

MQCDにおけるBPS粒子と双対性

京大理・杉本茂樹

平成10年8月19日

目次

1	MQCDの復習	2
1.1	overview	2
1.2	復習	2
2	BPS粒子の一般論	3
2.1	hyperkähler 多様体	3
2.2	BPS粒子	4
2.3	BPS条件	5
2.4	ゲージ相互作用	7
2.5	BPS質量公式	8
3	具体例	9
3.1	$\mathcal{N} = 4$ SYM におけるBPS粒子	9
3.2	$\mathcal{N} = 2$ SQCD におけるBPS粒子	13
3.2.1	準備	13
3.2.2	弱結合領域におけるBPS粒子	16
3.2.3	強結合領域におけるBPS粒子と双対性	16
3.2.4	エキゾチックな粒子達	17
4	良く分からないこと	19
5	おわりに	20
A	超対称性とBPS条件についての補足	21

1 MQCDの復習

1.1 overview

まず始めに、僕がどうしてMQCDに魅力を感じているのかをお話ししてみたいと思います。

今回の研究会でも、Choi さんや堀さんのトラペに描かれていた図 1 が示すように、M理論というものは、(その厳密な定義はまだ良く分からないとしても) 様々な弦理論をそのある種の極限として含んでいるような、弦理論のいわば母親的な存在であったわけです。これと全く同じ意味で、MQCDというものは、様々なゲージ理論の母親とも言える存在なのです。MQCDは、M5-brane をあるリーマン面に巻き付けたものなのですが、そのリーマン面の取り方によって様々なゲージ理論が出てきます。これは、M理論のコンパクト化のしかたによって様々な弦理論が出てきたのと状況が良く似ています。

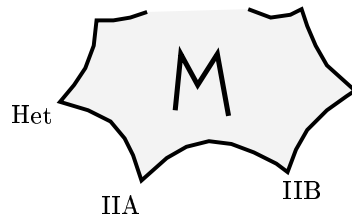


図 1: M理論

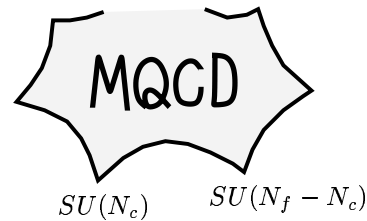


図 2: MQCD

また、type IIB の弦理論をM理論のトーラスコンパクト化ととらえると、S-duality をトーラスの modular 変換として明快に理解することができた [1, 2] のと全く同様に、4次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を M5-brane のトーラスコンパクト化ととらえると、場の理論の S-duality をトーラスの modular 変換として理解することができます。このように、MQCDは4次元の場の理論の枠内では全く非自明だった双対性を明白なものにする魔法のような定式化です。

一般に、場の理論の双対性は、素粒子とソリトンとを入れかえる操作で理論が変わらないことを主張しています。通常の場合の理論では、素粒子とソリトンの取り扱い方が全く異なっているために、双対性を証明するのはほとんど不可能です。これに対して、MQCDは素粒子もソリトンも全く差別しない民主的な定式化です。MQCDにおいて双対性が明白になった本質的な理由は、こういうところにあるのでしょうか。

MQCDのこのような著しい性質の一端をみるために、今回は主に $\mathcal{N} = 2$ SQCDの素粒子やソリトンなどのBPS粒子が、MQCDの中ではどのように現れるのかを説明してみたいと思います。時間の都合で双対性についてはあまり話せませんが、上で述べたようなことについてもちょこちょこ触れる予定です。

1.2 復習

今回、主に扱う理論は $\mathcal{N} = 2$ $SU(N_c)$ SQCD です。これは、 $\mathcal{N} = 1$ の superfield の言葉で書くと、 $SU(N_c)$ ゲージ場 W_α とゲージ群の adjoint 表現に属する物質場 Φ 、そしてゲージ群の基本表現とその複素共役表現に属する物質場 Q_i と \tilde{Q}^i ($i = 1, \dots, N_f$) を含み、superpotential が

$$W = Q_i \Phi \tilde{Q}^i + m_i Q_i \tilde{Q}^i \quad (1.1)$$

であるような理論です。 $\mathcal{N} = 2$ の言葉で言うと、 W_α と Φ が vector multiplet をなし、 Q_i と \tilde{Q}^i が hypermultiplet をなします。以後、 Q_i と \tilde{Q}^i からなる hypermultiplet を quark と呼び、massive な vector multiplet を W-boson と呼ぶことにします。

この理論の Seiberg-Witten curve Σ_{SW} は

$$t^2 - 2C(v)t + B(v) = 0 \quad (1.2)$$

$$C(v) = \prod_{a=1}^{N_c} (v + \phi_a) \quad (1.3)$$

$$B(v) = \prod_{i=1}^{N_f} (v - m_i) \quad (1.4)$$

で与えられることが知られています [3]。(1.2) をちょっと書き換えてみます。

$$Y + Z = 2C(v) \quad (1.5)$$

$$YZ = B(v) \quad (1.6)$$

これらの式から Y か Z を消去すると (1.2) に戻ります。これらの式の解釈なのですが、(1.6) は multi Taub-NUT space (以後 Q と書く) を複素変数 Y, Z, v によって表したものであり、この中に Σ_{SW} が (1.5) によって正則に埋め込まれていると見ることができます。

MQCDとは M5-brane の world volume を $\mathbb{R}^4 \times \Sigma_{SW}$ としたときの \mathbb{R}^4 の上の有効理論のことです。これが確かに $\mathcal{N} = 2$ $SU(N_c)$ SQCD の有効理論と一致するということが知られています [4]。時空の座標は以下のようにとることにします。

$$\begin{array}{ccc} \text{時空} & \underbrace{x^0 \sim x^3}, & \underbrace{x^4, x^5, x^6, x^{10}}, & \underbrace{x^7 \sim x^9}, \\ & \mathbb{R}^4 & Q & \mathbb{R}^3 \\ & \parallel & \cup & \\ \text{M5} \simeq & \mathbb{R}^4 & \times & \Sigma_{SW} \end{array}$$

ちなみにこの理論には、 \mathbb{R}^3 をまわす $SO(3)$ の対称性がありますが、これが $\mathcal{N} = 2$ の場の理論における $SU(2)_R$ に対応しています。

2 BPS 粒子の一般論

2.1 hyperkähler 多様体

前節で登場した multi Taub-NUT space は、実は hyperkähler 多様体であることが知られています。あとでちょっと使うので、hyperkähler 多様体の定義を書いておきましょう。

定義

$4n \dim_{\mathbb{R}}$ リーマン多様体 (M, g) が hyperkähler 多様体であるとは、 M 上に次の i), ii) をみたす 3 つの複素構造 $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ が存在するときをいう。

- i) $\mathbb{I}\mathbb{J} = -\mathbb{J}\mathbb{I} = \mathbb{K}, \mathbb{J}\mathbb{K} = -\mathbb{K}\mathbb{J} = \mathbb{I}, \mathbb{K}\mathbb{I} = -\mathbb{I}\mathbb{K} = \mathbb{J}$
- ii) 計量 g は $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ のそれぞれに対して Kähler。つまり、

$$\omega_{\mathbb{I}}(X, Y) \equiv g(\mathbb{I}X, Y) \quad (X, Y \text{ は接ベクトル}) \quad (2.1)$$

とおくと、 $\omega_{\mathbb{I}}$ は反対称 (つまり 2-form) になり、

$$d\omega_{\mathbb{I}} = 0 \quad (2.2)$$

をみたす。(\mathbb{J}, \mathbb{K} についても同様。)

今の場合、複素構造というのは、上つきと下つきの足を持った tensor で、2 乗すると 1 になり、covariantly constant なものです。つまり、複素構造 $\mathbb{I} = (I_{\mu}^{\nu})$ は、 $\mathbb{I}^2 = -1, \nabla_{\rho} I_{\mu}^{\nu} = 0$ を満たします。また、うまく複素座標 $(z^a, \bar{z}^{\bar{a}})$ をとることにより、局所的に $I_b^a = i\delta_b^a, I_{\bar{b}}^{\bar{a}} = -i\delta_{\bar{b}}^{\bar{a}}, I_b^{\bar{a}} = I_{\bar{a}}^b = 0$ とできることが知られています。このとき、 z^a ($\bar{z}^{\bar{a}}$) を、複素構造 \mathbb{I} に関して正則 (反正則) な座標と呼ぶことにします。この座標を用いると、計量と $\omega_{\mathbb{I}}$ は

$$ds^2 = g_{a\bar{b}} dz^a d\bar{z}^{\bar{b}} \quad (2.3)$$

$$\omega_{\mathbb{I}} = i g_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \quad (2.4)$$

のように表されることを注意しておきます。一般に hyperkähler 多様体の複素構造は、上の $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ を用いて、 $a\mathbb{I} + b\mathbb{J} + c\mathbb{K}$ と表されます。ここで、 a, b, c は $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数です。

前節でやったように、時空の一部を 4 次元の hyperkähler 多様体に丸めることには次のようなわけがあります。まず、これは Ricci flat であることが知られており、M理論 (11 dim SUGRA) の運動方程式の解になっています。また、こうした多様体は、ホロノミーが $SU(2)$ であることが知られており、このことから超対称性を半分だけ破ることが分かります。前節ではこの空間に M5-brane が置かれていたので、超対称性がさらに半分になり、結局 $\mathcal{N} = 2$ の超対称性が残ることになるわけです。ただし、ここでは詳しく述べませんが、このように超対称性を保つためには Σ_{SW} を Q に正則に埋め込まなければなりません。もし、余裕があれば APPENDIX でもう少しだけ詳しく説明したいと思っているので、気になる方はそちらを参照してください。

2.2 B P S 粒子

MQCDにおいて、quark や W-boson などの B P S 粒子は M5-brane に端をもつ M2-brane で表されます。このことを納得するには、type IIA の弦理論における B P S 粒子が、図 3 のように D-brane に端を持つ string によって表されていたことを思い出せば良いでしょう。

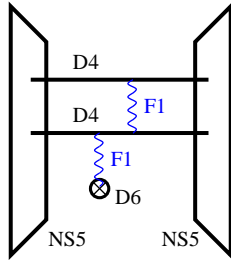


図 3: type IIA の絵

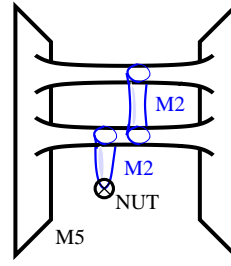


図 4: M理論の絵

この string をいつもやるように量子化して ground state を取り出すと、ちょうど quark や W-boson に対応する multiplet が出てきます。図 3 を M 理論に持ち上げてやったのが、図 4 です。NS5-brane と D4-brane は一枚の M5-brane になり、string は M2-brane になります。D6-brane については 3.2 節で少し説明するつもりですが、multi Taub-NUT space Q における NUT singularity と呼ばれる点に対応します。ここで、M2-brane の world volume は、 $\mathbb{R} \times \Sigma_{BPS}$ のように分解されて、 Σ_{BPS} を Q に埋め込まれたリーマン面とし、 \mathbb{R} を \mathbb{R}^4 に埋め込むことにします。こうすれば、これが我々の時空 \mathbb{R}^4 の中では粒子として振る舞い、 \mathbb{R} がこの粒子の world line 方向になるわけです。図 4 は、 Q の中に Σ_{SW} と Σ_{BPS} とが埋め込まれる様子を模式的に表したものだと思ってください。もう一度、11 次元時空の中への埋め込み方を整理すると次のようになります。

$$\begin{array}{rcc}
 \text{時空} & \underbrace{x^0 \sim x^3,}_{\mathbb{R}^4} & \underbrace{x^4, x^5, x^6, x^{10},}_{Q} & \underbrace{x^7 \sim x^9,}_{\mathbb{R}^3} \\
 & \parallel & \cup & \\
 \text{M5} & \simeq & \mathbb{R}^4 \times \Sigma_{SW} & \\
 & \cup & & \\
 \text{M2} & \simeq & \mathbb{R} \times \Sigma_{BPS} &
 \end{array}$$

2.3 BPS 条件

前小節で BPS 粒子は M5-brane に端をもつ M2-brane で表されると述べましたが、 Σ_{BPS} は自由に取れるというわけではありません。BPS 状態であるからには、超対称性を半分保つ状態であるはずですが。前小節のように M5-brane と M2-brane が共存する系において、超対称性を保つためには、次の BPS 条件を満たさなければならないことが知られています [6, 7]。

BPS 条件 (その 1)

Σ_{SW} と Σ_{BPS} は、 Q の中に、 Q の互いに直交する複素構造に関して正則に埋め込むべし。

ここで使われている言葉の意味を説明しましょう。2.1 節の最後のところで触れたように、超対称性を保つためには Σ_{SW} を Q の中に正則に埋め込まなければなりません。同じように、 Σ_{BPS} も Q の中に正則に埋め込む必要があります。ただし、このとき Σ_{BPS} は Σ_{SW} のときとは異なる複素構造に関して正則に埋め込まなければならないのです。 Σ_{SW} と Σ_{BPS} をそれぞれ Q の複素構造 \mathbb{I} と $\tilde{\mathbb{J}}$ に関して正則に埋め込むことにしましょう。このとき、上の BPS 条件は \mathbb{I} と $\tilde{\mathbb{J}}$ とが互いに直交する複素構造である (つまり、

$I\tilde{J} + \tilde{J}I = 0$ を満たす) ことを要求しています。2.1 節で述べたように \tilde{J} は I, J, K の線形結合で書けませんが、 I と直交するものは $\tilde{J} = \cos\theta J + \sin\theta K$ の形であることが分かります。 \tilde{J} の選び方には θ の分だけ自由度があることに注意してください。

この BPS 条件の導出は少し長くなるのでここでは省略します。(APPENDIX にもっともらしい説明を書く予定です。) この条件をちょっと書き換えてみましょう。方針は Q を複素構造 I に関する複素多様体 (Kähler 多様体) とみなして、その言葉で BPS 条件を書きなおすことです。

2.1 節で述べたように、 Q には $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ という 2-form があります。複素構造 I を特別扱いして、 Q を Kähler form $K \equiv \omega_I$ をもった Kähler 多様体とみなすことにします。そして、 $\Omega \equiv \omega_J + i\omega_K$ と定義すると、これは (I に関して) 正則な 2-form であることが分かります。実際、反正則な接ベクトル $\bar{\partial}$ は $I\bar{\partial} = -i\bar{\partial}$ を満たすことから、 $\Omega(\bar{\partial}, \cdot) = g(J(iI\bar{\partial}), \cdot) + ig(K\bar{\partial}, \cdot) = 0$ となり、 $\Omega = \Omega_{ab} dz^a \wedge dz^b$ の形である ($d\bar{z}^{\bar{a}}$ を含まない) ことが分かります。また、 $d\Omega = 0$ であることから、係数 Ω_{ab} が正則であることも分かります。

Σ_{SW} は I に関して正則だったので、 Σ_{SW} の上では $\Omega = 0$ です。何故なら、 Σ_{SW} は複素 1 次元の複素多様体なので、 Σ_{SW} の上には正則な 2-form が存在しないからです。また、 Ω の実部と虚部をとって Σ_{SW} 上で $\omega_J = \omega_K = 0$ であると言いなおすことができます。同様に Σ_{BPS} は \tilde{J} に関して正則なので、 Σ_{BPS} 上では $\omega_{\tilde{K}} = \omega_I = 0$ です。ここで、 \tilde{K} は I, \tilde{J} に直交する複素構造です。 $\tilde{J} = \cos\theta J + \sin\theta K$ とするとき、 $\tilde{K} = -\sin\theta J + \cos\theta K$ と表されます。これらを用いて $\Omega = e^{i\theta}(\omega_{\tilde{J}} + i\omega_{\tilde{K}})$ と書きなおせることから、 Σ_{BPS} 上では $\Omega = e^{i\theta}\omega_{\tilde{J}}$ となることが分かります。今、 θ は一定、 $\omega_{\tilde{J}}$ は real ですから、 Ω は Σ_{BPS} 上で位相が一定になります。以上をまとめると、

BPS 条件 (その 2)

K と Ω をそれぞれ Q の Kähler form と holomorphic 2-form とするとき、

- Σ_{SW} 上で $\Omega = 0$ 。
- Σ_{BPS} 上で $K = 0$ かつ、 Ω の位相が一定。

逆に、この条件から前の BPS 条件 (その 1) を導くこともできて、結局これらの BPS 条件は同値です。

さて、これで BPS 粒子の存在を判定するための条件が得られました。つまり、上の BPS 条件をみたす Σ_{BPS} が存在するかどうかを判定すれば、対応する BPS 粒子が存在するかどうか分かるというわけです。これは、場の理論の手法よりもはるかに強力な判定条件です。伝統的な場の理論では、例えば monopole の存在を示すのに、まず古典解を求め、場をそのまわりで展開し、それを量子化して、Hilbert space を求めるという手続きを踏みます。しかし、これを本当に実行するのは至難の業です。1,2-monopole sector など、ごく特殊な場合にしかなされていません。Seiberg-Witten 理論を使うと、ゲージ群が $SU(2)$ の場合には非常に巧妙な方法があって BPS スペクトラムを完全に求めることができます [8]。しかし、ゲージ群が一般の場合には有効な方法はやはり見当たりません。M理論は BPS 粒子の存在を判定する全く新しい方法を与えたことになるわけです。

3 節でいくつか具体例を与える予定です。その前に、こうして得られた BPS 粒子がどんな粒子なのかを考えてみたいと思います。

2.4 ゲージ相互作用

ここでは、BPS 粒子がゲージ場とどのような相互作用をするかを考えてみましょう。 $\mathcal{N} = 2$ $SU(N_c)$ SQCD の Coulomb branch を考えます。ここでは、 Φ が真空期待値を持つことにより、ゲージ群は $SU(N_c)$ から $U(1)^{N_c-1}$ まで破れています。MQCD では、このゲージ群に対するゲージ場は M5-brane の上の self-dual 2-form 場 B_{MN}^+ から出てきます。今、M5-brane の world volume は $\mathbb{R}^4 \times \Sigma_{SW}$ としているので、 \mathbb{R}^4 上の massless なゲージ場に対応する成分を抜き出すには、 $B_{\mu i}^+$ を Σ_{SW} 上の harmonic 1-form で展開してやれば良いですね。

$$B_{\mu i}^+(x, \sigma) = A_{\mu}^I(x) \omega_i^I(\sigma) + \tilde{A}_{\mu}^I(x) \tilde{\omega}_i^I(\sigma) + \dots \quad (2.5)$$

ここで、 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は \mathbb{R}^4 の座標、 σ^i ($i = 1, 2$) は Σ_{SW} の座標です。 $\omega^I = \omega_i^I d\sigma^i$ と $\tilde{\omega}^I = \tilde{\omega}_i^I d\sigma^i$ ($I = 1, \dots, N_c - 1$) は、 Σ_{SW} 上の harmonic 1-form です。一般に genus g のリーマン面には holomorphic 1-form が g 個あることが知られています。harmonic 1-form は holomorphic 1-form の実部と虚部で与えられます。上の ω^I と $\tilde{\omega}^I$ は、 $\mathcal{O}^I \equiv \omega^I + i\tilde{\omega}^I$ ($I = 1, \dots, g$) が holomorphic 1-form になるように取りました。このとき、 $*_2 \omega^I = \tilde{\omega}^I$ なる関係があります。ここで、 $*_2$ は Σ_{SW} 上の Hodge operator です。

self-dual 2-form 場 B^+ はその field strength が self-dual であるような場です。つまり、 $H^+ \equiv dB^+$ とおくと、 $H^+ = *_6 H^+$ が成り立ちます。この $*_6$ は M5-brane の world volume の 6次元の Hodge operator です。ここで $F^I = dA^I$, $\tilde{F}^I = d\tilde{A}^I$ とおくと、(2.5) により

$$H^+ \equiv dB^+ = F^I \omega^I + \tilde{F}^I \tilde{\omega}^I + \dots \quad (2.6)$$

となります。これらのことから、 $\tilde{F}^I = *_4 F^I$ が成立することが分かります。したがって、 A^I と \tilde{A}^I とは独立ではなく、 \mathbb{R}^4 上の互いに dual な関係にあるゲージ場です。つまり、 A^I が電荷をもつ粒子と結合するゲージ場とするなら、 \tilde{A}^I は磁荷をもつ粒子と結合するゲージ場です。

ここで、少し Seiberg-Witten 理論を思い出しておきましょう [9]。今の場合、 Σ_{SW} は genus $g = N_c - 1$ のリーマン面です。このリーマン面の 1-cycle の basis $\{\alpha_I, \beta_I \mid I = 1, \dots, N_c - 1\}$ を図 5 のようにとります。こうすると、交点数が $\alpha_I \cdot \beta_J = \delta_{IJ}$, $\alpha_I \cdot \alpha_J = \beta_I \cdot \beta_J = 0$ となり、symplectic basis と呼ばれるものになります。

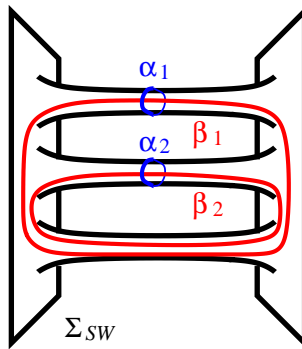


図 5: symplectic basis

こうしておいて、先ほどの holomorphic 1-form を $\int_{\alpha_I} \mathcal{O}^J = \delta^{IJ}$ で規格化し、 $\tau^{IJ} \equiv \int_{\beta_I} \mathcal{O}^J$ とおきます。Seiberg-Witten 理論の教えによると、この τ^{IJ} が場の理論の $U(1)^{N_c-1}$ に対する effective coupling

$\tau^{IJ} = \left(\frac{8\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{\pi}\right)^{IJ}$ となります。MQCD は Seiberg-Witten 理論を正しく再現することが知られているので、 τ^{IJ} は MQCD の effective coupling と言っても同じことです。実部と虚部に別けて書くと、

$$\int_{\alpha_I} \omega^J = \delta^{IJ}, \quad \int_{\alpha_I} \tilde{\omega}^J = 0, \quad \int_{\beta_I} \omega^J = \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{IJ}, \quad \int_{\beta_I} \tilde{\omega}^J = \left(\frac{8\pi}{g^2}\right)^{IJ}, \quad (2.7)$$

のようになります。

さて、それでは BPS 粒子とのゲージ相互作用を議論しましょう。これまで議論してきたように、BPS 粒子は M5-brane に端をもつ M2-brane によって表されます。M2-brane の端は M5-brane 上ではひもになります。string 理論でお馴染みなように、ひもは 2-form 場に自然に結合します。M5-brane の上には self-dual 2-form 場が住んでいるので、次のような相互作用をすることを考えられます [10]。

$$S_{\text{int}} \sim \int_{\mathbb{R} \times \partial \Sigma_{BPS}} B^+ \quad (2.8)$$

今、 Σ_{BPS} の端が Σ_{SW} の α_I -cycle に n_e^I 回、 β_I -cycle に n_m^I 回巻き付いている場合を考えます。つまり、 $H_1(\Sigma_{SW}, \mathbb{Z})$ の元として、

$$\partial \Sigma_{BPS} = n_e^I \alpha_I + n_m^I \beta_I \quad (2.9)$$

であるとしします。このとき、(2.5) と (2.9) を (2.8) に入れて、(2.7) を使うと、

$$S_{\text{int}} \sim \left(n_e^I + n_m^I \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{IJ} \right) \int_{\mathbb{R}} A^J + n_m^I \left(\frac{8\pi}{g^2}\right)^{IJ} \int_{\mathbb{R}} \tilde{A}^J \quad (2.10)$$

となります。この式から BPS 粒子とゲージ場の相互作用が読み取れます。特に、 n_e^I と n_m^I が、それぞれ I 番目の $U(1)$ ゲージ場に対する電荷と磁荷に対応していることが分かります。これは Seiberg-Witten 理論における charge assignment を正しく再現しています。 θ が non-zero のとき、電荷が n_e から少しずれて、 $n_e + n_m \frac{\theta}{\pi}$ になるのは、場の理論ではお馴染みの Witten effect と呼ばれる効果 [11] に対応しています。

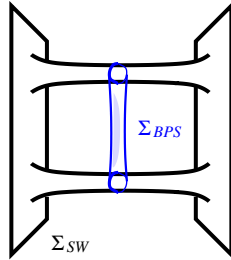


図 6: electric な粒子

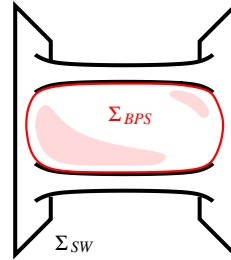


図 7: magnetic な粒子

2.5 BPS 質量公式

得られた BPS 粒子の質量は、 Σ_{BPS} の面積に比例します。比例定数は M2-brane の tension ですが、今はこれを 1 とおいてしましましょう。

$$\text{mass} = \int_{\Sigma_{BPS}} \sqrt{g} d^2\sigma \quad (2.11)$$

ここで、 g は Σ_{BPS} 上の計量の determinant です。今、 Σ_{BPS} は Q に複素構造 $\tilde{\mathbb{J}}$ に関して正則に埋め込まれているとします。 Σ_{BPS} の正則な座標を z とすると、計量は $ds_{\Sigma_{BPS}}^2 = g_{z\bar{z}} dz d\bar{z}$ となります。したがって、

$$\text{mass} = \int_{\Sigma_{BPS}} i g_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \quad (2.12)$$

です。(2.4) を思い出すと、これは $\omega_{\tilde{\mathbb{J}}}$ を Σ_{BPS} へ引き戻して積分している式であることが分かります。つまり、

$$\text{mass} = \int_{\Sigma_{BPS}} \omega_{\tilde{\mathbb{J}}} \quad (2.13)$$

$$= \left| \int_{\Sigma_{BPS}} \Omega \right| \quad (2.14)$$

と書けます。ここで、2.3 節の BPS 条件 (その 2) のところで説明したように Σ_{BPS} 上で $\Omega = e^{i\theta} \omega_{\tilde{\mathbb{J}}}$ なることを用いました。さらに、 $\Omega = d\lambda_{SW}$ と書けるときには、

$$\text{mass} = \left| \int_{\partial\Sigma_{BPS}} \lambda_{SW} \right| \quad (2.15)$$

のようになります。ちなみに、multi Taub-NUT space Q の holomorphic 2-form Ω は (1.6) の座標で表すと、

$$\Omega = dv \wedge \frac{dY}{Y} \quad (2.16)$$

であることが知られているので、今の場合

$$\lambda_{SW} = v \frac{dY}{Y} \quad (2.17)$$

です。これは、Seiberg-Witten 1-form と呼ばれるものと同じ形です。したがって、(2.9) を思い出すと、(2.15) は Seiberg-Witten によって提案された質量公式に他ならないことが分かります [5, 6, 7]。

Seiberg-Witten 理論では、この質量公式は semi-classical な解析や、双対性との整合性など、やや間接的な証拠から導かれたものでした。それに対して、MQCD の枠内では、物理的な考察から論理的に導くことができたわけです。MQCD って、本当に良くできた定式化だなあ、と感心させられますね。

3 具体例

3.1 $\mathcal{N} = 4$ SYM における BPS 粒子

MQCD による BPS 粒子の構成がいかほど強力であるかをみるために、この小節では、試しに $\mathcal{N} = 4$ SYM を考えてみます。これまで、主に $\mathcal{N} = 2$ SQCD を念頭において説明してきましたが、基本的なことは $\mathcal{N} = 4$ SYM でも通用します。 $\mathcal{N} = 4$ $U(N_c)$ SYM を M5-brane の上に実現するには、まず、 Q を $\mathbb{R}^2 \times T^2$ とし、 Σ_{SW} をこの T^2 に巻き付いた N_c 枚のトーラスとします。 Q を multi Taub-NUT とした場合と違って時空が flat なので、超対称性が全て保たれます。ここに M5-brane をおくと超対称性が半分になり、結局 $\mathcal{N} = 4$ の理論が得られます。この configuration は type IIB の弦理論で D3-brane を N_c 枚平行に並べたものと T-dual な関係にあります。

さて、簡単のために T^2 は正方形としましょう。 \mathbb{R}^2 の座標を $v = x^4 + x^5 i$ 、 T^2 の座標を $z = x^6 + x^{10} i$ とおき、

$$x^6 \sim x^6 + 2\pi, \quad x^{10} \sim x^{10} + 2\pi \quad (3.1)$$

なる同一視をすることになります。 Σ_{SW} は $Q = \mathbb{R}^2 \times T^2$ の中で $v = \phi_a$ ($a = 1, \dots, N_c$) という式によって定義されるリーマン面とします。ここで、 ϕ_a は定数で、これは場の理論の言葉で言うと adjoint な物質場 Φ の真空期待値にあたります。 $\mathcal{N} = 4$ SYM には adjoint な物質場が複素で数えて全部で 3 つあるのですが、今はこのうちの 1 つだけに真空期待値 $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_{N_c})$ を与えて、残りの 2 つは 0 においた場合を考えています。

Q の複素構造として、

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

をとることになります。これらは接空間の基底を $\{\partial_4, \partial_5, \partial_6, \partial_{10}\}$ の順に並べた時の行列表示です。こうすると、 $\mathbb{I}^2 = \mathbb{J}^2 = \mathbb{K}^2 = -1$, $\mathbb{I}\mathbb{J} = -\mathbb{J}\mathbb{I} = \mathbb{K}$, etc. を満たし、2.1 節で述べた条件を満たすことが分かります。 v や z は \mathbb{I} に関して正則な座標です。実際、 ∂_v や ∂_z は \mathbb{I} の固有値 i をもつ固有ベクトルです。 Σ_{SW} は $v = \phi_a$ という正則な式で定義されているので、 Q の中に複素構造 \mathbb{I} に関して正則に埋め込まれています。

さて、BPS 粒子を構成するには、 \mathbb{I} に直交する複素構造 $\tilde{\mathbb{J}} = \cos\theta \mathbb{J} + \sin\theta \mathbb{K}$ に関して正則なリーマン面 Σ_{BPS} を見つけなければなりません。 $\tilde{\mathbb{J}}$ に関して正則な座標は、例えば

$$\tilde{v} = x^4 - i(\cos\theta x^{10} + \sin\theta x^6) \quad (3.3)$$

$$\tilde{z} = x^5 - i(-\sin\theta x^{10} + \cos\theta x^6) \quad (3.4)$$

がとれます。簡単のため、 $N_c = 2$ の場合を考え、 $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = -1$ としましょう。 Σ_{SW} は $v = 1$ と $v = -1$ で定義される 2 つの連結成分を持っています。このとき、 $\tilde{z} = 0$ で定義される平面のうち Σ_{SW} に挟まれた部分 ($-1 \leq x^4 \leq 1$) を Σ_{BPS} とする BPS 粒子を考えてみます。これの面積が有限になるためには、直線 $\sin\theta x^{10} = \cos\theta x^6$ が T^2 の閉じた cycle になるように θ を調節してやる必要があります。今、 x^{10} に巻き付く cycle を α -cycle、 x^6 に巻き付く cycle を β -cycle と名付けることにします。2.4 節で与えた charge assignment を思い出すと、 $\theta = 0$ の時が電荷をもった粒子で、普通の W-boson に対応するものであることが分かります (図 8)。 $\theta = \pi/2$ の時は magnetic monopole です (図 9)。より一般に、 $\tan\theta = p/q$ であるとき (磁荷, 電荷) = (p, q) をもつ dyon ができます (図 10)。ここで、 p と q は互いに素な整数です。このようにして、あらゆる互いに素な整数の組 (p, q) に対応する charge をもった粒子 (以後 (p, q) -dyon と呼ぶ) を構成することができます。

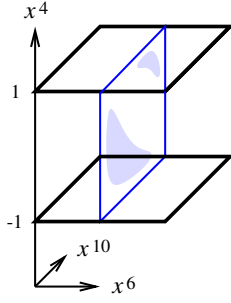


図 8: electric な粒子

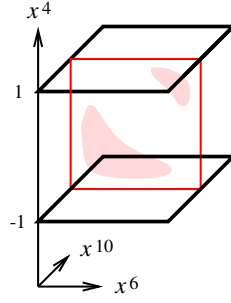


図 9: magnetic な粒子

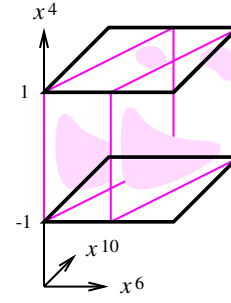


図 10: dyonic な粒子

このように、MQCDの枠内ではいとも簡単に (p, q) -dyon の存在が示せたわけですが、実はこれはすごいことを言っているのです。Montonen-Olive 以来、 $\mathcal{N} = 4$ SYM には $SL(2, \mathbb{Z})$ の双対性があると信じられてきました。この $SL(2, \mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は gauge coupling τ と粒子の charge に次のように作用します。

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (3.5)$$

$$(p, q) \rightarrow (p, q) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.6)$$

今の場合、質量と charge の関係から、BPS 粒子は gauge coupling τ を動かしても崩壊しないことが示せるので、この双対性が正しいとすると $(0, 1)$ charge をもつ W-boson を $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換して、あらゆる互いに素な整数の組 (p, q) の charge を持つ BPS 粒子が存在することが予言されます。このことを場の理論の方法を用いて示すのは容易ではありません。 $p = 1$ の場合は割と昔から良く知られていますが、 $p \geq 2$ になるととたんに難しくなります。1994年に Sen によって次のことが示されました [12]。

$$(p, q)\text{-dyon が存在} \iff \mathcal{M}_p^0 \text{ 上に } \mathbb{Z}_p \text{ の作用で } e^{-2\pi i q/p} \text{ の位相を出すような} \\ \text{normalizable な harmonic form が unique に存在}$$

ここで、 \mathcal{M}_p^0 は磁荷が p の monopole 解の moduli space \mathcal{M}_p と $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^3 \times \frac{S^1 \times \mathcal{M}_p^0}{\mathbb{Z}_p}$ なる関係にある $4(p-1)$ 次元の多様体で、 \mathbb{Z}_p が non-trivial に作用しています。Sen は、さらに、 $p = 2$ の場合に具体的に上の性質をもつ harmonic form を構成してみせ、 $(2, q)$ -dyon の存在を示しました。 \mathcal{M}_p^0 の具体的な形は $p = 2$ のときは良く知られていますが、 $p > 2$ の場合には漸近的な振る舞い等の一部の性質しか分かっていません。このため $p > 2$ の場合への拡張は容易ではなく、まだすべての (p, q) -dyon の存在を完全に示すところまでには至っていないようです [14]。また、ゲージ群を $SU(N_c)$ に拡張することも、ごく限られた部分しか成功していません。

MQCDの方法を使うと、あらゆる (p, q) -dyon の存在が明らかになるばかりでなく、 $SU(N_c)$ への拡張もほとんど自明になります。そもそも、1.1 節で述べたように、双対性が自明になるのです。MQCDの枠内では、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用は、 T^2 の modular 変換、あるいは、symplectic basis (α, β) の取り替え

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

とみなすことができます。基底の変換がこうなら、成分は (3.6) のように変換しますし、 $\tau = \int_\beta dz / \int_\alpha dz$ を思い出せば (3.5) も理解できます。つまり、物理的には全く同じものを違った基底で見ているに過ぎず、この変換で理論が等価であるのは自明です。

このように、MQCDで考えると、場の理論では全く非自明であったいくつかの事柄が自明になってしまいます。しかし、僕にはこのことが何か魔法を見せられているような気がしてなりません。例えば、このMQCDの議論は、本当に上で述べた Sen の条件が成立していることの証明になっていると言えるのでしょうか？ 少なくとも、結果は正しいのだと思うのですが、そうだとしたら、 \mathcal{M}_p^0 上の harmonic form の存在という数学的に非常に難解であると思われる問題を、M理論はどうして解くことができたのかが気になります。通常場の理論とMQCDとの間には、まだ十分に煮詰められていない深淵な関係があるように思います。

問題

ひとつ、手頃で面白そうな問題があります。 $\mathcal{N} = 4 SU(N_c)$ SYM は type IIB の弦理論で D3-brane を N_c 枚平行に並べることで実現できます。こうしてやることにより、最近、 $N_c \geq 3$ の場合には string junction に対応する粒子がありそうだとされています [15]。これは、図 11 のように、三つ又以上に分かれた string からくる粒子です。

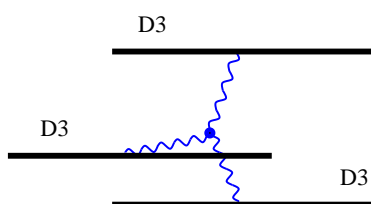


図 11: string junction

はじめは type IIB の弦理論における議論によって存在が予想されていたのですが、その後、これに対応する場の理論の古典解が見つかりました [16, 17, 18]。MQCDでもこれに対応するものが当然見つかるはずだと思われるのですが、まだ見つけたという報告はないようです*。これらは、M理論では図 12 のように Σ_{BPS} に穴が3つ以上あるような場合に対応します。ただし、 Σ_{BPS} の端はもちろん Σ_{SW} の上になければいけません。

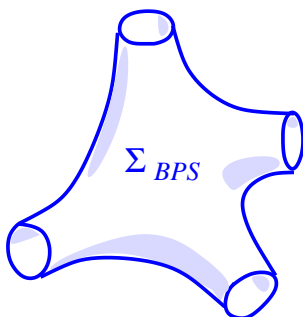


図 12: string junction のM化

このように、 $\mathcal{N} = 4$ SYM には、今まであまりお目にかかったことのないような粒子が随分たくさん潜んでいるように思われます。そうした粒子の存在や性質を調べるのは大変面白い問題だと思います。

* その後、うちの研究室の笹倉さんとの議論の末、無事、存在が確認されました [19]。

3.2 $\mathcal{N} = 2$ SQCD における B P S 粒子

この小節の内容は [20] に収められています。

3.2.1 準備

さて、再び $\mathcal{N} = 2$ SQCD を考えましょう。ついでに双対性に関するコメントもしたいので、flavor の数を $N_f = 2N_c$ とします。ただし、今の場合 (1.1) のように mass term を入れているので、 $2N_c$ 個ある quark のうちいくつかを重くしてやれば、実質的に flavor の数を減らすことができます。だから flavor の数が一般の場合を扱っていると思ってもらってかまいません。 $N_f = 2N_c$ というのは、ちょうど β 関数が 0 になる場合です。したがって、quark の mass m_i や Φ の真空期待値 ϕ_a よりも高いエネルギースケールでは gauge coupling は走らずに一定の値 $\tau = \frac{8\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{\pi}$ をとります。このときの Seiberg-Witten curve Σ_{SW} は (1.2) に τ 依存性を取り入れて

$$t^2 - 2C(v)t + (1 - h(\tau)^2)B(\hat{v}) = 0 \quad (3.8)$$

$$C(v) = \prod_{a=1}^{N_c} (v + \phi_a) \quad (3.9)$$

$$B(\hat{v}) = \prod_{i=1}^{2N_c} (\hat{v} - m_i) \quad (3.10)$$

のようになります [3]。ただし、 $\hat{v} = v + (1 - h(\tau))m_S$, $m_S = \frac{1}{2N_c} \sum_i m_i$ です。 $h(\tau)$ は

$$h(\tau) = \frac{\theta_3(\tau)^4}{\theta_4(\tau)^4 - \theta_2(\tau)^4} \quad (3.11)$$

で定義される関数で、特に

$$h(-1/\tau) = -h(\tau) \quad (3.12)$$

という性質を持っています。弱結合の極限 $\tau \rightarrow i\infty$ と強結合の極限 $\tau \rightarrow 0$ における値は

$$h(i\infty) = 1, \quad h(0) = -1 \quad (3.13)$$

です。

実は、この理論には双対な記述があることが場の理論の解析から予想されています [21, 3, 22]。この理論に双対な理論は、matter content はそのまま、gauge coupling と quark mass を

$$\tau \rightarrow -1/\tau, \quad m_i \rightarrow m_i - 2m_S \quad (3.14)$$

のように置き換えたものです。Seiberg-Witten curve (3.8) が (3.14) のもとで不変であることも非常に非自明な証拠の一つです。

以下、簡単のため、 $m_S = 0$ としてしまいましょう。このときは $v = \hat{v}$ です。(1.5) や (1.6) にあたる式は

$$\sqrt{1 - h(\tau)^2} (Y + Z) = 2C(v) \quad (3.15)$$

$$YZ = B(v) \quad (3.16)$$

のようになります。これを、例によって (3.16) で表される multi Taub-NUT space Q に Σ_{SW} が (3.15) によって正則に埋め込まれていると解釈します。 Q の計量は

$$ds^2 = V d\vec{x}^2 + \frac{1}{V} (dx^{10} + \vec{\omega} \cdot d\vec{x})^2 \quad (3.17)$$

$$V = 1 + \sum_{j=1}^{2N_c} \frac{1}{2|\vec{x} - \vec{x}_j|} \quad (3.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} V \quad (3.19)$$

で与えられます。ここで、 $\vec{x} = (x^4, x^5, x^6)$ で、 \vec{x}_j は j 番目の NUT singularity の位置を表しており、quark mass と $m_j = x_j^4 + x_j^5 i$ なる関係があります。singularity と言っても、これは座標の取り方が悪いために見かけ上特異点に見えるだけであって、本当はいたるところなめらかです。(ただし、今 $\vec{x}_j \neq \vec{x}_k$ ($j \neq k$) としています。) ここでとった座標 (x^4, x^5, x^6, x^{10}) と、複素変数 Y, Z, v との関係は、

$$Y = e^{-(x^6 + x^{10}i)} \prod_{j=1}^{2N_c} \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_j| - (x^6 - x_j^6)} \quad (3.20)$$

$$Z = e^{x^6 + x^{10}i} \prod_{j=1}^{2N_c} \left(\sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_j| + (x^6 - x_j^6)} \left(\frac{v - m_j}{|v - m_j|} \right) \right) \quad (3.21)$$

$$v = x^4 + x^5 i, \quad (3.22)$$

で与えられることが知られています [23, 24]。同様に、これと直交する複素構造 $\tilde{\mathbb{J}} = \cos\theta \mathbb{J} + \sin\theta \mathbb{K}$ に関して正則な複素変数 $\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{v}$ を求めてやると、

$$\tilde{Y} = e^{-(\tilde{x}^4 + (x^{10} - \gamma)i)} \prod_{j=1}^{2N_c} \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_j| - (\tilde{x}^4 - \tilde{x}_j^4)} \quad (3.23)$$

$$\tilde{Z} = e^{\tilde{x}^4 + (x^{10} - \gamma)i} \prod_{j=1}^{2N_c} \left(\sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_j| + (\tilde{x}^4 - \tilde{x}_j^4)} \left(\frac{\tilde{v} - \tilde{m}_j}{|\tilde{v} - \tilde{m}_j|} \right) \right) \quad (3.24)$$

$$\tilde{v} = -x^6 + \tilde{x}^5 i \quad (3.25)$$

のようになります。ここで、

$$\tilde{x}^4 + \tilde{x}^5 i = e^{-i\theta} (x^4 + x^5 i) \quad (3.26)$$

$$\gamma = \sum_{j=1}^{2N_c} \arg(\tilde{v} - \tilde{m}_j + |\vec{x} - \vec{x}_j| - (\tilde{x}^4 - \tilde{x}_j^4)) \quad (3.27)$$

$$\tilde{m}_j = -x_j^6 + \tilde{x}_j^5 i \quad (3.28)$$

とおきました。これらは、(3.16) と良く似た式

$$\tilde{Y}\tilde{Z} = \prod_{j=1}^{2N_c} (\tilde{v} - \tilde{m}_j) \quad (3.29)$$

を満たします。

ごちゃごちゃした式を並べてしまいましたが、要するに Σ_{BPS} を得るには、 $\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{v}$ に関して正則な式

$$f(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.30)$$

で定義されるリーマン面で、端が Σ_{SW} にのっているものを探せば良いということです。しかし、これはやってみると意外に難しいのです。難しいのは Σ_{BPS} の端が Σ_{SW} の上になければならないという条件です。4次元の多様体 Q に埋め込まれた2つの2次元面 Σ_{SW} と Σ_{BPS} は、一般には点でしか交わりません。ところが、有限質量の粒子を見つけるためには、 Σ_{BPS} の面積が有限でなければならず、そのためには Σ_{SW} が Σ_{BPS} とうまく線で交わることによって Σ_{BPS} を切り刻んで面積有限な領域をとりだす必要があるわけです。

ここでは最も簡単な場合、すなわち Σ_{BPS} が

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 \quad (3.31)$$

で与えられる場合を考えることにしましょう。ここで、 $\tilde{v}_0 = -x_0^6 + \tilde{x}_0^5 i$ は定数です。 Σ_{BPS} はこの式によって x^6 と \tilde{x}^5 がそれぞれ x_0^6 と \tilde{x}_0^5 に固定され、 \tilde{x}^4 と x^{10} の方向に伸びた面になります。こんな特殊な場合でも、十分楽しめるということがおいおい分かって頂けると思います。

まず、 Σ_{SW} の存在はしばらく忘れて (3.31) で定義される面の形を調べてみましょう。そのためには、すべての j に対して $\tilde{m}_j \neq \tilde{v}_0$ である場合と、ある j があって $\tilde{m}_j = \tilde{v}_0$ となる場合にわけて考える必要があります。

- すべての j に対して $\tilde{m}_j \neq \tilde{v}_0$ のとき

このときは $\tilde{Y}\tilde{Z} = \prod_j (\tilde{v}_0 - \tilde{m}_j) \neq 0$ なので、 Σ_{BPS} は $\tilde{Y} \neq 0$ で表されます。(3.23) より $\tilde{Y} = 0, \infty$ は $\tilde{x}^4 = \pm\infty$ にあたることから分かるので、 Σ_{BPS} は図 13 のようなチューブ型になります。

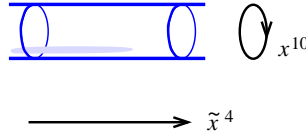


図 13: $\forall \tilde{m}_j \neq \tilde{v}_0$ の場合

- ある j があって $\tilde{m}_j = \tilde{v}_0$ のとき

このときは $\tilde{Y}\tilde{Z} = 0$ ゆえ、 $\tilde{Y} = 0$ または $\tilde{Z} = 0$ となります。今、 $\tilde{Y} = 0$ の方だけを考えることにすると、 Σ_{BPS} は \tilde{Z} 平面全体になります。(3.23) により $|\tilde{x}^4 - \tilde{x}_j^4| - (\tilde{x}^4 - \tilde{x}_j^4) = 0$ 、つまり、 $\tilde{x}^4 \geq \tilde{x}_j^4$ を得るので、絵に描くと図 14 のような試験管型になります。 $\tilde{x}^4 = \tilde{x}_j^4$ は前述の NUT singularity にあたる点で、 Σ_{BPS} はこの NUT に引っかかることで張力を維持しています。

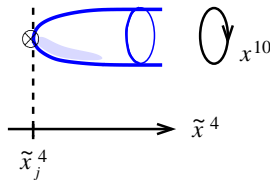


図 14: $\exists \tilde{m}_j = \tilde{v}_0$ の場合

3.2.2 弱結合領域におけるBPS粒子

さて、それではいよいよ $\mathcal{N} = 2$ SQCD のBPS粒子を調べることしましょう。始めに、弱結合の極限 ($\tau \rightarrow i\infty$) を調べてみます。このときは $h(\tau) \rightarrow 1$ なので、 Σ_{SW} は (3.15) より

$$0 = C(v) = \prod_{a=1}^{N_c} (v + \phi_a) \quad (3.32)$$

となります。つまり、 Σ_{SW} は x^4 と x^5 がそれぞれ固定された N_c 個の値 $\text{Re } \phi_a$ と $\text{Im } \phi_a$ をとり、 x^6 と x^{10} の方向に伸びた面になります。絵で言うと、図 4 で左右の板を遠くに引き伸ばしたような形です。ここに (3.31) で表される Σ_{BPS} を重ねます。(3.26) を思い出せば、(3.31) を v -平面に射影すると直線 $\cos \theta x^5 - \sin \theta x^4 = \tilde{x}_0^5$ をあらわしていることが分かるので、 Σ_{BPS} がうまく Σ_{SW} とぶつかるように θ や \tilde{v}_0 を選ぶのは容易ですね。あとは、 Σ_{BPS} として、 Σ_{SW} に挟まれた有限な領域を取り出してやれば出来上がりです。こうして、図 15 や図 16 のような Σ_{BPS} を持つBPS粒子が構成できました。

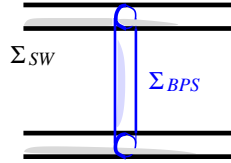


図 15: W-boson

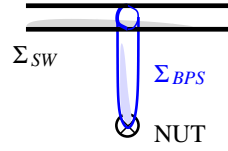


図 16: quark

これらは、図 4 で描いたものに対応し、type IIA の弦理論で言えば図 3 に描かれた string に対応します。したがって、図 15 に対応する粒子は W-boson であり、図 16 に対応する粒子は quark であることが分かります。実際、図 15 の Σ_{BPS} の端は、2つの α -cycle に巻き付いており、2つの $U(1)$ の電荷を持っていることが分かります。これは、W-boson の持つ電荷と同じです。図 16 からも同様に1つの $U(1)$ の電荷を持っていることが分かり、さらに NUT に引っかかっているので、flavor の足も持っています。これは quark の持つ性質と同じです。また、両者の質量を図 15 と図 16 における Σ_{BPS} の管の長さから見積もってやると、それぞれ W-boson $\sim |\phi_a - \phi_b|$ 、quark $\sim |\phi_a + m_i|$ となり、場の理論の結果を正しく再現しています。

結局、場の理論の素粒子 (Lagrangian に入れる場に対応する粒子) がすべて得られました。 Σ_{BPS} として (3.31) のような非常に特殊なものを考えましたが、今の場合は、実はこれ以外にはあり得ないということも証明できます。

3.2.3 強結合領域におけるBPS粒子と双対性

先ほどは弱結合の極限を議論しましたが、(3.15) の中に $h(\tau)$ は 2 乗の形でしか現れていないので、強結合の極限 ($\tau \rightarrow 0$, $h(\tau) \rightarrow -1$) でもこれまでの議論は全く同じように通用し、やはり quark や W-boson が現れます。ところが、これらは弱結合の極限で見つけた quark 及び W-boson とは別物なのです。実は、これらは双対な理論の quark 及び W-boson であることが分かります。ここでは詳しく述べませんが、 τ をずりずりと動かして、強結合領域から弱結合領域に持っていく過程での Σ_{SW} の cycle の動きを追うことによって、強結合の極限にいた quark や W-boson は実は磁荷を持つ粒子であることが分かるのです。

3.1 節で $\mathcal{N} = 4$ SYM の双対性がMQCDで考えると自明になると述べましたが、同じように、今の $\mathcal{N} = 2$ SQCD の双対性もMQCDでは自明になります。元の理論も双対な理論も Σ_{SW} が同じであったの

で、そこから定義されるMQCDは当然全く同じになるのです。物理的に同じものを (3.14) のように異なる変数を用いて表わしているに過ぎません。MQCDは双対性に関してこのような明快な解釈を与え、さらに、双対な理論の間のBPS粒子の対応まで議論することを可能にしてくれます。詳しくは [20] を参照してください。

3.2.4 エキゾチックな粒子達

ここまでで弱結合と強結合の極限の様子が分かったので、今度はその中間を調べてみます。この場合は、BPSスペクトラムを完全に求めることは難しく、ある特殊な場合を考えることにします。

まず、 $h(\tau) \in \mathbb{R}$ で $-1 < h(\tau) < 1$ とします。また、 $x_j^6 = 0$ ($j = 1, \dots, 2N_c$) とし、 $B(v)$ 及び $C(v)$ の係数がすべて実数の場合を考えます。こうしておいて、 Σ_{BPS} として $\theta = 0$ で $\tilde{v} = 0$ と表わされるもの、つまり $x^6 = x^5 = 0$ で定義される面を考えることにします。

こうすると、 Σ_{BPS} の上で (3.20)~(3.22) は

$$Y = e^{-x^{10}i} \prod_{j=1}^{2N_c} \sqrt{|x^4 - m_j^4|}, \quad (3.33)$$

$$Z = e^{x^{10}i} \prod_{j=1}^{2N_c} \left(\sqrt{|x^4 - m_j^4|} \left(\frac{x^4 - m_j}{|x^4 - m_j|} \right) \right), \quad (3.34)$$

$$v = x^4, \quad (3.35)$$

のようになります。ここで、

$$B(x^4) = \prod_{j=1}^{2N_c} (x^4 - m_j) \quad (3.36)$$

を思い出すと、

$$Y = e^{-x^{10}i} \sqrt{|B(x^4)|}, \quad (3.37)$$

$$Z = e^{x^{10}i} \left(\sqrt{|B(x^4)|} \left(\frac{B(x^4)}{|B(x^4)|} \right) \right), \quad (3.38)$$

と書きなおせます。

一方 Σ_{SW} は (3.15) で与えられ、今 $B(x^4)$, $C(x^4)$ や $\sqrt{1-h(\tau)^2}$ は実数なので Σ_{SW} と Σ_{BPS} の交わりは、 $B(x^4) > 0$ で

$$\sqrt{(1-h(\tau)^2)B(x^4)} \cos x^{10} = C(x^4) \quad (3.39)$$

を満たす点であることが分かります。 $\tilde{B}(x^4) \equiv \sqrt{(1-h(\tau)^2)B(x^4)}$ とおくと、(3.39) は

$$-\tilde{B}(x^4) \leq C(x^4) \leq \tilde{B}(x^4) \quad (3.40)$$

を意味しています。(3.40) を満たす部分を探すには、 $\tilde{B}(x^4)$ や $C(x^4)$ のグラフを書いてみれば簡単です。 Σ_{BPS} は (3.39) で表わされる線に囲まれた領域です。いくつか例を与えましょう。

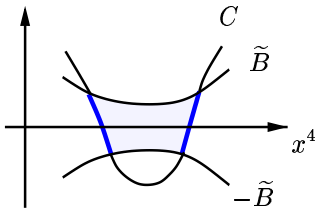


図 17: W-boson

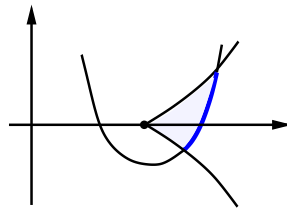


図 18: quark

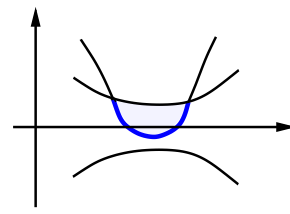


図 19: dyon

これらは図 17 に示したように、横軸が x^4 で、縦軸に $C, \tilde{B}, -\tilde{B}$ の値 ($B > 0$ などところのみ) をプロットした図です。(3.40) を満たす部分を太線で示しました。 Σ_{BPS} は (3.39) を端としてもち、 x^4, x^{10} 方向に延びた面なので、図 17、図 18、図 19 のグラフで囲まれる部分を埋めて、それぞれ図 20、図 21、図 22 のようなものになることが分かります。

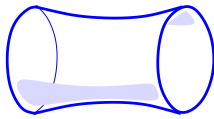


図 20: W-boson

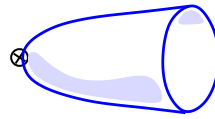


図 21: quark

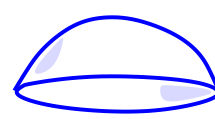


図 22: dyon

図 18 にあるような \tilde{B} の零点はちょうど NUT に対応しています。 x^{10} 方向に巻き付いた cycle は α -cycle だったので、図 20 や図 21 は電荷を持った粒子であることが分かります。これらは、3.2.2 節で議論した W-boson と quark に他なりません。これに対して、図 19 は x^{10} 方向に巻き付いていない cycle を表しており、図 22 は磁荷 (+電荷) をを持った粒子であることが分かります。

さて、ここまでは、場の理論で良くお目にかかる粒子たちですね。ところが、調子に乗って m_j や ϕ_a の値を適当に動かして、 \tilde{B} や C のグラフの形をいろいろ変えていくと、見たこともない粒子たちがざくざく出てくるのです。例えば、

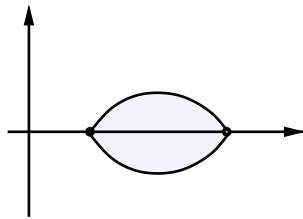


図 23: meson ?

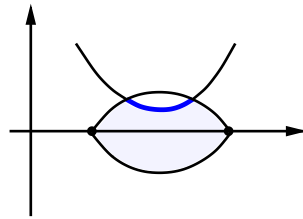


図 24: exotic dyon ?

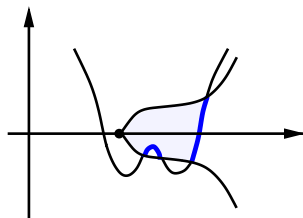


図 25: exotic W-boson ?

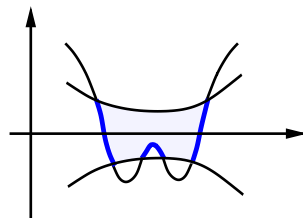


図 26: zubon ?

などなど。これらに対応する Σ_{BPS} は



図 27: meson ?



図 28: exotic dyon ?

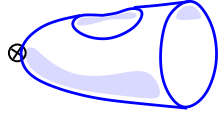


図 29: exotic W-boson ?

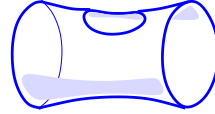


図 30: zubon ?

のような形です。flavor の足が 2 つある粒子 (図 27、図 28)、 Σ_{BPS} のトポロジーは W-boson のときと同じでも flavor の足を持っている粒子 (図 29)、そして、 Σ_{BPS} のトポロジーがズボン型の粒子などなどです。MQCD はこんな BPS 粒子たちが $\mathcal{N} = 2$ SQCD に存在するということを予言しているのです。

問題

Σ_{BPS} のトポロジーが円盤型なら得られる粒子は hypermultiplet、円筒型なら vector multiplet であるという予想があります [6]。図 15 が vector multiplet で図 16 が hypermultiplet であったことを思い出すと、そういう気がしてきますよね。しかし、図 28 や図 29 のようなものでも、この予想は正しいのでしょうか？ また、図 30 のような場合や、 Σ_{BPS} が genus を持っている場合などは、どの multiplet に属する粒子になるのでしょうか？ これを調べるためにはまじめに M2-brane の量子化を考える必要があります [7]。

4 良く分からないこと

良く分からないことはいろいろあるのですが、ここでは特に気になる一つだけ。僕が分からないだけかも知れないので、もし、答えをご存じの方がいらしたら、こっそり教えてくださいね*。

type IIA の弦理論では、ゲージ群の足は各 D4-brane に割り当てられた Chan-Paton label から来ました。これを M 理論に持ち上げると、MQCD ではゲージ群の足は Σ_{SW} の α -cycle が担っていることになります。このことは 2.4 節でも見たとおりです。

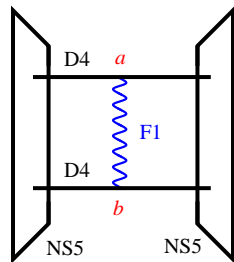


図 31: Chan-Paton label

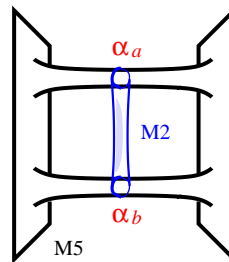


図 32: α -cycle

* E-mail: sugimoto@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

ところが、 Σ_{SW} には β -cycle もあって、これが magnetic なゲージ群の足を担っています。MQCDでは、この α -cycle と β -cycle のどちらが fundamental であるという区別がありません。つまり、1.1 節でも述べたように、MQCDは素粒子とソリトンとを全く同格に扱う、民主的な定式化であるということです。これは、M理論のすばらしい特徴の一つだと言えますが、理論を explicit に書き下そうとするとどうしたら良いのか迷うところがあります。というのは、MQCDは M5-brane を Σ_{SW} に巻き付けたときの world volume 上の有効理論であると言いましたが、その有効理論を例えば場の理論の言葉で書き下そうとすると、素粒子とソリトンが共存した系を書き下さなければならず、local な場の理論ではうまく記述できそうにありません。それに、もし、素粒子とソリトンとを無理矢理独立な自由度として含めてしまうと場の自由度を double counting していることになってしまうでしょう。その中から素粒子だけを抜き出して作用を書き下したものが通常の場合の理論にあたるのですが、それは明らかに民主主義に反します。

また、この理論を membrane の理論として定式化しようとする、量子化の問題に取り組まなければならないことに加えて、open membrane の理論がなんだか良く分からない理論であることに気がきます。open string の時は、string の端は 2 点しかありませんから、Hilbert space を構成するには図 31 のように Chan-Paton label を与えて、

$$|p; a b \rangle \quad (4.1)$$

のような元を用意すれば良かったわけです。open membrane の理論で、これの対応物は

$$|p; \alpha_a \alpha_b \rangle \quad (4.2)$$

とでも書いたら良いものであるように思われます。ところが、membrane の端は Σ_{SW} の様々な cycle に巻き付く可能性があり、さらに、図 30 のように 3 つ以上の cycle に巻き付く場合だってあります。

$$|p; \beta_b \rangle \quad (4.3)$$

$$|p; \beta_a \beta_b \rangle \quad (4.4)$$

$$|p; \alpha_a \alpha_b \beta_c \cdots \rangle \quad (4.5)$$

⋮

こんなものをすべて用意しないといけないのでしょうか？

このように、MQCDの特徴を生かしつつ理論を正しく定式化するには、何かもう一捻りしなければいけないようです。もちろん、そもそもM理論をどう定式化したら良いかという大問題と絡んでくるのですが、なんとかうまく定式化できないものなのでしょうか？

5 おわりに

「僕には講義なんて無理です。」と言って、何度か駄々をこねたのですが、結局、勝てなかったんですね。でも、聞きに来てくださった方々が大変示唆に富む質問や議論を吹っ掛けてくださったおかげで、非常に充実した午後を送ることができました。また、これをきっかけに笹倉さんの小品 [19] が生まれたのは、僕にとって幸運な出来事でした。オーガナイザーの方々や、参加者の皆さんに感謝したいと思います。

APPENDIX

A 超対称性とBPS条件についての補足

ここでは、2.1 で説明しかけた超対称性の話と 2.3 節で導出を省いたBPS条件を説明します。より厳密な議論は例えば [6] を参照してください。ここでは、短時間で分かった気になる説明を試みます。

一般に、時空の一部を曲げると、超対称性が破れます。gravitino ψ_μ の SUSY 変換が

$$\delta\psi_\mu \sim \nabla_\mu \epsilon + \dots \quad (\text{A.1})$$

であったことを思い出すと、SUSY 変換のパラメータ ϵ が covariantly constant (i.e. $\nabla_\mu \epsilon = 0$) であるような部分しか超対称性が保たれないことが分かります*。11次元時空のうちの4次元を hyperkähler 多様体 Q にした場合を考えてみましょう。このとき、 Q の local rotation group は $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ なので、11次元の Majorana spinor は

$$SO(1,10) \supset SO(1,6) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{32} \quad (\underline{8}, \underline{2}, \underline{1}) \oplus (\underline{8}, \underline{1}, \underline{2}) \quad (\text{A.3})$$

のように分解されます。ところで、4次元の hyperkähler 多様体のホロノミーは $SU(2)$ の部分群であることが知られています。今は、 Q が multi Taub-NUT space である場合への応用を考えたいので、ホロノミーは $SU(2)$ そのものであるとします。この $SU(2)$ が上の $SU(2)_L$ であるとすると、 $(\underline{8}, \underline{2}, \underline{1})$ spinor は平行移動すると $SU(2)_L$ 回転を受けるので、covariantly constant ではありません、超対称性を破ってしまうことが分かります。一方 $SU(2)_R$ の方はホロノミーの回転を受けないので、(A.1) の ϵ のうち $(\underline{8}, \underline{1}, \underline{2})$ spinor にあたる成分が破れずに残る超対称性です。

さて、それでは、BPS条件を求めましょう。11次元の超対称性の代数は

$$\{Q, Q^\dagger\} = \Gamma^\mu \Gamma^0 P_\mu + \Gamma^{\mu\nu} \Gamma^0 Z_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma^0 Z_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.4})$$

のようになります。 P^μ が運動量、 $Z_{\mu\nu}$ と $Z_{\mu\nu\rho\sigma}$ が central charge で、それぞれ、M2-brane と M5-brane の延びている方向に値を持ちます。例えば、flat な空間の中に M5-brane を x^0, \dots, x^5 の方向にまっすぐ延ばした場合は $W \equiv Z_{12345} \neq 0$ となります。このとき、 $P^\mu = (M, 0, \dots, 0)$ とすると、(A.4) は、

$$\{Q, Q^\dagger\} = \mathbf{1} M - \Gamma_{(5)} W \quad (\text{A.5})$$

$$= \begin{pmatrix} M - W & \\ & M + W \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

となります。ここで、 $\Gamma_{(5)} \equiv \Gamma^{012345}$ は、M5-brane の world volume の6次元の chirality operator であり、(A.6) では $\Gamma_{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ なる行列表示を用いました。したがって、 $M = \pm W$ のとき、 $\Gamma_{(5)} \epsilon = \pm \epsilon$ なる超対称性が残ることになります。M2-brane の場合も全く同様で、上の $\Gamma_{(5)}$ を M2-brane の world volume 上の chirality operator $\Gamma_{(2)} \equiv \Gamma^{012}$ に置き換えれば良いだけです。

時空や brane が曲がっている場合も基本的には同じです。この場合、 $\Gamma_{(5)}$ や $\Gamma_{(2)}$ はもはや定数ではありませんが、やはり、M5-brane や M2-brane の world volume の接空間における chirality operator です。

* (A.1) の $+\dots$ にあたる部分は 3-form 場や fermion を含む項からなっていますが、今はこれらが zero である場合を考えています。

以上の考察を合わせて、曲がった時空に、M5-brane と M2-brane が共存するとき残る超対称性は、

$$\nabla_\mu \epsilon = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{(5)} \epsilon = \epsilon \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{(2)} \epsilon = \epsilon \quad (\text{A.9})$$

を満たす成分ということになります。

では、この結果を 2.2 節の状況に応用してみましょう。このとき、M5-brane と M2-brane の world volume を flat な部分と曲がった部分とに別けて、

$$\Gamma_{(5)} = \Gamma^{0123} \Gamma_{\mathbb{I}} \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{(2)} = \Gamma^0 \Gamma_{\mathbb{J}} \quad (\text{A.11})$$

と表します。 Γ^{ij} ($i, j = 4, 5, 6, 10$) が Q の local rotation $SO(4)$ の generator と見なせることを思い出してください。 $\Gamma_{\mathbb{I}}$ と $\Gamma_{\mathbb{J}}$ はそれぞれ、この $SO(4)$ の中の Σ_{SW} と Σ_{BPS} の local rotation にあたる $SO(2)$ 部分群の generator です。これらは、 $(\Gamma_{\mathbb{I}})^2 = (\Gamma_{\mathbb{J}})^2 = -1$ を満たし、それぞれ、 Σ_{SW} と Σ_{BPS} の上の複素構造を定めます。

一方、 $\Gamma_{\mathbb{I}}$ や $\Gamma_{\mathbb{J}}$ は $SO(4)$ の generator の spinor 表現なので、 $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ の $(\underline{2}, \underline{1}) \oplus (\underline{1}, \underline{2})$ に作用します。今、(A.7) を満たす spinor は $(\underline{1}, \underline{2})$ の方だけだったので、 $\Gamma_{\mathbb{I}}$ と $\Gamma_{\mathbb{J}}$ をこちらの成分に射影して 2×2 行列にしたものを、それぞれ $\gamma_{\mathbb{I}}$ と $\gamma_{\mathbb{J}}$ と書くことにしましょう。

ここで、 Q の複素構造は、 Q の接ベクトル空間に作用する行列だったことを思い出します。 $SO(4)$ の vector は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の $(\underline{2}, \underline{2})$ でしたので、これにかかる行列として、

$$\tilde{\mathbb{I}} = 1 \otimes \gamma_{\mathbb{I}} \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{\mathbb{J}} = 1 \otimes \gamma_{\mathbb{J}} \quad (\text{A.13})$$

とおくことにします。(A.7) と (A.8) 及び (A.9) が両立するためには $\tilde{\mathbb{I}}$ と $\tilde{\mathbb{J}}$ は covariantly constant であるべきです。そうなるようにうまく Σ_{SW} と Σ_{BPS} をとらないと、超対称性が保たれないという意味です。ついでに、 $\tilde{\mathbb{I}}$ や $\tilde{\mathbb{J}}$ を平行移動することによって、その定義域を Q 全体に延ばしておきます。これらはホロノミーの変換を受けないので、大域的にうまく定義することができます。こうしておく、これらは $\tilde{\mathbb{I}}^2 = \tilde{\mathbb{J}}^2 = -1$ も満たすので、 Q の複素構造になります。上で述べたことと合わせると、 Σ_{SW} と Σ_{BPS} は Q の中にそれぞれ複素構造 $\tilde{\mathbb{I}}$ 、 $\tilde{\mathbb{J}}$ に関して正則に埋め込まれていなければならないということが分かります。

さらに、(A.8) と (A.9) が両立するためには $\Gamma_{(5)}$ と $\Gamma_{(2)}$ とが covariantly constant な spinor の空間の上で可換であればよいですね。このことは (A.10) や (A.11) を使って

$$\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\mathbb{J}} + \tilde{\mathbb{J}}\tilde{\mathbb{I}} = 0 \quad (\text{A.14})$$

と書きなおすことができます。したがって、複素構造 $\tilde{\mathbb{I}}$ と $\tilde{\mathbb{J}}$ とは互いに直交したものであることが分かりました。

参考文献

- [1] J. H. Schwarz, Phys. Lett. **B360** (1995), 13; **B367** (1996), 97.

- [2] P. S. Aspinwall, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 46 (1996), 30.
- [3] P. C. Argyres, M. R. Plesser and A. D. Shapere, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 1699.
P. C. Argyres and A. D. Shapere, Nucl. Phys. **B461** (1996), 437.
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. **B500** (1997), 3.
- [5] A. Fayyazuddin and M. Spalinski, Nucl. Phys. **B508** (1997), 219.
- [6] M. Henningson and P. Yi, Phys. Rev. **D57** (1998) 1291.
- [7] A. Mikhailov, hep-th/9708068.
- [8] A. Bilal and F. Ferrari, Nucl. Phys. **B469** (1996) 387; **B480** (1996), 589.
- [9] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994), 19; **B431** (1994), 484.
- [10] P. Townsend, Phys. Lett. **B383** (1996), 44.
- [11] E. Witten, Phys. Lett. **B86** (1979), 283.
- [12] A. Sen, Phys. Lett. **B329** (1994) 217.
- [13] C. Montonen and D. Olive, Phys. Lett. **B72** (1977) 117.
- [14] M. Porrati, Phys. Lett. **B377** (1996) 67.
- [15] O. Bergman, Nucl. Phys. **B525** (1998) 104.
- [16] K. Hashimoto, H. Hata and N. Sasakura, Phys. Lett. **B431** (1998) 303; hep-th/9804164.
- [17] T. Kawano, K. Okuyama, Phys. Lett. **B432** (1998) 338.
- [18] K. Lee, P. Yi, Phys. Rev. **D58** (1998) 66005.
- [19] N. Sasakura and S. Sugimoto, in preparation.
- [20] S. Sugimoto, Prog. Theo. Phys. **100** (1998), 123.
- [21] R. G. Leigh and M. J. Strassler, Nucl. Phys. **B447** (1995), 95.
- [22] T. Hirayama, N. Maekawa and S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **99** (1998), 843.
- [23] N. J. Hitchin, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85** (1979), 465.
- [24] T. Nakatsu, K. Ohta, T. Yokono and Y. Yoshida, Nucl. Phys. **B519** (1998) 159.