元ゲージ理論については書いてあります。W.G. McKay, J. Patera [3] は数学の書籍なので記載されていません。N.Y. [1] では高次元でのゲージ理論 (ゲージ・ヒッグス大統一理論を含む) についても書いてあります。

### 3 リー代数とその表現の適用例

ここでは標準理論や統一理論 (より広くゲージ理論) を考える際に有限次元リー代数の有限次元表現がどのような場合に必要となるか適用例を示したいと思います。詳しくは N.Y. [1] や参考文献 [3, 8–14]などを参照してください。

有限次元リー代数の有限次元既約表現は Dynkin ラベルにより指定されることが知られています。有限次元リー代数の有限次元既約表現の表現次元はワイル次元公式 [11, 12, 14] により求めることができることが知られています。通常表現次元は名前として使われています。次元以外に重要なものとして Dynkin 指数, 表現の種類, 量子異常数, 同値類, 最大部分代数, 射影行列などがあります。

以下で具体例を見ていきますが, ゲージ結合定数の繰り込み群方程式の計算には (二次の) Dynkin 指数, 四次元カイラルゲージ理論には表現の種類や量子異常数, 作用の不変量にはテンソル積, 対称性の破れには最大部分代数や射影行列などの情報が必要とされます。

#### 3.1 ゲージ結合定数の繰り込み群と Dynkin 指数

四次元の無次元ゲージ結合定数の繰り込み群方程式は 1-ループレベルで次のように与えられることが知られています [2]。

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta^{1\text{-loop}}(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(\mathfrak{g}) - \frac{2}{3} \sum_{\text{Weyl}} T(R_F) - \frac{1}{6} \sum_{\text{Real}} T(R_S) \right], \quad (1)$$

ただし, 各々の項はゲージ場, ワイルフェルミオン場, 実スカラー場からの寄与を表し,  $C_2(\mathfrak{g}) (= T(\mathfrak{g}))$  はゲージ群  $G$  の随伴表現の二次のカシミア,  $T(R)$  はゲージ群  $G$  の表現  $R$  の Dynkin 指数となっています。

Eq. (1) の繰り込み群方程式の一般解は簡単に解けますので, その解に Dynkin 指数と適当なスケールでの境界条件 (初期値) を入れてやればゲージ結合定数の振る舞いを見ることができます。具体的な使用例としては, 標準理論でのゲージ結合定数の振る舞いを見る場合に使います。

ここで重要なのはゲージ群の表現の Dynkin 指数を知ることです。いくつかのゲージ群については R. Slansky の論文 [2] を参照してもらえば書いてありますが, 例えば, 最近のゲージ・ヒッグス大統一理論 [15–19] では  $SO(11)$  を使用しています。  $SO(11)$  の表現表は N.Y. [1] の表 76 に掲載されています。以下はその表の一部になります。

$\mathfrak{so}_{11}$ irrep.	$d(R)$	$C_2(R)$	$T(R)$	$C_c(R)$	R/PR
(1, 0, 0, 0, 0)	<b>11</b>	5	1	0	R
(0, 0, 0, 0, 1)	<b>32</b>	$\frac{55}{8}$	4	1	PR
(0, 1, 0, 0, 0)	<b>55</b>	9	9	0	R
(2, 0, 0, 0, 0)	<b>65</b>	11	13	0	R

$SO(11)$  の Dynkin 指数などは R. Slansky [2] には全く掲載されていません．もちろん計算方法を知っていれば自分で計算することはできますが一般ユーザーは N.Y. [1] に掲載されている結果を見るのが適当かと思います．

### 3.2 四次元のカイラルゲージ理論

標準理論は四次元のカイラルゲージ理論となっていますので標準理論を越える統一理論は低エネルギー有効理論として四次元のカイラルゲージ理論にならなければなりません．四次元のカイラルゲージ理論とは、 $U(1)$ ,  $SU(n)(n \geq 3)$ ,  $SO(4n+2)(n \geq 2)$ ,  $E_6$  とそれらを直積として構成要素を持つゲージ群のセットだけであることが知られています [2]．

さらに、四次元カイラルゲージ理論にはリー代数の複素表現が必要とされますのでゲージ群の表現の種類 (自己共役と複素表現) [3] を知る必要があります．以下に複素表現が存在する代数のタイプとその判定条件 (Dynkin ラベル) をまとめています．

Algebra	Rank	Condition for a complex representation
$A_n = \mathfrak{su}_{n+1}$	$n \geq 2$	$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n) \neq (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)$
$D_{2n+1} = \mathfrak{so}_{4n+2}$	$n \geq 1$	$(a_1 \cdots a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1}) \neq (a_1 \cdots a_{2n-1} a_{2n+1} a_{2n})$
$E_6$	6	$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \neq (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_6)$

複素表現以外は自己共役表現があり、その表現は実表現と擬実表現に分類されます．実表現と擬実表現の違いは部分代数分解などには重要な概念ですが四次元理論の範囲でカイラルゲージ理論を構成するという意味ではその違いは重要ではありません．ただし、擬実表現を含む代数を用いる場合には大域的な量子異常 [20–23] が存在する場合があることが知られていますので注意が必要な場合があります．

### 3.3 四次元の量子異常数

半単純リー群  $G$  に基づく四次元ゲージ理論において量子異常がありえるのは  $G = SU(n)(= A_{n-1})$  だけであることが知られています [24, 25]．そのため、四次元ゲージ理論では  $SU(n)$  ゲージ群の場合だけ量子異常を議論すれば問題ありません．

四次元の  $SU(n)$  の量子異常数は以下のように与えられることが知られています [24–26]．

$$\frac{A(R)}{d(R)} := \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ijk} (a_i + 1)(a_j + 1)(a_k + 1), \quad (3)$$

ただし、 $A(R)$  は  $SU(n)$  群の表現  $R$  の量子異常数で、 $d(R)$  は  $SU(n)$  群の表現  $R$  の次元、 $a_{ijk}$  は完全対称テンソルとなっています．量子異常数の具体的な値は N.Y. [1] の表 59-73 に掲載されています．

量子異常のないまともなゲージ理論は量子異常が相殺された理論となりますので、以下の条件を満たす必要があります。

$$A^{\text{total}} := \sum_{R_i \in \text{Left}} A(R_i) - \sum_{R_i \in \text{Right}} A(R_i) = 0. \quad (4)$$

四次元の量子異常のない  $SU(n)$  カイラルゲージ理論の例としては  $SU(5)$  ( $10 \oplus \bar{5}$ ) 表現を持つ左巻きのワイルフェルミオン,  $SU(6)$  ( $15 \oplus \bar{6} \oplus \bar{6}$ ) 表現を持つ左巻きのワイルフェルミオン,  $SU(6)$  ( $35 \oplus 2\bar{1} \oplus 7$ ) 表現を持つ左巻きのワイルフェルミオンなどがあります。これらは上記の一般公式または N.Y. [1] の表に与えられている量子異常数の足し上げを行うことで容易に確かめることができます。

### 3.4 ゲージ変換の不変量

ゲージ不変な作用を書き下すにはゲージ変換の下での不変量を知っている必要があります。これにはすくなくともテンソル積の計算結果の情報が必要になります。テンソル積の結果は N.Y. [1] の表 777-836 までにランク 15 までの古典代数 (と  $D_{16}$ ) と例外代数のすべてがすくなくとも 10 程度の組み合わせすべてについて掲載されています。(テンソル積の手計算で行える計算手法の解説は R. Cahn [11] や N.Y. [1] にありますが、一般ユーザーに最も重要なのは計算結果なのでここでは省略します。)

具体例として、 $SO(11)$  変換の不変量は以下のようなテンソル積に含まれています。

$$11 \otimes 11, 11 \otimes 11 \otimes 55, 32 \otimes 32, 32 \otimes 32 \otimes 55, 55 \otimes 55, \dots \quad (5)$$

このことは N.Y. [1] の表 794 の  $SO(11)$  テンソル積の表を見るとわかります。以下はその表の一部になります。

$\mathfrak{so}_{11}$ tensor products	
$11 \otimes 11$	$= (65) \oplus (55) \oplus (1)$
$32 \otimes 11$	$= (320) \oplus (32)$
$32 \otimes 32$	$= (462) \oplus (330) \oplus (165) \oplus (55) \oplus (11) \oplus (1)$
$55 \otimes 11$	$= (429) \oplus (165) \oplus (11)$
$55 \otimes 32$	$= (1408) \oplus (320) \oplus (32)$
$55 \otimes 55$	$= (1144) \oplus (1430) \oplus (330) \oplus (65) \oplus (55) \oplus (1)$

### 3.5 単純リー群とその部分リー群

標準理論での電弱ゲージ対称性  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  の電磁対称性  $U(1)_{\text{EM}}$  への破れや、標準理論を越える統一理論を考える上で標準理論のゲージ群  $G_{\text{SM}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  を含む大統一ゲージ群  $G_{\text{GUT}}$  を考える際に単純リー群とその部分リー群の知識が必要となります。単純リー代数とその最大部分代数は N.Y. [1] の表 7 にランク 16 まで掲載されています。

具体例として, Y. Hosotani, N.Y. [15] で議論された五次元の  $SO(11)$  ゲージ・ヒッグス大統一理論における  $SO(11)$  ゲージ対称性の破れのパターンを以下に示しています.

$$\begin{aligned}
SO(11) &\xrightarrow{BC} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases} \\
&=_{BC} SO(4) \times SO(6) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C =: G_{PS} \\
&\xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y = G_{SM} \quad \text{ブレーンスカラーの VEV} \\
&\xrightarrow{\theta_H} SU(3)_C \times U(1)_{EM} \quad (\text{細谷機構}) [27] \tag{6}
\end{aligned}$$

この例の場合には  $SO(11)$  ゲージ対称性がオービフォルド境界条件と呼ばれるものによって Pati-Salam 群  $G_{PS}$  [28] に破れ, かつ, 境界での  $SO(10)$  の適当な表現 (この場合にはスピノル表現の) スカラーの非自明な真空により標準理論のゲージ群  $G_{SM}$  まで破れています. さらに, 余剰次元理論で知られている細谷機構 [27] により電磁対称性まで対称性が落ちています.

実際にこれまでに良く知られていない対称性の破れを考えるには自分で上記のような破れのパターンを自分で見つける必要がありますので上記の例を使ってどのように破れのパターンを見つけるかを説明します.

まず,  $SO(11)$  はランク 5 の  $B$ -タイプ  $B_5$  でかつランク 5 の  $D$ -タイプ  $D_5$  を含みますので N.Y. [1] の表 7 のランク 5 の  $B_5$  と  $D_5$  の最大部分代数を見てみると以下のようになっています.

Rank	Algebra $\mathfrak{g}$	Maximal subalgebras $\mathfrak{h}$	Type
5	$\mathfrak{so}_{11}$	$\mathfrak{so}_{10}; \mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{su}_2; \mathfrak{su}_4 \oplus \mathfrak{usp}_4; \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_7; \mathfrak{so}_9 \oplus \mathfrak{u}_1$	(R)
		$\mathfrak{su}_2$	(S)
	$\mathfrak{so}_{10}$	$\mathfrak{su}_5 \oplus \mathfrak{u}_1; \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_4; \mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{u}_1$	(R)
		$\mathfrak{usp}_4; \mathfrak{so}_9; \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_7; \mathfrak{usp}_4 \oplus \mathfrak{usp}_4$	(S)

標準部分代数の場合には (拡大)Dynkin 図を用いる容易に確認することもできます. 上記の部分代数を見つけるには一般に元のリー代数の表現から部分代数への表現分解を知る必要がありますが説明は省略します. 文献 [1, 9–11] などを参照してください.

さらに, 上記のブレーンスカラーの真空期待値により  $G_{PS}$  が  $G_{SM}$  に破れるにはリー代数のどの表現が必要かということはその部分代数への表現分解を見ることにより知ることができます. 説明は省略しますので必要であれば N.Y. [1] などを確認してください.

### 3.6 射影行列と表現分解

大統一ゲージ対称性から標準理論のゲージ対称性への破れと言っただけでは標準理論のクォークやレプトンが大統一ゲージ群のどの表現に属しているのか, また, どのようなエキゾチックな粒子が存在するのかがわかりません. そのため, 対称性の破れを考えるためには元のリー代数の表現から部分代数の表現との対応関係を知らなければなりません. その基本的な手法が射影行列を用いた方法になります [4].

ランク 8 以下の半単純リー代数から最大半単純部分代数の射影行列は W.G. McKay et al. [4] に与えられていますが，統一理論を考える際には非半単純リー代数  $U(1)$  の電荷を知らなければなりません．ランク 15 以下の半単純リー代数 (と  $D_{16}$ ) に関する最大非半単純部分代数は N.Y. [1] の表 167-226 に具体的な射影行列が与えられています．また，非最大部分代数への射影行列は最大部分代数の射影行列の積を取ることで得られます．

リー代数とその部分代数への表現分解の例として， $\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$  とそれに対応する Dynkin 図，射影行列と表現分解を書いておきます． $\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$  を (拡大)Dynkin 図で表すと以下のように書くことができます．

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \diagdown \\ \circ \\ x \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ 5 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \diagdown \\ \circ \\ x \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ 5 \end{array} \\
 & & \mathfrak{so}_{11} & & & & & & \mathfrak{so}_{10} & & & (7)
 \end{array}$$

対応する射影行列は例えば表現分解  $11 = 10 \oplus 1$  などのウェイトダイアグラムの各々のウェイトの対応関係を用いることで得られます．

$$P_{\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

上記の射影行列以外の  $\mathfrak{so}_{11}$  の最大部分代数への射影行列は N.Y. [1] の表 184 に掲載されています．

上記の  $\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$  の射影行列を用いることで対応する表現分解を求めることができます．原理的にはウェイトダイアグラム等を用いて手計算をすることも可能ではありますが現実的には Susyno [5] や LieART [6] 等のプログラムを用いるのが良いと思います．詳しくは N.Y. [1] の解説などを参考にしてください．以下に N.Y. [1] の表 341 に掲載されている計算結果の一部を書いておきます．

$\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$ branching rules
$11 = 10 \oplus 1$
$32 = \overline{16} \oplus 16$
$55 = 45 \oplus 10$
$65 = 54 \oplus 10 \oplus 1$
$165 = 120 \oplus 45$

(8)

## 4 まとめ

N.Y. による有限次元リー代数の論文 [1] と R. Slansky による有名な大統一理論の論文 [2] との違いは何かということをいくつかの例を使って説明しました．また，使い方を説明するためにそ

の適用例を示しました。

今回全く説明していませんが N.Y. [1] では、四次元ゲージ理論でも使用可能なランク 4 と 5 の群  $SU(5)$ ,  $SU(6)$ ,  $SO(10)$  だけでなく、これまでほとんど知られていない余剰次元でのゲージ理論において使用可能な  $SO(9)$ ,  $USp(8)$ ,  $F_4$ ,  $SO(11)$ ,  $USp(10)$  を用いた大統一理論でのクォークやレプトンの埋め込みなども議論しています。その他の文献では全く記載がないものが多数ありますので、余剰次元理論での模型構築を行う場合には特に重要な情報源となると思われます。

また、これまでの大統一理論での模型構築には対称性の破れとしてほぼ標準部分代数だけが使われていますので、特殊部分代数を用いた模型構築は興味深いかもしれません。具体例として、 $SO(32)$  ヘテロ型超弦理論のように非常に大きなランクの代数が考えられる場合があります。この場合に標準部分代数を用いると余分な  $U(1)$  部分代数が大量に現れますが、特殊部分代数を用いるとほとんどの  $U(1)$  部分代数は破れます。特に  $SO(32) \supset SO(10) \times U(1)$  では、 $SO(32)$  のベクトル表現  $32$  が  $SO(10)$  のスピノル表現  $16 \oplus \bar{16}$  に表現分解されるという性質があります。

実際のところ N.Y. [1] に掲載されている古典代数  $A_n, B_n, C_n, D_n$  と例外代数  $E_n, F_4, G_2$  の全ての表現、射影行列、表現分解、テンソル積の表を必要とする方はおそらくいないと思いますが、良く知られた模型以外を考えようとする場合等ではしばしば通常の論文や書籍では扱われていない情報が必要になることもあると思います。そのような場合に自分の知りたい情報部分だけを見ただけであれば良いかと思えます。

その他、有限次元リー代数を用いたゲージ理論では通常有限次元表現のみが議論されています。そのため、N.Y. [1] では有限次元リー代数の有限次元表現のみを記載していますので、K. Inoue により提唱された有限次元リー代数の無限次元表現を用いた世代対称性の模型 [29–35] を議論するために必要な情報は掲載されていません。さらに、無限次元リー代数 [36, 37] についての議論はありません。

## References

- [1] N. Yamatsu, “Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building,” arXiv:1511.08771 [hep-ph].
- [2] R. Slansky, “Group Theory for Unified Model Building,” *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.
- [3] W. G. McKay and J. Patera, *Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.
- [4] W. McKay, J. Patera, and D. Sankoff, *The Computation of Branching Rules for Representations of Semisimple Lie Algebras*. New York Academic Press, 1977. in “Computers in Nonassociative Rings and Algebras” edited by R. E. Beck and B. Kolman.
- [5] R. M. Fonseca, “Calculating the Renormalisation Group Equations of a SUSY Model with Susyno,” *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012) 2298–2306, arXiv:1106.5016 [hep-ph].
- [6] R. Feger and T. W. Kephart, “LieART - A Mathematica Application for Lie Algebras and Representation Theory,” *Comput.Phys.Commun.* **192** (2015) 166–195, arXiv:1206.6379 [math-ph].

- [7] M. A. A. van Leeuwen, A. M. Cohen, and B. Lissner, *LiE, A Package for Lie Group Computations*. Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1992.
- [8] E. Dynkin, “The Structure of Semi-Simple Lie Algebra,” *Trans.Am.Math.Soc.* **1** (1950) 1.
- [9] E. Dynkin, “Maximal Subgroups of the Classical Groups,” *Trans.Am.Math.Soc.* **6** (1957) 245.
- [10] E. Dynkin, “Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras,” *Trans.Am.Math.Soc.* **6** (1957) 111.
- [11] R. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their representations*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.
- [12] H. Weyl, *The Classical Groups -Their Invariants and Representations-*. Princeton University Press, 1946.
- [13] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.
- [14] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*. Springer, 1991.
- [15] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, [arXiv:1504.03817](https://arxiv.org/abs/1504.03817) [hep-ph].
- [16] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *PoS PLANCK2015* (2015) 058, [arXiv:1511.01674](https://arxiv.org/abs/1511.01674) [hep-ph].
- [17] N. Yamatsu, “Gauge Coupling Unification in Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 043B02, [arXiv:1512.05559](https://arxiv.org/abs/1512.05559) [hep-ph].
- [18] A. Furui, Y. Hosotani, and N. Yamatsu, “Toward Realistic Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 093B01, [arXiv:1606.07222](https://arxiv.org/abs/1606.07222) [hep-ph].
- [19] Y. Hosotani, “Gauge-Higgs EW and Grand Unification,” 2016. [arXiv:1606.08108](https://arxiv.org/abs/1606.08108) [hep-ph]. <http://inspirehep.net/record/1472339/files/arXiv:1606.08108.pdf>.
- [20] E. Witten, “An SU(2) Anomaly,” *Phys.Lett.* **B117** (1982) 324–328.
- [21] C.-q. Geng, R. Marshak, Z.-y. Zhao, and S. Okubo, “Relation Between Triangular and Witten SU(2) Anomaly Cancellation for Gauge Groups,” *Phys.Rev.* **D36** (1987) 1953.
- [22] S. Okubo, C.-q. Geng, R. Marshak, and Z.-y. Zhao, “Conditions for Absence of Global SU(2) Anomaly for Four-dimensional Gauge Groups,” *Phys.Rev.* **D36** (1987) 3268.
- [23] S. Okubo and Y. Tosa, “Further Study of Global Gauge Anomalies of Simple Groups,” *Phys.Rev.* **D40** (1989) 1925.
- [24] S. Okubo, “Gauge Groups Without Triangular Anomaly,” *Phys.Rev.* **D16** (1977) 3528.
- [25] J. Patera and R. T. Sharp, “On the Triangle Anomaly Number of SU(n) Representations,” *J. Math. Phys.* **22** (1981) 2352.
- [26] J. Banks and H. Georgi, “Comment on Gauge Theories Without Anomalies,” *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1159–1160.

- [27] Y. Hosotani, “Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions,” *Phys.Lett.* **B126** (1983) 309.
- [28] J. C. Pati and A. Salam, “Lepton Number as the Fourth Color,” *Phys. Rev.* **D10** (1974) 275–289.
- [29] K. Inoue, “Generations of Quarks and Leptons from Noncompact Horizontal Symmetry,” *Prog. Theor. Phys.* **93** (1995) 403–416, [arXiv:hep-ph/9410220](#).
- [30] K. Inoue, “Model of Generations of Quarks and Leptons,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **123** (1996) 319–326.
- [31] K. Inoue and N. Yamatsu, “Charged Lepton and Down-Type Quark Masses in  $SU(1, 1)$  Model and the Structure of Higgs Sector,” *Prog. Theor. Phys.* **119** (2008) 775–796, [arXiv:0712.2938 \[hep-ph\]](#).
- [32] K. Inoue and N. Yamatsu, “Strong CP Problem and the Natural Hierarchy of Yukawa Couplings,” *Prog. Theor. Phys.* **120** (2008) 1065–1091, [arXiv:0806.0213 \[hep-ph\]](#).
- [33] K. Inoue, H. Kubo, and N. Yamatsu, “Vacuum Structures of Supersymmetric Noncompact Gauge Theory,” *Nucl. Phys.* **B833** (2010) 108–132, [arXiv:0909.4670 \[hep-th\]](#).
- [34] N. Yamatsu, “New Mixing Structures of Chiral Generations in a Model with Noncompact Horizontal Symmetry,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013** (2013) 023B03, [arXiv:1209.6318 \[hep-ph\]](#).
- [35] N. Yamatsu, “A Supersymmetric Grand Unified Model with Noncompact Horizontal Symmetry,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013** (2013) 123B01, [arXiv:1304.5215 \[hep-ph\]](#).
- [36] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*. Cambridge University Press, 1983.
- [37] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1992.

# 有質量粒子のツイスター模型における非斉次変換

出口 真一<sup>1</sup>

日本大学理工学部 量子科学研究所

## 1 導入

ツイスター理論において有質量粒子を記述する試みは、約40年前に Penrose, Perjés, Hughston により独立に行われた [1-6]. そこでは有質量粒子を扱うために2個以上のツイスターが導入されるが、それに伴って有質量粒子系にはツイスター間に成立する新たな対称性が現れる. Penrose らは、この対称性を素粒子の内部対称性に同一視することを提案した. しかし、彼らの提案に関しては力学的な視点からの考察がなされておらず、検討すべき事柄が多く残されている.

一方、ツイスターで表される有質量粒子の作用積分を与え、それに基づきスピンをもつ有質量粒子の古典および量子力学を定式化する試みが、2000年代初頭から最近に至るまで行われている [7-15]. しかし、これまでの研究で与えられた作用積分にはツイスターに関する拘束条件が人為的に付加されており、満足なものとは言い難い. この点を改善するように、有質量粒子の作用積分にツイスターに関する適切な拘束条件を系統的に取り入れることは、重要な課題の1つである.

このような状況において、最近著者は文献 [16] で「有質量粒子のゲージ化されたツイスター模型」を提唱し、質量殻条件以外の必要な拘束条件をゲージ対称性に基づいて系統的に取り入れることに成功した. しかしながら、文献 [16] においても質量殻条件は依然として人為的に付加されている. 本研究ではこの点に注目し、実際には質量殻条件もあるゲージ対称性に基づいて取り入れられることを示す.

## 2 有質量粒子のゲージ化されたツイスター模型

Penrose, Perjés, Hughston は有質量粒子を記述するために2つ以上のツイスターを導入したが [1-6], 最近文献 [17] で証明されたように、実際には3つ以上のツイスターを用いた記述は、ユニタリー変換により2つのツイスターを用いた記述に帰着する. 本研究ではこのことを考慮に入れて、添え字  $i$  で区別される2つのツイスター  $Z_i^A$  ( $A = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2$ ) とそれらに双対なツイスター  $\bar{Z}_A^i$  を導入する. また、本研究ではスピンを持つ粒子を記述するために等質空間  $SU(2)/U(1)$  を導入し、2つのツイスター間の変換全体からなる群である  $SU(2)$  の非線形実現を考える. いま、等質空間  $SU(2)/U(1)$  上の1点の非斉次座標を  $\xi (\in \mathbb{C})$  とし、この座標で指定される左剰余類の代表元を  $V(\xi, \bar{\xi}) [\in SU(2)]$  とする. 代表元  $V$  の左から  $SU(2)$  の元  $U$  を作用すると、変換則  $V(\xi, \bar{\xi}) \rightarrow V(\xi', \bar{\xi}') = UV(\xi, \bar{\xi})e^{-i\vartheta\sigma_3}$  ( $\sigma_3$  は Pauli 行列の第3成分) から  $\xi$  の変換則  $\xi \rightarrow \xi'$  が決まる. ただし、 $\vartheta$  は  $\sigma_3$  で生成される  $U(1)$  変換の実パラメータである. 今後はこのような  $U(1)$  変換全体がなす群を  $\tilde{U}(1)$  と記す. 文献 [16] で考察された有質量粒子のゲージ化されたツイスター模

<sup>1</sup> E-mail: deguchi@phys.cst.nihon-u.ac.jp

型は、次の作用積分で定義される：

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{Z}_A^i D_i^j Z_j^A - Z_i^A \bar{D}^i_j \bar{Z}_A^j \right) - 2sa - 2t \left( b^r \mathcal{V}_r^3 - \dot{\xi} e_\xi^3 - \dot{\bar{\xi}} e_{\bar{\xi}}^3 \right) \right. \\ \left. - k \sqrt{2g_{\xi\bar{\xi}}} D\xi D\bar{\xi} + h \left( \epsilon^{ij} \pi_{i\dot{\alpha}} \pi_j^{\dot{\alpha}} - \sqrt{2} m e^{i\varphi} \right) + \bar{h} \left( \epsilon_{ij} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}^{j\alpha} - \sqrt{2} m e^{-i\varphi} \right) \right]. \quad (1)$$

ここで、 $\tau$  は 4 次元 Minkowski 空間で粒子が描く世界線のパラメータ、変数の上のドットは  $\tau$  に関する微分を表し、ツイスター  $Z_i^A$  と  $\bar{Z}_A^i$  は世界線上の複素場として扱われる。また、 $D_i^j$  は世界線上の  $U(1)$  ゲージ場  $a$  と世界線上の  $SU(2)$  ゲージ場  $b = b^r \sigma_r$  [ $\sigma_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) は Pauli 行列] から定義される共変微分  $D_i^j := \delta_i^j d/d\tau - ia(\tau) \delta_i^j - ib^r(\tau) \sigma_{ri}^j$  であり、 $\pi_{i\dot{\alpha}}$  ( $\dot{\alpha} = \dot{0}, \dot{1}$ ) はツイスターの成分と  $\pi_{i\dot{0}} = Z_i^2$ ,  $\pi_{i\dot{1}} = Z_i^3$  の関係にある運動量スピナーである。さらに、 $h$  と  $\varphi$  はそれぞれ世界線上の複素場と実場であり、 $m$  は質量パラメータ、 $s$  と  $t$  は実定数、 $k$  は正の定数である。そして、 $\mathcal{V}_r^3$ ,  $e_\xi^3$ ,  $e_{\bar{\xi}}^3$ ,  $g_{\xi\bar{\xi}}$  は代表元  $V$  から定義される  $\xi$  と  $\bar{\xi}$  の関数であり、 $D\xi$  と  $D\bar{\xi}$  は  $b^r$  と  $SU(2)$  Killing ベクトル ( $K_r^\xi, K_r^{\bar{\xi}}$ ) から  $D\xi := \dot{\xi} - b^r K_r^\xi$ ,  $D\bar{\xi} := \dot{\bar{\xi}} - b^r K_r^{\bar{\xi}}$  と定義される。式 (1) において  $\xi$  と  $\bar{\xi}$  は世界線上の複素場として扱われる。

作用積分  $S$  はパラメータ  $\tau$  の付け替え (reparametrization)  $\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau)$  のもとで不変であるが、さらに局所  $U(1)$  変換

$$Z_i^A \rightarrow Z_i'^A = e^{i\theta(\tau)} Z_i^A, \quad \bar{Z}_A^i \rightarrow \bar{Z}_A'^i = e^{-i\theta(\tau)} \bar{Z}_A^i, \quad (2a)$$

$$h \rightarrow h' = e^{-2i\theta(\tau)} h, \quad \bar{h} \rightarrow \bar{h}' = e^{2i\theta(\tau)} \bar{h}, \quad (2b)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + 2\theta(\tau), \quad \xi \rightarrow \xi' = \xi, \quad (2c)$$

$$a \rightarrow a' = a + \dot{\theta}, \quad b \rightarrow b' = b \quad (2d)$$

と局所  $SU(2)$  変換

$$Z_i^A \rightarrow Z_i'^A = U_i^j(\tau) Z_j^A, \quad \bar{Z}_A^i \rightarrow \bar{Z}_A'^i = \bar{Z}_A^j U_j^\dagger{}^i(\tau), \quad (3a)$$

$$h \rightarrow h' = h, \quad \bar{h} \rightarrow \bar{h}' = \bar{h}, \quad (3b)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi, \quad \xi \rightarrow \xi' = \xi(\xi), \quad (3c)$$

$$a \rightarrow a' = a, \quad b \rightarrow b' = UbU^\dagger - i\dot{U}U^\dagger \quad (3d)$$

のもとでも不変である。ここで、 $\theta = \theta(\tau)$  は  $\theta(\tau_1) = \theta(\tau_0)$  を満たす実関数であり、 $U = U(\tau)$  は  $SU(2)$  の元で  $U(\tau_1) = U(\tau_0)$  を満たす関数である。

いま、式 (1) において  $V(\xi_0, \bar{\xi}_0) = 1$  となる特殊なゲージ  $\xi = \xi_0$  を採用すると、作用積分  $S$  は次のようになる：

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{Z}_A^i D_i^j Z_j^A - Z_i^A \bar{D}^i_j \bar{Z}_A^j \right) - 2sa - 2tb^3 - k\sqrt{b^i b^i} \right. \\ \left. + h \left( \epsilon^{ij} \pi_{i\dot{\alpha}} \pi_j^{\dot{\alpha}} - \sqrt{2} m e^{i\varphi} \right) + \bar{h} \left( \epsilon_{ij} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}^{j\alpha} - \sqrt{2} m e^{-i\varphi} \right) \right]. \quad (4)$$

この表式において,  $SU(2)$  対称性は隠れ,  $\tilde{U}(1)$  対称性が明白になる. 作用積分 (4) を  $a, b^3, b^i$  ( $i = 1, 2$ ) の各々について変分すると, 次の拘束条件が導かれる:

$$T_0 - s = 0, \quad T_3 - t = 0, \quad T_i T_i - \frac{k^2}{4} = 0. \quad (5)$$

ここで,  $T_0$  は  $T_0 := \frac{1}{2} \bar{Z}_A^i Z_i^A$  で定義される  $U(1)$  の生成子であり,  $T_r$  は  $T_r := \frac{1}{2} \bar{Z}_A^j \sigma_{rj}^k Z_k^A$  で定義される  $SU(2)$  の生成子である. 従前の研究 [7-15] では, これらに相当する拘束条件が作用積分の中に Lagrange 未定乗数を用いて人為的に付加されてきた. それに対して本研究では, 式 (5) の第 1 式は局所  $U(1)$  対称性に基づいて, 第 2 式と第 3 式は局所  $SU(2)$  対称性に基づいて系統的に導かれている. 一方, 作用積分 (4) を  $h$  と  $\bar{h}$  の各々で変分すると質量殻条件

$$\epsilon^{ij} \pi_{i\alpha} \pi_j^\alpha - \sqrt{2} m e^{i\varphi} = 0, \quad \epsilon_{ij} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}^{j\alpha} - \sqrt{2} m e^{-i\varphi} = 0 \quad (6)$$

が得られるが, これら (またはこれらに相当する条件) は, 文献 [7-15,16] において  $h$  と  $\bar{h}$  のような Lagrange 未定乗数を用いて作用積分に人為的に付加されてきた. すなわち, 質量殻条件は何らかのゲージ対称性に基づいて導かれる条件とは考えられてこなかった.

### 3 ゲージ化されたツイスター模型における非斉次変換

今後の議論のために, 式 (2) の変換と式 (3) の変換を次のように局所  $U(2)$  変換として 1 つにまとめておく:

$$Z_i^A \rightarrow Z_i'^A = U_i^j(\tau) Z_j^A, \quad \bar{Z}_A^i \rightarrow \bar{Z}_A'^i = \bar{Z}_A^j U_j^\dagger{}^i(\tau). \quad (7a)$$

$$h \rightarrow h' = e^{-2i\theta(\tau)} h, \quad \bar{h} \rightarrow \bar{h}' = e^{2i\theta(\tau)} \bar{h}, \quad (7b)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + 2\theta(\tau), \quad \xi \rightarrow \xi' = \xi'(\xi), \quad (7c)$$

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = U \mathbf{a} U^\dagger - i \dot{U} U^\dagger \quad (7d)$$

ここで,  $U(\tau)$  は  $U(\tau) := e^{i\theta(\tau)} U(\tau)$  で定義される  $U(2) \cong U(1) \times SU(2)$  の元,  $\mathbf{a}$  は  $\mathbf{a} := a\sigma_0 + b$  ( $\sigma_0$  は  $2 \times 2$  単位行列) で定義される  $U(2)$  ゲージ場である.

Perjés と Hughston が示したように,  $n$  個のツイスターから構成される運動量ベクターと角運動量スピナーを不変にする変換全体の集合は群を成す [2-6]. この群は, 非斉次変換を含むように  $SU(n)$  を拡張したものであり,  $ISU(n)$  と記される. この群を  $n$  個のツイスター全てに共通の位相変換を含むように拡張することも可能であり, そのように拡張された群をここでは  $IU(n)$  と記す. 既に述べたように,  $n(\geq 3)$  個のツイスターを用いた有質量粒子の記述は 2 個のツイスターを用いた記述に帰着するから, 実際は  $n = 2$  の場合のみを考えればよい [17]. すなわち, ここで考察の対象になる群は  $ISU(2)$  か  $IU(2)$  である. ツイスターの局所  $IU(2)$  変換は, 式 (7a) を拡張した

$$Z_i^A \rightarrow Z_i'^A = U_i^j(\tau) \left( Z_j^A + \Lambda(\tau) \epsilon_{jk} I^{AB} \bar{Z}_B^k \right), \quad (8a)$$

$$\bar{Z}_A^i \rightarrow \bar{Z}_A'^i = \left( \bar{Z}_A^j + \bar{\Lambda}(\tau) \epsilon^{jk} I_{AB} Z_k^B \right) U_j^\dagger{}^i(\tau) \quad (8b)$$

で与えられる. ここで  $\Lambda(\tau)$  は複素数に値をとる局所非斉次変換のパラメータ,  $I^{AB}$  と  $I_{AB}$  は次式で定義される  $4 \times 4$  行列である:

$$I^{AB} := \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{AB} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

特に  $\Lambda = 0$  のとき, 式 (8) は式 (7a) に帰着する.

式 (8) と式 (7d) を用いると, 局所  $IU(2)$  変換のもとでの  $D_i^j Z_j^A$  と  $\bar{D}^i_j \bar{Z}_A^j$  の変換則が次のように求まる:

$$D_i^j Z_j^A \rightarrow D_i'^j Z_j'^A = \mathcal{U}_i^j \left\{ D_j^k Z_k^A + \dot{\Lambda} \epsilon_{jk} I^{AB} \bar{Z}_B^k + \Lambda I^{AB} \left( \epsilon_{jk} \dot{Z}_B^k - i \mathbf{a}_j^k \epsilon_{kl} \bar{Z}_B^l \right) \right\}, \quad (10a)$$

$$\bar{D}^i_j \bar{Z}_A^j \rightarrow \bar{D}^i_j \bar{Z}_A'^j = \left\{ \bar{D}^j_k \bar{Z}_A^k + \dot{\Lambda} \epsilon^{jk} I_{AB} Z_k^B + \bar{\Lambda} I_{AB} \left( \epsilon^{jk} \dot{Z}_k^B + i \mathbf{a}_k^j \epsilon^{kl} Z_l^B \right) \right\} \mathcal{U}^{\dagger j}_i. \quad (10b)$$

さらに, 式 (8), 式 (10), 公式  $I_{AB} Z_i^A Z_j^B = \frac{1}{2} \epsilon^{kl} \pi_{k\dot{\alpha}} \pi_l^{\dot{\alpha}} \epsilon_{ij}$ ,  $I^{AB} \bar{Z}_A^i \bar{Z}_B^j = \frac{1}{2} \epsilon_{kl} \bar{\pi}_\alpha^k \bar{\pi}^{l\alpha} \epsilon^{ij}$  を用いると, 作用積分  $S$  に含まれる  $(Z_i^A, \bar{Z}_A^i)$  の運動項に関して

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \left( \bar{Z}_A^i D_i'^j Z_j'^A - Z_i'^A \bar{D}^i_j \bar{Z}_A'^j \right) &= \frac{i}{2} \left( \bar{Z}_A^i D_i^j Z_j^A - Z_i^A \bar{D}^i_j \bar{Z}_A^j \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} \left( \dot{\Lambda} + 2ia\bar{\Lambda} \right) \epsilon^{ij} \pi_{i\dot{\alpha}} \pi_j^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} \left( \dot{\Lambda} - 2ia\Lambda \right) \epsilon_{ij} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}^{j\alpha} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる. これより,  $(Z_i^A, \bar{Z}_A^i)$  の運動項は局所非斉次変換のもとで不変ではないことがわかる. (この運動項は大域的非斉次変換 (即ち  $\Lambda$  が 0 以外の定数の変換) のもとでも不変ではない. 一方  $\Lambda = 0$  のとき, 運動項は明らかに不変である.) いま, 不変性を壊している項 (式 (11) にある  $\bar{\Lambda}$  や  $\Lambda$  を含む項) は  $\epsilon^{ij} \pi_{i\dot{\alpha}} \pi_j^{\dot{\alpha}}$  または  $\epsilon_{ij} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}^{j\alpha}$  に比例しており, 同様の項は  $h$  と  $\bar{h}$  に比例する形で作用積分  $S$  にも含まれていることに着目する. この事実を踏まえて, 式 (7b) にある  $h$  と  $\bar{h}$  の変換則を

$$h \rightarrow h' = e^{-2i\theta(\tau)} \left\{ h + \frac{i}{2} \left( \dot{\Lambda}(\tau) + 2ia\bar{\Lambda}(\tau) \right) \right\}, \quad (12a)$$

$$\bar{h} \rightarrow \bar{h}' = e^{2i\theta(\tau)} \left\{ \bar{h} - \frac{i}{2} \left( \dot{\Lambda}(\tau) - 2ia\Lambda(\tau) \right) \right\} \quad (12b)$$

と変更すると, 不変性を壊す項をうまく相殺することができる. また, 同時に式 (7c) にある  $\varphi$  の変換則を  $\mathcal{H} := h e^{i\varphi} + \bar{h} e^{-i\varphi}$  が不変になるように

$$\varphi \rightarrow \varphi' = -i \log \left( \frac{\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4|h'|^2}}{2h'} \right) \quad (13)$$

と変更する. ここで,  $\pm$  は  $\Lambda = 0$  のときに式 (13) が式 (7c) の第 1 式に帰着するように, いずれかの符号が選ばれる. 以上のように  $h, \bar{h}, \varphi$  の変換則を適切に変更すると, 作用積分  $S$  は局所  $U(2)$  変換のみならず, 局所  $IU(2)$  変換のもとでも不変になる. こうして, 有質量粒子のゲージ化されたツイスター模型がもつ局所  $U(2)$  対称性を局所  $IU(2)$  対称性に拡張することができた.

## 4 まとめと考察

本研究で見てきたように，作用積分  $S$  が局所  $IU(2)$  変換のもとで不変になるためには，式 (11) にある  $\bar{\Lambda}$  や  $\Lambda$  を含む余分な項を相殺するように， $\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau [h\epsilon^{ij}\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_j^{\dot{\alpha}} + \bar{h}\epsilon_{ij}\bar{\pi}^i\bar{\pi}^{j\alpha}]$  を  $S$  の一部として加えておく必要がある。このとき， $h$  と  $\bar{h}$  は局所非斉次変換で生じる余分な項を相殺するために導入されるという意味において，局所非斉次変換に対するゲージ場と考えることができる。実際に式 (12) から， $h$  と  $\bar{h}$  はそれぞれパラメータ  $\bar{\Lambda}$  と  $\Lambda$  に対応していることがわかる。さらに式 (13) の変換をする  $\varphi$  を導入した上で，局所  $IU(2)$  変換のもとで不変な項として， $\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau [-\sqrt{2}m\mathcal{H}]$  を  $S$  の一部として加えることができる。結果として，作用積分  $S$  の中に質量殻条件 (6) を与える項

$$S_m = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[ h \left( \epsilon^{ij}\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_j^{\dot{\alpha}} - \sqrt{2}me^{i\varphi} \right) + \bar{h} \left( \epsilon_{ij}\bar{\pi}^i\bar{\pi}^{j\alpha} - \sqrt{2}me^{-i\varphi} \right) \right] \quad (14)$$

が加えられる。以上のことから，質量殻条件は局所非斉次変換のもとでの対称性に基づいていることが理解できる。本研究により，質量殻条件を含む全ての必要な拘束条件は，局所  $IU(2)$  対称性に基づいて系統的に取り入れられることがわかった。

## References

- [1] R. Penrose, “The twistor programme,” Rep. Math. Phys. **12**, 65 (1977).
- [2] Z. Perjés, “Twistor variables of relativistic mechanics,” Phys. Rev. D **11**, 2031 (1975).
- [3] Z. Perjés, “Unitary space of particle internal states,” Phys. Rev. D **20**, 1857 (1979).
- [4] Z. Perjés, “Perspectives of Penrose theory in particle physics,” Rep. Math. Phys. **12**, 193 (1977).
- [5] Z. Perjés, “Internal symmetries in twistor theory,” Czech. J. Phys. B **32**, 540 (1982).
- [6] L. P. Hughston, *Twistors and Particles*, Lecture Notes in Physics Vol. 97 (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
- [7] S. Fedoruk and V. G. Zima, “Bitwistor formulation of massive spinning particle,” J. Kharkiv Univ. **585**, 39 (2003), arXiv:hep-th/0308154.
- [8] A. Bette, J. A. de Azcárraga, J. Lukierski, and C. Miquel-Espanya, “Massive relativistic free fields with Lorentz spins and electric charges,” Phys. Lett. B **595**, 491 (2004), arXiv:hep-th/0405166.
- [9] J. A. de Azcárraga, A. Frydryszak, J. Lukierski, and C. Miquel-Espanya, “Massive relativistic particle model with spin from free two-twistor dynamics and its quantization,” Phys. Rev. D **73**, 105011 (2006), arXiv:hep-th/0510161.
- [10] S. Fedoruk, A. Frydryszak, J. Lukierski, and C. Miquel-Espanya, “Extension of the Shirafuji model for massive particles with spin,” Int. J. Mod. Phys. A **21**, 4137 (2006), arXiv:hep-th/0510266.
- [11] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, and J. Lukierski, “Supertwistors, massive superparticles and  $\kappa$ -symmetry,” J. High Energy Phys. 01 (2009) 041, arXiv:0808.2155 [hep-th].

- [12] L. Mezincescu, A. J. Routh, and P. K. Townsend, “Supertwistors and massive particles,” *Ann. Phys. (Amsterdam)* **346**, 66 (2014), arXiv:1312.2768 [hep-th].
- [13] S. Fedoruk and J. Lukierski, “Massive twistor particle with spin generated by Souriau-Wess-Zumino term and its quantization,” *Phys. Lett. B* **733**, 309 (2014), arXiv:1403.4127 [hep-th].
- [14] J. A. de Azcárraga, S. Fedoruk, J. M. Izquierdo, and J. Lukierski, “Two-twistor particle models and free massive higher spin fields,” *J. High Energy Phys.* 04 (2015) 010, arXiv:1409.7169 [hep-th].
- [15] L. Mezincescu, A. J. Routh, and P. K. Townsend, “Twistors and the massive spinning particle,” *J. Phys. A* **49**, 025401 (2016), arXiv:1508.05350 [hep-th].
- [16] S. Deguchi and S. Okano, “Gauged twistor formulation of a massive spinning particle in four dimensions,” *Phys. Rev. D* **93**, 045016 (2016) [Erratum-ibid. *D* **93**, 089906(E) (2016)], arXiv:1512.07740 [hep-th].
- [17] S. Okano and S. Deguchi, “A no-go theorem for the  $n$ -twistor description of a massive particle,” *J. Math. Phys.* (in Press), arXiv:1606.01339 [hep-th].

# Renormalization Group Equations for $f(R)$ Gravity and Some of Their Solutions

Nobuyoshi Ohta

*Department of Physics, Kindai University, Higashi-Osaka, Osaka 577-8502, Japan and  
Maskawa Institute for Science and Culture, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan*

## 1 Introduction

This is a report on our attempt to find the quantum theory of gravity [1, 2, 3]. We start by explaining why we need it. We all know that the present universe is expanding, which means that the universe is a point or a singularity in the far past. However we cannot discuss such a singularity in General Relativity (GR). Another example of the singularity is that in the black hole. We have to have a method to compute physical quantities in such spaces, but this cannot be done in GR. This is the reason why we need quantum gravity.

Why quantum gravity is difficult? First of all, if the spacetime metric itself is a dynamical quantity, there is no notion of spacetime or distance etc. and then we do not know how to “quantize” the theory. We may use background field formalism. Still if we accept Minkowski spacetime as our background, the Einstein theory is non-renormalizable, meaning that it is not ultraviolet (UV) complete, and can be at best only a low-energy effective theory! Moreover it is difficult to quantize gravity on curved spacetime, because the familiar notions in Minkowski spacetime, such as asymptotic states, may not be well defined.

On the other hand, it is known that higher-order terms always appear in quantum theory e.g. quantized Einstein and string theories. This naturally leads us to think that this may give us a possible UV completion. However it is known that in 4D, quadratic (higher derivative) theory is renormalizable but non-unitary [4]. Does this mean that there is no way out to have a theory that enables us to compute quantum effects in gravity without ghost and infinity? In this situation, the only possible way to make sense of the quantum effects in gravity seems to be the *Asymptotic Safety* [5].

## 2 Asymptotic safety

What is asymptotic safety? It can be summarized as follows:

1. We consider effective average action  $\Gamma_k$  at an energy scale  $k$  obtained by integrating out all fluctuations of the fields with momenta larger than  $k$ . This is divergent itself.

2. Its  $k$ -derivative is free from any divergence, and gives *exact (or functional) renormalization group equation* (FRGE). FRGE gives flow of the effective action in the theory space defined by suitable bases  $\mathcal{O}_i$ .

$$\Gamma_k = \sum_i g_i(k) \mathcal{O}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Gamma_k}{dt} = \sum_i \beta_i \mathcal{O}_i \quad \beta_i = \frac{dg_i}{dt}, \quad (t = \log k), \quad (1)$$

and is also called the *flow equation*.

3. If we integrate it down to  $k \rightarrow 0$ , it gives full quantum effective action  $\Gamma_0$ , from which we can obtain all the information of the quantum theory including correlation functions.
4. We can set suitable initial conditions at some point and then flow to  $k \rightarrow \infty$ . Possible behaviors for  $k \rightarrow \infty$  are as follows:

- Couplings go to infinity.  
In this case, the theory is not well defined as quantum UV theory (just like Landau pole in QED).
- Couplings do not go to infinity.
  - Couplings go to fixed points (FPs).  
If all the couplings go to the FPs, it gives a well-defined UV theory, and physical quantities are well defined. This class of theories are the Asymptotic safe theories.
  - becomes limit cycle.  
This case is rare and is not considered.

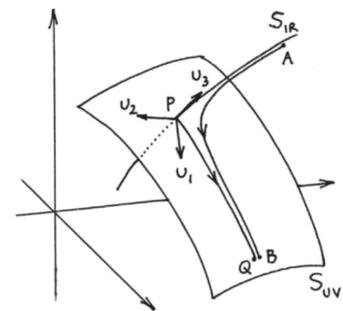


Figure 1: RG flow

There are in general several *relevant couplings*, and we call *UV critical surface* the set of points that flow into a FP. All the theories on the same trajectory define the same UV theory. In the ideal case, we also require that the number of relevant operators (only which are retained) are finite. In this case the theory has predictability! Note that the asymptotic safety is a wider notion than the renormalizability (includes renormalizable theories). In this case, the relevant operators correspond to precisely renormalizable interactions.

The most important fact is that the dependence of the effective action  $\Gamma_k$  on  $k$  gives the renormalization group (RG) flow free from any divergence:

$$\dot{\Gamma}_k(\Phi) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^A \delta \Phi^B} + R_k \right)^{-1} \dot{R}_k \right], \quad (2)$$

where the dot is the logarithmic ( $t$ ) derivative of the scale  $k$ , and  $R_k$  is the cutoff function. This looks like a one-loop effective action, but is actually EXACT RG equation!

If we find nontrivial fixed points in this formulation, this gives the UV complete theory. We can apply this method to our theory on arbitrary background in arbitrary dimensions.

### 3 $f(R)$ Gravity

In order to facilitate the program, ideally we want to search for the relevant operators in the whole theory space. In practice we cannot do this in the infinite dimensional theory space. Usually one truncates the theory, e.g. derivative expansion, polynomial expansion and so on, and then improves the approximation by adding further terms. The hope is that if the obtained results are not much affected by additional terms, this gives supports to the program. Indeed there is accumulating evidence (up to 34th order in  $R$ ) that there are always nontrivial fixed points. This means that the asymptotic safety program may be the right direction.

This is certainly encouraging, however it may not be enough. We can do better by considering the actions of the general form

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} f(R), \quad (3)$$

and derive FRGE for the function  $f(R)$  which is then determined. Note that we do not assume that the action is just a polynomial of the scalar curvature but a general function, allowing infinite possibility.

Another novelty of our work is that two different parametrizations of the metric fluctuation can be considered:

$$\text{linear split: } g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \dots \text{ most often used} \quad (4)$$

$$\text{exponential split: } g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\rho} (e^h)^\rho{}_\nu, \dots \text{ new parametrization} \quad (5)$$

The latter, which we use in our work, has the advantage that there is no unphysical singularity and the result is gauge-independent.

There is also a problem that we address in the current work. On the compact space, the spectrum is discrete  $\frac{\ell(\ell+3)}{12}R \geq \frac{5}{6}R (\ell \geq 2)$  and there is no sense of coarse graining for large curvature;  $k^2$  cannot be less than this. There is no problem of this kind on noncompact space because the spectrum is continuous, but has not been studied. So we extend the study to noncompact space.

Using heat kernel expansion or spectrum sum, the optimized cutoff  $R_k(z) = (k^2 - z)\theta(k^2 - z)$ , dimensionless quantities  $r \equiv \bar{R}k^{-2}$  and  $\varphi(r) = k^{-d}f(\bar{R})$ , we get our main result in 4 dims. for both sphere and hyperbolic spaces:

$$32\pi^2(\dot{\varphi} - 2r\varphi' + 4\varphi) = \frac{c_1(\dot{\varphi}' - 2r\varphi'') + c_2\varphi'}{\varphi'[6 + (6\alpha + 1)r]} + \frac{c_3(\dot{\varphi}'' - 2r\varphi''') + c_4\varphi''}{2\{\varphi''[3 + (3\beta - 1)r] + \varphi'\}} - \frac{c_5}{4 + (4\gamma - 1)r}, \quad (6)$$

where the prime is the  $r$  derivative,  $\alpha, \beta, \gamma$  are endomorphism parameters, the coefficients  $c_1 - c_5$

are polynomial in  $r$  up to 3rd order on the sphere and involve polylogarithms on the hyperboloid.

$$\begin{aligned}
c_1 &= 5 + 5\left(3\alpha - \frac{1}{2}\right)r + \left(15\alpha^2 - 5\alpha - \frac{1}{72}\right)r^2 + \left(5\alpha^3 - \frac{5}{2}\alpha^2 - \frac{\alpha}{72} + \frac{311}{9072}\right)r^3, \\
c_2 &= 40 + 15(6\alpha - 1)r + \left(60\alpha^2 - 20\alpha - \frac{1}{18}\right)r^2 + \left(10\alpha^3 - 5\alpha^2 - \frac{\alpha}{36} + \frac{311}{4536}\right)r^3, \\
c_3 &= \frac{1}{2}\left[1 + \left(3\beta + \frac{1}{2}\right)r + \left(3\beta^2 + \beta - \frac{511}{360}\right)r^2 + \left(\beta^3 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{511}{360}\beta + \frac{3817}{9072}\right)r^3\right], \\
c_4 &= 3 + (6\beta + 1)r + \left(3\beta^2 + \beta - \frac{511}{360}\right)r^2, \\
c_5 &= 12 + 2(12\gamma + 1)r + \left(12\gamma^2 + 2\gamma - \frac{607}{180}\right)r^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

for sphere. The FRGE itself is the same for the hyperbolic space ( $r < 0$ ) but the heat kernel or spectrum is different. For small curvature

$$\begin{aligned}
c_1 &\approx 5 + 5\left(3\alpha - \frac{1}{2}\right)r + \left(15\alpha^2 - 5\alpha - \frac{271}{72}\right)r^2 + \left(5\alpha^3 - \frac{5\alpha^2}{2} - \frac{271\alpha}{72} - \frac{7249}{9072}\right)r^3, \\
c_2 &\approx 40 + 15(6\alpha - 1)r + \left(60\alpha^2 - 20\alpha - \frac{271}{18}\right)r^2 + \left(10\alpha^3 - 5\alpha^2 - \frac{271\alpha}{36} - \frac{7249}{4536}\right)r^3, \\
c_3 &\approx \frac{1}{2}\left[1 + \left(3\beta + \frac{1}{2}\right)r + \left(3\beta^2 + \beta + \frac{29}{360}\right)r^2 + \left(\beta^3 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{29\beta}{360} + \frac{37}{9072}\right)r^3\right], \\
c_4 &\approx 3 + (6\beta + 1)r + \left(3\beta^2 + \beta + \frac{29}{360}\right)r^2, \\
c_5 &\approx 12 + 2(12\gamma + 1)r + \left(12\gamma^2 + 2\gamma - \frac{67}{180}\right)r^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

We list several features:

- The FRGE itself has the same structure for both spaces!
- The coefficients are only slightly different for small  $|r|$  due to the difference in the symmetry (Killing) vectors (which should be removed).
- The heat kernel or spectrum is continuous for noncompact case so that the result is exact. (The result was approximated for the compact case.)
- There is no problem of coarse-graining on hyperbolic space; the RHS vanishes for large  $|r|$ , and we can integrate down to  $k = 0$  (at finite  $|r|$ ) on noncompact space, obtaining the effective action

This gives a step in the direction of background-independence.

## 4 Scaling solutions in 4D

The theory at FP is obtained by setting  $\dot{\varphi} = 0$ . We find the amazing result that FP theory  $f(r)$  is determined by a third order ordinary differential equation!!

$$rc_3 \varphi'''(r) = \dots . \quad (9)$$

The FRGE tells us that the large- $r$  behavior of  $\varphi$  is

$$\varphi \sim a_2 r^2 + a_1 r + a_0 + a_{-1}/r + \dots \text{ at most quadratic!} \quad (10)$$

Though it is an ordinary differential equation, it is still difficult to solve analytically for fixed general endomorphism  $\alpha, \beta, \gamma$ . After some analysis, we find some common features:

1. Both have exact solutions: First treat the parameters  $\alpha, \beta, \gamma$  as unknowns to solve for. The simplest possible solutions are of the form

$$\varphi(r) = g_0 + g_1 r + g_2 r^2 \dots \text{ Similar to Starobinsky model!} \quad (11)$$

We obtain a system of six equations for the six unknowns  $g_0, g_1, g_2, \alpha, \beta$  and  $\gamma$ . We find that this system has a number of solutions.

2. We tried to get polynomial solutions for small  $|r|$ . We have a good convergence for sphere as we increase the number of terms, but the convergence is poorer for the hyperbolic space.
3. The coefficients of terms beyond quadratic terms in  $r$  are in general quite small. Quadratic approximation seems good enough.
4. There is indication that the critical UV surface is 3 dimensional.
5. We also get the effective action at  $k = 0$  for the endomorphism  $\alpha = -\frac{1}{6}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{4}$ :

$$\int d^4x \sqrt{g} f(R) = \int d^4x \sqrt{g} \left( aR^2 - \frac{371R^2 \log(R/\mu^2)}{23040\pi^2} \right). \quad (12)$$

6. We can also make numerical analysis for fixed  $\alpha, \beta, \gamma$ :

When we solve for the differential equations of the fixed point solutions, which are third order in general, the zero's of the third order coefficients  $rc_3 = 0$  give the singularities: A singularity at  $r = 0$  and further fixed singularities from  $c_3 = 0$  depending on  $\beta$ . We then expect that there exist a discrete number of solutions when the number of fixed singularities matches the order of the equation. We managed to do this for compact manifold, but noncompact case is resistive. More detailed study is left for future.

We can also study beta functions in other dimensions. Our results confirm that there are always nontrivial UV fixed point functions.

## 5 Conclusions

- We have constructed a novel FRGE for gravity which encodes the gravitational degrees of freedom in terms of general function  $f(R)$  of the scalar curvature.
- The advantage of the new parametrization is that it gives flow equations free from unphysical singularities and to some extent gauge-independent result.
- The flow equations take very similar forms for compact as well as noncompact space. This may give a step towards background-independence.
- There are ultraviolet fixed points essential for asymptotic safety for the function  $f(R)$ .
- We have studied if this approach may be used to determine possible UV completion of gravitational theory and the result contains exact solutions similar to Starobinsky model  $R + R^2$ , consistent with the current observation on inflation.

We believe that this is a good step toward the realization of asymptotic safety. We suggest possible future directions:

- Extending the analysis to more general theory (extend the theory space)
- Real background-independence etc.

## References

- [1] N. Ohta, R. Percacci and G. P. Vacca, “Flow equation for  $f(R)$  gravity and some of its exact solutions,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) 061501 [arXiv:1507.00968 [hep-th]].
- [2] N. Ohta, R. Percacci and G. P. Vacca, “Renormalization Group Equation and scaling solutions for  $f(R)$  gravity in exponential parametrization,” *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 46 [arXiv:1511.09393 [hep-th]].
- [3] K. Falls and N. Ohta, “Renormalization Group Equation for  $f(R)$  gravity on hyperbolic spaces,” *Phys. Rev. D* **94** (2016) 084005 [arXiv:1607.08460 [hep-th]].
- [4] K. S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D* **16** (1977) 953.
- [5] S. Weinberg, “Ultraviolet Divergences In Quantum Theories Of Gravitation,” in Hawking, S.W., Israel, W.: *General Relativity* (Cambridge University Press), 790-831.

# ヘテロ弦模型における高次元項<sup>1</sup>

桑木野省吾

京都産業大学益川塾

## 1 はじめに

超弦理論は重力を量子力学的に含むため究極の統一理論の候補と考えられている。超弦理論のコンパクト化により得られた低エネルギー有効理論において、標準模型のクォーク・レプトンの質量・混合などの現象論的な性質を説明することが求められている。そのうち、湯川結合定数またはゲージ結合定数は超弦理論のモジュライ場に依存しており、モジュライ場の安定化が問題となる。

ヘテロ型弦理論のコンパクト化におけるモジュライの安定化の試みとして、非対称オービフォルドコンパクト化 [1, 2, 3] の枠組みでの模型構築が考察されている [4]。そこでは余剰次元空間のエンハンス点に対応するモジュライ点での模型作りが行われ、非対称オービフォルド作用によってケーラーモジュライ場や複素構造モジュライ場などの幾何学的なモジュライ場の数が極めて少なくなっている [5]。残ったディラトン場を、エンハンスした隠れたゲージ群の強結合効果によりポテンシャルを生成し、現実的なゲージ結合定数に安定化可能ということが示されている。

本研究では非対称オービフォルド模型によってモジュライ場が安定化された後に、いかに湯川結合定数を決定するかを考察する。湯川結合定数は基本的にスーパーポテンシャルの高次元項から有効的に低エネルギーへの寄与があるため、模型の R 対称性の考察が必要となる。

## 2 R 対称性

まず一般のモジュライ点における対称オービフォルド模型での R チャージの定義を振り返る。ボソンとフェルミオンの vertex operator を

$$V_{-1} = e^{-\phi} \prod_{i=1}^3 (\partial Z^i)^{N_L^i} (\bar{\partial} \bar{Z}^i)^{\bar{N}_L^i} e^{ir_m H_m} e^{iq_I X_I}, \quad (1)$$

$$V_{-1/2} = e^{-\frac{\phi}{2}} \prod_{i=1}^3 (\partial Z^i)^{N_L^i} (\bar{\partial} \bar{Z}^i)^{\bar{N}_L^i} e^{ir_m^{(f)} H_m} e^{iq_I X_I} \quad (2)$$

とすると、高次元項を計算するためには相関関数  $\langle V_{-1/2} V_{-1/2} V_{-1} V_0 \cdots V_0 \rangle$  を評価すればいい。ここで  $V_0$  は picture changing operator

$$P \sim e^{\phi} (e^{-s \cdot H} \bar{\partial} Z^i + e^{s \cdot H} \bar{\partial} \bar{Z}^i) \quad (3)$$

により  $P V_{-1} \rightarrow V_0$  のように picture 数を変更したものである。ここで R チャージを

$$R_i = r_i + N_i - \bar{N}_i \quad (4)$$

と定義すると、この R チャージは picture 不変な量となる [6, 7]。スーパーポテンシャルの高次元項は R 対称性、ゲージ対称性そして弦選択則を満たす項を選ぶことで計算される。具体例として  $\mathbf{Z}_3$  オービフォルド模型 [8, 9] で R チャージを評価すると表 1 のようになる。

<sup>1</sup>この講演は小林達夫氏 (北海道大学)、Florian Beye 氏との共同研究に基づく。

U/T	Field	$E_6 \times A_2 \times E_8$	$\Delta N$	#	$(q_0, q_1, q_2, q_3)_{-1}$	$(q_0, q_1, q_2, q_3)_{-1/2}$	$(R_1, R_2, R_3)$
$U$	$\chi_1$	$(\mathbf{27}, \mathbf{\bar{3}}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	1	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1, 0, 0)$
$U$	$\chi_2$	$(\mathbf{27}, \mathbf{\bar{3}}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	1	$(0, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(0, 1, 0)$
$U$	$\chi_3$	$(\mathbf{27}, \mathbf{\bar{3}}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	1	$(0, 0, 1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 0, 1)$
$T$	$\chi_{ijk}$	$(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	27	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
$T$	$T_{1ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(-1, 0, 0)$	27	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
$T$	$T_{2ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(0, -1, 0)$	27	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
$T$	$T_{3ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(0, 0, -1)$	27	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

表 1:  $\mathbf{Z}_3$  オービフォールド模型のマスレススペクトルとボソンに対する  $R$  チャージ

### 3 エンハンス点での $R$ 対称性

次に上の  $\mathbf{Z}_3$  模型のエンハンス点での  $R$  チャージを求める。エンハンス点ではランク 6 のゲージ群がエンハンスし、マスレススペクトルは表 2 のようになる。ここで便利のため座標の再定義を行い

$$i\partial Z = \sum e^{iQ \cdot Z'} \quad (5)$$

により  $Q$  チャージを定義した。この変換はエンハンス点でのみ可能である。エンハンス点での picture changing operator は以下のように表せる。

$$P \sim \bar{\psi}_1 \bar{\partial} Z_1 + c.c. + (i = 2, 3) \quad (6)$$

$$\sim e^{-iH_1} (e^{-i\alpha_1 Z'_1} + e^{-i\alpha_2 Z'_1} + e^{-i\alpha_3 Z'_1}) + c.c. + (i = 2, 3). \quad (7)$$

ここでエンハンス点での  $R$  チャージを

$$R'_i = r_i + Q_i \cdot \alpha_1^{A_2} \quad (8)$$

のように定義すると、この量は picture changing により不変な量となることがわかる。具体的な  $R'$  チャージの値を表 3 に示す。

ここでゲージ不変性と  $R$  不変性から、Tree レベルのスーパーポテンシャルを書き下すと

$$W_{3GR} = \chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_{ijk} \chi_{i'j'k'} \chi_{i''j''k''} + S_{1ij} S_{1i'j'} S_{1i''j''} + S_{2ij} S_{2i'j'} S_{2i''j''} + S_{3ij} S_{3i'j'} S_{3i''j''} \\ + T_{1ijk} T_{1i'j'k'} T_{1i''j''k''} + T_{2ijk} T_{2i'j'k'} T_{2i''j''k''} + T_{3ijk} T_{3i'j'k'} T_{3i''j''k''} \quad (9)$$

となる。ここで  $i \neq i' \neq i'', j \neq j' \neq j'', k \neq k' \neq k''$ 。また 4 点項は

$$W_{4GR} = \sum_i \sum_{j \neq j' \neq j''} \sum_{k \neq k' \neq k''} S_{1i1} \chi_{ijk} \chi_{ij'k'} \chi_{ij''k''} + \sum_i \sum_{j \neq j' \neq j''} \sum_{k \neq k' \neq k''} S_{2i2} \chi_{jik} \chi_{j'ik'} \chi_{j''ik''} \\ + \sum_i \sum_{j \neq j' \neq j''} \sum_{k \neq k' \neq k''} S_{3i3} \chi_{jki} \chi_{j'k'i} \chi_{j''k''i} + \sum_i \sum_{j \neq j' \neq j''} \sum_{k \neq k' \neq k''} S_{2i2} T_{1jik} T_{1j'ik'} T_{1j''ik''} + \dots \quad (10)$$

U/T	Field	$E_6 \times A_2 \times E_8$	$U(1)^6$	$U(1)_Q^6$	$(q_0, q_1, q_2, q_3)_{-1}$	$(q_0, q_1, q_2, q_3)_{-1/2}$
$U$	$\chi_1$	$(\mathbf{27}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$\chi_2$	$(\mathbf{27}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$\chi_3$	$(\mathbf{27}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$U$	$S_{1i1}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(-e_i, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{1i2}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(-e_i, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{1i3}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(-e_i, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$U$	$S_{2i1}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, -e_i, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{2i2}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, -e_i, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{2i3}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, -e_i, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$U$	$S_{3i1}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, 0, -e_i)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{3i2}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, 0, -e_i)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$U$	$S_{3i3}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(0, 0, -e_i)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$T$	$\chi_{ijk}$	$(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$
$T$	$T_{1ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(-\frac{2e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$
$T$	$T_{2ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(\frac{e_i}{3}, -\frac{2e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$
$T$	$T_{3ijk}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, -\frac{2e_k}{3})$	$(\frac{e_i}{3}, \frac{e_j}{3}, \frac{e_k}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$

表 2: エンハンス点での  $\mathbf{Z}_3$  オービフォルド模型のマスレススペクトル

となる。ここで、ケーラーモジュライ場  $S_{111}$  等に VEV を持たせエンハンス点から離れると、拡大していた  $U(1)^6$  対称性が壊れ、一般半径での  $\mathbf{Z}_3$  模型でのスーパーポテンシャルの結果を effective に再現することが分かる。

また、離散対称性のアノマリーを

$$A_{G_a}^{R_i} = \frac{1}{2} C_2(G_a) + \sum R_{i, \text{fermion}} T(\mathbf{R}_{G_a}). \quad (11)$$

( $i = 1, 2, 3$ ) により評価すると、

$$A_{E_6}^{R'_i} = -57, \quad A_{A_2}^{R'_i} = -138 \quad (12)$$

となり、アノマリーの universality condition

$$A_{E_6}^{R'_i} = A_{A_2}^{R'_i} \pmod{\frac{3}{2}} \quad (13)$$

を満たすため、(8) の R チャージは正しく定義されていることがわかる。

## 4 結論

本研究ではモジュライ空間のエンハンス点での R チャージの定義を行った。またエンハンス点から離れた際に従来の一般的なコンパクト半径での R チャージの結果と一致することを見た。この結果は非対称オービフォルド模型などのエンハンス点での高次元項の計算にも応用可能なため、今後は具体的な 3 世代模型において現実的な湯川結合定数が再現可能かを考察する。

U/T	Field	$(R'_1, R'_2, R'_3)$
$U$	$\chi_1$	$(1, 0, 0)$
$U$	$\chi_2$	$(0, 1, 0)$
$U$	$\chi_3$	$(0, 0, 1)$
$U$	$S_{1i1}$	$(1, 0, 0)$
$U$	$S_{1i2}$	$(0, 1, 0)$
$U$	$S_{1i3}$	$(0, 0, 1)$
$U$	$S_{2i1}$	$(1, 0, 0)$
$U$	$S_{2i2}$	$(0, 1, 0)$
$U$	$S_{2i3}$	$(0, 0, 1)$
$U$	$S_{3i1}$	$(1, 0, 0)$
$U$	$S_{3i2}$	$(0, 1, 0)$
$U$	$S_{3i3}$	$(0, 0, 1)$
$T$	$\chi_{ijk}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$T$	$T_{1ijk}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$T$	$T_{2ijk}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$T$	$T_{3ijk}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

表 3: エンハンス点での  $\mathbf{Z}_3$  オービフォルド模型の R チャージ

## References

- [1] K. S. Narain, M. H. Sarmadi and C. Vafa, Nucl. Phys. B **288**, 551 (1987).
- [2] F. Beye, T. Kobayashi and S. Kuwakino, Nucl. Phys. B **875**, 599 (2013) [arXiv:1304.5621 [hep-th]].
- [3] F. Beye, T. Kobayashi and S. Kuwakino, JHEP **1401**, 013 (2014) [arXiv:1311.4687 [hep-th]].
- [4] F. Beye, T. Kobayashi and S. Kuwakino, Phys. Lett. B **760**, 63 (2016) [arXiv:1603.08313 [hep-th]].
- [5] M. T. Mueller and E. Witten, Phys. Lett. B **182**, 28 (1986).
- [6] T. Kobayashi, S. Raby and R. J. Zhang, Phys. Lett. B **593**, 262 (2004) [hep-ph/0403065].
- [7] T. Kobayashi, S. Raby and R. J. Zhang, Nucl. Phys. B **704**, 3 (2005) [hep-ph/0409098].
- [8] L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **261**, 678 (1985).
- [9] L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **274**, 285 (1986).

# On string Hamiltonian in the sigma-gauge

日本大学理工学部

三輪光嗣

## 1 導入

ゲージ理論と重力理論の間の対応関係は一方の理論の結合が強い領域と他方の理論の結合が弱い領域の対応となることが多い。このことはゲージ重力対応を応用する上では有益な側面を持つが、対応そのものを調べる研究においては必然的にいずれかの理論の解析が困難になることを意味する。私が過去に行ってきたゲージ理論におけるウィルソンループ演算子と曲がった時空を伝搬する弦のディスク分配関数の対応の例でもこのことを見てとることができる。この場合は通常は強結合ゲージ理論と古典的な弦理論を比較することになるため、弦理論側の解析は容易であることが多い。一方でゲージ理論側では多重ループの効果全てを足し上げて初めて弦理論の結果と一致する答えが得られることになる。ゲージ重力対応の背後には弦理論の開弦と閉弦の間の双対性が存在しているという考え方は広く受け入れられているものだと思う。この考え方に基づくと、ゲージ重力対応を理解するためには開弦の多重ループを考慮し、その上で開弦と閉弦の双対性を考えることが重要であると思われる。実際に参考文献 [1][2] ではこうしたアイデアに基づいて開弦の多重ループの足し上げを実行し、ゲージ重力対応のメカニズムを示す一つの道筋が提示されており、大変興味深い。またこれとは別に開弦の多重ループの足し上げを試みた研究として [3][4] が挙げられる。これらの論文では D3 ブレーン背景時空における弦の世界面のハミルトニアンが、『シグマゲージ』と（これらの論文では）呼ばれているゲージの下では特徴的な振る舞いを持つことが指摘されており、この考察に基づいて開弦の多重ループの足し上げが容易に実行されている。こうした研究はゲージ重力対応のメカニズムを理解する上でとても重要になる見方だと思う。

研究会では論文 [3][4] の簡単な紹介と、同様の解析を他のシステムに応用するアイデアに関する発表を行った。この研究会報告では後半の他のシステムへの応用のアイデアの説明と、そのために必要となるシグマゲージの説明を中心にまとめる。

## 2 D3 ブレーン背景時空上の弦と光錐ゲージ

D3 ブレーン背景時空の計量は以下のように与えられる。

$$ds_{D3}^2 = \frac{1}{\sqrt{H_3}}(dx^+ dx^- + d\vec{x}^2) + \sqrt{H_3} d\vec{y}^2 \quad (1)$$

ただし,  $H_3 = 1 + \frac{g_{\text{st}} N_3}{|\vec{y}|^4}$ ,  $g_{\text{st}}$  は閉弦の結合定数,  $N_3$  は D3 ブレーンの枚数である。また  $\alpha'$  は適当な値にとった<sup>1</sup>。D ブレーンの伸びた方向 (o) と伸びていない方向 (-) を記すと以下のようになる。

$$\begin{array}{cccccccccc} x^+ & x^- & x^1 & x^2 & y^1 & y^2 & y^3 & y^4 & y^5 & y^6 \\ \hline D3 & \circ & \circ & \circ & \circ & - & - & - & - & - \end{array} \quad (2)$$

参考文献 [3][4] ではこの背景時空を伝搬する弦に対して, 光錐ゲージと類似したシグマゲージを適用してハミルトニアンを求めている。ここではまず論文に沿って光錐ゲージのハミルトニアンの復習から始める。Polyakov 型の弦のラグランジアン密度は以下のように書ける。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (3)$$

ただし,  $g_{ab}$  は世界面の計量であり,  $G_{\mu\nu}$  は時空の計量を表す。 $g_{01} = 0$ ,  $x^+ = \tau$  とおいて光錐ゲージをとるとラグランジアン密度は以下のようになる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00} H_3}} (\dot{x}^- + \dot{x}^2 + H_3 \dot{y}^2) - \sqrt{-\frac{g_{00} H_3}{g_{11}}} \left( \frac{1}{H_3} \vec{x}'^2 + \vec{y}'^2 \right) \right] \quad (4)$$

ここで  $x^-$  の運動方程式によって  $\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00} H_3}}$  は  $\sigma$  のみの関数となる。そこで  $\sigma$  を再定義することで  $\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00} H_3}} = 1$  というゲージをとることにする。以上の手続きの結果, ラグランジアン密度は以下のようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{l.c.}} = \frac{1}{2} \left( \dot{\vec{x}}^2 + H_3 \dot{\vec{y}}^2 - \frac{1}{H_3} \vec{x}'^2 - \vec{y}'^2 \right) \quad (5)$$

従ってハミルトニアン密度は以下のようになり,  $g_{\text{st}}$  で展開すると無限級数となる。

$$\mathcal{H}_{\text{l.c.}} = \frac{1}{2} \left( \vec{p}_x^2 + \frac{1}{H_3} \vec{p}_y^2 + \frac{1}{H_3} \vec{x}'^2 + \vec{y}'^2 \right) = \mathcal{H}_{\text{flat}} + \frac{g_{\text{st}} N_3}{|\vec{y}|^4} (\dots) + \left( \frac{g_{\text{st}} N_3}{|\vec{y}|^4} \right)^2 (\dots) + \dots \quad (6)$$

ただし,  $\mathcal{H}_{\text{flat}}$  は平坦時空における光錐ハミルトニアンである。

### 3 シグマゲージにおけるハミルトニアン

次に参考文献 [4] で提案されたシグマゲージの説明をする。これは先ほどの光錐ゲージのハミルトニアンを導くプロセスの途中で  $\tau$  と  $\sigma$  を入れ替え, 新しい  $\tau$  方向の発展を与えるハミルトニアン

<sup>1</sup>以下では煩雑さを避けるために式の各項の係数は省略しており, 正確ではないことに注意。

を構成するという立場である。式 (5) において  $\tau$  と  $\sigma$  を入れ替えたラグランジアンは以下のようになる。

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_3} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \vec{x}'^2 - H_3 \vec{y}'^2 \right) \quad (7)$$

ただし、オーバーオール符号もフリップした。このラグランジアン密度から導かれるハミルトニアン密度は以下のように簡単な  $g_{st}$  依存性を持つ。

$$\mathcal{H}_\sigma = \frac{1}{2} \left( H_3 \vec{p}_x^2 + \vec{p}_y^2 + \vec{x}'^2 + H_3 \vec{y}'^2 \right) = \mathcal{H}_{\text{flat}} + \frac{g_{st} N_3}{2|\vec{y}|^4} \left( \vec{p}_x^2 + \vec{y}'^2 \right) \quad (8)$$

つまり、D3 ブレーンによって曲げられた時空の効果が  $g_{st}$  の一次で止まる。この簡単な補正項は D3 ブレーンと弦の間での閉弦一つの交換による寄与であることが示唆される。参考文献 [4] では実際に弦の世界面の立場からこうした閉弦交換によるハミルトニアンの補正項を計算して、式 (8) が再現されることを示している。ここではこの解析の詳細には立ち入らずに、次節ではシグマゲージのアイデアを他のシステムに応用する可能性を考察する。

## 4 D3-D3 システムとシグマゲージ

計量が以下のように与えられる D3-D3 システムを考える<sup>2</sup> [5]。

$$ds_{\text{D3-D3}}^2 = \sqrt{H_3^{(1)} H_3^{(2)}} \left( \frac{dx^+ dx^-}{H_3^{(1)} H_3^{(2)}} + \frac{d\vec{x}_{(1)}^2}{H_3^{(1)}} + \frac{d\vec{x}_{(2)}^2}{H_3^{(2)}} + d\vec{y}^2 \right) \quad (9)$$

D ブレーンの配位は以下の通りである。

	$x^+$	$x^-$	$x_{(1)}^1$	$x_{(1)}^2$	$x_{(2)}^1$	$x_{(2)}^2$	$y^1$	$y^2$	$y^3$	$y^4$
$D3(1)$	○	○	○	○	△	△	-	-	-	-
$D3(2)$	○	○	△	△	○	○	-	-	-	-

(10)

ただし  $\Delta$  の方向には D3 ブレーンは “smear” されている。D3 ブレーンの場合と同様にまず  $g_{01} = 0$ ,  $x^+ = \tau$  によって光錐ゲージを取ると弦のラグランジアン密度は以下のようになる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00} H_3^{(1)} H_3^{(2)}}} \left( \dot{x}^- + H_3^{(2)} \dot{\vec{x}}_{(1)}^2 + H_3^{(1)} \dot{\vec{x}}_{(2)}^2 + H_3^{(1)} H_3^{(2)} \dot{\vec{y}}^2 \right) - \sqrt{-\frac{g_{00} H_3^{(1)} H_3^{(2)}}{g_{11}}} \left( \frac{1}{H_3^{(1)}} \vec{x}'_{(1)}^2 + \frac{1}{H_3^{(2)}} \vec{x}'_{(2)}^2 + \vec{y}'^2 \right) \right] \quad (11)$$

<sup>2</sup>研究会では D1-D5 を議論したが、ここでは D3-D3 に着目する。

やはり  $x^-$  の運動方程式と  $\sigma$  の再定義によって  $\sqrt{\frac{-g_{00}H_3^{(1)}H_3^{(2)}}{g_{11}}} = 1$  のゲージをとり、以下の光錐ゲージのラグランジアン密度が得られる。

$$\mathcal{L}_{\text{l.c.}} = \frac{1}{2} \left( H_3^{(2)} \dot{\vec{x}}_{(1)}^2 + H_3^{(1)} \dot{\vec{x}}_{(2)}^2 + H_3^{(1)} H_3^{(2)} \dot{y}^2 - \frac{1}{H_3^{(1)}} \vec{x}'_{(1)}{}^2 - \frac{1}{H_3^{(2)}} \vec{x}'_{(2)}{}^2 - \vec{y}'^2 \right) \quad (12)$$

このまま光錐ゲージハミルトニアンを計算すると調和関数が分母に出てくる形となり、D3 ブレーンの場合と同様に複雑な構造を持つことになる。

$$\mathcal{H}_{\text{l.c.}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_3^{(2)}} \vec{p}_{x(1)}^2 + \frac{1}{H_3^{(1)}} \vec{p}_{x(2)}^2 + \frac{1}{H_3^{(1)} H_3^{(2)}} \vec{p}_y^2 + \frac{1}{H_3^{(1)}} \vec{x}'_{(1)}{}^2 + \frac{1}{H_3^{(2)}} \vec{x}'_{(2)}{}^2 + \vec{y}'^2 \right) \quad (13)$$

一方でハミルトニアンを導く前に  $\tau$  と  $\sigma$  を入れ替えてシグマゲージをとると以下のように調和関数が分子に出る。ただし、ここでもオーバーオールをフリップした。

$$\mathcal{H}_\sigma = \frac{1}{2} \left( H_3^{(1)} \vec{p}_{x(1)}^2 + H_3^{(2)} \vec{p}_{x(2)}^2 + \vec{p}_y^2 + H_3^{(2)} \vec{x}'_{(1)}{}^2 + H_3^{(1)} \vec{x}'_{(2)}{}^2 + H_3^{(1)} H_3^{(2)} \vec{y}'^2 \right) \quad (14)$$

D3 ブレーンの場合と比較をすると特徴的な振る舞いが見て取れる。すなわち運動量の 2 乗の前にはその運動量の方向の調和関数がかかり、 $\sigma$  微分の 2 乗の前には直交する方向の調和振動子がかかっている。この性質はいわゆる調和関数規則 [5] と呼ばれる D ブレーン背景時空の持つ構造によるものである。最後に調和関数  $H_3^{(a)} = 1 + \frac{g_{\text{st}} N_3^{(a)}}{|\vec{y}|^2}$  ( $a = 1, 2$ ) を代入するとこのハミルトニアンは以下のように書くことができる。

$$\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}_{\text{flat}} + \frac{g_{\text{st}} N_3^{(1)}}{2|\vec{y}|^2} \left( \vec{p}_{x(1)}^2 + \vec{x}'_{(2)}{}^2 + \vec{y}'^2 \right) + \frac{g_{\text{st}} N_3^{(2)}}{2|\vec{y}|^2} \left( \vec{p}_{x(2)}^2 + \vec{x}'_{(1)}{}^2 + \vec{y}'^2 \right) + \frac{g_{\text{st}}^2 N_3^{(1)} N_3^{(2)}}{4|\vec{y}|^4} \vec{y}'^2 \quad (15)$$

このハミルトニアンも  $g_{\text{st}}$  依存は簡単なものとなっている。参考文献 [3][4] と同様にこのハミルトニアンが閉弦の交換によって生じるかどうか、弦の世界面の立場から解析するのは今後の課題である。

## References

- [1] H. Kawai and T. Suyama, “AdS/CFT correspondence as a consequence of scale invariance,” Nucl. Phys. B **789** (2008) 209.
- [2] H. Kawai and T. Suyama, “Some Implications of Perturbative Approach to AdS/CFT Correspondence,” Nucl. Phys. B **794** (2008) 1.
- [3] M. Kruczenski, “Planar diagrams in light-cone gauge,” JHEP **0610** (2006) 085.
- [4] M. Kruczenski, “Summing planar diagrams,” JHEP **0810** (2008) 075.
- [5] A. A. Tseytlin, “Harmonic superpositions of M-branes,” Nucl. Phys. B **475** (1996) 149.