

超弦理論によるハドロンの記述¹

杉本茂樹

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)

目次

1	はじめに	1
2	Introduction	2
2.1	ハドロンとは?	2
2.2	クォークモデル	3
2.3	カラーと $SU(3)$	4
2.4	QCD とは?	7
2.5	弦理論とは?	8
2.6	String revolutions	9
2.7	D ブレインとは?	10
2.8	主張	11
3	ゲージ理論と QCD	12
3.1	ゲージ理論とは?	12
3.2	Maxwell 理論	13
3.3	Yang-Mills 理論	14
3.4	QCD	15
4	D ブレインと QCD	18
4.1	D ブレインとゲージ理論	18
4.2	QCD の構成	19
5	Gauge/String duality	21
5.1	Gauge/String duality とは?	21
5.2	Holographic QCD	21
6	弦理論によるハドロンの記述	22
7	様々な結果	24
7.1	注意	24
7.2	メソンの作用汎関数	25
7.3	5次元のゲージ場と4次元のメソン場の対応	26
7.4	メソンの質量	26
7.5	メソンの相互作用項	28
7.6	バリオンとインスタントン	30
8	まとめと展望	32

¹2011年12月3日に奈良女子大学で行われた第10回岡シンポジウムでの講演を基に書き下ろしたものです。

1 はじめに

タイトルにある「ハドロン」という言葉を聞いて、何を思い浮かべますでしょうか？素粒子の話で「なんとかオン」という名前が出てきたら多くの場合、粒子の名前を指します。何か聞きなれない名前なので、滅多にお目にかかることのないマニアックな粒子と思われてしまうかも知れませんが、そんなことはありません。あとでまた詳しく説明しますが、大雑把に言うと、ハドロンは原子の中心にある原子核に含まれる陽子や中性子といった粒子とその仲間たちのことです。私たちの体はもちろん、その辺にある物質はたいてい原子が大量に集まってできたもので、そのひとつひとつの原子の中に必ずハドロンが含まれているので、ハドロンはごくありふれた身近な存在であるとも言えます。

原子核の存在がラザフォードの実験で明らかにされたのは今から約 100 年前の 1911 年のことでした。この時から、原子核の内部で密やかに行われてきたハドロンの営みを暴いてやろうとする人々の挑戦が始まりました。1970 年代になって、ようやくハドロンの統一理論とも言うべき QCD と呼ばれる理論が整備されましたが、この QCD は大変な堅物で、やすやすとは秘密を教えてくださいません。現在でもまだまだ謎は多く、多くの研究者がハドロンに関する研究を行っています。

2004 年の暮れに、酒井忠勝氏との共同研究 [1] でこのハドロンを弦理論と呼ばれる理論によって記述する新しい方法を提案しました。ハドロンが QCD でほぼ完璧に記述されるという事実や、弦理論が量子重力を含む究極の統一理論の候補と言われているが、まだ実験で検証されていないということをご存知の方は「そんなアホな！」と思われるかも知れませんが、これから説明するように、これが実はかなりいけていて、私自身も弦理論の威力にとっても驚きました。この解説の主な目標は、この方法の基本的なアイデアと主な結果をできるだけ分かりやすく説明することです。

弦理論というと、Calabi-Yau 多様体だとか Mirror 対称性だとかそういった用語が飛び交い、数学的にも興味深い話になることを期待されている方もいらっしゃるかも知れないのですが、残念ながらそういう話は一切出てきません。今回の話はずぶずぶの物理です。なにせ、後半では実験データとかも出てきます。とはいえ、数学者の方々にとっても、馴染みのあるいくつかの数学的な概念が実験で観測される粒子の性質を説明するのに使われている様子を垣間見ることができたら、それはそれで楽しいのではないかと期待しています。また、ひよんなことから新しい数学を創るためのモチベーションやインスピレーションを与えるきっかけのそのまたきっかけにでもなったら、この上なくうれしいです。

シンポジウムの参加者の多くは数学者でしたので、物理の予備知識がなくても雰囲気だけでも理解して頂けるようにと努力してみました。しかし、やはり、論理的につながるように全てを説明することは私の力量では不可能で、どうしても説明抜きで認めて頂かないといけない部分が非常にたくさんあります。途中で出てくる数式や論理を逐一チェックしながら読もうとすると続かないと思いますので、良く分からない部分は軽く飛ばしつつ、お話として気軽に楽しみながら読んで頂けたら幸いです。

構成は次の通りです。まず、2 節は長いイントロダクションです。ハドロン、QCD、弦理論、D ブレインなどの重要なキーワードを歴史的なお話も交えながら説明してみました。良くご存知の方はこの節は飛ばして構わないと思います。あるいは、この節だけを読むという読み方をされて

も良いかも知れません。

3~6 節はシンポジウムのときに黒板を用いて説明した部分です。3 節は、ゲージ理論の説明から始めて、QCD がどんな理論なのかを 2 節よりも少しだけ詳しく説明しました。場の理論の心得のある方はこの節も飛ばして構わないでしょう。

4 節からがいよいよ本番です。ここで QCD を弦理論の中で実現する方法を説明し、5 節で QCD の曲がった時空における弦理論による記述を与えます。そして、この新しい記述を用いてハドロンがいかにして得られるかを 6 節で説明し、7 節でより詳しい解析結果はかいつまんで説明します。8 節はおまけです。

2 Introduction

2.1 ハドロンとは？

中学か高校の理科の時間を思い出すところから始めましょう。物質は原子からできているというのを習いましたね。原子にはさらに内部構造があって、中心に原子核という小さな塊があり、その周りを電子がぐるぐるまわっています。この原子核は陽子と中性子がいくつか堅く結びついて出来ているということも習いました。

しかし、この話、何かおかしいと思いませんか？陽子は正の電荷を持っている粒子です。正の電荷を持った粒子同士は反発するはずなのに、どうして原子核はばらばらにならないのでしょうか？この現象は電磁気力ではどう頑張っても説明できません。20 世紀の始めに原子核の構造が分かってくるにつれ、このことは当然、大きな問題となりました。

この問題に対する解答を与えたのが、日本人で最初のノーベル賞受賞者となった湯川秀樹さんです。湯川さんは 1935 年に、「中間子」と呼ばれる未知の粒子が存在し、その粒子が陽子や中性子の間を行き来することによって原子核を堅く結びつける力（核力）が生じるという理論を提唱しました。中間子が行き来するとなぜ力が生じるのかを直感的に説明するのは難しいのですが、2 つの粒子の間に力が働くためにはお互いの存在をお互いに伝えあう必要があって、中間子はその役割を担っているという具合に考えてください。核力は電磁気力よりも強いけれど、到達距離は非常に短いという性質があります。この到達距離は、中間子の質量が重ければ重いほど短くなります。力を伝える役割を果たす粒子が重いと、動くのがおっくうになるので遠くまで届かないというイメージです。湯川さんは核力の到達距離から中間子の質量を見積もり、その値が電子と陽子の質量の中間くらいであると予言しました。これが中間子という名前の由来です。1947 年になって予言の通りの性質を持った中間子がめでたく発見され、湯川理論の正しさが実証されました。

今回の話のタイトルにある「ハドロン」というのは、この陽子、中性子、中間子のように核力に参与する粒子の総称です。中間子は英語で「メソン」(meson) と呼ばれます。この方が呼び慣れているので、以下ではメソンと呼ぶことにしましょう。これに対して、陽子や中性子は「重い粒子」という意味が由来の「バリオン」(baryon) という名で呼ばれています。

これで核力の謎も解決し、めでたし、めでたし、となるかと思いきや、世の中はそんなに単純ではありませんでした。その後、観測や実験の技術の進歩に伴って、新しいハドロンが次々に見つかったのです。宇宙から降ってくる粒子を調べたり、粒子を人工的に加速してある標的にぶつ

けて出てくる生成物を調べたりしているうちに、バリオンの仲間もメソンの仲間も大量に見つかり、今では数百種類にも及ぶハドロンが見つかっています。

さて、こんなにたくさんの粒子が見つかってしまって、ハドロンの理論は一気に複雑になってしまいました。なぜ、こんなにたくさんのハドロンが存在するのでしょうか？すべてのハドロンを統一的に理解するもっとシンプルな原理はないのでしょうか？その答えが分かるまでにはかなり長い時間が必要でした。

2.2 クォークモデル

1964年、ゲルマンとツヴァイクは独立に画期的な理論を提唱しました。ハドロンにはさらに内部構造があり、実はもっと小さな粒子がいくつか集まってできている複合粒子であるという提案です。その小さな粒子は「クォーク」と名付けられ、彼らの提唱した理論はクォークモデルと呼ばれています。

クォークにはいくつか種類があって、現在のところ、アップ (u)、ダウン (d)、チャーム (c)、ストレンジ (s)、トップ (t)、ボトム (b) という名前の6種類のクォークが実験で見つかっています。この種類の違いを“フレーバー”と呼びます。これらのクォークの質量は、非常に大雑把に言うと、 u は陽子の400分の1程度、 d は陽子の200分の1程度、 s は陽子の10分の1程度、 c は陽子と同じ程度、 b は陽子の4倍程度、 t は陽子の200倍程度です。電荷は電気素量 (陽子の電荷) を $+1$ とする単位で測って、 u, c, t が $+2/3$ で、 d, s, b が $-1/3$ です。 u, d, s, \dots と書くのが面倒なときには、 $q_1 = u, q_2 = d, q_3 = s, \dots$ のように q_i ($i = 1, 2, 3, \dots$ はフレーバーを表す添え字) で表すことにします。これらのクォークのいろいろな組み合わせを考えることでいろいろなハドロンを構成しようというアイデアです。

具体例で説明しましょう。陽子はアップクォークが2つとダウンクォークが1つの合計3つのクォークがくっついてできたもので、中性子はアップクォークが1つとダウンクォークが2つのやはり合計3つのクォークでできています。(図1) 陽子の電荷を $+1$ とすると、アップクォークは $+2/3$ 、ダウンクォークは $-1/3$ の電荷を持っています。そう考えると、陽子の電荷が $+2/3 + 2/3 - 1/3 = +1$ 、中性子の電荷が $+2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$ のように計算されて、陽子と中性子の電荷 (それぞれ $+1$ と 0) が正しく導かれることが分かります。



図 1: クォークモデル

一方、メソンの例として、 π^+ メソンと呼ばれる電荷が $+1$ である粒子を考えましょう。この粒子はダウンクォークの反粒子である反ダウンクォークとアップクォークとがくっついて出来たものと考えられています。(図1) 反ダウンクォークというのは電荷が $+1/3$ で、ダウンクォークとは逆の符号の電荷を持っているのですが、電荷以外の性質はダウンクォークとそっくりそのま

までであるような粒子です。どんな粒子にもこのような反粒子という相棒が存在することが知られています。 π^+ メソンが反ダウクォークとアップクォークがくっついて出来たものだとすると、その電荷は $+1/3 + 2/3 = +1$ のように計算されて、 π^+ メソンの電荷 $+1$ を正しく再現します。

一般にバリオンはクォークが3つくっついてできたもの、メソンはクォークと反クォークがくっついてできたものです。このように考えることで、数百種類にも上るあらゆるハドロンが構成できるのです。

さて、それでは、クォークや反クォークを結びつける力はどのようにして生じるのでしょうか？なぜ、クォークはばらばらにならないのでしょうか？実は、クォークは非常に強い力で結びついています。この力はあまりにも強いために、クォークを単体で取り出すことは不可能であると考えられているほどです。この力の起源も、2.1 節で説明した湯川理論と同じように考えることができます。つまり、クォークの間にある粒子が行き来することによって、クォークを結びつける強い力が生じるのです。この強い力を媒介する粒子は「グルーオン」という名前の粒子で、のり付けするという意味の英語 “glue” にちなんで名付けられました。今、「強い力」と言いましたが、これがそのままこの力の正式名称として定着してしまいました。これから「強い力」と言ったらクォークを結びつける力のことを意味することにしますので、混乱しないようにして下さい。²

2.3 カラーと $SU(3)$

2.2 節で見たように、ハドロンは3つのクォーク、あるいはクォークと反クォークという組み合わせで現れました。このような組み合わせが現れるのはなぜでしょうか？実はこの事実は $SU(3)$ という群が背後に存在することを示唆するのです。

まず、普通の電荷の場合を思い出してみましょう。電荷はある値を単位として整数値をとります。そして、プラスの電荷を持つ粒子とマイナスの電荷を持つ粒子はお互いに引き合っ、電荷の合計がゼロになるようにくっついたがる性質がありました。少し唐突ですが、このことを敢えて次のように少しまどろっこしい言い方で言い換えてみます。電荷 $m \in \mathbb{Z}$ を持つ粒子があったら、その粒子に対して $\rho_m(e^{i\theta}) = e^{im\theta}$ となるような $U(1)$ の表現 $\rho_m : U(1) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を割り当てることにします。そして、電荷が $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ であるような n 個の粒子があったときには、対応する n 個の $U(1)$ 表現のテンソル積表現 $\rho_{m_1} \otimes \rho_{m_2} \otimes \dots \otimes \rho_{m_n}(e^{i\theta}) = e^{i(m_1+m_2+\dots+m_n)\theta}$ を割り当てます。そうすると、上で言った、「電荷の合計がゼロになるようにくっついたがる」ということは、「割り当てられた表現が自明な表現になるようにくっついたがる」と言い換えることができます。

クォークの場合は3つのクォーク、あるいはクォークと反クォークという組み合わせでくっついたがるという性質があります。この性質は電荷の場合とはずいぶん違って見えますが、上で $U(1)$ の表現を考えたところを $SU(3)$ で置き換えたものを考えると同じようにして理解することができます。 $SU(3)$ の定義表現 ($SU(3)$ の3次元表現) を ρ とし、その複素共役表現を $\bar{\rho}$ と書くことにします。クォークに対しては ρ を割り当て、反クォークに対しては $\bar{\rho}$ を割り当てます。クォークや反クォークがいくつもある場合には、上の $U(1)$ の場合に倣って、対応する $SU(3)$ の表現のテ

²2.1 節で出てきた核力も強い力と呼びますが、ここではクォークを結びつける力を指すことにします。

ソル積表現を割り当てます。例えば、クォークが3つある時には $\rho \otimes \rho \otimes \rho$ 、クォークと反クォークがある時には $\rho \otimes \bar{\rho}$ を割り当てることになります。少し考えてみると、 $\rho \otimes \rho \otimes \rho$ や $\rho \otimes \bar{\rho}$ は規約分解したときに自明な表現を含んでいることが分かります。このことから、クォークの場合には、 $SU(3)$ の表現が自明な表現になるような組み合わせにくっきたがるという性質があることが予想されます。

あとで少し使いたいので、これを物理の人が好む泥臭い書き方でもう少しだけ詳しく説明してみたいと思います。これから説明するいくつかのルールはもしかしたらとても人工的な印象を与えてしまうかも知れませんが、場の量子論の一般的な原理と 2.4 節で説明する QCD という理論の性質を認めると説明できるはずのことです。ここでは残念ながらそこまで詳しく説明する余裕がないので、少し単純化してルールの概要を与えるだけですませたいと思います。

まず、各クォークには3つの“カラー”があるとします。つまり、各クォーク q_i (i はフレーバーの添え字) には、実は q_i^a ($a = 1, 2, 3$) という3種類があるとします。カラーという呼び名は、色の3原色のたとえから来ています。 $a = 1, 2, 3$ という代わりに $a = \text{赤}, \text{緑}, \text{青}$ とすればそれっぽいのですが、あとで仮想的にカラーの自由度が N_c であるような場合も扱いたいので、 $a = 1, 2, 3, \dots, N_c$ のように数字でラベルすることにします。上で述べたフレーバーとは異なり、カラーが違って質量も電荷も全く同じなので、カラーの異なるクォークは異なる種類のクォークとは解釈せず、各クォークに3つの自由度があるという言い方をします。例えば、アップクォーク u には u^1, u^2, u^3 の3つがあるとします。

さらにいくつかの仮定をします。まず、各クォーク q_i に対応して、複素3次元のベクトル空間 $V_i \simeq \mathbb{C}^3$ を対応させます。³ここで V_i が3次元としたのは、カラーの自由度の3に対応しています。このベクトル空間の3つの成分を上のクォークと同じ記号を使って、 q_i^1, q_i^2, q_i^3 と表しましょう。そして、このベクトル空間 V_i に $SU(3)$ の元 g が

$$\begin{pmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \\ q_i^3 \end{pmatrix} \rightarrow g \begin{pmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \\ q_i^3 \end{pmatrix}, \quad (g \in SU(3)) \quad (2.1)$$

のように作用するとします。⁴反クォークにはこの V_i の複素共役で与えられるベクトル空間 \bar{V}_i を対応させます。 \bar{V}_i には $SU(3)$ が定義表現 (2.1) の複素共役表現で作用することになります。ここで、本質的ではありませんが、次のような記法を使わせて下さい。 $SU(3)$ の元 g は 3×3 の行列で、その (a, b) -成分を g_b^a ($a, b = 1, 2, 3$) と書くことにします。(2.1) で書いたことは

$$q_i^a \rightarrow g_b^a q_i^b, \quad (g = (g_b^a) \in SU(3)) \quad (2.2)$$

と書きます。ここで $g_b^a q_i^b$ に現れた g_b^a の下つきの添え字 b と、 q_i^b の上つきの添え字 b のように、同じ文字が上と下とに現れた時には、自動的に和を取ることにして、

$$\sum_{b=1}^3 g_b^a q_i^b \quad (2.3)$$

³本当はさらスピノルの自由度があるのですが、ここでは簡単のため省略することにします。

⁴以下、群の作用のところで $A \rightarrow B$ のように矢印を使いますが、これは A から B への写像を表すのではなく、 A を B に置き換える変換を表しています。

の意味だと解釈する約束にします。反クォークに対応する複素共役表現を考える時には q_i^a と添え字の上下を逆にして \bar{q}_a^i のように表記します。この場合、 $SU(3)$ の作用は

$$\bar{q}_a^i \rightarrow \bar{q}_b^j (g^\dagger)^b_a, \quad (g = (g^b_a) \in SU(3)) \quad (2.4)$$

と書くことができます。ここで、 $(g^\dagger)^b_a$ は g^\dagger (g のエルミート共役) の (b, a) -成分という意味です。

量子力学の原理によると、物理的な状態はあるヒルベルト空間の元と (定数倍を除いて) 一対一に対応しています。今の場合、そのヒルベルト空間 \mathcal{H} として、上の q_i^a や \bar{q}_a^i に対応したシンボル $\mathbf{q}_i^a, \bar{\mathbf{q}}_a^i$ の形式的な積

$$\mathbf{q}_{i_1}^{a_1} \mathbf{q}_{i_2}^{a_2} \cdots \mathbf{q}_{i_n}^{a_n} \bar{\mathbf{q}}_{b_1}^{j_1} \bar{\mathbf{q}}_{b_2}^{j_2} \cdots \bar{\mathbf{q}}_{b_m}^{j_m} \quad (2.5)$$

の全体が基底となるようなものを考えます。ここで、 $\mathbf{q}_i^a, \bar{\mathbf{q}}_a^i$ には

$$\mathbf{q}_i^a \mathbf{q}_j^b = -\mathbf{q}_j^b \mathbf{q}_i^a, \quad \bar{\mathbf{q}}_a^i \bar{\mathbf{q}}_b^j = -\bar{\mathbf{q}}_b^j \bar{\mathbf{q}}_a^i, \quad \mathbf{q}_i^a \bar{\mathbf{q}}_b^j = -\bar{\mathbf{q}}_b^j \mathbf{q}_i^a, \quad (2.6)$$

のように積が反可換になるような関係式が課されているものとします。そして、 \mathcal{H} には (2.2) や (2.4) に従って $SU(3)$ が作用することになります。(2.5) のような n 個の \mathbf{q} と m 個の $\bar{\mathbf{q}}$ の積の形の元の線形結合は、 n 個のクォークと m 個の反クォークがある状態に対応する \mathcal{H} の元と解釈します。

さて、前置きが長くなってしまいましたが、ここで「実験で観測される粒子は $SU(3)$ の作用で不変であるような \mathcal{H} の元に対応する」という仮説を立ててみます。これは、上で述べたように $SU(3)$ の表現が自明な表現になるような組み合わせであまりにも強力に結びついているため、必ずその組み合わせでしか観測されない、ということの言い換えです。これはクォークモデルが提案された当初は、理由は分からないけれどこう考えると実験と良く合う、という現象論的な仮説でした。今では、この事実は 2.4 節で説明する QCD という理論で説明することができると信じられています。ただ、これを解析的にきちんと示すのは非常に難しい問題で、未だに完全に理解されたとは言えません。何はともあれ、 $SU(3)$ の作用に関する不変性から何が言えるのかを考えてみましょう。

まず1つのクォークに対応する \mathbf{q}_i^a は (2.2) のように $SU(3)$ の作用で変換され、不変ではありません。これはクォークが単体で取り出すことができないという実験事実と対応しています。少し考えてみれば、

$$\bar{\mathbf{q}}_a^i \mathbf{q}_j^a, \quad (2.7)$$

$$\epsilon_{abc} \mathbf{q}_i^a \mathbf{q}_j^b \mathbf{q}_k^c, \quad (2.8)$$

$$\epsilon^{abc} \bar{\mathbf{q}}_a^i \bar{\mathbf{q}}_b^j \bar{\mathbf{q}}_c^k, \quad (2.9)$$

という組み合わせが $SU(3)$ の作用で不変であることが確認できます。(2.7) が不変であることは、(2.2) と (2.4) と $g^\dagger g = 1$ であることからすぐに分かります。これはクォークと反クォークとがくっついて出来た状態に対応するので、メソンと解釈されます。(2.8) や (2.9) に現れる ϵ_{abc} や ϵ^{abc} は $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = +1$ で、 a, b, c の添え字の入れ替えに関して完全反対称であるような定数です。 $\det g = 1$ であることから

$$\epsilon_{abc} g^a_{a'} g^b_{b'} g^c_{c'} = \epsilon_{a'b'c'} \quad (2.10)$$

という関係式が成立することに注意すれば、(2.8) と (2.9) も $SU(3)$ の作用で不変であることが分かります。(2.8) はクォークが3つ集まって出来た状態で、バリオンと解釈されます。同様に (2.9) は反バリオンです。もう少し考えてみると、一般に $SU(3)$ の作用で不変な組み合わせは、(2.7), (2.8), (2.9) の組み合わせの積の形で書かれるものに限られることも分かります。これは、観測されるハドロンがメソン、バリオン、反バリオンの形で現れるという実験事実と合致しています。

ちなみに、(2.6) のように反可換な代数を考えるべき粒子のことをフェルミオンと呼びます。つまりクォークはフェルミオンであることを仮定しています。また、理論的には可換な代数を考えるべき粒子の系も考えることができ、それはボソンと呼びます。上の構成法から、バリオンはフェルミオンでメソンはボソンであることが分かります。このことも実験と良く合います。

ここでは詳細に踏み込みませんが、クォークモデルは実験で観測されるハドロンの種類をうまく再現するだけでなく、質量、スピン、磁気モーメントなどの性質も含めて、実験とかなり良く合うことが分かり、ハドロンがクォークからできていることが信じられるようになりました。さらに、2.4 節で説明する QCD と呼ばれる理論の登場により、クォークとグルーオンの振る舞いを記述するより完全な理論が整備されました。

2.4 QCD とは？

QCD は 2.2 節で登場したクォークとグルーオンの理論です。これが強い力やハドロンの物理を記述するための基礎理論であると考えられています。日本語では量子色力学と呼ばれるのですが、英語名の Quantum Chromo Dynamics を略して QCD と呼ぶのが一般的なので、ここでもそう呼ぶことにします。もう少し具体的な話は 3.4 節でするので、ここではいくつかの特徴をお話しするにとどめたいと思います。

QCD は数百種類もあるハドロンをグルーオンといくつかのクォークだけを用いて統一的に記述する非常に美しい理論です。見た目は大変シンプルな理論なのですが、強い力と呼ばれるだけあって、力が大変強いので、解析が非常に難しく、実際にはハドロンの性質を計算で導くのは容易ではありません。実際、クォークを含めないグルーオンだけの理論 (Yang-Mills 理論) でも厳密な計算を行うことは大変難しいことで、この理論に関する問題がクレイ数学研究所から 100 万ドルの懸賞金がかけられたミレニアム懸賞問題の 1 つとなっているくらいです。現在、最も有効な方法は、4次元時空 \mathbb{R}^4 を有限個の点の集合で近似し、スーパーコンピュータを使ってガリガリ計算する方法です。この方法は、効率の良い計算方法の開発とコンピュータの性能の著しい向上によって、比較的軽いハドロンの質量などを精度良く計算することができるようになり、実験値をとっても良く再現することが示されています。また、ハドロンが壊れてしまうほどのエネルギーの高い現象に関しては、摂動論による近似的な計算が有効になる場合があり、様々な実験での実験データが理論計算と高い精度で一致します。

このようにして、現在では QCD がハドロンを記述する基礎理論として確立しています。クォークもグルーオンも単独では取り出すことができず、理論計算もひどく難しい理論であるというのに、人類がこの理論に到達できたのはすごいことだと、この理論を眺めるたびに感心します。

2.5 弦理論とは？

さて、ここで話をがらりと変えて、タイトルに含まれるもう1つのキーワードである「弦理論」についてお話ししましょう。⁵

究極にミクロな世界を見ることができたら、物質はどんな姿をしているだろう？という素朴な疑問を考えてみましょう。中学や高校の理科では、あらゆる物質は原子で出来ていて、原子は電子と陽子と中性子で出来ていると習いました。さらに、2.2節で見たように、陽子や中性子は3つのクォークから出来ていることが分かっています。現在のところ、電子やクォークはこれ以上内部構造のない大きさがゼロの点粒子だと考えられています。このような粒子のことを「素粒子」と言います。現在のところ、あらゆる物質はそうした素粒子の集合体であると考えられています。

さて、弦理論というのは、こうした素粒子を大きく拡大して見ると実は点粒子ではなく、ひも状をしているという仮説に基づく理論です。ただ、残念ながらまだ実験でひもが確認されている

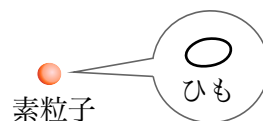


図 2: 素粒子を拡大して見るとひも状をしている

わけではなく、理論上の仮説です。もし、素粒子がひも状をしているとしても、現在の実験技術では点にしか見えないくらい、ひもの長さは非常に短いと考えられています。

そんなことを考えて何がうれしいのかというと、いろいろと奇跡が起こるのです。特に、著しい特徴は、あらゆる素粒子を統一的に記述する究極の統一理論になりうるということと、矛盾を含まない量子重力理論（ミクロな世界でも通用する重力理論）になりうることです。

現在知られている素粒子にはいろいろな種類があります。クォークだけでも6種類知られていて、それ以外にも電子、ミュー粒子、タウ粒子、ニュートリノ、光子、グルーオン、Wボソン、Zボソンなどの素粒子が実験的に確認されています。しかも、これだけで終わりではなく、重力子、ヒッグス粒子、ダークマターなど、まだ確認されていないけれど、存在すると思われている素粒子は他にもたくさんあります。なぜ、これだけの種類の素粒子が存在するのでしょうか？ひも理論のすごいところは、これらの素粒子が全部同じひもから出来ているという可能性を示唆するところです。同じひもでも、振動していたり、ぐるぐる回転していたり、いろいろな状態を考えることができます。ひもの長さが短ければ、これらは遠くから見ると点粒子に見えるわけですが、振動・回転のしかたが異なれば異なる性質の粒子に見えます。この世に存在するあらゆる素粒子は、全て同じひもなのだけれど、いろいろな振動・回転の仕方があるために、性質の異なるいろいろな種類の素粒子があるように見えるのだ、というわけです。

実際、ひもからどのような粒子が実現されるのかを調べてみると、なんと、重力を伝える役割を果たすと考えられる重力子と呼ばれる粒子が自然に組み込まれていることが分かりました。実

⁵弦理論、ひも理論、超弦理論、超ひも理論、のようないろいろな呼び名がありますが、皆、同じものです。強いて言えば「超」がつく弦理論は「超対称性」と呼ばれる特殊な対称性がある場合のことを指しますが、この解説で特に区別はせず、弦理論と言ったら超弦理論のことを指すことにします。

は重力を素粒子の理論に正しく組み込むことは長年物理学者を悩ませてきた難問なのです。一般に、素粒子の理論の中に重力を取り込もうとすると重力を伝える役割を果たす重力子という粒子の存在が予言されます。そして、素粒子の反応の確率などを計算するときには、途中でその重力子が生成されたり消滅したりするプロセスも考慮に入れて計算をするべきということになるのですが、通常の素粒子の場合の計算法をそのまま適用すると、計算の途中でどうしても除去できない無限大が生じてしまうのです。有限な実験値と比較するためには、無限大という答えではあまりにもひどすぎます。自然界に重力が存在することは誰が見ても明らかなので、これは何とかしなければいけない大問題でした。ところが、弦理論に基づく計算法を使うと、その無限大が奇跡的にキャンセルして有限になるのです。これは弦理論の著しい特長で、弦理論が魅力的な理論である大きな理由の1つです。

2.6 String revolutions

このように、弦理論は重力を含む素粒子の統一理論として望ましい特徴をいろいろ備えているのですが、もともとはそのような理論を構築しようとして考えだされたものではありませんでした。弦理論の歴史を振り返ると、紆余曲折を経て今の形になったことが分かります。

弦理論は1960年代の終わりから1970年代の始めにかけて、ハドロンの理論として誕生しました。2.5節で述べたような形で、1つのひもから様々な種類のハドロンを記述し得る可能性が期待されたのですが、いろいろと実験と食い違う結果が出てきてしまい、そうこうしているうちにQCDが確立したため、その方向では成就しませんでした。しかし、その後、上で述べたように、自然に重力子を含んでいて、しかも発散のないまともな理論となり得ることが分かり、量子重力理論としての可能性が拓けました。

その後、弦理論は少なくとも2回の革命的な大発展の時期を経験しました。これらの時期はそれぞれ first revolution, second revolution と呼ばれています。First revolution は1980年代中頃に始まりました。このころにヘテロティック弦理論という弦理論が発見されました。弦理論は時空の次元が10次元（時間が1次元で、空間が9次元）であることを予言するのですが、この10次元時空が、我々が日常生活を営んでいる4次元時空と、とても小さく丸まったコンパクトな複素3次元の Calabi-Yau 多様体の直積で与えられると仮定すると、重力以外の力を統一する理論として有望視されている大統一理論と呼ばれる理論が自然な形で実現されていることが見いだされました。これはかなり奇跡的なことで、こんなことが偶然であろうはずはないと、当時の多くの人々は思ったのではないかと思います。このように、弦理論は first revolution を経て大きく成長し、全ての素粒子を統一し、重力を矛盾なく取り込んだ究極の統一理論の候補と考えられるようになりました。

さて、これで弦理論の基本的な路線は定まったのかというと、実はそうはなりません。First revolution の約10年後、1990年代中ごろに始まった second revolution と呼ばれる大発展の中でD ブレイン、M 理論、gauge/string duality といった新しい概念が相次いで発見され、弦理論の思わぬ理論的構造が明らかにされるとともに、弦理論の可能性が一気に広がりました。例えば、弦理論を使って様々なゲージ理論を構成することができるようになり、弦理論を用いたゲージ理論の全く新しい解析法が見出されました。ゲージ理論が何かについては3.1節で説明します

が、2.4 節で登場した QCD もその一種です。この解説の後半では、この second revolution から得られた新しいテクニックを QCD に応用し、弦理論を使ってハドロンの性質を解析する研究についてお話したいと思います。

2.7 D ブレインとは？

あとでもう少し詳しくお話しますが、先ほど、ちらりと出てきたキーワードの1つである D ブレインが何者なのかをここで少しだけ説明しておきましょう。2.5 節で説明したように、弦理論は物質の最も基本的な構成要素が素粒子ではなく、ひも状の物体であるとする理論です。しかし、この理論を詳しく調べてみると、図 3 に描いたような膜状の物体も存在することが分かったのです。この膜のことを D ブレインと呼びます。図 3 では、膜に境界があるかのような描き方になっ

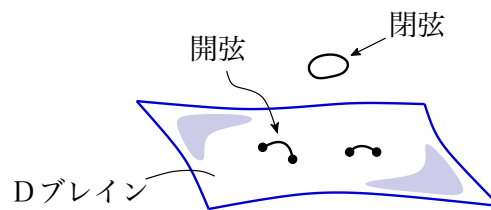


図 3: 開弦、閉弦、D ブレイン

ていますが、実際には無限に広がっているか、丸まっているかして、境界のない多様体をなしているとします。そして、この D ブレインは開弦の端点に乗ることが許される空間として特徴づけられます。「ブレイン」というのは「膜」を表す英語 membrane から来ていて、「D」は、ひもの端点が Dirichlet 境界条件を満たすことから付けられました。今、「膜」と言いましたが、D ブレインの次元はいろいろなものがあって、必ずしも膜と呼ぶにふさわしいものばかりではありません。一般に時間方向の 1 次元と空間方向の p 次元に広がった D ブレインのことを Dp ブレインと呼びます。 $p = 0$ のときには点粒子、 $p = 1$ のときにはひも状をしているので、それぞれ D-particle、D-string などと呼ぶこともあります。

どのような D ブレインが存在するのかは理論によって異なります。これまで特に触れませんでした、実は弦理論にはいろいろなタイプのものがあります。特に平坦な時空が安定に存在し得る弦理論は 5 種類知られていて、それぞれタイプ I、タイプ IIA、タイプ IIB、ヘテロティック $SO(32)$ 、ヘテロティック $E_8 \times E_8$ などと呼ばれています。これらはどれも時空の次元が 10 次元であることを予言します。D ブレインが存在できるのはこのうちのタイプ I、タイプ IIA、タイプ IIB の 3 種類です。安定な Dp ブレインはタイプ I では $p = 1, 5, 9$ 、タイプ IIA では p が偶数、タイプ IIB では p が奇数のときに存在することが知られています。

2.8 主張

さて、これでイントロダクションがだいたい終わったので、以下の節で何が議論される予定なのかをここで簡単にまとめておこうと思います。この解説の最終的な目標は次の主張を説明することです。「弦理論を用いることによって、クォークを用いない新しいハドロンの記述法が得られる。」2.4 節で、ハドロンを記述する基礎理論として、クォークやグルーオンからなる QCD という理論が確立していると言いました。ここでの主張は、この QCD が間違っているというわけではなく、QCD と同じ内容の物理を、(ある曲がった時空における) 弦理論を考えることでも記述することができるというものです。例として、メソンとバリオンが弦理論の記述ではどのような形で表されるのかを絵に描いたのが図 4 です。この図のように、メソンとバリオンはそれぞれ開



図 4: メソンとバリオンの対応

弦と D ブレインとして表されます。6 節で説明するように、このバリオンを表す D ブレインには図のように開弦が 3 本くっついていなければならないという条件が導かれます。図 4 の左右を見比べて頂ければ分かるように、絵的にも良く似た形のもの同士が対応しています。

また 5 節で説明しますが、この QCD と弦理論の間の対応は gauge/string duality と呼ばれる、ゲージ理論と弦理論の間の双対性 (duality) の一例となっています。双対性というのは、一見、全く異なるように見える 2 つの理論が物理的に等価になる性質のことを言います。そのような例は古くからいろいろ知られていたのですが、ゲージ理論と弦理論の間に双対性が成立するとは思ってもよらないことだったので、1997 年に gauge/string duality が Maldacena によって唱えられた時には、人々は大きなショックを受けました。ただし、この gauge/string duality はまだ予想であって、ちゃんとした証明はありません。数学者に認めてもらえるレベルの厳密な証明が与えられていないのはもちろんですが、厳密性にそれほど拘らないような物理学者から見ても、まだ満足の行く説明が与えられておらず、さまざまな状況証拠を集めて、この主張が正しそうだということを手さぐりで調べている段階です。とはいえ、超対称性や共形対称性と呼ばれる対称性があり、理論の構造が調べやすいような例では、膨大な数の非常に非自明な状況証拠があるために gauge/string duality が成立することはほとんど疑いようのないことと考えている人が多いと思います。QCD のように超対称性や共形対称性のないゲージ理論では、ゲージ理論と弦理論の双方の計算を実行して比較することが容易ではないため、まだ状況証拠はそれほど多くはないのですが、そもそも gauge/string duality が成立すると予想する根拠となる議論には超対称性や共形対称性は本質的ではないので、そのような場合にも適用できると考えるのは自然です。特に、QCD の場合、QCD における難しい計算を実行しなくても、直接、弦理論による計算結果を実験値と比較することが可能になるのが大きな利点です。

何はともあれ、gauge/string duality に基づく議論を認めて、これを QCD に応用すると、ハド

ロンの質量や相互作用の強さなど、実験値と比較し得るいろいろな量を弦理論を用いて計算することが可能になります。2.4 節で触れたように、QCD を使ってハドロンの振る舞いを解析することは一般に非常に難しい問題なのですが、弦理論を用いると、大ざっぱな近似計算なら手計算と Mathematica を少々使う程度で簡単に計算できてしまうのです。そして、7 節で示すように、その計算結果は実験値とかなりうまく合うことが分かります。

2.6 節で少し触れましたが、弦理論はもともとハドロンの理論として誕生した理論でした。それが重力理論になり、統一理論になり、いろいろと紆余曲折を経た結果、再びハドロンの理論とつながったこととなります。弦理論が誕生した頃にはハドロンの理論としてはうまくいかなかったわけですが、その当時の困難は D ブレインとか gauge/string duality という新たな道具立てによって解消されるのです。ただし、昔の問題を解決するべく人々が努力をしてきた結果として D ブレインやら gauge/string duality という概念が出てきたわけではなく、これらは弦理論の理論的な構造を詳しく調べて行くうちに見つかったものです。2.6 節でも見たように弦理論の歴史を振り返ると、必ずしも人々が思い描いていた方向性に沿って発展してきたわけではなく、何度も人々を良い意味で裏切ってきました。そこが弦理論の大きな魅力であり、なんとも不思議なところです。

3 ゲージ理論と QCD

3.1 ゲージ理論とは？

ここで、ゲージ理論をごく簡単に紹介しましょう。数学用語で言えば、ベクトル束とその上の接続を考えることになるのですが、今回の話では特にそういった道具立てが必要となることは出てこないのです。敢えて物理の人たちが好む泥臭い方法で導入します。

ここでは 4 次元時空 (時間 1 次元と空間 3 次元の多様体) M の上に定義されたゲージ理論を考えます。曲がった時空を考えることもできますが、ここでは簡単のため、時空は単に平坦な $M = \mathbb{R}^4$ とします。ゲージ理論を考えるには、まずゲージ群と呼ばれる群 G を指定します。通常はコンパクトなリー群を選びます。何でも良いのですが、ここでは $G = SU(N) := \{g \in N \times N \text{ 複素行列} \mid gg^\dagger = 1, \det g = 1\}$ としましょう。ここで \dagger はエルミート共役を意味します。そして、リー群 G に付随するリー代数を \mathfrak{g} と書くことにします。特に $G = SU(N)$ のときには $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N) := \{X \in N \times N \text{ 複素行列} \mid X + X^\dagger = 0, \text{Tr } X = 0\}$ になります。それから、 $\mathcal{G} := \{g : M \rightarrow G\}$ とおきます。

そして、 A を \mathfrak{g} に値を持つ M 上の 1-form とします。要するに A は各成分が M 上の 1-form であるような $N \times N$ の複素行列で、 $A + A^\dagger = 0$ と $\text{Tr } A = 0$ を満たすものです。この A のことをゲージ場と呼びます。このゲージ場に対して、先ほど用意した \mathcal{G} の元 g による

$$A \rightarrow gAg^{-1} + gdg^{-1}, \quad g \in \mathcal{G} \tag{3.1}$$

という変換を考え、これをゲージ変換と呼びます。これによって、ゲージ場の全体には \mathcal{G} が作用していることとなります。なぜ、こんな変な変換を考えるのかは、また 3.4 節で説明するので、ここではお約束と思って下さい。

ゲージ理論というのは、ここで出てきたゲージ場のように G が作用するような“場”が登場する理論で、素粒子の質量や反応の確率などのように、実験値と比較し得るような物理量がすべてこの G の作用で不変になるように構成された理論のことを言います。このように理論が「 G の作用で不変になる」ということを「ゲージ不変である」と言ったり、「ゲージ対称性がある」という言い方をしたりもします。ゲージ理論の構成法の一般論を説明しだすと長くなるので、以下の 3.2~3.4 節で簡単で重要な具体例を用いて特徴を説明したいと思います。

3.2 Maxwell 理論

最も簡単なゲージ理論は電磁場を記述する Maxwell 理論です。これは $G = U(1)$ をゲージ群として、作用汎関数⁶ $S(A)$ が

$$S(A) = \int_M F \wedge *F \quad (3.2)$$

で与えられる理論です。ここで、 F は $G = U(1)$ の場合には単に A の外微分 $F := dA$ のことで、field strength と呼ばれています。 $*F$ は F の Hodge dual です。この作用汎関数が有限になるように、暗黙のうちに F は遠方で十分早くゼロになることが仮定されています。ここで詳しく説明する余裕はありませんが、作用汎関数が与えられると、その理論にどんな粒子が存在して、それらの間にどのような力が働くのかなど、物理の理論を指定するために必要な情報が全て定まる仕組みになっています。

例えば、ゲージ場 A が従うべき運動方程式は、作用汎関数を変分することで得られます。具体的には、作用汎関数 (3.2) の中でゲージ場 A に微小な 1-form ϵ を加えて $A + \epsilon$ に置き換えて

$$S(A + \epsilon) = S(A) + 2 \int_M \epsilon \wedge d(*F) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.3)$$

としたときに、 ϵ について 1 次の項が任意の ϵ についてゼロになるための条件

$$d(*F) = 0 \quad (3.4)$$

が運動方程式です。この (3.4) と、 $F = dA$ と書かれたことからすぐに従う

$$dF = 0 \quad (3.5)$$

の 2 つの式が Maxwell 方程式と呼ばれる式です。

F はゲージ変換 (3.1) のもとで不変であることがすぐに分かるので、作用汎関数 S もゲージ不変になります。このように作用汎関数がゲージ不変になるようにしておくと、ゲージ不変な理論を構成することができるのです。⁷ 例えば、作用汎関数がゲージ不変であることから、運動方程式 (3.4) がゲージ不変であることが自動的に従います。

⁶ 普段は、単に“作用”と呼びますが、“群の作用”のような言葉づかいと区別するため、ここでは“作用汎関数”と呼ぶことにします。

⁷ 作用汎関数がゲージ不変でも、量子論的な効果でゲージ不変性が破れてしまうアノマリーと呼ばれる現象が起こる場合があるので注意が必要です。今回はアノマリーが生じるゲージ理論は登場しないので、あまり気にしないことにします。

この Maxwell 理論は、電磁場を記述する理論です。M の座標を x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) (x^0 が時間で、 x^i ($i = 1, 2, 3$) が空間の座標) として先ほど出てきた field strength F を

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.6)$$

と書くと⁸、その成分 $F_{\mu\nu}$ のうち独立なものは全部で 6 成分ありますが、 F_{0i} ($i = 1, 2, 3$) の 3 成分が電場で、 F_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) の 3 成分が磁場を表しています。電場と磁場が波打って進む電磁波は、Maxwell 方程式 (3.4), (3.5) の解として得られます。光も電磁波なので、この Maxwell 理論で記述されることとなります。さらに、20 世紀になって、光には粒子的な性質もあることが分かってきました。実際に光を精密に観測すると、光の粒を一粒一粒観測することができます。この光の素粒子を「光子」(英語でフォトン) と呼びます。

3.3 Yang-Mills 理論

Maxwell 理論はゲージ群が $U(1)$ の場合でしたが、これを 3.1 節で登場したような一般のコンパクトリー群に拡張したのが Yang-Mills 理論です。Maxwell 理論に倣って、ゲージ不変な作用汎関数を構成したいわけなのですが、少し工夫が必要です。まず、field strength を、ゲージ場の単なる外微分ではなく、

$$F := dA + A \wedge A \quad (3.7)$$

と定義します。こうしておくとゲージ変換 (3.1) のもとで

$$F \rightarrow gFg^{-1} \quad (3.8)$$

のように変換することになります。これさえ気づいてしまえばあとは簡単で、(3.2) の自然な拡張として

$$S(A) = \int_M \text{Tr}(F \wedge *F) \quad (3.9)$$

という作用汎関数を考えれば、ゲージ不変になることが分かります。

現在のところ、素粒子の間に働く基本的な力は重力、電磁気力、強い力、弱い力の 4 種類知られています。重力はいろいろな意味で他の力とは異質なのですが、他の 3 つの力はここで議論したようなゲージ理論で記述されることが知られています。ゲージ群は、電磁気力に対しては 3.2 節で議論したように $U(1)$ で、弱い力は $SU(2)$ 、強い力は $SU(3)$ です。さらにこれら 3 つの力を統一する理論と期待されている大統一理論は、上記の $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ を含む 1 つの単純群をゲージ群とするような理論です。具体的には $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 のような群をゲージ群として持つ理論が提案されています。これらの理論に関するゲージ場の作用汎関数はどれも (3.9) の形で書かれることが知られています。

⁸ここでも、上付きの添え字と下付きの添え字に同じ文字が現れたら足し上げる記号が省略されているものとするというルール (アインシュタインの規約) を採用しています。(3.6) は詳しく書くと $F = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ という意味です。以下でもこのルールを使うので注意してください。

3.4 QCD

先ほど強い力という力があつて、それを記述する理論は $SU(3)$ をゲージ群として持つようなゲージ理論であると言いました。この強い力というのは 2.2 節で説明した、クォークを結びつける働きをする力のことです。そして、この $SU(3)$ は 2.3 節で議論した $SU(3)$ と同じものです。3.3 節で説明した Yang-Mills 理論で $G = SU(3)$ とし、さらにクォークを組み込んだ理論が QCD と呼ばれる理論です。

3.2 節の最後に、ゲージ群が $U(1)$ の場合のゲージ場の波（電磁波）が粒子的な性質も持っていて、光子という粒子として観測されるということを言いましたが、これと同じように、今の $SU(3)$ の場合のゲージ場にも対応する粒子があります。これが 2.2 節で登場したグルーオンと呼ばれる粒子です。

このように、波が粒子のような性質を示したり、粒子が波のような性質を示すということは、量子力学の基本原理の 1 つで、どんな粒子に対しても成り立ちます。例えば、2.2 節でクォークは粒子だと言いましたが、これも波としての性質を備えています。光子やグルーオンの場合、ゲージ場が波動方程式に従って波打つのですが、クォークの場合には“クォーク場”という“場”が波打つことになります。

一般に、物理学者が“場”と呼ぶものは、大ざっぱに言うと、時空の多様体 M の上の各点で値が定まるもののことで、具体的には M 上の関数であったり、あるベクトル束の section だったり、接続だったり、いろいろな種類があります。その種類が異なれば、異なった性質を持った粒子を表すことになります。そして、そうした場がどのように波打つのかを定める運動方程式は作用汎関数を与えることによって決まります。作用汎関数は通常、(3.9) のように、いくつかの場の積から構成される M 上の実関数を M 上で積分した形で与えられます。一旦、その作用汎関数が与えられたらあとはいろいろな素粒子の反応の起こる確率などを計算する一連の手続きが知られています。この理論体系を場の量子論と呼んでいます。

クォーク場の場合は、(2.1) で考えた $SU(3)$ の定義表現の表現空間である複素 3 次元のベクトル空間 V_i の元の各成分 q_i^a ($a = 1, 2, 3$) を M 上の関数に格上げしたものを考えます。もう少しましな言い方をすると、クォーク場 q_i は、4次元時空 M を base とし、2.3 節で登場した V_i が fiber で、構造群が $SU(3)$ であるようなベクトル束の section ということになるのですが、ここでは $M = \mathbb{R}^4$ な場合しかやらないので、単に q_i は M から V_i への写像と思ってしまうことにします。

このとき、クォーク場 q_i にはやはり (2.2) で考えたような $SU(3)$ の作用を考えるのですが、 q_i が M から V_i への写像になったことに伴って、(2.2) にある g も M の各点で値が滑らかに変わって構わないとしてみます。つまり、3.1 節で考えた $\mathcal{G} = \{g : M \rightarrow SU(3)\}$ が

$$q_i \rightarrow gq_i, \quad (g \in \mathcal{G}), \quad (3.10)$$

のように作用する場合を考えてみます。この変換をクォーク場のゲージ変換と呼びます。

ここで、 g が M の座標に依存して良いとしたことで、 q_i の外微分 dq_i に対して (2.2) の変換を施すと

$$dq_i \rightarrow d(gq_i) = gdq_i + (dg)q_i \quad (3.11)$$

のように dq_i の変換の仕方は単に g を掛けるだけではすまなくなります。これは、後で見るように、ゲージ不変な作用汎関数を構成するときに障害となります。そこで、

$$A \rightarrow gAg^{-1} + gdg^{-1} \quad (3.12)$$

のように変換される 3×3 の反エルミート行列に値を持つ 1-form A を導入し、作用汎関数に登場する q_i の微分 dq_i の部分を

$$Dq_i := (d + A)q_i \quad (3.13)$$

で定義される“共変微分”に置き換えることにすれば、

$$(d + A)q_i \rightarrow (d + gAg^{-1} + gdg^{-1})gq_i = g(d + A)q_i \quad (3.14)$$

のように、 $Dq_i \rightarrow gDq_i$ と変換されることが分かります。

今、クォーク場の微分を G の作用のもとで素直に変換するように修正するために、(3.12) のように変換する場 A を導入しましたが、これはまさしく 3.1 節で考えたゲージ場そのものです。今のクォーク場のように、リー群が作用するような場が登場する理論を考えようとするとき、その群の作用が時空の各点で異なるようにして良い場合を考えるのは物理的に割と自然なことだと思います。そうでなければならぬというわけではありませんが、場が時空の座標に依存しているのに、それに作用する群の元が座標に依存しないなんて、なんとなく不公平な感じがしてきませんか？そう考えて、 G ではなく、 G が場に作用することにすると、ここでたどったような議論によってゲージ場 A が導入されることになるわけです。そして、ゲージ場が導入されると、それに対応する粒子（ゲージ粒子）の存在とその粒子が媒介する力の存在が予言されることになります。このように理論にゲージ対称性があることを要請すると、それに付随した力の存在やその力を媒介する粒子の存在が導かれるというところが大変面白いところだと思います。

以上の議論は、ゲージ群が一般のコンパクトリー群 G で、クォーク場が G の一般の表現に従って変換されるような場合や、 M が曲がった時空である場合などへ拡張することも容易です。4 節以降の議論の中では、ゲージ群が $SU(3)$ ではなく、少しだけ一般化して、 $SU(N_c)$ の場合を扱うことになるので、以下ではゲージ群は $G = SU(N_c)$ であるとし、上で出てきた V_i は複素 N_c 次元のベクトル空間であるとし、また、クォークも N_f 種類ある場合を考えることにして、クォーク場の q_i^a のカラーの添え字 a とフレーバーの添え字 i はそれぞれ $a = 1, 2, \dots, N_c$ と $i = 1, 2, \dots, N_f$ という値を取ることにします。このとき QCD の作用汎関数は

$$S(A, q) = \int_M \text{Tr}(F \wedge *F) + \int d^4x \bar{q}^i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) q_i \quad (3.15)$$

のように書かれます。ここで、 $\partial_\mu + A_\mu$ は共変微分 $D = d + A = (\partial_\mu + A_\mu)dx^\mu$ ($\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$) の成分で、 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は Dirac のガンマ行列と呼ばれる 4×4 の行列です。実は、今まで黙っていましたが、クォーク場の各成分 q_i^a は単なる複素数ではなく、 \mathbb{C}^4 の元なのです。この \mathbb{C}^4 の元のことを Dirac スピノルと言います。 γ^μ はその \mathbb{C}^4 に掛かる行列です。具体的には

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3.16)$$

$$1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

のように与えられます。また \bar{q}^i は

$$\bar{q}^i = (q_i)^\dagger \gamma^0 \quad (3.18)$$

で定義されます。ここで $(q_i)^\dagger$ は q_i を $V_i \otimes \mathbb{C}^4$ の元として転置して複素共役を取ったものです。ここではあまり関係ないので詳しい説明は省きますが、このようにスピノルという概念を持ち出すのは、特殊相対性理論の要請であるローレンツ対称性という対称性を保つための仕掛けです。

(3.10) と (3.14) から、ゲージ変換 $g \in \mathcal{G}$ の作用のもとで

$$\bar{q}^i \rightarrow \bar{q}^i g^\dagger, \quad (\partial_\mu + A_\mu)q_i \rightarrow g(\partial_\mu + A_\mu)q_i, \quad (3.19)$$

のように変換されるので、

$$\bar{q}^i (\partial_\mu + A_\mu)q_i \quad (3.20)$$

という組み合わせはゲージ不変になることが分かります。このようにして、(3.15) の QCD の作用汎関数はゲージ不変になるように作られました。

ゲージ不変になるべし、という要請だけだと、他にもいろいろな項を付け加える余地があると思われるかも知れませんが、実はそれほどたくさんはありません。いろいろな物理量を計算したときに発散を生じないまともな理論となりうるためには、さらに繰りこみ可能性という条件を課すことになります。そうすると、(3.15) の他に許されるのは

$$\int d^4x \bar{q}^i q_j, \quad \int_M \text{Tr}(F \wedge F) \quad (3.21)$$

の形の項の線形結合しかないことが分かります。(3.21) のうちの前者はクォークの質量を考慮に入れる時に必要になる項です。後者のような項は理論的にはあっても良いのですが、実験的にその存在は確認されておらず、あったとしても非常に小さいことが分かっています。今回の話ではこれらの項の効果は考えないことにします。

2.1~2.4 節でお話したように、QCD は数百種類もあるハドロンを正しく記述する理論であると考えられています。ひとつひとつのハドロンに対応する場を導入して場の理論を作り、その作用汎関数を書き下そうとすると、見るも無残なひどく複雑なものになります。全ての項を書き下そうとすると、コンパクトにまとめた記法を使ったとしてもとても 1 ページでは収まりませんし、実験で決めるしかないパラメータがわんさか出てきます。そんな複雑なハドロンの世界が (3.15) のようなたった一行の作用汎関数で定義される理論で記述できてしまうというのは驚くべきことです。2.4 節で QCD が美しい理論だと強調したのはこのためです。

4 D ブレインと QCD

4.1 D ブレインとゲージ理論

さて、話を弦理論に戻しましょう。前節で準備したゲージ理論が 2.7 節でやや唐突に登場した D ブレインを考えることで実現されるということをもっと説明したいと思います。

2.5 節でお話したように、ひもの長さが非常に短いと、遠くから見て我々にはひも状をしていることを認識できず、点粒子であるかのように見えます。どのような粒子が実現されるのかは、ひもの運動を量子力学の手法を使って解析することで分かるのですが、結構複雑なので、ここでは結果だけを述べます。

2.5 節で、ひもから生じる粒子の中に重力子が含まれていることについて触れましたが、これは図 3 の中で閉弦と書いた、端のない輪っかになったひもから生じるものです。一方、D ブレインがあると、そこに端点を持つような開弦が存在できます。その開弦から生じる粒子を調べてみると、実は 3 節で議論したゲージ粒子が生じることが分かるのです。このゲージ粒子は、D ブレインにへばり付いている開弦から生じたものなので、D ブレイン上は自由に動き回ることができても、D ブレインを離れることはできません。従って、D ブレインの空間方向の次元が p である Dp ブレインを考えた場合には、 $(p+1)$ 次元の時空に定義されたゲージ理論が Dp ブレインの上に実現されることになります。

次に、D ブレインが図 5 のように N 枚重なっている状況を考えてみましょう。 N 枚の D ブレインを区別するために $1, 2, \dots, N$ の番号を付けて、ラベルすることにします。図 5 では N 枚の

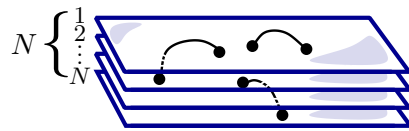


図 5: N 枚の D ブレイン

D ブレインが離れているような絵を描きましたが、ぴったり重なっている状況を想像してください。この時、 a 番目の D ブレインから出発して b 番目の D ブレインで終わっているような開弦を（ここだけの用語として）「 a - b 弦」と呼ぶことにしましょう。ここで $a, b \in \{1, 2, \dots, N\}$ です。また、ひもには向きがあるので、 a - b 弦と b - a 弦は区別します。上で述べたように、それぞれの開弦からゲージ粒子が 1 つ生じます。 a - b 弦から生じるゲージ粒子に対応するゲージ場を A_b^a と書くことにしましょう。この A_b^a を行列 $A = (A_b^a)$ の (a, b) 成分とみなすと、 A は $N \times N$ 行列になります。このことからなんとなく予想できると思いますが、もう少し詳しい解析をすると、このゲージ場 A はゲージ群が $U(N)$ である場合のゲージ場であることが示せます。こうして、 $U(N)$ をゲージ群として持つようなゲージ理論が D ブレイン上に実現されました。

4.2 QCD の構成

3.4 節で説明した QCD を実現するにはもう一工夫必要です。我々が [1] で提案した D ブレインの配置は以下のような感じですが、まず、10 次元の平坦な時空 \mathbb{R}^{10} を考え、その座標を (x^0, x^1, \dots, x^9) とします。 x^0 が時間方向で、 $x^{1 \sim 9}$ が空間方向の座標です。このうち、 x^4 方向を $x^4 \sim x^4 + 2\pi R$ という同一視をして半径 R の S^1 に丸めます。つまり、 $M \times S^1 \times \mathbb{R}^5$ という時空を考えます。ここで $M = \mathbb{R}^4$ が $x^{0 \sim 3}$ の方向で、 \mathbb{R}^5 が $x^{5 \sim 9}$ の方向です。この時空に N_c 枚の D4 ブレインと N_f

枚の D8 ブレインと N_f 枚の $\overline{\text{D8}}$ ブレインを表 1、図 6 のように配置します。ここで、 $\overline{\text{D8}}$ ブレインは D8 ブレインを 180 度くると回して裏返したものです。 $\overline{\text{D8}}$ ブレインは物体としては D8 ブレインと同じものなのですが、単に向き付けの違いを区別するためのに、一方を D8 ブレイン、もう一方を $\overline{\text{D8}}$ ブレインと呼んでいます。表 1 は、D ブレインが広がっている方向と広がっ

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
$\text{D4} \times N_c$	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
$\text{D8-}\overline{\text{D8}} \times N_f$	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○

表 1: QCD を実現する D ブレインの配置

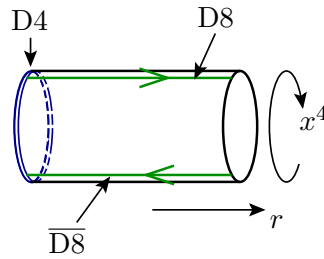


図 6: QCD を実現する D ブレインの配置

ていない方向をそれぞれ ○ と × で表した表です。D4 ブレインは $M \times S^1$ の方向、D8 ブレインは $M \times \mathbb{R}^5$ の方向に広がっています。図 6 は S^1 の方向 (x^4) と、 \mathbb{R}^5 を極座標表示したときの動径方向 (r) を描いた図です。 $r = 0$ のところに D4 ブレインを置き、D8 ブレインと $\overline{\text{D8}}$ ブレインをそれぞれ $x^4 = 0$ と $x^4 = \pi R$ の位置に配置します。

こうすると、まず、4.1 節で説明したように D4 ブレインの上に $U(N_c)$ がゲージ群であるようなゲージ理論が実現されます。このゲージ理論は D4 ブレインが広がっている 5 次元の時空 $M \times S^1$ の上に定義されていますが、低エネルギーの物理現象を扱う場合には、 S^1 の方向を無視して近似的に 4 次元時空 M におけるゲージ理論とみなすことができます。このようにして、低エネルギーでゲージ群が $U(N_c)$ であるような 4 次元の Yang-Mills 理論を実現するようなセットアップができました。細かいことを言うと、実は、D4 ブレインの上にはゲージ場以外にもいろいろな場が出てくるのですが、そのうちのフェルミオン場に対して S^1 の方向に反周期境界条件を課すことで、低エネルギーではゲージ場のみが生き残るようにすることができます。このゲージ場に対応する粒子がグルーオンと解釈されることになります。

さらに、D8 ブレインや $\overline{\text{D8}}$ ブレインが D4 ブレインと交差するように配置されています。こうすると、D4 ブレインと D8 ブレイン ($\overline{\text{D8}}$ ブレイン) をつなぐような開弦が存在できます。ここでもまた導出は省略しますが、このような開弦からどのような粒子が生じるのかを調べてみると、今度はゲージ粒子ではなく、クォークに対応する粒子が出てくることが分かります。図 7 のように、 a 番目の D4 ブレインと i 番目の D8 ブレインをつなぐ開弦から出てきたクォークを q_i^a と表すことにすると、 a がカラーの添え字、 i がフレーバーの添え字に対応していることが分かりま

す。D8 ブレインと $\overline{D8}$ ブレインが必要なのは、クォークと反クォークの自由度を含めるため、こうすると q_i^a が正しく Dirac スピノルとして振る舞うようになります。

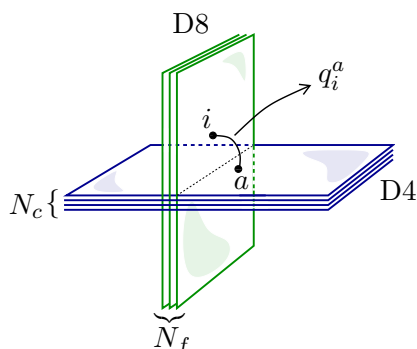


図 7: 交差した D ブレイン

かなり端折った説明でしたが、これでめでたくグルーオンとクォークがそろって、弦理論の枠内に QCD が実現しました。ゲージ群が $U(N_c)$ で、3.4 節で議論した $SU(N_c)$ と微妙に異なりますが、 $U(N_c) = U(1) \times SU(N_c)$ の $U(1)$ 部分から生じる力の強さは低エネルギーでは弱くなる性質があり、あまり重要ではないので、気にしないことにします。とにかく、D ブレインをいくつかうまく配置すると、低エネルギーで QCD を実現するようなセットアップを考えることができ、これでもって、弦理論を用いて QCD を解析する道が拓けることになります。

5 Gauge/String duality

5.1 Gauge/String duality とは？

アインシュタインの一般相対性理論によると、時空はリーマン多様体で近似され、重い物体があるとアインシュタイン方程式に従ってその周りの時空が曲がり、重力の源となると考えられています。D ブレインも重さを持った物体であるので、その教えに従って周囲の時空が曲がります。一般に、D ブレインの数が十分多く、さらに曲率半径がひもの典型的な長さのスケールに比べて十分長いときには D ブレインを開弦の端が乗れる空間というよりは、対応する曲がった時空に置き換えて考えた方が物理現象を記述する上でより良い近似になることが知られています。

このことを利用すると、ゲージ理論を曲がった時空における弦理論によって記述することが可能になります。4.1 節で N 枚の D ブレインを用いるとゲージ群が $U(N)$ であるようなゲージ理論が得られると言いました。一方、この N 枚の D ブレインを対応する曲がった時空に置き換えると、曲がった時空における弦理論が得られます。こうして得られた曲がった時空における弦理論が、 N 枚の D ブレインを用いて構成される $U(N)$ のゲージ理論と物理の理論として等価になるというのが gauge/string duality の主張です。どちらも同じ D ブレインから得られたものなので、対応があるはずだというのが基本的なアイデアです。D ブレインを曲がった時空で置き換えるという操作で、本当にゲージ理論の持っている全ての情報をもらさず保っているのかという

と、決して自明なことではなく、この主張は今でも予想の域を出ていないのですが、非常に多くの非自明な状況証拠があるためにこのような duality が成立すると広く信じられています。⁹

弦理論における時空の曲率半径はゲージ理論における力の強さに比例するパラメータ λ ('t Hooft coupling と呼ばれる量) と関係づいています。この曲率半径がひもの長さのスケールに比べて大きくなるのは、 λ が 1 より十分大きい時であることが示せます。そのため、この曲がった時空における弦理論という見方は N と λ が大きい時に良い近似で解析ができることとなります。

5.2 Holographic QCD

では、4.2 節で説明した QCD を実現する D ブレインの配置に対して、この gauge/string duality の考え方を応用してみましょう。この場合、表 1 や図 6 に示したように、D4 ブレインと D8 ブレインがあるのですが、このうちの D4 ブレインに対応する曲がった時空は具体的に知られていません。[3] 図 6 にある D4 ブレインを対応する曲がった時空に置き換えた図が図 8 です。 x^4 方向の

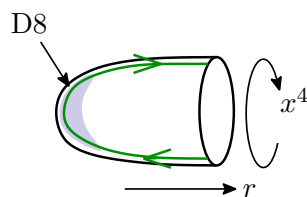


図 8: 図 6 の D4 ブレインを対応する曲がった時空に置き換えたもの

S^1 の半径が D4 ブレインからの距離 r に依存するようになり、 $r = 0$ に到達する前に S^1 の半径がゼロになっています。そして、 x^4 と r で張られる二次元面は図 8 のように試験管のような形になります。時空のトポロジーは 4.2 節では $M \times S^1 \times \mathbb{R}^5$ でしたが、これが $M \times \mathbb{R}^2 \times S^4$ に置き換わることとなります。ここで \mathbb{R}^2 の部分が図 8 に描いた x^4 と r で張られる面で、 S^4 は \mathbb{R}^5 を極座標表示したときの角度方向に対応します。

図 6 にあった D8 ブレインと $\overline{D8}$ ブレインは図 8 では 1 つにつながっています。この図 8 のように曲がった時空に D8 ブレインが埋め込まれた状況における弦理論が QCD と (少なくとも低エネルギーで) 等価になるというのが主張です。特に N_c や λ が大きい時には、このような記述が良い近似となり、QCD でまともに計算するのが非常に困難であるような物理量についても計算が可能になるのです。

一見すると、ここで得られた曲がった時空における弦理論は QCD とは全く異なる理論に見えます。QCD はクォークとグルーオンという素粒子の理論なのに対して、弦理論はひもの理論です。また、QCD は 4 次元時空に定義された理論なのに対し、弦理論は 10 次元時空に定義されています。このように似ても似つかないセットアップで、本当に QCD と同じ物理的内容が含まれているのか? と疑問に思われたことでしょう。これを次節以降で調べて行こうと思います。

⁹レビューとして [2] などがあります。

ちなみに、このように次元の異なる2つの理論の間の双対性は、3次元像を写真に記録するホログラムとの類似から、holographic dual という言い方をすることもあります。ここで説明した QCD の弦理論による記述は holographic QCD と呼ばれています。

6 弦理論によるハドロンの記述

図8で表されるような弦理論のセットアップが本当に QCD と同じ物理的内容を記述するとしたら、弦理論の中にメソンやバリオンに対応する自由度が含まれているはずです。これらはどのように現れるのでしょうか？

メソンは図8にある D8 ブレインにくっついた開弦に対応します。D8 ブレインは N_f 枚重なっているため、4.1 節で説明したように $U(N_f)$ をゲージ群とするゲージ理論が D8 ブレインの上に実現されることとなります。そのゲージ場を A とすると、これは $N_f \times N_f$ 行列で、その (i, j) 成分 $(i, j \in \{1, 2, \dots, N_f\})$ を A^i_j と書くことにすると、この i, j の添え字の構造が (2.7) で表したメソン $\bar{q}_a^i q_j^a$ の i, j の添え字と同じであることがこれをメソンと解釈する理由の1つです。ここで i が上つき、 j が下つきの添え字であることと、ひもが i 番目の D8 ブレインから出発して j 番目の D8 ブレインに終わる向きであることと対応しています。より詳しい対応は 7.3 節でまた議論しますので少しお待ち下さい。

一方、バリオンは D ブレインで記述されます。今、時空のトポロジーが $M \times \mathbb{R}^2 \times S^4$ であったことを思い出しましょう。そして、この S^4 に巻き付いた1枚の D4 ブレインを考えてみます。D4 ブレインは時間方向に1次元と空間方向に4次元に広がったブレインなので、この空間方向が S^4 に巻き付いた状況を見ると、これは4次元時空 M の中では時間方向にだけ伸びて、空間3次元の方向には点状になっており、点粒子として振る舞うこととなります。こうして得られる点粒子がバリオンと解釈されます。このとき、次に説明するように D4 ブレインの上に N_c 本の開弦の端点がかっついていなければならないという条件があります。この開弦のもう一方の端点は D8 ブレインの上に乗っていて、 N_f 枚あるうちのどの D8 ブレインに乗るのかを指定するラベル $i, j, k, \dots \in \{1, 2, \dots, N_f\}$ を各開弦の端点に割り当てることにすると、全部で N_c 個のラベルが割り当てられることとなります。特に $N_c = 3$ の場合が現実の QCD と対応する場合で、3つの開弦の端点に割り当てられる i, j, k の3つのラベルが (2.8) のバリオン $\epsilon_{abc} q_i^a q_j^b q_k^c$ の i, j, k とちょうど対応しています。まとめると、図9のような対応で、期待通りメソンとバリオンが弦理論の記述の中に実現されることとなります。



図9: メソンとバリオンの対応

さて、 S^4 に巻き付いた D4 ブレインに N_c 本の開弦がかっついていなければならないという条

件がどのような議論で出てくるのかを説明してみましょう。ここもいろいろなことを説明なしで認めて頂くことになるので、雰囲気だけでもつかんで頂けたらと思います。

まず、5.2 節では触れませんでした。今考えている 10 次元の曲がった時空では、計量だけではなく、いくつかの他の場も定数ではない値を持っています。そのうちの 1 つが RR 4-form 場と呼ばれる 4-form F_4 で、これが S^4 の上で

$$\int_{S^4} F_4 = N_c \quad (6.1)$$

を満たすような値を持っています。 S^4 に巻き付けた D4 ブレインの上にも、4.1 で説明したように $U(1)$ のゲージ場が住んでいます。これを A^{D4} と書きましょう。今のように F_4 がゼロではないような状況では、ゲージ場 A^{D4} の運動方程式が単なる Maxwell 方程式 (3.4) ではなく、

$$d(*F^{D4}) = F_4 \quad (6.2)$$

のように変更されることが知られています。ここで $F^{D4} := dA^{D4}$ は D4 ブレインの上のゲージ場 A^{D4} の field strength です。また、この式は D4 ブレイン上に定義された式で、 $*$ は D4 ブレインの上の 5 次元時空における Hodge dual を表し、 $*F^{D4}$ が 3-form となることに注意して下さい。ところが、(6.2) の両辺を S^4 で積分すると、Stokes の定理に従って左辺はゼロであるのに、右辺は (6.1) のようにゼロではないので、この方程式は矛盾しています。一方、 N_c 本の開弦が D4 ブレインに端点を持っていると、運動方程式 (6.2) に新たな項が付け加わって

$$d(*F^{D4}) = F_4 - \sum_{i=1}^{N_c} \delta_{p_i} \quad (6.3)$$

のようになることが知られています。ここで $p_i \in S^4$ ($i = 1, 2, \dots, N_c$) は S^4 の上で開弦の端点がかくついている位置を表し、 δ_p は $\Sigma \subset S^4$ に対して

$$\int_{\Sigma} \delta_p = \begin{cases} 1 & (p \in \Sigma) \\ 0 & (p \notin \Sigma) \end{cases} \quad (6.4)$$

となるようなデルタ関数 4-form です。このように N_c 本の開弦が S^4 にくっついているときには、(6.3) の右辺を S^4 で積分するとゼロになるので、上で述べた矛盾が解消されることになります。

7 様々な結果

7.1 注意

これから 4~6 節で説明してきた弦理論のセットアップを用いてなされたハドロンの性質に関する解析結果をいくつかお見せしますが、その前に、その結果を見るのための心構えを書いておきます。

いろいろと簡単に計算できるとは言っても、ここでの計算は至る所に数十%のエラーがあり得るくらいの荒っぽい近似計算をしています。例えば、今の計算は 5.1 節でお話したように N_c や

λ が大きいときに良い近似になるような計算なのですが、現実の QCD では $N_c = 3$ なので、これが十分大きいとみなせるかどうか微妙なところです。また、4.2 節で説明した弦理論におけるセットアップは低エネルギーで QCD になるように仕組んだもので、高エネルギーではだんだん QCD からずれてくるはずなので、だいたい陽子の重さ程度以上の質量の粒子を議論する場合などに実験とのずれがだんだん顕著になってくると予想されます。それから、ここでの計算ではクォークの質量をゼロとしてしまっています。アップクォークとダウンクォークの質量は陽子の質量の数百分の 1 程度なのでアップクォークとダウンクォークからできたハドロンを議論する場合には多くの場合、クォークの質量の効果はそれほど大きくは効いてこないと思われるのですが、例えば π メソンの質量など、クォークの質量に大きく依存することが知られている物理量に関しては理論的計算が実験値から大きくはずれる可能性があります。

というわけなので、計算結果と実験値の精密な一致が期待できるわけではありません。少しくらいずれたからと言ってがっかりする必要はなく、桁が合う程度でもとりあえずは成功と見なすべきです。しかし、これからお見せするように実際にやってみると、ほとんどの計算結果が実験値と 20 ~ 30 % くらいの精度で一致し、期待以上にうまくいっていることが分かります。論理的には、近似の精度をあげるための補正項を計算したら実験値から離れてでたらめな値になってしまうという可能性も否定は出来ませんが、10 個以上の数字をでたらめに選んで、すべて実験値と 20 ~ 30 % 以内に収まる確率がどれほど低いものかを考えて頂ければ、これが単なる偶然とはなかなか考えられないということは理解して頂けると思います。

ここでも詳しい計算は省略して結果ばかり羅列する感じになってしまうことをお許しください。

7.2 メソンの作用汎関数

まず、メソンの作用汎関数を求めてみましょう。6 節で議論したように、メソンは D8 ブレインにくっついた開弦によって表されます。開弦から出てくる粒子のうち、低エネルギーで最も重要なものはゲージ粒子です。4.1 節で説明したことから、D8 ブレインの上には $U(N_f)$ がゲージ群のゲージ理論が実現されます。D8 ブレインは、 $M \times \mathbb{R}^2 \times S^4$ というトポロジーを持った 10 次元時空の中で $M \times \mathbb{R} \times S^4$ の部分を占めています。実は、このうちの S^4 の方向の依存性を持った場は現実のメソンでは有り得ないことが議論できるため、 S^4 の方向に依存しない場だけを考えることにすると、実質的に $M \times \mathbb{R}$ という 5 次元の部分だけを考えると良いということになります。このようにして、結局、メソンはゲージ群が $U(N_f)$ であるような 5 次元のゲージ理論によって記述されることになります。

D8 ブレイン上のゲージ理論の作用汎関数は良く知られているので、今の曲がった時空に埋め込んだ時にどうなるのかを計算することは簡単です。その結果、メソンを記述する 5 次元ゲージ理論の作用汎関数 $S_{5\text{dim}}$ は (ある近似のもとで)

$$S_{5\text{dim}} = \kappa \int_{M \times \mathbb{R}} \text{Tr}(F \wedge *F) + \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M \times \mathbb{R}} \omega_5(A), \quad (7.1)$$

で与えられることが分かります。この式の右辺の第一項の κ は定数で、 $*$ は 5 次元時空 $M \times \mathbb{R}$ における Hodge dual です。ただし、5 次元時空 $M \times \mathbb{R}$ の M と \mathbb{R} の座標をそれぞれ x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

と z で表すことにした時に、この時空の上の計量 g が、 $k(z) := 1 + z^2$ として

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) = k(z)^{2/3} \eta_{\mu\nu}, \quad g_{zz} = g(\partial_z, \partial_z) = k(z)^{-2/3}, \quad g_{\mu z} = g_{z\mu} = g(\partial_\mu, \partial_z) = 0 \quad (7.2)$$

で与えられるような曲がった5次元時空になっています。ここで、 $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ は平坦な4次元時空の計量 (Minkowski metric) を表します。また、(7.1) の第二項の $\omega_5(A)$ は Chern-Simons 5-form と呼ばれる $d\omega_5(A) = \text{Tr}(F \wedge F \wedge F)$ を満たす 5-form で、具体的には

$$\omega_5(A) = \text{Tr} \left(A \wedge F \wedge F - \frac{1}{2} A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{1}{10} A \wedge A \wedge A \wedge A \wedge A \right) \quad (7.3)$$

と書かれます。

この作用汎関数 (7.1) の第一項は Yang-Mills 理論の作用汎関数 (3.9) と同じ形で、第二項は Chern-Simons 項と呼ばれているものです。このような作用汎関数で与えられる理論は (曲がった5次元時空における) Yang-Mills-Chern-Simons 理論と言われます。ここでの主張は、この5次元の Yang-Mills-Chern-Simons 理論が4次元のメソンを記述する理論になっているということです。

7.3 5次元のゲージ場と4次元のメソン場の対応

(7.1) で与えられる5次元のゲージ理論がどうして4次元のメソンの理論になりうるのかというと、直感的には、5次元時空の計量 (7.2) の z 依存性のために物質が $z = 0$ の近辺に落ち込んでしまっ、 z 方向には自由に動けないために実質的に残りの4次元の方向に住むメソン場の理論と解釈できる、という感じです。

もう少し具体的にやるには、次のように5次元のゲージ場を z の関数の完全系で展開します。

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z), \quad A_z(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(x^\mu) \phi_n(z). \quad (7.4)$$

ここで、 A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と A_z は5次元のゲージ場を $A = A_\mu dx^\mu + A_z dz$ と成分表示したときの成分です。 $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ と $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ が z の関数の完全系を表します。これらを具体的にどのように取るのかは7.4節で説明しますが、ここでは、とりあえず、このように展開できたとして話を進めましょう。展開の係数にあたる $B_\mu^{(n)}$ や $\varphi^{(n)}$ は4次元方向の座標 x^μ の依存性しかないので、これらは4次元時空に住むメソンの場と解釈されます。

$B_\mu^{(n)}$ は μ という添え字を持った場で、このような場のことをベクトル場と言います。7.4節で説明するようにこれらのベクトル場は質量を持つことが言えるのですが、 $n = 1, 2, 3, \dots$ は質量が軽い順に並べることにします。これらの場に対応する粒子が実験で観測されているベクトルメソン (ベクトル場で表されるメソン) に対応すると解釈します。具体的には $B_\mu^{(1)}$ に対応するのが実験で見つかっているベクトルメソンの中で一番軽い ρ メソンと呼ばれるメソンで、 $B_\mu^{(2)}$ に対応するのはその次に軽いベクトルメソンである a_1 メソンと呼ばれるメソン、 $B_\mu^{(3)}$ に対応するのはさらにその次に軽いベクトルメソンの ρ' という具合です。

一方、 $\varphi^{(n)}$ は μ という添え字を持たない場で、このような場をスカラー場と呼びます。ただし、 $\varphi^{(n)}$ は $n = 0$ の場合を除いて $B_\mu^{(n)}$ に吸収されてしまうことも7.4節で示されるので、 $\varphi^{(n)}$

($n \geq 0$) の中で物理的な自由度として考えなければいけないのは $\varphi^{(0)}$ だけです。この $\varphi^{(0)}$ に対応する粒子は、実験で見つかっている一番軽いスカラーメソンである π メソン (パイオン、 π 中間子などとも呼びます。) と解釈されます。これは 2.1 節でお話した湯川さんが存在を予言したメソンで、2.2 節にも登場したものです。

このように、 π メソン、 ρ メソン、 a_1 メソンのように、種類の異なるメソンが、5次元のゲージ場 A に統一されているところが非常に面白いところです。初めてこの話を聞く方にとってはまだ半信半疑だと思いますので、次の 7.4~7.5 節で、このような物理的解釈がうまくいっているという証拠をいくつか挙げてみたいと思います。

7.4 メソンの質量

まず、(7.1) から出るゲージ場の運動方程式で、ゲージ場に関して2次以上の項を無視した式を書き下すと

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + k(z)^{1/3} \partial_z (k(z) (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)) = 0, \quad (7.5)$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_z A_\nu - \partial_\nu A_z) = 0, \quad (7.6)$$

となります。ここで、 $\mu, \nu, \rho \in \{0, 1, 2, 3\}$ で $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ です。時空が (7.2) のように曲がっていることの影響で (7.5) に $k(z)$ が現れています。この $k(z)$ が 1 だったらこれらの式は Maxwell 方程式 (3.4) (の5次元版) を成分表示したものと一致します。

(7.4) の展開に用いた完全系 $\{\psi_n(z)\}_{n \geq 1}$, $\{\phi_n(z)\}_{n \geq 0}$ はどのようなものを採用したとしても、物理的な内容は同じはずですが、運動方程式 (7.5)–(7.6) との相性から、次のようにするのが便利です。

まず、 $\psi_n(z)$ は

$$-k(z)^{1/3} \partial_z (k(z) \partial_z \psi_n(z)) = \lambda_n \psi_n(z), \quad (7.7)$$

という固有方程式を満たす固有関数に取ることにします。ここで、固有関数 $\psi_n(z)$ は実関数で、(7.4) の展開式を5次元の作用汎関数 (7.1) に代入したときに z に関する積分が発散しないように $z \rightarrow \infty$ で $\psi_n(z) \rightarrow 0$ となるものを考えています。そうすると、スペクトルは離散的で、固有値 λ_n はとびとびの値を取ります。ラベル n は正の整数を取ることにし、固有値 λ_n が $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ のように小さい順に並ぶように割り当てることにします。また、この ψ_n は

$$(p, q) := \int dz k(z)^{-1/3} p(z) q(z), \quad (p, q \text{ は } z \text{ の実関数}) \quad (7.8)$$

のような内積のもとで規格化可能な z の関数の空間における直交基底をなします。(7.4) は A_μ を z の関数とみなしてこの基底で展開したものです。

次に、 $\phi_n(z)$ は $\phi_n(z) := \partial_z \psi_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と選びます。こちらは

$$(p, q) := \int dz k(z) p(z) q(z), \quad (p, q \text{ は } z \text{ の実関数}) \quad (7.9)$$

という内積に関する直交基底になっています。しかし、こちらはこれだけでは足りず、もう1つ $\phi_0(z) \propto k(z)^{-1}$ を付け加えて初めて完全系をなすことが分かります。

さて、このようにして得られる ψ_n, ϕ_n を用いて展開した (7.4) を運動方程式 (7.5)–(7.6) に代入すると、

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\partial_\nu \tilde{B}_\rho^{(n)} - \partial_\rho \tilde{B}_\nu^{(n)} \right) - \lambda_n \tilde{B}_\rho^{(n)} = 0, \quad (7.10)$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{B}_\nu^{(n)} = 0, \quad (7.11)$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi^{(0)} = 0, \quad (7.12)$$

が得られます。ここで、 $\tilde{B}_\mu^{(n)} := B_\mu^{(n)} - \partial_\mu \varphi^{(n)}$ ($n \geq 1$) と置きました。このように $\varphi^{(n)}$ ($n \geq 1$) は $\tilde{B}_\mu^{(n)}$ の組み合わせでしか出てこないため、 $\varphi^{(n)}$ の自由度は $B_\mu^{(n)}$ に吸収してしまうことができます。(7.11) は (7.10) から従うので、独立な式ではありません。また、(7.11) を (7.10) に入れると、

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{B}_\rho^{(n)} - \lambda_n \tilde{B}_\rho^{(n)} = 0, \quad (7.13)$$

となります。

この (7.13) と (7.12) はクライン・ゴルドン方程式と呼ばれる方程式の形をしています。(7.13) は質量の2乗が λ_n で与えられる粒子、(7.12) は質量がゼロである粒子を表す方程式です。こうして、メソンの質量が (7.7) という固有方程式の固有値を求めることで計算できるということが分かりました。Mathematica を使って固有値を数値的に求めてみると、だいたい

$$\lambda_1 \simeq 0.669, \quad \lambda_2 \simeq 1.57, \quad \lambda_3 \simeq 2.87, \quad \dots \quad (7.14)$$

という値になります。

これをメソンの質量の実験値と比較してみましょう。表2で、 ρ メソン、 a_1 メソン、 ρ' メソンの

メソン	計算	実験値
ρ	[776 MeV]	776 MeV
a_1	1189 MeV	1230 MeV
ρ'	1607 MeV	1465 MeV

表2: メソンの質量の計算結果と実験値の比較 [1]

質量の計算結果と実験値を並べてみました。MeV というのは質量の単位です。(1 MeV はだいたい電子の質量の2倍くらい、陽子の質量の1000分の1くらいです。) 表2の計算結果では、(7.14) で求めた固有値 λ_n を用いてメソンの質量が $\sqrt{\lambda_n}$ に比例するということでしたので、その比例係数を ρ メソンの質量が合うように選んだ場合の数字を書いています。今の近似の範囲内では、重いメソンの質量は近似がどんどん悪くなってしまうことが予想されるので、ここでは $n = 1, 2, 3$ に対応するメソンだけを書きました。特に a_1 メソンの質量は、実験値と4%程度しかずれておらず、合い過ぎているくらい良く合っています。 ρ' の方も大方良く合っていますが、こちらはひ

もの励起状態から出てくるメソンと解釈される可能性もあり [4]、また実験的にも 1570 MeV や 1720 MeV 程度のところに観測されているメソンと同定されるべきである可能性もあるので、参考程度に考えてください。

一方、7.3 節によると、 $\varphi^{(0)}$ に対応するメソンは π メソンでした。 π メソンは 140 MeV 程度の質量を持っているのですが、(7.12) からは質量がゼロということになってしまいます。実は、クォークの質量がゼロとした場合には π メソンの質量はゼロになるということが QCD に基づく議論で知られています。今の我々の計算ではクォークの質量がゼロの場合の結果であるので、この事実を弦理論の立場から再現したことになっています。

7.5 メソンの相互作用項

7.4 節では、運動方程式 (7.5)–(7.6) でゲージ場 A に関して 2 次以上の項を無視しました。この無視した項のことを相互作用項と呼びます。この相互作用項もまじめに評価すると何が言えるかをここで話ししましょう。

やることは単純で、(7.4) の展開式を 5 次元ゲージ理論の作用汎関数 (7.1) に代入して、 z に関する積分を実行するだけです。そうすると、 π メソン、 ρ メソン、 a_1 メソンなどの 4 次元のメソンに関する作用汎関数が得られます。

$$S_{5\text{dim}}(A) = S_{4\text{dim}}(\pi, \rho, a_1, \rho', \dots). \quad (7.15)$$

ここでは、粒子の種類と対応する場の対応が明確になるように $\pi(x^\mu) := \varphi^{(0)}(x^\mu)$, $\rho_\mu(x^\mu) := B_\mu^{(1)}(x^\mu)$, $a_{1\mu}(x^\mu) := B_\mu^{(2)}(x^\mu)$ などと書いています。

このようにして得られた 4 次元の作用汎関数 $S_{4\text{dim}}$ を具体的に書き下すととても複雑な式が出てきます。例として一項だけを書くと

$$S_{4\text{dim}} \simeq \int d^4x (\dots + 2g_{\rho\pi\pi} \eta^{\mu\nu} \text{Tr}(\rho_\mu[\pi, \partial_\nu \pi]) + \dots) \quad (7.16)$$

のような項が出てきます。ここで $g_{\rho\pi\pi}$ は固有関数 $\psi_n(z)$ が分かれば計算できる定数で、具体的には

$$g_{\rho\pi\pi} = \frac{1}{\pi} \int dz k^{-1} \psi_1, \quad (7.17)$$

のように与えられます。

場の量子論の一般論から、このような項があると ρ メソンが 2 つの π メソンに崩壊するプロセスが可能であることが分かり、その崩壊が起こる頻度がだいたい $g_{\rho\pi\pi}^2$ に比例することも分かります。実際にそのような崩壊が起こる頻度を実験で測ってやれば、 $g_{\rho\pi\pi}$ の実験値を求めることができるので、それと (7.17) で求めた計算結果とを比較してどのくらい合っているのかを検証することができます。

一般に、この $g_{\rho\pi\pi}$ のように各項の係数として現れる定数のことを結合定数と呼びます。QCD から出発してこのような結合定数を計算するのは一般に非常に難しい問題なのですが、弦理論に基づく計算では、上の (7.17) のように Mathematica など固有関数 $\psi_n(z)$ を数値的にでも求め

結合定数	計算	実験値
f_π	[92.4 MeV]	92.4 MeV
L_1	0.58×10^{-3}	$(0.1 \sim 0.7) \times 10^{-3}$
L_2	1.2×10^{-3}	$(1.1 \sim 1.7) \times 10^{-3}$
L_3	-3.5×10^{-3}	$-(2.4 \sim 4.6) \times 10^{-3}$
L_9	8.7×10^{-3}	$(6.2 \sim 7.6) \times 10^{-3}$
L_{10}	-8.7×10^{-3}	$-(4.8 \sim 6.3) \times 10^{-3}$
$g_{\rho\pi\pi}$	4.8	6.0
g_ρ	0.16 GeV ²	0.12 GeV ²
$g_{a_1\rho\pi}$	4.6 GeV	2.8 ~ 4.2 GeV

表 3: 結合定数の計算例 [5]

さえすれば簡単に計算することができます。いくつかの結合定数の計算結果と実験値を表にしたのが表 3 です。これらの結合定数がどのような項の係数であるのかを説明するのは省略しますが、興味のある方は [5] を参照してください。ここで、GeV もエネルギーの単位で、1 GeV = 1000 MeV です。(7.1) には κ というパラメータがありました。表 3 では f_π が実験値と一致するようにこの κ を調整しました。従って、 f_π は理論の予言とは言えませんが、その他はすべて理論の予言です。ここでも、完全な一致とは言えませんが、これでも期待以上にかなり良く合っていると言えらと思います。

もっと言うと、(7.15) のようにして得られたメソンの作用汎関数は、1960 年代~1980 年代にかけて、特に理論的根拠もなく現象論的に「こうなっていると仮定すると実験と良く合う」という形で提案されたいくつかのモデルをばっちり再現することも見て取れます。 π, ρ, a_1 を含む伝統的なメソンの作用汎関数は非常に複雑なものです。それが (7.1) のようなたった一行で書かれる非常にシンプルな理論から出発して導けるといところがまた面白いところです。

7.6 バリオンとインスタントン

バリオンについてもいろいろな解析をすることができます。6 節で説明したように、バリオンは S^4 に巻き付いた D4 ブレインとして現れます。この D4 ブレインからどのような種類のバリオンが生じるのかを解析するテクニックの 1 つは、これをソリトンで置き換えて、そのソリトンの運動を量子化して可能な状態を導く方法です。ここでソリトンと呼んでいるものは、(7.1) から導かれる運動方程式の解で、安定な粒子のように振る舞うもののことです。量子化の手続きはかなり込み入っているので説明を省略することにして、ここではどのようなソリトンと対応するのかだけを議論してみます。

まず、簡単のため、平坦な 10 次元の時空に N_f 枚の D8 ブレインがある場合を考えてみます。D8 ブレインが x^0, x^1, \dots, x^8 の方向に広がっていて、 $x^9 = 0$ のところに置かれているとしましょう。このとき、D8 ブレイン上にあるゲージ場 A が x^0 と $x^{5\sim 8}$ の座標に依存しない場合を考える

ことにして、 x^0 と $x^{5\sim 8}$ の方向は忘れることにします。残った $x^{1\sim 4}$ 方向の 4次元空間 \mathbb{R}^4 を Σ_4 と書くことにして、 A の field strength F を使って定義される

$$N_B := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma_4} \text{Tr}(F \wedge F) \quad (7.18)$$

という量がゼロではない値になっている状況を考えてみます。また、エネルギーが発散しないように、 F は Σ_4 の無限遠方ではゼロになるという条件を課すことにします。そうすると、実質的に Σ_4 をコンパクト化して S^4 を考えているのと同じになって、(7.18) は接続 A が定義されている S^4 上のベクトル束の 2nd Chern number に相当する量で、整数値しかとれないことが知られています。 N_B がゼロではないゲージ場の配位のことをインスタントンと呼び、 N_B のことをインスタントン数と呼ぶことも多いです。

特に、 $N_B = 1$ であるような運動方程式の解は良く知られていて

$$A = f(r)gdg^{-1} \quad (7.19)$$

の形で書かれます。ここで、 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ 、 $r = |\vec{x}|$ として

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + \rho^2}, \quad g(\vec{x}) = \frac{x^4 - ix^j\sigma_j}{r}, \quad (7.20)$$

のように与えられます。ただし、これは D8 ブレインの枚数 N_f が 2 の場合の解で、 σ_j ($j = 1, 2, 3$) は (3.17) で定義される 2×2 行列です。 ρ は任意の実定数で、 F がゼロではない値を持つ領域のおよその半径を与えます。特に $\rho \rightarrow 0$ の極限では、 $\text{Tr}(F \wedge F)$ がゼロでない値を取る領域が原点 $r = 0$ に集中したデルタ関数的な振る舞いをします。

さて、この $\rho \rightarrow 0$ の極限を考えると $r = 0$ の部分にエネルギーが集中した状況が作られるわけですが、 $r = 0$ な領域は x^0 と $x^{5\sim 8}$ の 5次元的な広がりがあることに注意してください。実はこの状況は x^0 と $x^{5\sim 8}$ の方向に広がった D4 ブレインが $r = 0$ に置かれた状況と物理的に等価になるのです。より一般には、D8 ブレインの中に N_B 枚の D4 ブレインが埋め込まれた状況を考えるのと、D8 ブレインのゲージ場が (7.18) を満たすようなインスタントンを表す解を考えることが等価になることがいろいろな議論から示されます。例えば、ここでは詳しくは説明しませんが、インスタントン数が N_B であるインスタントン解の構成法として知られる Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin (ADHM) 構成法と呼ばれる構成法が、この D4 ブレインや D8 ブレインに端を持つ開弦を考えることで自然に導き出せることなどが知られています。[6, 7]

この事実を認めると、今考えたいバリオンを表す S^4 に巻き付いた D4 ブレインは、D8 ブレインの中で $\Sigma_4 = \{(x^1, x^2, x^3, z)\}$ の上に定義されたインスタントンを考えることと等価になることが分かります。以下ではこの後者の見方を採用しましょう。インスタントン数 (7.18) はそのままバリオンの数と対応しています。今の場合、時空が曲がっていることや (7.1) に Chern-Simons 項があることから、最も基本的な $N_B = 1$ の場合でも厳密な解はまだ得られていません。ただ、近似的には (7.19) のような形でだいたい良く、その大きさを表すパラメータ ρ がある小さな値に固定されることも議論できます。 ρ がある小さな値に固定されるということで、ある大きさを持った粒子のように振る舞うことになり、これをバリオンと解釈するというわけです。

さて、このようにバリオンをソリトンとして表現することの1つのメリットは、場の理論で開発されたソリトンを取り扱ういろいろなテクニックが使えるようになることです。特に、このソリトンの運動を量子化してどのような粒子が出てくるのかを調べる一般論は良く知られていて、その議論を今の系に応用することで、どのようなバリオンが得られるのかを解析することができます。ここではその結果だけお見せしましょう。図10の左図が計算結果で、右図が実験データで

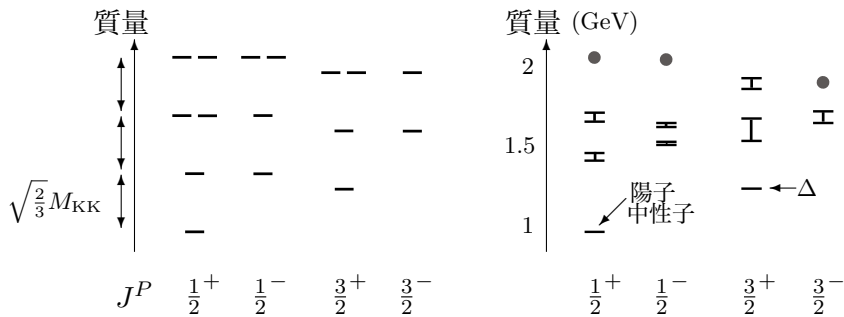


図 10: バリオンのスペクトル (左図が理論、右図が実験) [8]

す。 J と書いたものがバリオンのスピンを表していて、 P がパリティと呼ばれる \pm で指定される量です。 J^P が異なれば違う仲間のバリオンを表しているということだけ了解して頂ければ大丈夫です。縦軸は質量を表しています。例えば、陽子と中性子は同じ仲間で $J^P = \frac{1}{2}^+$ であるようなバリオンの中で一番軽いもの (表の中で一番下にあるもの) です。陽子と中性子の質量はほぼ同じで、この表の中では区別していません。 $J^P = \frac{3}{2}^+$ のバリオンのうち一番軽いものは Δ という名前のバリオンです。右図の中で「工」のような線になっているところは、質量が実験的に正確には求まっていない場合で、その誤差も含めて質量がだいたいこの線の範囲内であることを表しています。また、同じく右図で「●」で表されたものは、その質量を持つバリオンの存在が報告されており、バリオンの一覧表には載っているけれど、まだ実験が十分ではなく、その存在が確立されたとはいえない状況であるとされているものです。

前置きが長くなりましたが、図10の左図の計算結果と右図の実験データを見比べて、定性的なパターンは良く似ていると思いませんか? 例えば、一番軽いのが $J^P = \frac{1}{2}^+$ であるバリオン (陽子と中性子) で、その次に軽いのが $J^P = \frac{3}{2}^+$ のもの (Δ) であることは理論と実験で一致しています。また、 $J^P = \frac{1}{2}^+$ で二番目に軽いものと $J^P = \frac{1}{2}^-$ で一番軽いものがほぼ同じ質量を持ち、同様に $J^P = \frac{3}{2}^+$ で二番目に軽いものと $J^P = \frac{3}{2}^-$ で一番軽いものがほぼ同じ質量を持つというような性質も再現されています。実は、ナイーブなクォークモデルに基づく議論では、 $J^P = \frac{1}{2}^+$ で二番目に軽いものは $J^P = \frac{1}{2}^-$ で一番軽いものよりもかなり重い質量を持つという結果になってしまいます。これでは明らかに実験と矛盾するので、大きな謎とされていました。弦理論に基づく計算で、この二つがほぼ同じ質量になるということが導けたのは喜ばしいことと言えます。

ただし、今の計算では、異なる種類のバリオンの質量の差しかまだ計算できておらず、質量そのものは良い精度では求まっていないことと、図10の左図に書いた M_{KK} というパラメータを表

2の数値を出した時に使用した値の半分くらいにしないと右図の実験値とうまく合わないなど、いくつか課題が残されていることを注意しておきます。

さらに、バリオンの質量以外の性質もいろいろ調べることができます。例えば、陽子や中性子は磁石のような性質があって、その磁石の強さを「磁気モーメント」と呼ぶのですが、その計算結果を表4に載せてみました。これもまた完璧な一致とは言えませんが、かなり良く合っている

	計算	実験値
陽子	2.18	2.79
中性子	-1.34	-1.91

表 4: 陽子、中性子の磁気モーメント [9]

ことが分かると思います。

8 まとめと展望

これまで見てきたことをまとめてみましょう。まず、gauge/string duality のアイデアを QCD に応用し、ハドロンを弦理論を使って記述する方法を与えました。メソンは開弦と対応し、曲がった 5 次元時空における Yang-Mills-Chern-Simons 理論によって記述されます。バリオンは S^4 に巻き付いた D4 ブレイン、もしくは 5 次元 Yang-Mills-Chern-Simons 理論のソリトンとして表されました。ハドロンの質量や結合定数などが簡単な計算で求まり、実験ともかなり良く合うことを見てきました。ただし、まだいろいろと荒っぽい近似をしているので、実験の誤差の範囲で完全に一致するということにまでは至っていません。より精度の良い計算を実行することは大変重要な課題です。そのためには曲がった時空における弦理論の取り扱いなどの基本的な問題をより深く研究することが必要になってくると思います。

こうしたことが分かってくると、世界が少し違って見えてきます。例えば、7.6 節ではインスタントンが陽子や中性子のようなバリオンに対応するという話を議論しました。陽子や中性子は私たちの体重の 99.9 % 以上を担っている部分ですので、私たちはインスタントンでできていると言っても過言ではないわけです。そうすると、これまで主として数学的な興味から行われてきたインスタントンに関する数学的な研究も、私たちがこの世に存在できる理由を探る上で重要な役割を果たすことが分かります。例えば、ADHM 構成法を利用して核力の計算をするというような研究もあります。[10]

ここで解説してきたことは、伝統的な素粒子論に基づく世界観とはかなり異なっています。例えば、(6 次元部分をコンパクト化したわけではない) 10 次元の曲がった時空における弦理論が 4 次元の世界を記述するだとか、ハドロンがクォークを用いないで記述できるだとかいうことは gauge/string duality が発見され、人々がそれを納得するまでは、なかなか考えることができなかった新たな可能性だと思います。今回は強い力に関係する部分だけを扱いましたが、他の力も含めた究極の統一理論を考える上でも、このように、これまでの常識を覆す新たな可能性がある

のではないかと考えたくになります。今後、こうしたアイデアがどのような方向に発展していくのか、とても楽しみです。

参考文献

- [1] T. Sakai, S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843-882 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].
- [2] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [3] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) [arXiv:hep-th/9803131].
- [4] T. Imoto, T. Sakai, S. Sugimoto, “Mesons as Open Strings in a Holographic Dual of QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **124**, 263-284 (2010) [arXiv:1005.0655 [hep-th]].
- [5] T. Sakai, S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1083-1118 (2005) [arXiv:hep-th/0507073].
- [6] E. Witten, “Small instantons in string theory,” *Nucl. Phys. B* **460**, 541 (1996) [arXiv:hep-th/9511030].
- [7] M. R. Douglas, “Branes within branes,” In *Cargese 1997, Strings, branes and dualities* 267-275 [arXiv:hep-th/9512077].
- [8] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto, S. Yamato, “Baryons from instantons in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **117**, 1157-1180 (2007) [arXiv:hep-th/0701280].
- [9] K. Hashimoto, T. Sakai, S. Sugimoto, “Holographic Baryons: Static Properties and Form Factors from Gauge/String Duality,” *Prog. Theor. Phys.* **120**, 1093-1137 (2008) [arXiv:0806.3122 [hep-th]].
- [10] K. Hashimoto, T. Sakai and S. Sugimoto, “Nuclear Force from String Theory,” *Prog. Theor. Phys.* **122**, 427-476 (2009) [arXiv:0901.4449 [hep-th]].