

AdS/CFT 対応？

—超弦理論と量子凝縮系物理のモダンな交流—

Keyword: AdS/CFT 対応

超弦理論は重力理論の量子化、つまりプランクスケールの物理法則の解明を目的とする理論である。一方、凝縮系の物理は量子多体系に現れる多様な物理現象の探求を目的としている。従って、一見だいたい方向性の異なる研究分野と思われるかもしれない。しかし、AdS/CFT 対応の発見¹⁾というブレークスルーによって、それまで誰も予想ができなかった斬新な形で両分野の深い関わり合いが現在明らかになりつつある。実際、米国などを中心に超弦理論と物性物理の研究者がほぼ同人数参加して行う研究会が最近盛んに行われている。筆者もしばしば参加するが、両分野間の議論も白熱し大変盛り上がることが多い。

AdS/CFT 対応は、量子臨界点における量子多体系と負の宇宙定数を持つ空間における重力理論が等価であることを主張する。従って、臨界点付近の量子多体系の研究は、時空の力学の解明を目的とする重力理論の研究と根源的には同じとみなせることを意味するのである。さて、以下ではブラックホールという、いわば重力理論における「謎の物質」に対する思考実験を通した歴史的な経緯にも触れながら、AdS/CFT 対応について説明してゆきたい。

1. ブラックホールとホログラフィー原理

重力理論に特有の現象として、ブラックホールが挙げられる。ブラックホールはとても重い天体であるので非常に強い重力場を持ち、その内部からは光ですら抜け出すことができず、外部の観測者はその内部を知ることができない。ブラックホールが重い星が重力崩壊を起こして形成されることを考えると、もとの星が持っていた情報はブラックホールの内部に隠れているはずである。

この隠された情報量が、ブラックホールのエントロピーである。不思議なことに、このエントロピーは熱力学の法則と同じ法則を満たすことが四十年前から知られている。ブラックホールの質量をエネルギーとみなし、ブラックホールの熱輻射（ホーキング輻射）の温度を用いると熱力学第一法則が成り立つ。一般相対論においてブラックホールのエントロピーは、その表面積を重力定数の4倍で割ったもので与えられるという有名なベッケンシュタイン・ホーキング公式で計算される。さて、ブラックホールのエントロピーが面積に比例するという事実は、通常の熱力学と比較すると大変奇妙である。エントロピーはミクロな自由度を見積り、示量的な量であるので面積ではなく体積に比例するはずである。トフーフとサスキンドは、約二十年前

に、この奇妙な事実が、むしろ重力理論の本質であることを見抜き、ホログラフィー原理を提案した。²⁾ 重力理論は、一次元低い（重力相互作用を含まない）量子多体系として表わすことができるという考え方である。

このホログラフィー原理を用いると、我々が住んでいる4次元時空におけるブラックホールのエントロピーは、ブラックホールの表面に相当する2次元球面上に定義された量子多体系のエントロピーと等しくなるはずである。しかしながら、話はそう簡単ではない。我々はほぼ平坦な時空に住んでいるが、曲率がゼロの時空において、ブラックホールの熱力学を調べると、比熱が負になることが知られている。従って、平坦な時空は熱力学的に不安定な系と思われる。ホログラフィー原理を用いる対象としてよろしくない。

2. AdS/CFT 対応

この問題点を解決するには、負の曲率を持つ時空を考えればよい。負の曲率を持ち、対称性が最も高い時空が、反ド・ジッター空間（Anti de-Sitter 空間、略して AdS 空間）である。^{*1} 従って、反ド・ジッター空間のホログラフィー原理を考えれば、さきほどの問題が回避される。これがまさに AdS/CFT 対応である。4次元の反ド・ジッター空間を例にとると、計量は、 $ds^2 = (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2$ と表わされる。 (t, x, y) は3次元ミンコフスキー時空の座標で、もうひとつの座標 z に計量のスケール因子が依存している構造となっている。 $z=0$ は、反ド・ジッター空間の境界に相当し、その境界は、3次元ミンコフスキー時空である。この場合 AdS/CFT 対応は、「4次元の反ド・ジッター空間における重力理論と、その境界に相当する3次元時空における

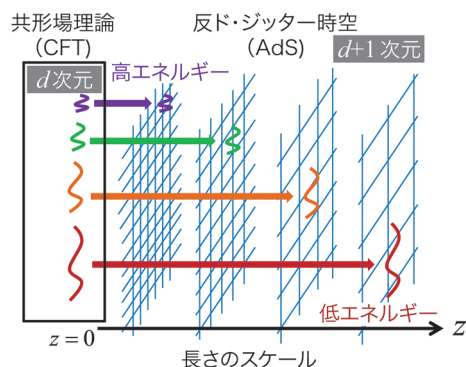


図1 AdS/CFT の概念図。共形場理論における波長 L 程度の摂動は、反ド・ジッター空間では $z=L$ 付近の変形（重力波）に相当する。

共形場理論 (Conformal Field Theory, 略して CFT) が、理論として等価になる」という主張となる。^{*2} 等価とは、両者の熱力学的量や相関関数がすべて一致することを意味する。

共形場理論とは、長さのスケールに依存しない理論であり、量子臨界点における量子多体系に相当する。^{*3} 確かに反ド・ジッター空間の計量も、 $(t, x, y, z) \rightarrow \lambda(t, x, y, z)$ というスケールを変える変換で不変である。つまり、AdS と CFT の対称性がうまく一致している。反ド・ジッター空間に含まれる座標 z は、繰り込み群の考えを適用したときに共形場理論の長さのスケールに相当する (図1 参照)。

3. AdS/CFT の導出

重力理論や共形場理論の具体的な中身を知るには超弦理論が必要になる。超弦理論は量子重力のミクロな理論であり、低エネルギーの有効理論として一般相対論に帰着する。1997年にマルダセナは次のような超弦理論の考察を通して、AdS/CFT 対応を発見した。¹⁾ 超弦理論にブラックホールを作るために、何かとても重い物体が必要である。その良い候補が D ブレインである。D ブレインとは、空間的に広がった重い物体で、膜のように振動する。³⁾ D ブレインを一か所に多数集めると大きな質量のために、周りの時空を大きく曲げる。この時空は空間方向に広がるブラックホールなので、ブラックブレインと呼ばれる。ブラックブレインの計量を調べると、D ブレインの種類をうまく選ぶと反ド・ジッター時空となることが分かる。^{*4} 逆に反ド・ジッター時空を顕微鏡のようなものでミクロに観察すると、多数の D ブレインから構成されているというわけだ。

D ブレインの上では、重力は小さく無視できるので、D ブレインの多体系は、量子多体系とみなせる。従って、この D ブレインの量子多体系と反ド・ジッター時空における超弦理論は、全く同じものを2つの別の見方をしているだけということになる。従って、両者は理論として等価でなければならない。このようにして、超弦理論から AdS/CFT 対応が発見されたのである。

では、D ブレインの量子論とはどのようなものであろうか？ 詳細の説明は紙面の都合で省くが、結論を言うと、QCD のようなヤンミルズ・ゲージ理論となる。正確には、 N 枚の D ブレインの系は、 $SU(N)$ をゲージ群とするゲージ理論となる。従って、そのハミルトニアンも厳密に書き下すことができ、AdS/CFT に現れるゲージ理論は特に共形場理論になっていることも理解できる。

以上は AdS/CFT 対応の導出の説明であって、厳密な証明ではない。しかし、過去十数年間に非常に多くの証拠 (例えば演算子のスペクトラムの再現など) が多数見つかり、疑いようのない事実と今ではみなされている。

4. 低エネルギー極限と量子凝縮系の物理

量子多体系の解析のみに興味がある場合は、超弦理論の複雑な計算は好ましくないだろう。だが、超弦理論の低エネルギー有効理論である一般相対論で事足りるという幸運な場合がある。これは、共形場理論の相互作用が強く、自由度が大きい (ゲージ群の階数 N が大きい) 極限に相当する。

まず、自由度が大きいということは、重力理論の空間の体積が大きいことに対応するのでプランクスケールの量子重力効果を無視できる。また、超弦理論には弦の振動のスペクトラムから、無限に高いスピンを持つ粒子が存在する。しかし、一般相対論に出てくる粒子のスピンは高々、重力子のスピン 2 である。これに丁度対応して、共形場理論のスピン 3 以上に対応する演算子は、相互作用が強い極限では非常に重くなり無視できるのである。一方、スピン 2 の演算子はエネルギー運動量テンソルであり、これは理論を定義する演算子であるので強結合でも残る。

従って AdS/CFT 対応を用いると、強結合の量子凝縮系の複雑な計算がそれよりもずっと簡単な一般相対論の古典論的な計算に置き換わる、という御利益がある。この事実を利用した応用例として、様々な輸送係数 (粘性⁴⁾ や電気伝導度⁵⁾) の計算や、エンタングルメント・エントロピーの計算⁶⁾ などが挙げられる。有限温度や有限密度の状況における量子系は、AdS/CFT 対応では様々なブラックホール解に相当する。例えば、電荷のみを持つブラックホールは、(異常) 金属状態に相当し、スカラー場が凝縮したブラックホールは、超伝導状態に相当することが知られている。

以上のように、AdS/CFT 対応は様々な検証がなされ、また広範囲に及ぶ応用例を有している。にもかかわらず、その基礎的なメカニズムについては現在でも理解は不十分であり、今後のさらなる発展が切に望まれる。

参考文献

- 1) J. M. Maldacena: Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.
- 2) G. 't Hooft: arXiv: gr-qc/9310026; L. Susskind: J. Math. Phys. **36** (1995) 6377.
- 3) J. Polchinski: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724.
- 4) G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 081601.
- 5) S. Hartnoll, P. Kovtun, M. Mueller and S. Sachdev: Phys. Rev. B **76** (2007) 144502.
- 6) S. Ryu and T. Takayanagi: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 181602.

高柳 匡 (京都大学基礎物理学研究所)

(2013 年 8 月 29 日原稿受付)

^{*1} 逆に、ド・ジッター時空のように正の曲率を持つ時空を考えることもできると思うかもしれない。しかしその場合には、ブラックホールの質量に上限があるなど別の問題も生じ、話が余計に難しくなる。

^{*2} 一般次元では、 $d+1$ 次元の重力理論 = d 次元の共形場理論となる。

^{*3} 正確には、動的指数 (dynamical exponent) が 1 のクラスに相当。

^{*4} 正確には、D ブレインに近づく極限をとる必要がある。