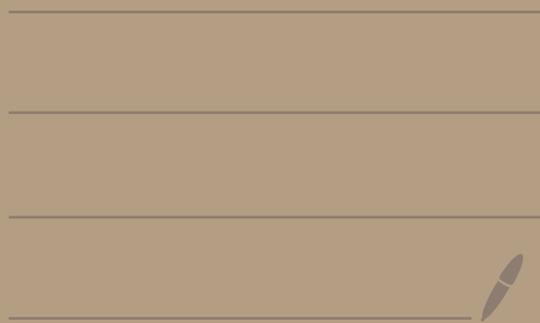


# 駒場集中講義 前半

---

2020年10月



# ① 量子エンタングルメントの基礎

## (1-1) 量子力学の復習

### 純粋な状態 (Pure State)

波動関数  $\psi$  で定まる 明確な状態

$$\psi(x) \leftrightarrow |\psi\rangle \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

例 スピン系 (スピン  $\frac{1}{2}$ , <sup>Qubit</sup> 1量子ビット)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle & |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \\ &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in H_{1\text{Qubit}} \end{aligned}$$

物理量  $\rightarrow \hat{O}$ : エルミート演算子  $\rightarrow$  期待値  $\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$

# 混合状態 (Mixed State)

複数の純粋状態の確率分布で表わした「あまひ」な状態

⇒ 密度行列  $\rho$  を用いて表わす.

Density matrix

期待値:  $\langle O \rangle = \text{Tr} [\rho O]$  ,  $\text{Tr} \rho = 1$

例: カノニカル分布  $\rho_{th} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$

(cf. 純粋状態:  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \dots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$  <sup>ランク1</sup>)

混合状態  $\rightarrow \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \sim \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \dots & \\ & & p_N \end{pmatrix}$   
と書ける.

# 混合状態の純化

$$\rho_A = \sum_{i=1}^N p_i |i\rangle_A \langle i|$$

$$H_A \rightarrow H_A \otimes H_B$$

2次元空間を拡大

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B$$

とすると、  $\text{Tr}_B |\psi\rangle_{AB} \langle \psi| = \sum p_i |i\rangle_A \langle i| = \rho_A$  となる。

$AB = A \cup B$  の意味

$$\text{Tr}_B \rho_{AB} = \rho_A$$

縮約操作

縮約密度行列

(Reduced density matrix)

# (1-2) 量子エンタングルメント (量子もつれ) Quantum Entanglement (QE)

- 2つのシステムから成る系 (2量子ビット系) を考える。

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B \quad \text{ⓐ ⓑ}$$

↔  
2体 相関なし → 古典的状態

⇒ 量子エンタングルメントなし!

も、一般的に、直積状態

$$|\psi_{\text{直}}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_A \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle)_B$$

は、量子エンタングルメントを持たない!

一方、次のような状態 (ベルン状態, EPR 状態)

$$|\text{Bell}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

A と B の状態が強く相関  
量子 I: どの量子も独自を持つ!

他の3つのベルン状態とこれらで完全系となる。

$$|\text{Bell}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B - |1\rangle_A |1\rangle_B)$$

$$|\text{Bell}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B)$$

$$|\text{Bell}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)$$

量子エンタングルメント → 2体間の量子的相関

純粋な状態  $|\psi\rangle$  が量子エンタングルメントを持つ

$\Leftrightarrow |\psi\rangle = |\psi_1\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B$  と直積に書ける。

⇒ 量子論では、一つの明確な状態でも、その一部分に着目すると、あやまいな状態となる。→ エンタングルメント

● 混合状態では、もう少し複雑。以下のように定義する。

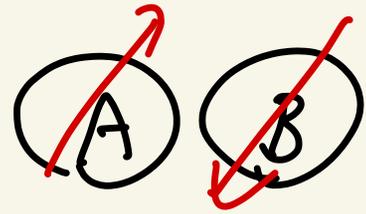
$\rho_{AB}$  が量子エンタングルメントを持つ

$\Leftrightarrow \rho_{AB}$  が separable である。

$\rho_{AB}$  が separable  $\Leftrightarrow \rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}$   
と書ける。  $\rho$   
s.t.  $p_i > 0, \sum_i p_i = 1$   
古典的相関のみ

# (1-3) EPR の不等式の破れ

2システム AB を考える。2つの異なる



A のスピンの値  $\rightarrow P, P' = \pm 1$

スピン =  $\{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \}$

B のスピンの値  $\rightarrow Q, Q' = \pm 1$

$(S_i = \frac{1}{2} \sigma_i)$

古典的に  $|P(Q - Q') + P'(Q + Q')| \leq 2$  は明らか。

しかし、量子論で  $P = \sigma_x, P' = \sigma_z, Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z), Q' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x)$

とあか Bell 1 に対して  $\rightarrow$  最大 EPR 状態

$$\langle \text{Bell}_1 | P(Q - Q') + P'(Q + Q') | \text{Bell}_1 \rangle$$

$$= \langle \text{Bell}_1 | \sqrt{2} \sigma_x \otimes \sigma_x | \text{Bell}_1 \rangle + \langle \text{Bell}_1 | \sqrt{2} \sigma_z \otimes \sigma_z | \text{Bell}_1 \rangle$$

$$= 2\sqrt{2} > 2 \quad \text{と EPR の不等式が破れ!}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# (1-4) 量子テレポーテーション

Q. 量子エンタングルメントが存在する向が出来るのか?

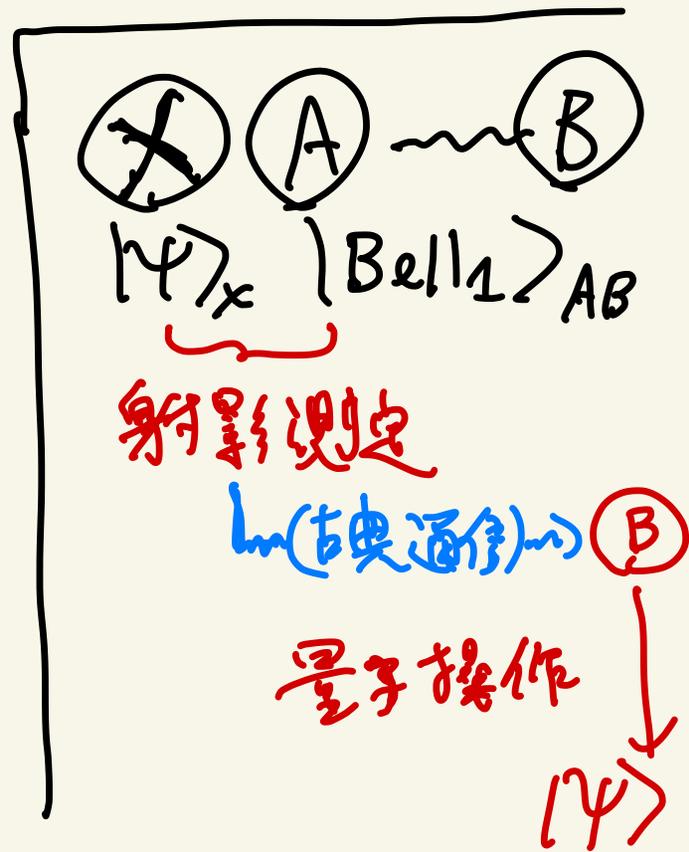
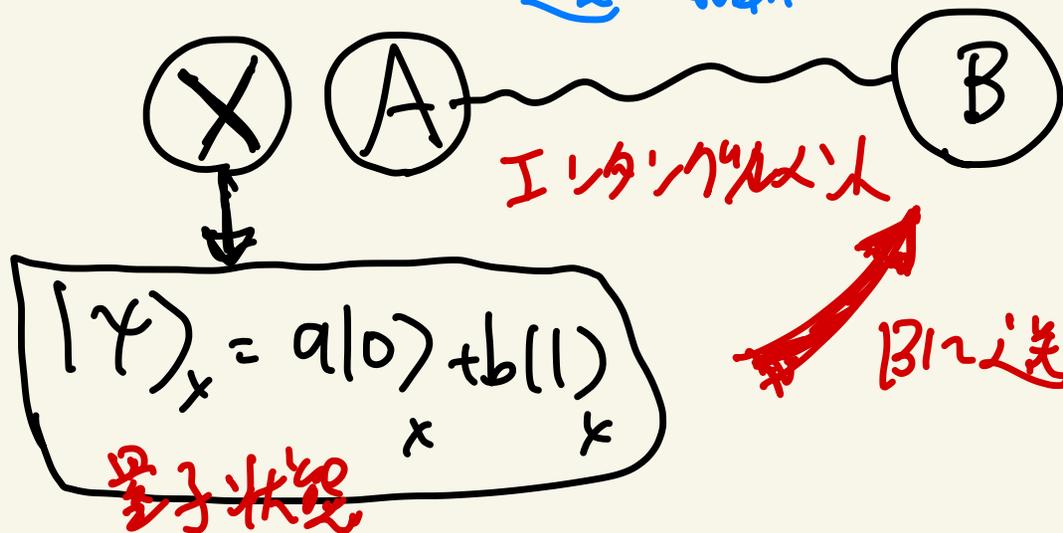
→ 様々な量子技術のリソースになる!

その代表的な量子テレポーテーション.

何をしたいのか?

古典通信のみ可

遠く離れた.



$$|\psi\rangle_x \otimes |\text{Bell}_1\rangle_{AB}$$

$|\psi\rangle$  と同じ

universal.

$$= \frac{1}{2} \left[ |\text{Bell}_1\rangle_{xA} \otimes (a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) \right. \\
+ |\text{Bell}_2\rangle_{xA} \otimes (a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) \\
+ |\text{Bell}_3\rangle_{xA} \otimes (a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) \\
\left. + |\text{Bell}_4\rangle_{xA} \otimes (a|1\rangle_B - b|0\rangle_B) \right]$$

Unitary変換

2<sup>n</sup>

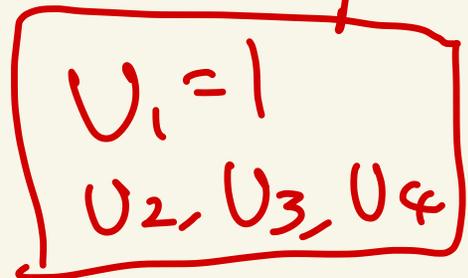
$|\psi\rangle$

12通り.



Bell状態へ  
射影測定

その結果 (2ビット)  
をBへ古典的に送る



結果を元に Unitary変換



# 局所操作と呼ぶ

## LOCC

量子テレポーテーション =

$(A)$  と  $(B)$  での  
量子操作

+

古典通信.

LOCC = Local Operation + Classical Communication.

局所操作  
(A内とB内)

古典通信  
(AB間)

量子エンタングルメントは、LOCCで作れられない!

## ② インタングルメント・エントロピー

(2-1) インタングルメント・エントロピーの定義

まず定義を述べた後、その解釈を後に行う。

$|\psi\rangle_{AB}$ : 純粋な状態

$$H = H_A \otimes H_B$$

AとBの間の2体量子相関を表す。

インタングルメント・エントロピー (Entanglement Entropy)

を、次のように定義する: EEの略記

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \text{縮約密度行列}$$

$$\Rightarrow S_A = - \text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad (\text{von-Neumann Entropy})$$

# 例: 2 Qubit 系

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B \rightarrow \rho_A = |0\rangle\langle 0| \rightarrow S_A = 0$$

$$|\text{Bell}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \rightarrow \rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

最大値

$$S_A = \log 2 \quad \text{最大値}$$

$$|\psi\rangle = c \cdot |0\rangle_A |0\rangle_B + \sqrt{1-c^2} |1\rangle_A |1\rangle_B$$

$$\rightarrow S_A = -c^2 \log c^2 - (1-c^2) \log (1-c^2)$$

復に見ると分かる.  $S_A \simeq (\# \text{ of Bell 対}) \times \log 2$

$\nu_n = -I: k_B \epsilon^0 - (\text{Reny; Entropy})$

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(P_A^n) \quad \text{と } \nu_n = -I: k_B \epsilon^0 - \log_2 P_A^n$$

( $n=1$ )  $S_A^{(1)} = S_A = -\text{Tr} P_A \log P_A$   
von-Neumann Entropy

- 一般に  $S_A^{(n)} > S_A^{(n')}$   $n < n'$

場の理論等での計算法 (trick 方法)

での。まず  $S_A^{(n)}$  を求める。 ( $n \in \mathbb{N}$ )

$n \sim \text{inverse } (\beta)$   
temperature

# 混合状態?

$\rho_{AB} \rightarrow \rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$  といふ。全体が混合状態  
といふに  $\rho_A$  は  $S_A = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A$  は定義でよい!

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \left( |0\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_A \langle 0|_B + |1\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_A \langle 1|_B \right)$$

↓  
単光子古典相関 (~~量子~~)  
Separable といふ。量子エンタングルメントは無!

(XII).  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$

$\Rightarrow S_A = \log 2$  といふ、 $\log 2$  といふ!  $\rightarrow$  EEは有用といふ!  
といふ重力の立場では  $S_A$  は有用!

# 熱力学的エンタルピー

$$F = E - TS_{th}.$$

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$$

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = e^{-\beta F}$$

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$$

$$\begin{aligned} E &= \langle H \rangle \\ &= \text{Tr}[H \rho] \end{aligned}$$

$$= \log Z + \beta E$$

$$= -\beta F + \beta E = S_{th} \quad (\text{熱力学のエンタルピー})$$

# Thermo Field Double

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad \text{と 系統が 1 つだけ}$$

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum e^{-\beta E_n} |n\rangle_1 \langle n| \quad H \rightarrow H_1 \otimes H_2$$



$$|TFD\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n\rangle_1 |n\rangle_2$$

$H_1$  と  $H_2$  の  $EE$   $S_1$  と  $S_2$  と  $S_{th}$  と  $\frac{1}{2} S_{th}$ !

## (2-2) EEの性質

- $S_A = S_B$  (ABが純粋な状態の時)



ここで、 $\lambda$ の解を用いる:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A |i\rangle_B$$

$$\rightarrow \rho_A = \sum_i \lambda_i |i\rangle_A \langle i|$$

$$\rho_B = \sum_i \lambda_i |i\rangle_B \langle i|$$

$$\Rightarrow S_A = S_B = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i$$

- 强可加法性 (Strong Subadditivity)  
SSA

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_B$$

( $I: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - 凹,  $I$  是  concave)  
 $f(a+b) + f(b+c) \geq f(a+b+c) + f(b)$

特殊情况:  $S_A + S_B \geq S_{AB}$  (可加法性)  
 $B = \emptyset$  ↓ Subadditivity

$$I(A, B) = S_A + S_B - S_{AB} \geq 0$$

相互信息量

- LOCC 单调性  $\rho_A \rightarrow \rho_{A'} : \text{LOCC}$

$$S(\rho_A) \geq S(\rho_{A'})$$

- Local Unitary :  $\rho_A \rightarrow U_A \cdot \rho_A \cdot U_A^{-1}$

$$S(\rho_A) = S(\rho_{A'})$$

- Concavity  $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho$

$$\sum_i p_i S(\rho_i) \leq S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i S(\rho_i)$$

$$- \sum_i p_i \log p_i$$

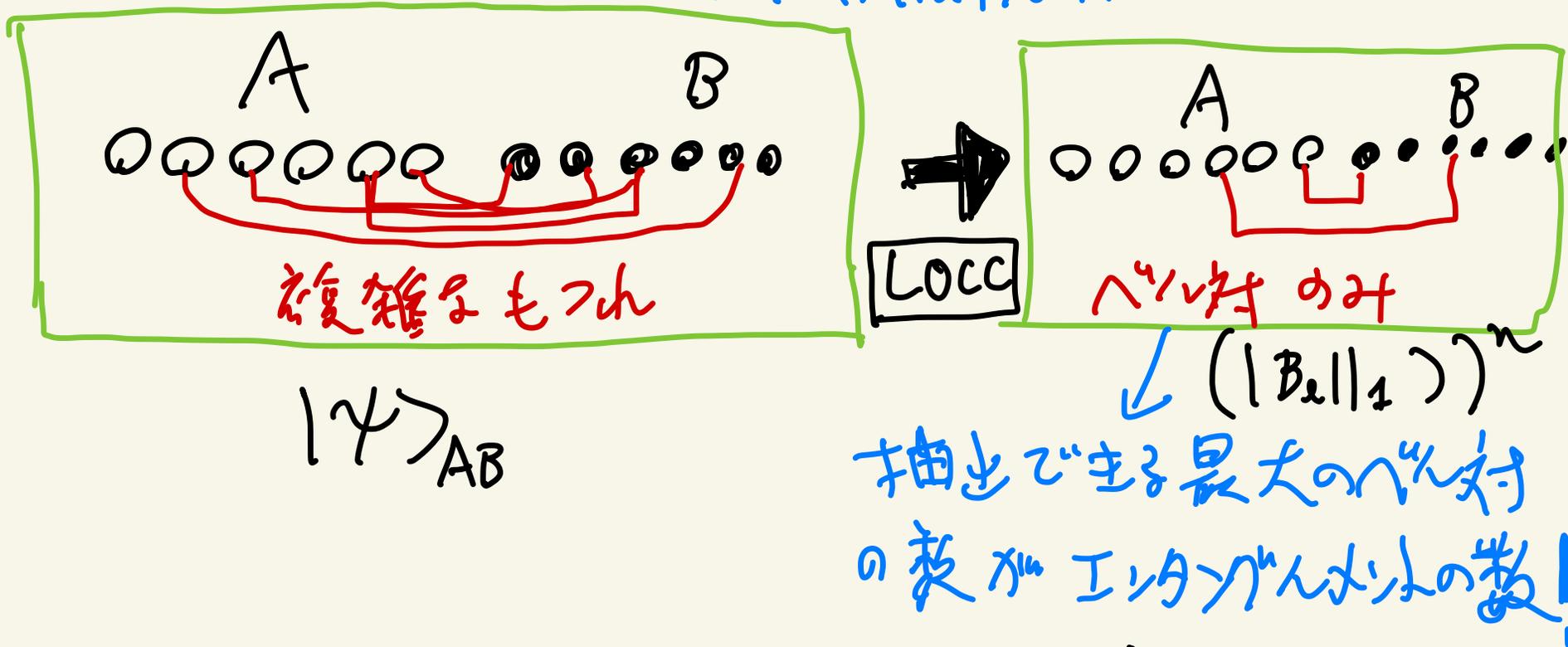
熵的凹性

# (2-3) EEの操作的解釈

Q.  $EE \approx \# \text{ of } \text{Bell}$  対?

↑  
どうや、し定義するか?

⇒ LOCC による エンタングルメント抽出 を行う。  
distillation.



しかし、 $n$  は必ずしも  $1 - \epsilon^2$ 。 ←  $n$  に対する整数個  
あり。

$\epsilon \sim 2^{-n}$ . Asymptotic limit  $\epsilon \ll 1$ .

$$(|\Psi\rangle_{AB})^{\otimes M} \longrightarrow |\text{Bell}_1\rangle^{\otimes N} \otimes \text{（斜線）}$$

$$\text{エンタングルメントの量} \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M}$$

平均何個抽出されるか?  $\epsilon$  だけ。

実は.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M} = S_A \times \log_2 e$$

成り立つ!

この関係式を具体的に示してみよう.

2量子系 \$C \rightarrow A\$ と \$S \rightarrow B\$ の例にしよう.  $(\textcircled{A} \textcircled{B})^{\otimes M}$

$$|\psi\rangle = C|00\rangle_{AB} + S|11\rangle_{AB} \quad C \equiv \cos\theta$$

$$S \equiv \sin\theta \quad \begin{array}{l} \text{"11"} \\ \downarrow \end{array}$$

$$|\psi\rangle^{\otimes M} = C^M \underbrace{|00 \dots 0\rangle}_{2 \cdot M \text{個の } 0} + M \cdot C^{M-1} S |0 \dots \underbrace{11}_{\text{"11"} \text{ 2つ}} \dots 0\rangle + \dots$$

$$+ \underbrace{C_2^M}_{\text{Combination}} \times C^{M-2} S^2 |0 \dots \underbrace{11}_{\text{"11"} \text{ 2つ}} \dots \underbrace{11}_{\text{"11"} \text{ 2つ}} \dots 0\rangle + \dots$$

$$C_M^k = \frac{M!}{k!(M-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^M C^{M-k} S^k \sum_{i=1}^{M \cdot C^k} |P_i^{(k)}\rangle_A |P_i^{(k)}\rangle_B$$

Max entangled state

$$|P_1^{(0)}\rangle = |00 \dots 0\rangle$$

$$|P_1^{(1)}\rangle = |10 \dots 0\rangle, |P_2^{(1)}\rangle = |010 \dots 0\rangle, \dots, |P_M^{(1)}\rangle = |11 \dots 1\rangle$$

$|P_i^{(k)}\rangle \rightarrow$  すなわち  $\sum_{k=0}^M C_k = 2^M$  個の状態

A の方に射影測定  $\pi_k^A \equiv \sum_{i=1}^{C_k} |P_i^{(k)}\rangle \langle P_i^{(k)}|$

をほどこす.

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^M C_k}} \sum_{k=0}^M |P_i^{(k)}\rangle_A |P_i^{(k)}\rangle_B$

と  $\rightarrow$  最大エンタングルメント状態を得る!



$\log_2(C_k)$  個のビットが得られる!

$\times \sum_i |P_i^{(k)}\rangle_A |P_i^{(k)}\rangle_B \rightarrow (|Bell\rangle_{AB})^{\otimes C_k}$

どのkかは、古典通信で知らせる。

は、局所操作で行える

$$1 = \sum_{k=0}^M P_k \quad \text{この等式は、} \quad \text{確率の総和が1である。}$$

$$P_k = \binom{M}{k} \cdot C^{2(M-k)} \cdot S^{2k} \quad \text{である。} \quad \left( \sum_k P_k = 1 \right)$$

よって 抽出した文字列の数の期待値。

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \cdot C^{2(M-k)} \cdot S^{2k} \times \log_2 \left( \binom{M}{k} \right)$$

$$\approx \frac{C^{2M}}{\log 2} \times \int_0^M dk \left( M \log k - (M-k) \log(M-k) - k \log k \right) \times e^{F(k)}$$

$$F(k) = M \log M - (M-k) \log(M-k) - k \log k + 2k \log \frac{S}{C}$$

$$\frac{dF(k)}{dk} \approx 0 \quad \rightarrow \quad M \rightarrow \infty \text{ or limit } \rightarrow \quad k_x \approx M \cdot s^2 \text{ is a saddle point.}$$

$$\Rightarrow \bar{N} \cdot \log 2 = M \log M - (M - k_x) \log (M - k_x) - k_x \log k_x$$

$$= M \cdot S_A$$

$$(S_A = -c^2 \log c^2 - s^2 \log s^2)$$

$$\text{So, } \frac{\bar{N}}{M} = \log_2 e \times S_A //$$

# コメント

• 純粋な状態  $|\psi\rangle$  ならば、逆もできる!

$$\text{つまり、 } |\text{Bell}\rangle^{\otimes N'} \xrightarrow{\text{LOCC}} (|\psi\rangle_{AB})^{\otimes M'}$$

と (反) 時、

$$\lim_{M' \rightarrow \infty} \frac{N'}{M'} = (\log_2 e) \cdot S_A$$

•  $\rho_{AB}$  が混合状態の時、一般に、  
とけず!

$$E_D(\rho_{AB}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M} < E_C(\rho_{AB}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N'}{M'}$$

Entanglement Distillation

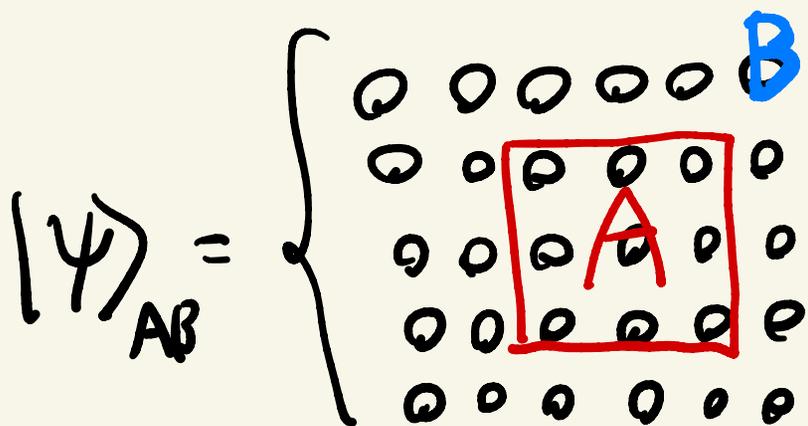
Entanglement Cost.

とけず!

### ③ 場の理論のEE

#### (3-1) 量子多体系のEE

例 スピン系



$$\Rightarrow H_{\text{tot}} = H_A \otimes H_B$$

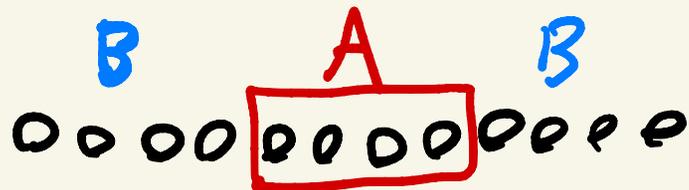
↓

$$S_A = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A$$

EEが定義される!

Aのとり方に依存する。

スピン鎖 (Spin chain)



● 場の理論 (QFT) とは？

- {
- 離散化 に考える.
  - 代数的場の理論 (refer to 1803.04993) Witten's review
- 実用的 (以下に説明)
- 形式的 → 厳密な証明に使う.

低. スカラー場  
(1+1)次元  
t, x

$$S = \int dt dx \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 - m^2 \phi^2]$$

→  $H = \int dx \frac{1}{2} [\pi^2 + (\partial_x \phi)^2 + m^2 \phi^2]$

↓ 離散化.

$$H = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^N \left[ (\pi_n)^2 + \left( \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\varepsilon} \right)^2 + m^2 \phi_n^2 \right]$$



N個の調和振動子の系と同じ

# (3-2) レゾリカ法

場の理論の EE の計算法

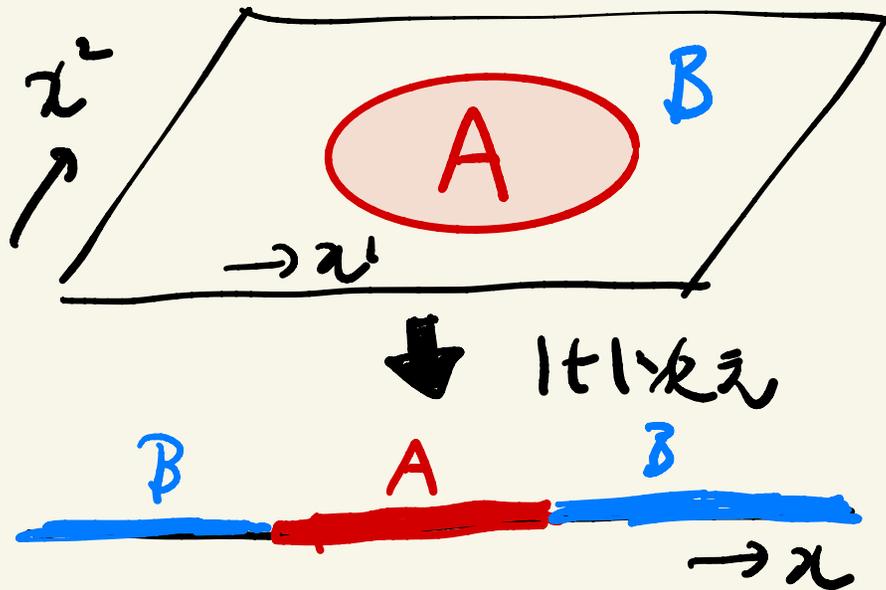
- レゾリカ法  
(1-7リット時間)
- 実時間法

Replica Method

以下では、レゾリカ法  
を説明する。

自由場理論のみ  
(ガウシアン波動関数)  
↑  
2点関数

Setup  $t=0$



1-7リット時間  $\tau$   
 $\tau = it$

$$H = H_A \otimes H_B$$

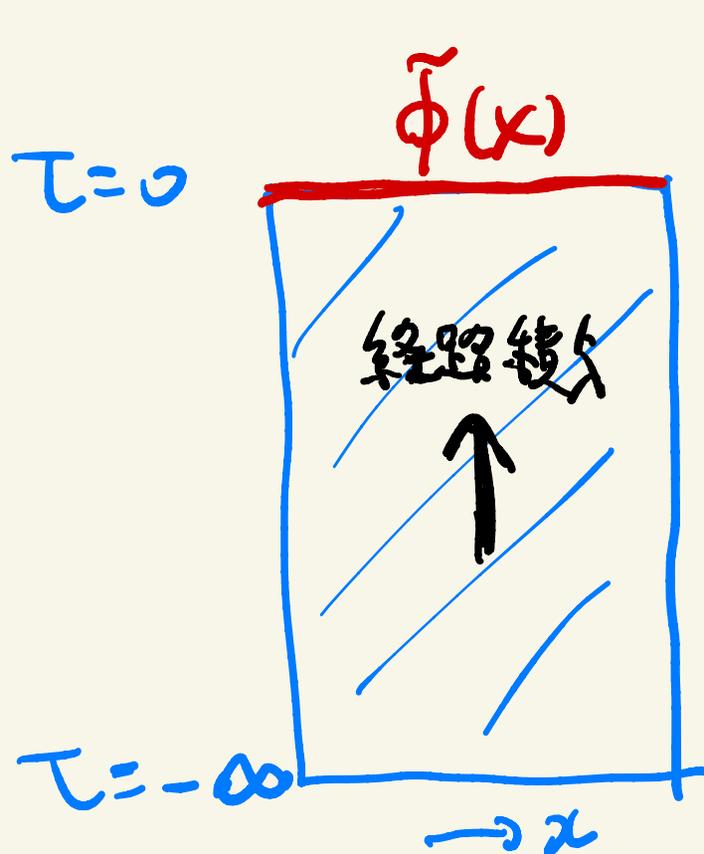
$$\rightarrow S_A = -T_V P_A \log P_A$$

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} \rho_A^n \rightarrow \text{Tr} \rho_A^n \text{ を求めよ!}$$

「2-7のやつ」時間の経路積分を考へよ。(1+1次元とする)  
簡単のため

波動関数

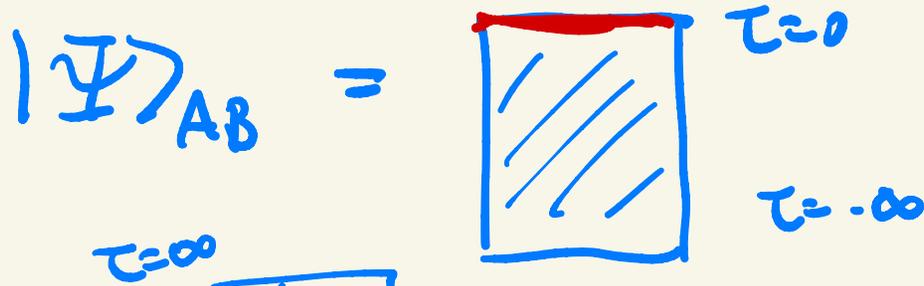
$$\Psi[\tilde{\phi}(\omega)] = \int \prod_{\tau=-\infty}^0 \prod_{x=-\infty}^{\infty} D\phi(x, \tau) e^{-S_{\text{EFT}}[\phi]} \cdot \delta(\phi(x, 0) - \tilde{\phi}(x))$$



$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau H} |\alpha\rangle = |0\rangle$$

基底状態  
 (Hartle-Hawking-like)

二重区.

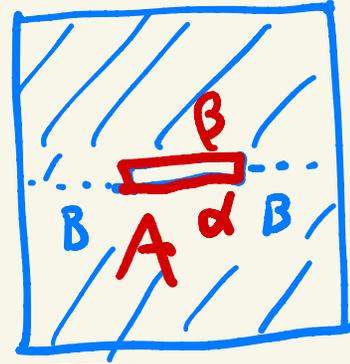


と書く.



よ.2.

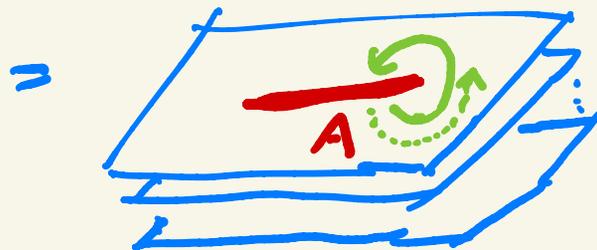
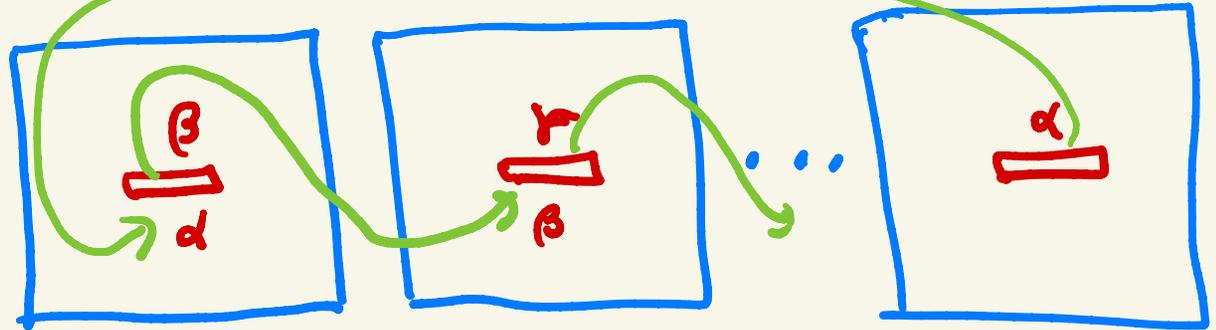
$(\rho_A)_{\alpha\beta} = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| =$



同-視

よ.2.

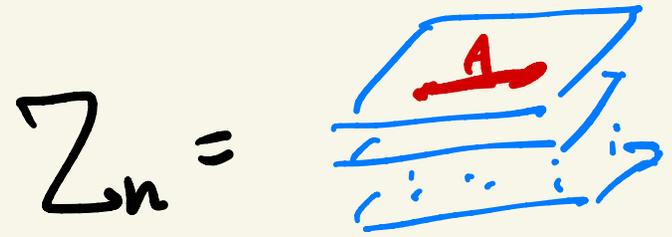
$\text{Tr}(\rho_A)^n =$



} n-sheeted Riemann Surface

本当は  $\text{Tr } P_A = 1$  を課す必要があるのだ。

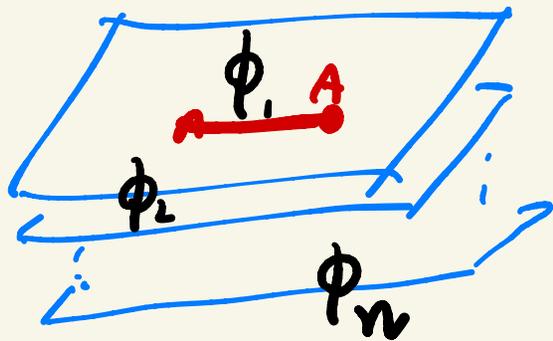
$$\text{Tr } P_A^n = \frac{Z_n}{(Z_1)^n}$$



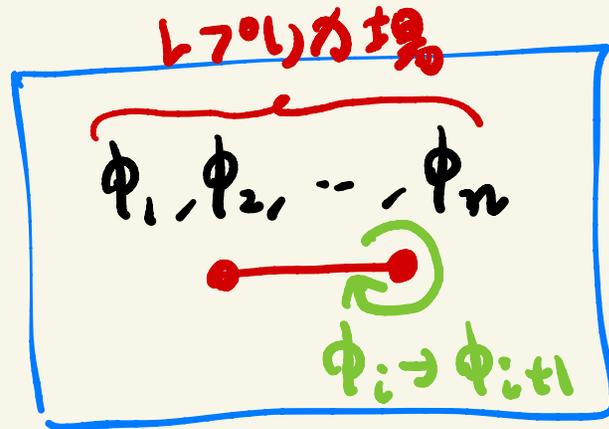
の配関数。

$$\Rightarrow S_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr } (P_A)^n \quad \text{と計算できる。}$$

$n \rightarrow \infty$  問題解法接続



$\sim$



Twice 境界条件

(Twice Operator)

以上が  $n \rightarrow \infty$  の方法。

(3-3) 面積則 UV fixed point を持つと仮定

場の理論の基底状態の近傍 (有限スケール-励起状態)

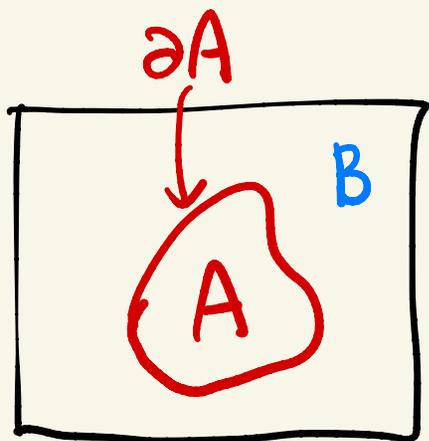
241. 一般に、次の面積則が成り立つ。

[Bombelli 1986]  
[Srednicki 1993]

Area law

$$\mathcal{Z}_A \approx (\text{定数}) \times \frac{\text{Area}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \underbrace{O(\epsilon^{-(d-3)})}_{\downarrow}$$

$\partial A$  が長さ  $\epsilon$  の人  
を持つ。  $O(\epsilon^{-(d-2)})$   
も現れる。



直観的理由

$\partial A$  をまたぐ近距離のエンタングルメント  
が寄与するから。

厳密な結果

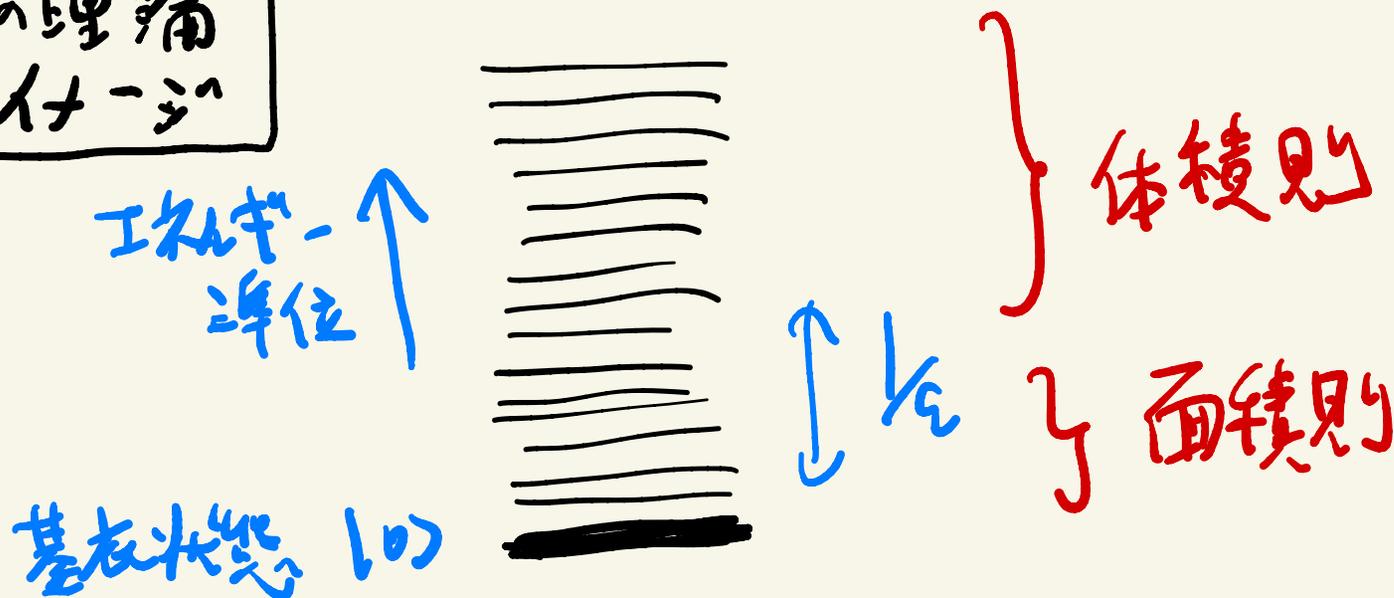
2次元で Gap がある系は面積則に従う。

2次元 Gapless は例外 ←

[Hastings 0705.2024]

Note 量子多体系でランダムに一般的状态をとる。体積則に従う。

場の理論  
のイメージ



● 基底状態付近は、面積則となるので。

場の理論の相互作用が、局所的だから。

local

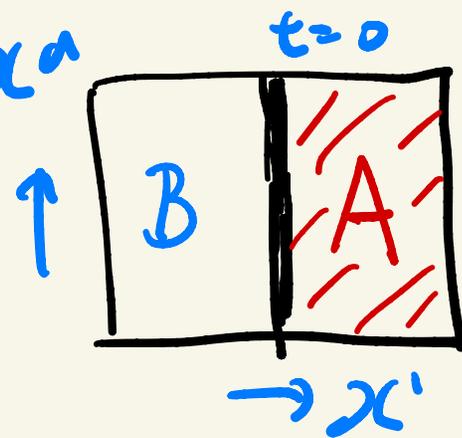
$$\frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{\epsilon^2}$$

# (3-4) 具体的計算例

(d+1)次元 Free Scalar 場 を考へる.

$A = \text{半平面 } x^1 > 0 \text{ とす}$ .

$$x^2 \sim x^d$$



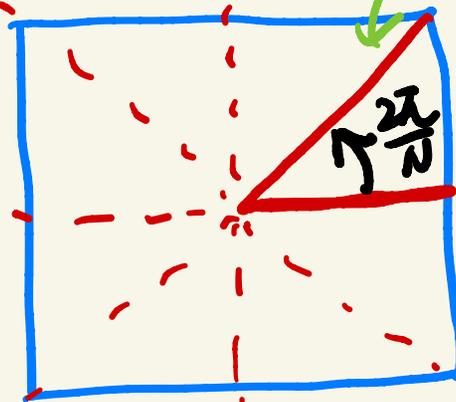
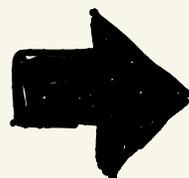
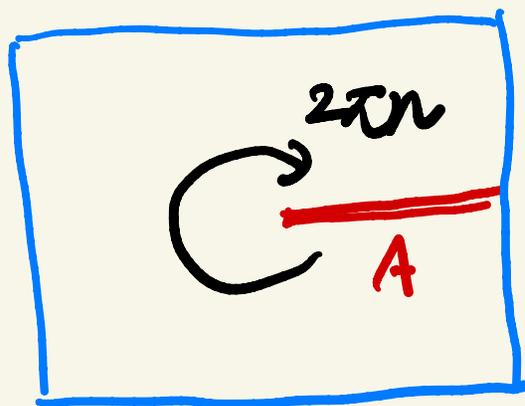
Replica 法 そのものでも計算できるが、複雑なので  
 "Orbitfold (オ-ゼフォルド)" 法 をやる。

Replica 法

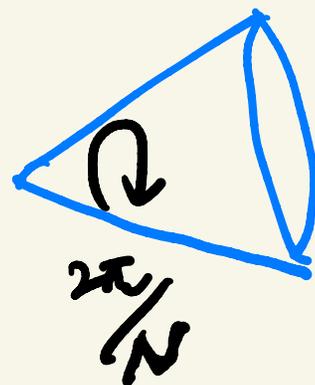
$$n = \frac{1}{N}$$

同一視

( $\frac{2\pi}{N}$  回転)



$\approx$



$$z = x^0 + i x^1 \quad z \sim e^{\frac{2\pi i}{N}} z$$

$$\text{Tr}(\rho_A)^{\frac{1}{N}} = \frac{Z(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}^{d-1})}{[Z(\mathbb{R}^{d+1})]^{\frac{1}{N}}}$$

まず.

$$\log Z(\mathbb{R}^{d+1}) = \log (\det \Delta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \times \int_{|k| < \Lambda} (dk)^{d+1} \log(k^2 + m^2)$$

$$= \frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \times \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \int (dk)^{d+1} e^{-s(k^2 + m^2)} \quad \Lambda = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{UV カット}$$

$$= V_{d+1} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} (4\pi s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-sm^2}$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

$$g^N = 1, g \in \mathbb{Z}_N$$

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_N = \mathbb{R}^2 \ni g \mathbb{Z}^n$$

同-複 (複) 空間

次の、ホーバースト-ルンバイン配関数を計算する。

$$\log \mathcal{Z}(\mathbb{R}^2/2_N \times \mathbb{R}^{d-1})$$

$$= \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Tr} \left[ \frac{g^j}{N} \times e^{-s(k^2+m^2)} \right]$$

$\text{Tr} = \int \frac{dx^{d+1} dk^{d+1}}{(2\pi)^{d+1}}$

$$\log \mathcal{Z}(\mathbb{R}^2/2_N \times \mathbb{R}^{d-1}) - \frac{1}{N} \log \mathcal{Z}(\mathbb{R}^{d+1})$$

$$= \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \sum_{j=1}^{N-1} \text{Tr} \left[ \frac{g^j}{N} e^{-s(k^2+m^2)} \right]$$

$x^2 \sim x^d$   
 のための  
 自明

$$= V_{d-1} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} (4\pi s)^{-\frac{d-1}{2}} e^{-sm^2} \sum_{j=1}^{N-1} \text{Tr} \left[ \frac{g^j}{N} \right]$$

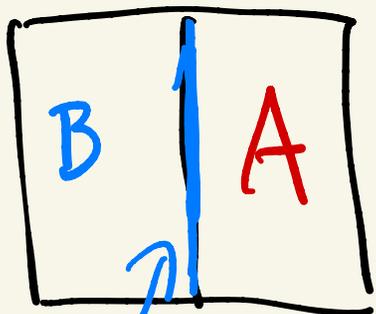
$(x^0 x^1)$  の二次元部分

$$\begin{aligned} \text{Tr}[g^j] &= \int dk^0 dk^1 \langle k | g^j | k \rangle \quad (\langle k | k' \rangle = \delta^2(k-k')) \\ &= \int dk d\bar{k} \delta(k - e^{2\pi i/N} k) \delta(k - e^{-2\pi i/N} \bar{k}) \quad (\delta^2(0) = \frac{1}{2\pi} \int dx^0 dx^1) \\ &= \frac{1}{4 \sin^2(\frac{\pi}{N})} \quad \text{と求まる.} \end{aligned}$$

共.  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \text{Tr}[g^j] = \frac{1}{N} \times \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2(\frac{\pi j}{N})} = \frac{N^2-1}{12N}$

5.2. 
$$S_A = -\frac{\partial}{\partial(\frac{1}{N})} \left[ \log Z(R^2/R_H \times R^{d-1}) - \frac{1}{N} \log Z(R^{d+1}) \right]$$

$$= \frac{V_{d-1}}{6} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \frac{1}{(4\pi s)^{\frac{d-1}{2}}} \cdot e^{-5m^2}$$

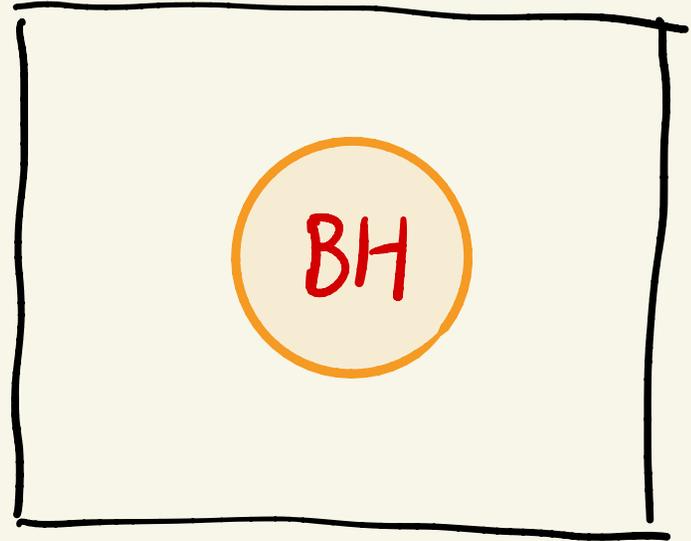
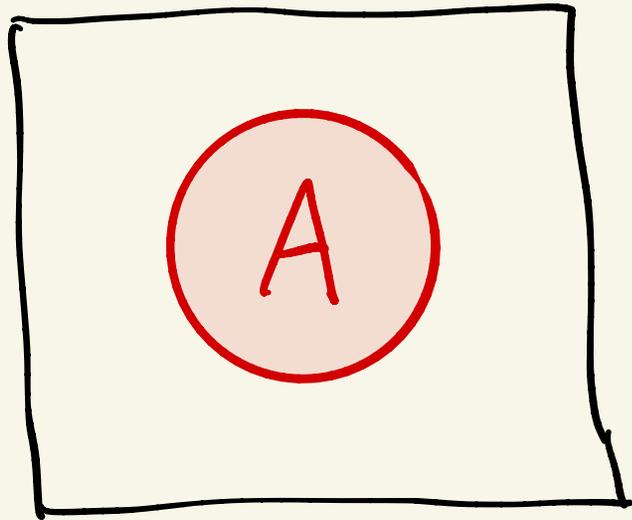


$V_{d-1} = \int dx^1 \dots dx^{d-1}$

$$= \int_{d=1}^{d=2} \frac{V_{d-1}}{6(d-1)(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \cdot \frac{1}{\epsilon^{d-1}} + \mathcal{O}(\epsilon^{d-3})$$

$$\frac{1}{6} \log\left(\frac{1}{m\epsilon}\right) \rightarrow \text{面積則に従った!}$$

# (3-5) EE vs BH イントロ-



$$S_A = \gamma \cdot \underbrace{\frac{A}{\xi^{d-1}}}_{\text{紫外発散}}$$

場の数に  
比例的!

$$S_{BH} = \underbrace{\frac{A}{4G_N}}_{\text{有限}}$$

有限  
場の数によらず. 普遍的

# ④ 共形場理論のEE

## (4-1) 共形場理論

Conformal Field Theory

CFT

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\phi(x)} g_{\mu\nu}$$

という局所的スケール変換で不変な場の理論

→ Massless 粒子の理論

$$T^{\mu}_{\mu} = 0$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Energy Stress Tensor

・ 共形変換による共形場理論の定義.

座標変換  $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$  のもとで、計量が、

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x) \text{ と変換する。}$$

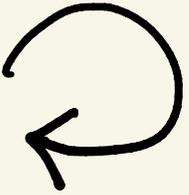
特に、 $g'_{\mu\nu}(x') \propto g_{\mu\nu}(x)$  と比例的

なものを、**共形変換** と呼ぶ。

$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$  の場合  $\rightarrow$

$\left( \begin{matrix} P & \text{並進} & x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu} \\ L_{\mu\nu} & \text{ローレンツ変換} & x^{\mu} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ D & \text{スケール変換} & x^{\mu} \rightarrow \lambda x^{\mu} \\ K_{\mu} & \text{特殊共形変換} & x^{\mu} \rightarrow \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b^{\mu} x_{\mu} + b^2 x^2} \end{matrix} \right)$

CFT  $\equiv$  共形変換で不変な QFT

(d+1)次元 CFT  $\leftarrow$  

P: 並進

$L_{\mu\nu} = SO(1, d)$

D: スケール

$K_{\mu}$ : 特殊

$d+3$

$\longleftrightarrow$

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & D & \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) \\ -D & 0 & \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) \\ \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) & \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) & L_{\mu\nu} \end{array} \right]$$



$SO(2, d+1)$  の対称性 (共形対称性)

$2 - 2 \times 1 \times 1 \times 2^{d+2} \cdot SO(1, d+2)$

# コメント

(1)  $d=1$  (2次元 (F1) 247).

$$z' = f(z), \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \quad \text{with } d\zeta^2 = dz' d\bar{z}' \\ = |f(z)|^2 dz d\bar{z}$$

となり、任意の  $f, \bar{f}$  は共形変換となる。

(2)  $-i\theta$  の固有値を **共形次元** と呼ぶ。  
 $\Delta = h + \bar{h}$

共形次元  $\Delta$  の状態

$$|\Delta\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \underbrace{\Theta_{\Delta}(\alpha)}_{\text{共形次元 } \Delta \text{ の場}} |0\rangle$$



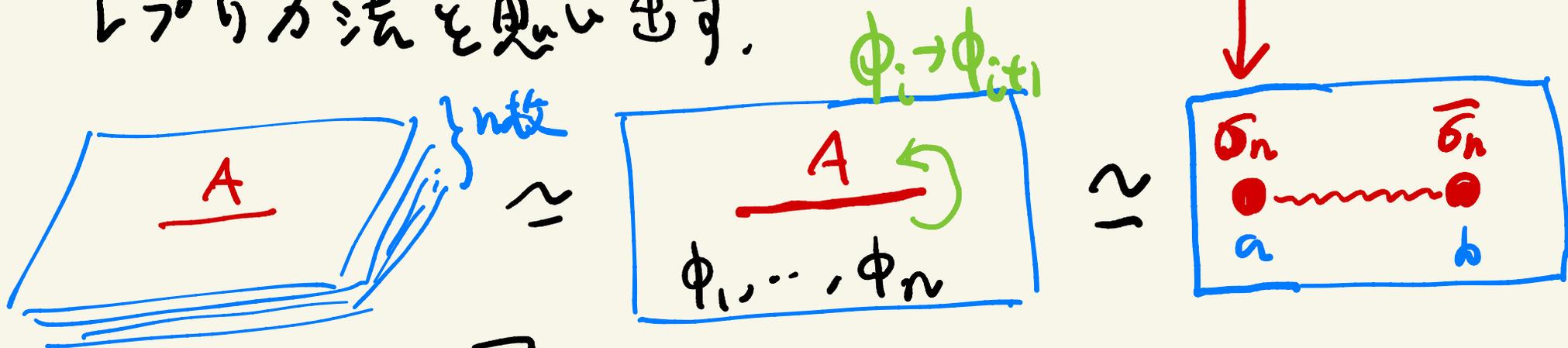
共形対称性から、

$$\langle \Theta_{\Delta}(x) \Theta_{\Delta}(x') \rangle = \frac{1}{|x-x'|^{2\Delta}} \quad \text{となる。}$$

# (4-2) 2次元 CFT の EE

$\sigma_n$ : Twist operator

レゾリカ法を用いて出す.



$$\text{Tr } \rho_A^n = \frac{Z_n}{(Z, \nu)}, \quad Z_n = \langle \sigma_n(a) \bar{\sigma}_n(b) \rangle$$

$\sigma_n$  の共形次元  $\rightarrow \Delta = \frac{c}{12} (n - \frac{1}{n})$   $2^n$  因子 = 追加される.

$$\text{d.t. } Z_n = \left( \frac{\epsilon}{|b-a|} \right)^{2\Delta} = \left( \frac{\epsilon}{|b-a|} \right)^{\frac{c}{6} (n - \frac{1}{n})}$$

central charge

$$\rightarrow S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \log \frac{Z_n}{(Z, \nu)} = \frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log \frac{|b-a|}{\epsilon}$$

特に、EEは、 $S_A = \frac{C}{3} \log\left(\frac{L}{\epsilon}\right)$   $L \approx |b-a|$

↳ 面積則と破子。

コメント

2セル系  
○○○○○○○○○○ →  $S_A = \frac{1}{3} \log L$   
A

$S_A \sim \log [P_A \text{ のサイズ}]$

↳ 数値計算の際の不安  
(DMRG, TN)

$|L|^{1/3} \sim |100|^{1/3} \sim 4.6$  (2セルほど大きい)  
有り.)

C7. 高次元  
CF $\tau_{d+1}$

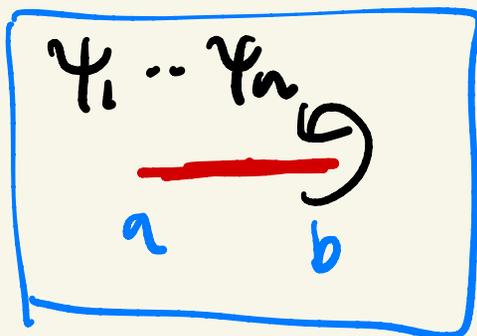
$S_A \sim L^{d-1}$

↳  $e^{L^{d-1}}$  のサイズ (大きい!)

# Free Massless Dirac Fermion CFT in 2d

$$\left( \begin{array}{l} \psi(z), \psi(\bar{z}) \\ \bar{\psi}(z), \bar{\psi}(\bar{z}) \end{array} \right) \quad z = x + iy \in \mathbb{R}^2$$

シフト力



$$\psi_i(e^{2\pi i}(z-b)) = \psi_{i+1}(z-b)$$

$$\psi_i(e^{2\pi i}(z-a)) = \psi_{i-1}(z-a)$$

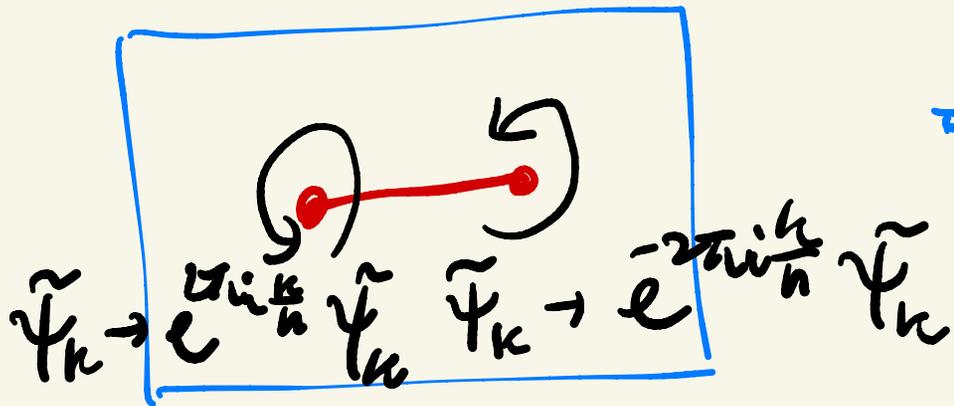
Discrete Fourier 変換.

$$\tilde{\psi}_k = \sum_{j=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} k \cdot j} \psi_j$$

$k=0, 1, \dots, n-1$

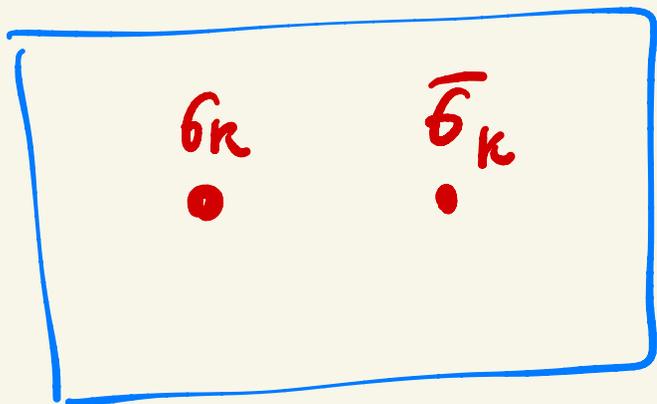
自由場なので  
作用が不変!

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}_k(e^{2\pi i}(z-b)) = e^{-\frac{2\pi i}{n} k} \tilde{\psi}_k(z-b) \\ \tilde{\psi}_k(e^{2\pi i}(z-a)) = e^{+\frac{2\pi i}{n} k} \tilde{\psi}_k(z-a) \end{array} \right.$$



$\Rightarrow$   $\sigma$ - $\tilde{E}$   $\sigma$ - $\tilde{H}$   
 の twisted 境界条件.  
 $\uparrow$   
 $k$ -th

15

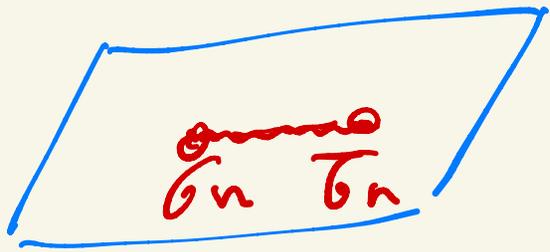


$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(z) = e^{i\phi(z)} \\ \bar{\psi}(z) = e^{-i\phi(z)} \end{array} \right.$$

$$\sigma_k(z) = \begin{cases} e^{i\frac{k}{n}(\phi - \bar{\phi})} & (0 \leq k \leq \frac{n}{2}) \\ e^{i\frac{n-k}{n}(\phi - \bar{\phi})} & (\frac{n}{2} \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \psi(z) \bar{\psi}(0) \sim \frac{1}{z} \\ \phi(z) \phi(0) \sim -\log z \end{array} \right)$$

$$e^{i\frac{k}{n}\phi(z)} \psi(z') \sim (z-z')^{\frac{k}{n}}$$



$$= \prod_{k=0}^{n-1} \langle \sigma_k(a) \sigma_k(b) \rangle$$

$$\sigma_k = e^{i \frac{k}{n} \phi} \rightarrow \Delta_k = \frac{k^2}{n^2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \frac{1}{12} \left( n - \frac{1}{n} \right)$$

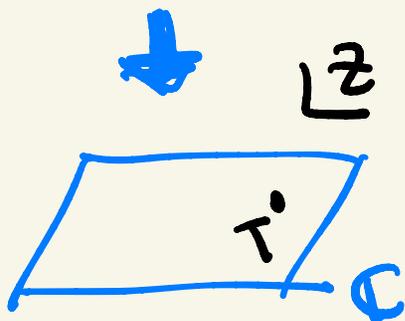
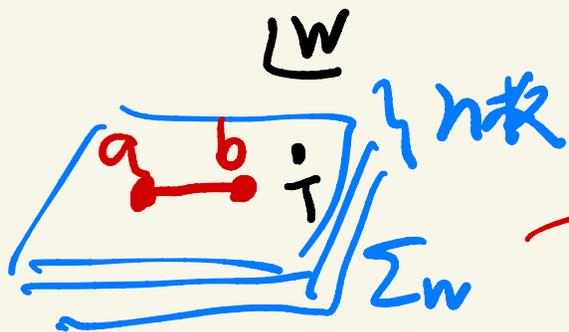
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\epsilon}{b-a} \right)^{2\Delta_k}$$

$$\left( \frac{\epsilon}{b-a} \right)^{\frac{1}{6} \left( n - \frac{1}{n} \right)}$$

$$\rightarrow S_A = \frac{1}{3} \log \left( \frac{l}{\epsilon} \right) \quad \text{と求まる}$$

↑ Free Massless Dirac Fermion  
if  $c=1$

# (4-3) 一般論 (Energy Stress Tensor)



$$z^n = \frac{w-a}{w-b}$$

共形写換

$$\langle T(w) \rangle_{\Sigma_w} = \left( \frac{dz}{dw} \right)^2 \langle T(z) \rangle_{\Sigma_z} - \frac{c}{12} \{w, z\}$$

3次元の重力

$$\{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2$$

-5. CFTの Ward identity 対

$$= \frac{c}{24} \left( 1 - \frac{1}{h^2} \right) \cdot \frac{(b-a)^2}{(w-b)^2 (w-a)^2}$$

$$\langle T(w) \delta_n(a) \bar{\delta}_n(b) \rangle = \left( \frac{hn}{(w-a)^2} + \frac{dw}{w-a} + \frac{hn}{(w-b)^2} + \frac{dw}{w-b} \right) \langle \delta_n(a) \bar{\delta}_n(b) \rangle$$

と比較して

$$h_n = \frac{c}{24} \left( 1 - \frac{1}{h^2} \right)$$

central charge

$$\xrightarrow{h \text{倍}} \Delta_n = 2h_n$$

$$h_n = \frac{c}{24} \left( h - \frac{1}{h} \right)$$

# (4-4) - 一般論 (Liouville 理論)

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \quad (\text{Euclidean 2D CFT})$$

CFT  $\rightarrow T^i_i = 0$  (古典論)

例: Free massless scalar

$$T_{ij} = \partial_i \phi \partial_j \phi - \frac{1}{2} g_{ij} (\partial_k \phi)(\partial^k \phi)$$

$\rightarrow T^i_i = 0$  は明らか.

しかし、量子論では、曲、2次元空間では。

$T^i_i \neq 0 \rightarrow$  共形、アノマリー -

$$ds^2 = \underline{e^{2\varphi} dz d\bar{z}} \quad \text{と計量を書く.} \quad \begin{matrix} z = \alpha + i\tau \\ d\bar{z}^2 = dx d\tau \end{matrix}$$

↳ カットオフ (格子間)  $\epsilon$   $|\Delta W| = \epsilon$  とする.

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} \log Z = \underline{T^i_i} \quad \leftarrow \quad T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}}$$

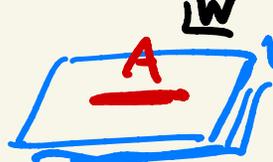
$$T^i_i = \frac{c}{24\pi} R + \frac{1}{\epsilon^2} \underline{e^{2\varphi}}$$

$$Z = e^{I_L[\varphi]} \quad \begin{matrix} \text{共形? / 24-} \\ \text{紫外発散} \end{matrix}$$



$$I_L[\varphi] = \frac{c}{24\pi} \int d^2z [4 \partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi + \mu e^{2\varphi}]$$

Liouville 作用

±2.  n枚 の 分配関数  $Z_n = e^{I_L[\varphi]}$  Liouville.

は.  に  $Z^n = \frac{w-a}{w-b}$   $z \mapsto z$ .

$$ds^2 = e^{2\varphi} dz d\bar{z} = dw d\bar{w}$$

$$e^{2\varphi} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = n^2 (b-a)^2 \frac{|z|^{2(n-1)}}{|z^n - 1|^4}$$

この背景の Liouville 作用を  $I_L^{(n)}(\varphi)$  と書く.

$$I_L^{(n)} = \frac{C}{24\pi} \int_{\mathbb{C}} dz^2 \left[ \frac{|(1-n) - (1+n)z^n|^2}{|z^n - 1|^2 |z|^2} + \mu \right]$$

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} (I_L^{(n)} - n I_L^{(1)}) \text{ が EE!}$$

寄与する.  
 変形 P. 23 -

# 多分散の起源

- (i)  $w \rightarrow a$  ~~\*~~  $z \rightarrow 0$
- (ii)  $w \rightarrow b$  ~~\*~~  $z \rightarrow \infty$
- (iii)  $w \rightarrow \infty \rightarrow I_L^{(n)} - n I_L^{(n-1)}$   $z^u$  相殺

(i)  $w \rightarrow a$   $|z| > \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)^{1/n}$

$$I_L^{(n)} \approx \frac{C}{24\pi} \int_{z \rightarrow 0} d^2 z \frac{(1-h)^2}{|z|^2} \approx \frac{C(1-h)^2}{12n} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

(ii)  $w \rightarrow b$   $|z| < \left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)^{1/n}$

$$I_L^{(n)} \approx \frac{C}{24\pi} \int_{z \rightarrow \infty} d^2 z \frac{(1+h)^2}{|z|^2} \approx \frac{C(1+h)^2}{12n} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$\rightarrow S_A = \frac{1}{1-h} (I_L^{(n)} - n I_L^{(n-1)}) = \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$

# (4-5) Entropic C 定理

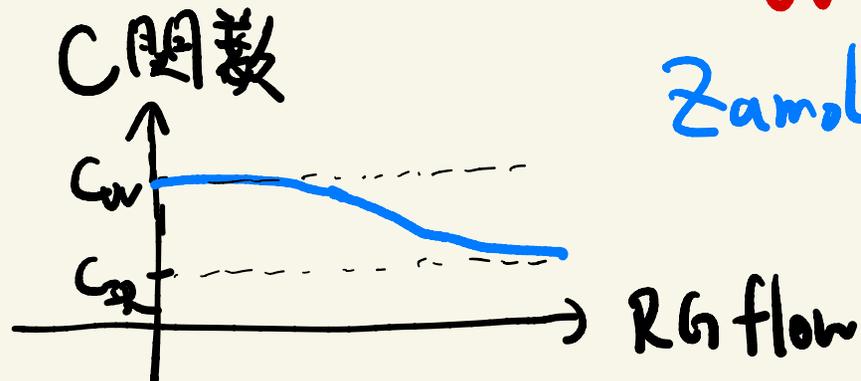
2d CFT  $\rightarrow$  central charge C 以自由度表示.

2d CFT の変形を考慮.

$$S = S_{\text{CFT}} + \lambda \int dx^2 \mathcal{O}_{\Delta}(x)$$

$\Delta = 2 \rightarrow$  Exactly Marginal  $\rightarrow$  C は不変.

$\Delta < 2 \rightarrow$  Relevant  $\rightarrow C_{UV} > C_{IR}$

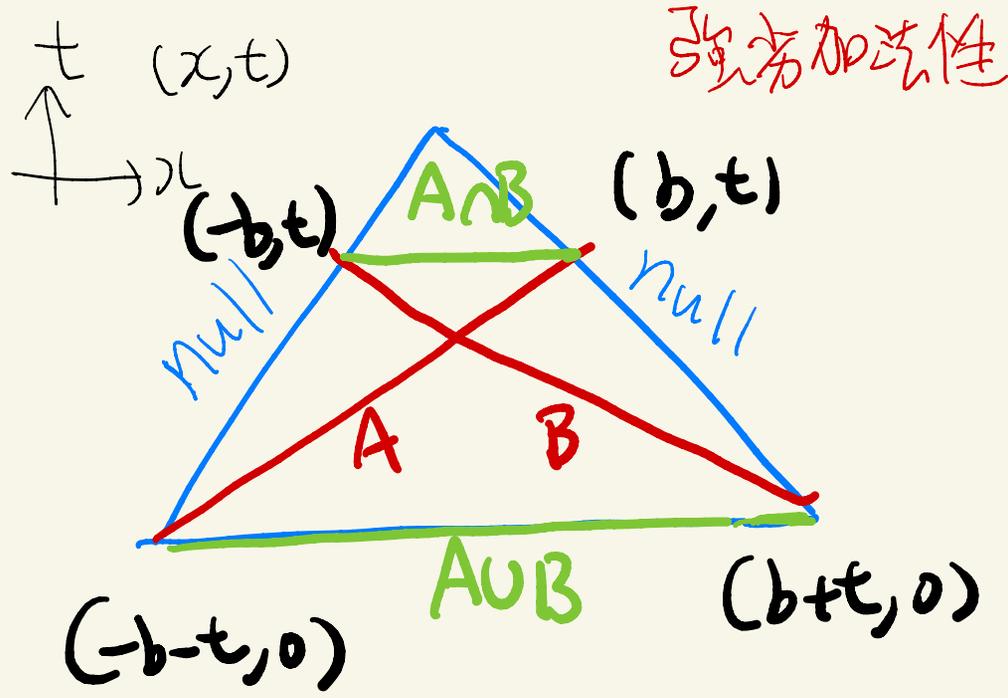


Zamolodchikov の

C 定理

RG flow により  
自由度が減った!

これに、 $EE$  の SSA を用いて示すことが出来る。



$$|A| = |B| = \sqrt{(2b+t)^2 - t^2}$$

$$|A \cap B| = 2b$$

$$|A \cup B| = 2b + 2t$$

$$\rightarrow |A||B| = |A \cup B| \cdot |A \cap B|$$

SSA:  $S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B)$

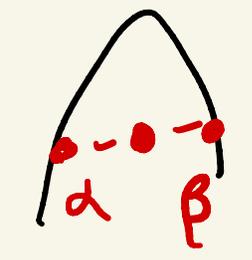
$$|A \cup B| = e^\alpha, \quad |A \cap B| = e^\beta \quad (\alpha > \beta)$$

$$\rightarrow |A| = |B| = e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot S\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq S(\alpha) + S(\beta)$$

上!  !

Concave!



2.2.  $\frac{d^2}{d\alpha^2} S(\alpha) \leq 0$

$C(\ell) \equiv \ell \frac{d}{d\ell} S(\ell)$  is Entropic C function & defined for. ( $\odot$   $C(\ell) = \frac{C}{3}$  at UV fixed point)

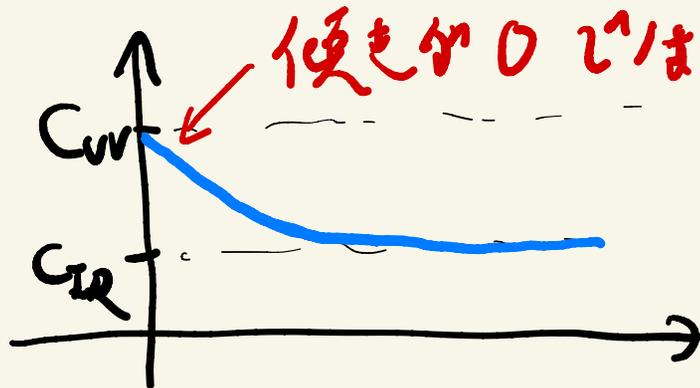
→ SSA

$\frac{d}{d\ell} C(\ell) \leq 0$

Entropic C theorem

$\ell = e^\alpha$

but. - general!



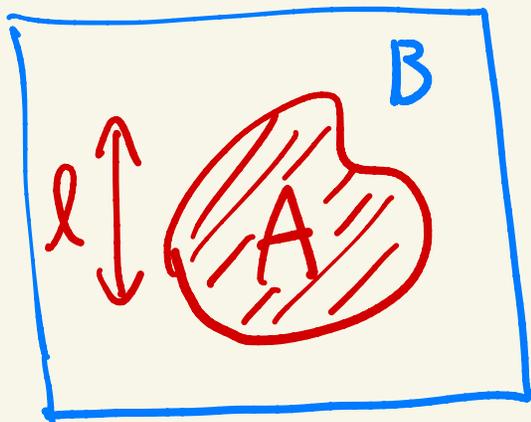
fixed point is there.

higher dimensional

3D F theorem

4D a theorem

# (4-6) 高次元 CFT の EE



CFT<sub>d+1</sub>

$$S_A = S_0 \cdot \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-1} + S_2 \cdot \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-3}$$

面積則

+ ... +

Central  
の線形結合

$$C \cdot \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right) + \text{const}$$

d+1 = even

$$\frac{l}{\epsilon} + (-1)^{\frac{d}{2}} \cdot F$$

d+1 = odd ↓

F関数

Note

$$S_A = S_B \text{ となる。}$$

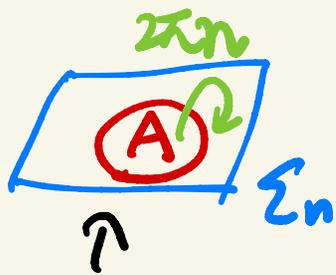
発散項の係数は.

$$S_{2m} = \int_{\partial A} \sqrt{g} f(R, k^2)$$

↑  
m次

# 例 4) CFT

共形 P/M.



$$T^i_i = -\frac{a}{16\pi^2} \tilde{R}_{ijke} R^{ijke} + \frac{c}{16\pi^2} W_{ijke} W^{ijke}$$

Euler density

Weyl anomaly

↓

$A = S^2$  に対する.

$$\chi = \frac{1}{32\pi^2} \int dx^4 \sqrt{g} \tilde{R} R = \chi(\partial A) \cdot (1-h) + h \cdot \text{①}$$

オイラー数

$$\Rightarrow \ell \frac{dS_A}{d\ell} = -\frac{\partial}{\partial n} \left[ \left\langle \int dx^4 \sqrt{g} T^i_i \right\rangle_{\Sigma_n}^{-n} \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i} \right\rangle_{z_i} \right]_{n=1}$$

$$= -2a \cdot \chi(\partial A) = -4a$$

$$\Rightarrow S_A = S_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\epsilon}\right)^2 - 4a \log\left(\frac{\ell}{\epsilon}\right) + \text{const.}$$

# 例 奇数次元 CFT, $A = S^2$

$R^{1,d}$  の極座標.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\Omega_{d-1})^2 \quad \text{に お いて.}$$

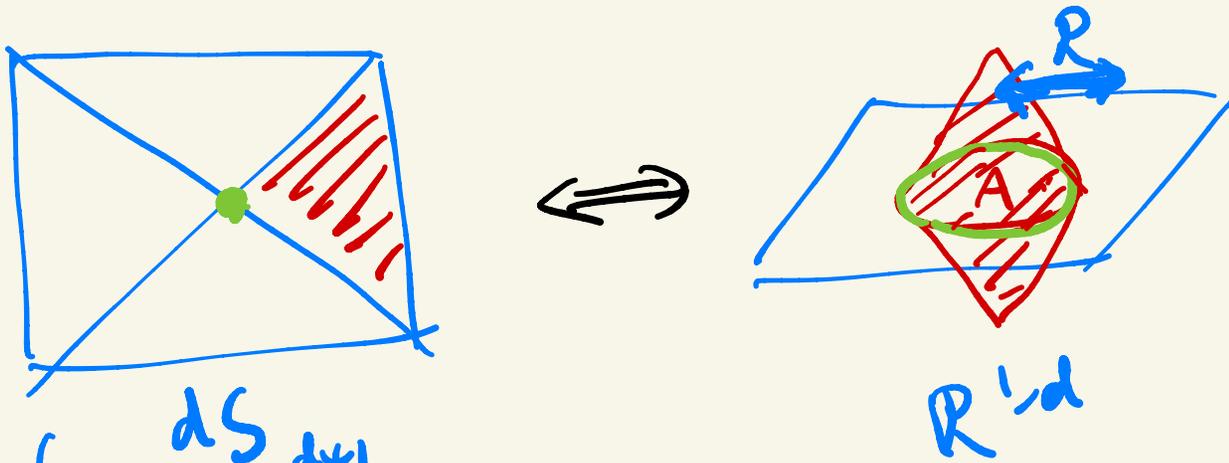
$$t = R \cdot \frac{\cos\theta \sinh(\tau/R)}{1 + \cos\theta \cosh(\tau/R)}, \quad r = \frac{R \sin\theta}{1 + \cos\theta \cosh(\tau/R)}$$

座標を換す.

$$ds^2 = A^2 \cdot \left[ \underline{-\cos^2\theta d\tau^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_{d-1}^2)} \right]$$

de Sitter space

$$A = \frac{1}{1 + \cos\theta \cdot \cosh \frac{\tau}{R}}$$



$$T_{ds} = \frac{1}{2\pi R} \text{ 温度}$$

Euclidean

$S^{d+1}$

$d, 2$

奇数次元の時、  
0!

$$S_A = S_{ds} = \frac{(E_{ds} - F_{ds})}{T_{ds}}$$

$$= - \frac{F_{ds}}{T_{ds}}$$

$$S_A = \log \mathcal{Z}(S^{d+1}) = F \text{ 関数}$$

## (4-7) EEの第1法則

まず 相対エントロピー と導入しよう.

Relative Entropy

$$\underline{S(\rho|\sigma)} = \text{Tr} \rho (\log \rho - \log \sigma) \geq 0$$

相対エントロピー

$$S(\rho|\sigma) \sim \rho \neq \sigma \text{ の } \neq \text{ あり}$$

$$S(\rho|\sigma) = 0 \iff \rho = \sigma$$

また、モジュラーハミルトニアン  $H_A$  を  $\rho_A = e^{-H_A}$

Modular Hamiltonian

と定義する.

$$S(\rho_A | \rho_A^0) = \text{Tr} \rho_A \log \rho_A - \text{Tr} \rho_A \log \rho_A^0$$

TS力起  
状態  
の差の

基底状態  
の縮約密度行列

$$= \text{Tr} \rho_A \log \rho_A - \text{Tr} \rho_A^0 \log \rho_A^0$$

$$- \text{Tr} [(\rho_A - \rho_A^0) \log \rho_A^0]$$

$$= -\Delta S_A + \Delta \langle H_A \rangle \geq 0$$

$$\rightarrow \Delta S_A \leq \Delta H_A \quad (\text{インクロー-バウンズ})$$

Bekenstein Bound

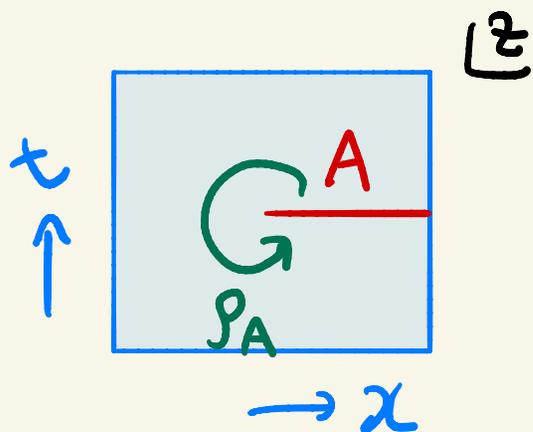
また、 $|\rho_A - \rho_A^0|$  が小さい時に、擾動的に、

$$\Delta S_A \approx \Delta H_A + \mathcal{O}(|\rho_A - \rho_A^0|^2)$$

EEの  
第一法則

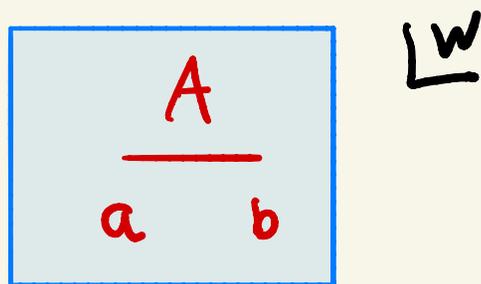
# Modular Hamiltonian

2) CFT の場合  $H_A$  を求めてみたい。  $\rho_A = e^{-H_A}$



$$H_A = 2\pi \int \frac{dx \, x T_{tt}(z)}{\text{7次元演算子}} \quad \text{at } t=0$$

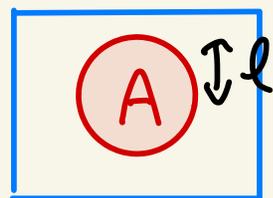
共形変換  $z = \frac{w-a}{w-b}$   $T_{ww} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 T_{zz} + \dots$



$$H_A = 2\pi \int_a^b dy \frac{(b-y)(y-a)}{b-a} T_{tt}(y)$$

と求まる。

高次元では、



$$H_A = 2\pi \int_{|x| \leq l} \frac{l^2 - |x|^2}{2l} \cdot T_{tt}(x)$$

と求まる。