相関基礎科学特殊講義 V
レポート問題 (高柳) 締切 2020 年 11 月 2 日 (月)

[問題 1]

次のハミルトニアン H で記述される、相互作用する二つの調和振動子 AB の基底状態における A と B の間のエンタングルメント・エントロピー S_A を結合定数 λ の関数として求めよ。但し $|\lambda|$ は 1 より小さいとする。

$$H = a^\dagger a + b^\dagger b + \lambda(a^\dagger b^\dagger + ab). \tag{1}$$

ここで A と B の調和振動子の生成・消滅演算子をそれぞれ、$a^\dagger, a$ と $b^\dagger, b$ とする。（ヒント：ボコリューボフ変換を利用せよ。）

[問題 2]

反ドジッター時空の Poincare 座標が、Global 座標のどの部分を覆うのか、具体的に計算して明らかにせよ。また Poincare 座標を

$$ds^2 = R^2 \frac{-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}, \tag{2}$$

と書いたときに、$z = \sqrt{t^2 + A^2}$ が測地線になることを確かめ、それが Global 座標においてどのような測地線に対応するのか答えよ。

[問題 3]

有限温度の 2 次元共形場理論に対応する BTZ ブラックホール解は

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(-\frac{f(z)}{z^2} dt^2 + \frac{dz^2}{f(z) z^2} + \frac{dx^2}{z^2} \right), \\ f(z) &\equiv 1 - \frac{z^2}{z_H^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。この時、地平面 $z = z_H$ 付近で、ユークリッド化された 3 次元空間が、特異点を持たないことを要請して、ブラックホールの温度 T を求めよ。

さらに、時刻 $t = 0$ の線分 $0 \le x \le L$ を部分系 A とした場合のホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー S_A を計算せよ。但し、双対な二次元共形場理論のセントラルチャージ c は $c = \frac{3R}{2G_N}$ と重力定数 G_N を用いて表され、また共形場理論の紫外カットオフ (格子間隔)ϵ は、BTZ ブラックホール解において $z > \epsilon$ という幾何学的カットオフに対応することを用いよ。

[おまけの問題 (これは成績には関係ないので解く必要はない。興味があればやってください。)]

Poincare 座標の AdS_4 時空 (2) に微小摂動 (=微小な重力波) を加えた時空を考えて、その時間発展がアインシュタイン方程式に従ってきまるとする。この時に、対応する 3 次元 CFT の部分領域 A を、時刻を t として、点 $\vec{x} = (x_1, x_2)$ を中心とする半径 L の球の内部とした場合のホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー S_A を考える。この時、微小摂動を与えた場合の S_A の基底状態からの微小変化を $\Delta S_A(x_1, x_2, L, t)$ とかく。この微小変化が次の方程式に従うことを導け：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial l^2} - \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial l} - \frac{3}{l^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \Delta S_A(x_1, x_2, L, t) = 0. \tag{4}$$

またエンタングルメント・エントロピーの第一法則

$$\Delta S_A(x_1, x_2, L) \simeq \Delta \langle H_A \rangle = 2\pi \int_{|\vec{y} - \vec{x} \le L} d^2 y \ \left(\frac{L^2 - |y - x|^2}{2L} \right) T_{tt}(y), \tag{5}$$

が上記の微分方程式を満たすことを示せ。さらに余力があれば、(4) を適切な境界条件をもとに解いて、第一法則とアインシュタイン方程式の微小摂動との等価性を証明せよ。