

集中講義“Holographic Entanglement Entropy”
@ 阪大 2017/10/4-6

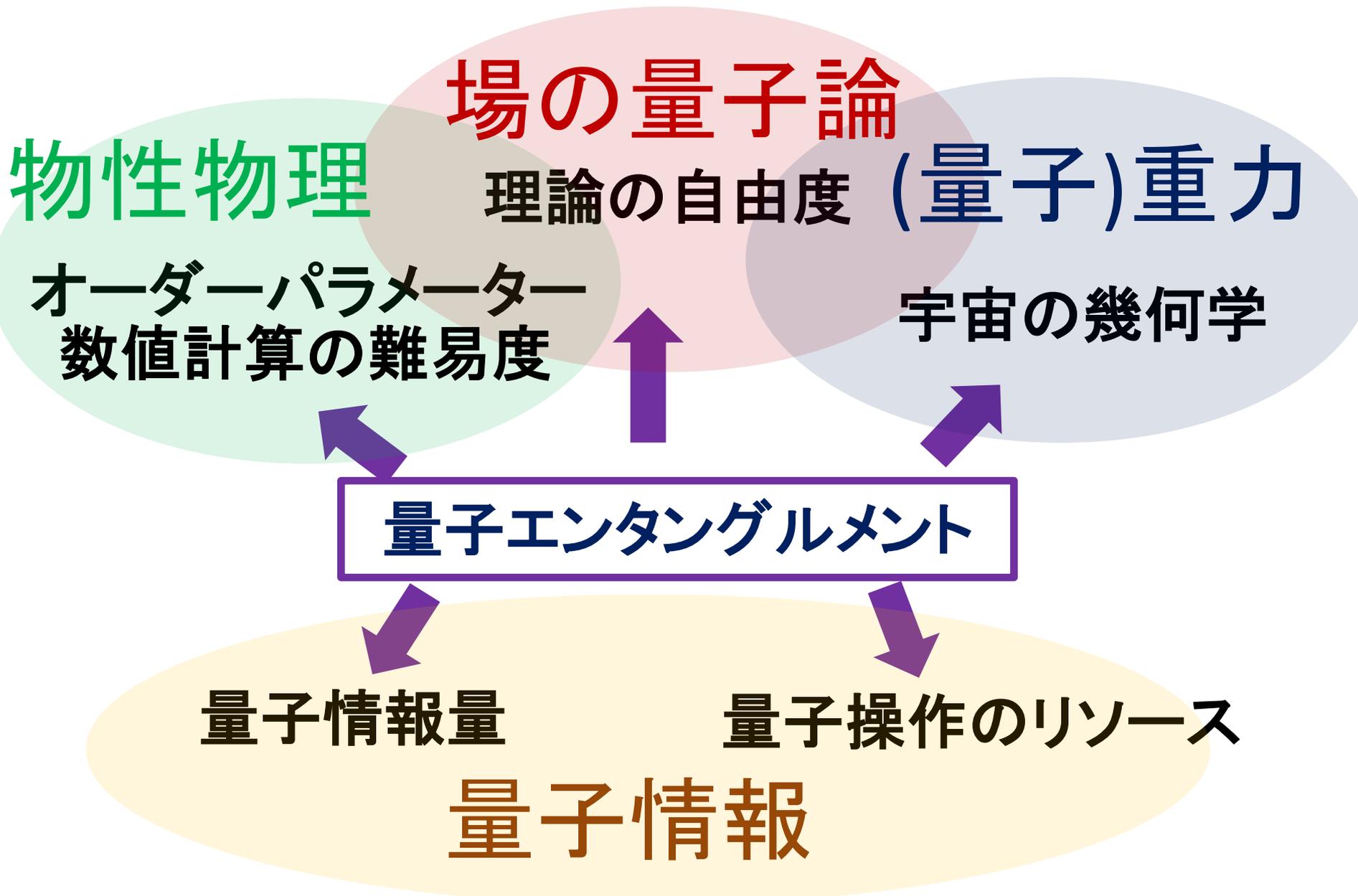
プロローグ

～“エンタングルメント分野” in 超弦理論の歩み

Tadashi Takayanagi (YITP, Kyoto)

高柳 匡 (京大基研)

量子エンタングルメントの概念図



略語

量子エンタングルメント(量子もつれ)

Quantum Entanglement \Rightarrow QE

エンタングルメント・エントロピー

Entanglement Entropy \Rightarrow EE

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー

Holographic Entanglement Entropy \Rightarrow HEE

テンソルネットワーク

Tensor Network \Rightarrow TN

本講義のターゲット:

「超弦理論(量子重力)」と「量子情報理論」の境界領域

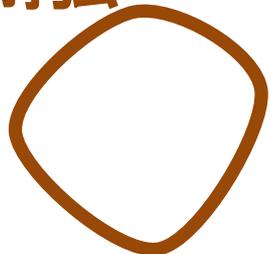
しかし、超弦理論自体の知識は“とりあえず”不要。

(場の理論の基礎や一般相対論の基礎を仮定)

(注) 超弦理論=物質の最小単位を粒子(素粒子)ではなく、ひも(弦)とみなす考え方。

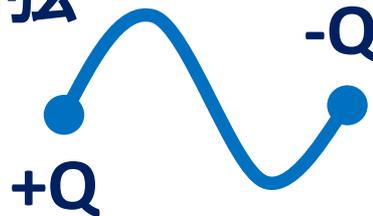
弦には2種類あり、閉弦と開弦と呼ばれる。

閉弦



重力

開弦



電磁力

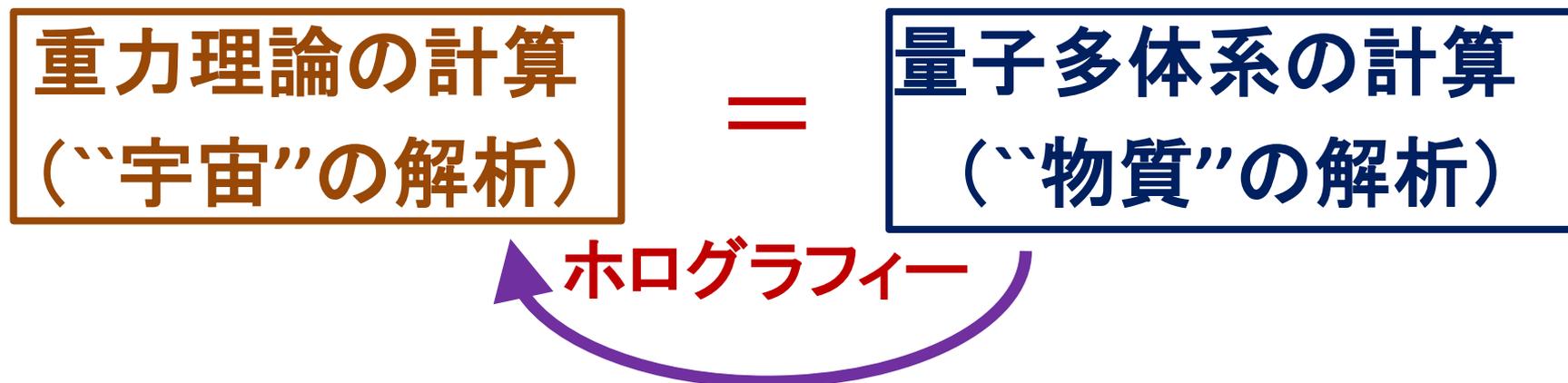
核力

(ゲージ理論)

むしろ、超弦理論から発見された「**ホログラフィー原理**」や「**AdS/CFT対応**」という考え方が重要である。

この考え方を一言で言うと、「**重力理論(超弦理論)**」と「**量子多体系(場の理論)**」の理論として等価性。

重力理論(一般相対論)は、最速量子コンピューター？



重力理論の時空は量子ビットの集合体？

“エンタングルメント分野”の歩み

Bekenstein, Hawking (1973~) ⇒ **ブラックホールのエントロピー公式**

:

Bombelli et.al. (1986) ⇒ **エンタングルメント・エントロピー(EE)**

Srednicki (1993) ⇒ **の面積則(⇔BH エントロピー?)**

:

‘t Hooft (1993), Susskind (1994) ⇒ **ホログラフィー原理**

: **この頃、BH entropyをEEとして解釈する試みが盛ん**

:

Strominger-Vafa (1996) ⇒ **(超対称)ブラックホールのエントロピー**

:

を超弦理論の立場でミクロに説明

:

↓ ブラックブレインへ一般化

Maldacena (1997) ⇒ **AdS/CFT対応(ゲージ重力対応)**

超弦理論

Maldacena (1997) ⇒ **AdS/CFT対応**

： **AdS/CFT対応の検証**

： **が多数行われる**

Son et.al. (2001) ⇒ **AdS/CFTの**

： **QGPへの応用**

： **AdS/CFTのQCDへの応用**

： **が盛ん**

笠・高柳(2006) ⇒ **HEE公式**

：

Hartnoll-Herzog-Horowitz (2008)

： ⇒ **ホログラフィック超伝導**

： **AdS/CFTの物性物理**

： **への応用が盛ん**

量子多体系・量子情報

Einstein-Podolsky-Rosen(1935)

： ⇒ **EPRパラドクス**

Bennett (1993)

： ⇒ **量子テレポーテーション**

Nielsen-Osborne (2001)

： ⇒ **量子系の数値計算**

： **の難易度とEEの関係**

Vidal-Latorre-Rico-Kitaev(2003)

： ⇒ **臨界スピン鎖でEEを計算**

Vidal (2005) ⇒ **MERAの構成**

： **(テンソルネットワーク**

： **とエンタングルメント)**

：

： **様々な量子多体系に対し**

： **EEの計算が行われた**

：

： **[Calabrese-Cardy, Casini,..]**

Swingle (2009) ⇒ AdS/CFT対応がテンソルネットワーク(MERA)
と解釈できることを提案

Casini-Huerta-Myers (2011) ⇒ HEE公式の特別な場合の導出

⇒ AdS/CFTと量子情報の境界領域研究が盛んになる
[アスペンで量子情報,物性,超弦理論の研究会を初開催]

Bhattacharya-野崎-宇賀神-高柳 (2012) ⇒ EEの第一法則

Lashkari-Mcdermott-Raamsdonk (2013) ⇒ EEの第一法則から
摂動Einstein方程式

Lewkowcz-Maldacena (2013) ⇒ HEE公式の一般的導出

Almheiri-Dong-Harlow (2014) ⇒ AdS/CFTと量子誤り訂正符号

Susskind et.al. (2014) ⇒ Holographic Complexity

→ It from Qubit Simons 共同研究がスタート(2015-)

梅本-高柳, Swingle et.al. (2017) ⇒ Holographic Ent. Of Purification

昨年、我々のHEEの論文は、INSPIREのTop 40に入選。
<http://inspirehep.net/info/hep/stats/topcites/2016/annual.html>

23

Jan 2017

INSPIRE ANNUAL TOPCITES 2016

by Melissa Clegg

The 2016 edition of the [annual topcites list](#) is still very much dominated by experiment, in particular the discovery of the Higgs boson in 2012, with the ATLAS and CMS papers at the [1] and [2] positions as they have been since 2013 (joined by the ATLAS and CMS instrumentation papers [12,13]). Indeed, they have now cracked the top ten of the all time list, where they are the only papers from the 2010s and, together with the 2006 PYTHIA [4] and 2002 GEANT4 [6] papers, the only papers from this century. The ATLAS and CMS collaborations produced a joint paper in 2015 on the Higgs boson mass and it makes its first appearance in the Top Forty this year [32]. The papers from the 1990s on the AdS/CFT correspondence [5,14,20] continue to be strongly represented. A breakthrough paper from 2006 by Ryu and Takayanagi [39], which connects entanglement entropy and Bekenstein-Hawking entropy, has made its first appearance in the Top Forty list as interest grows in the connection between quantum information concepts and quantum gravity. Aside from these papers, all of the theoretical papers in the top twenty are resource papers centered around LHC-relevant simulations [4,6,7,8,9,16,19]. The 21st century simulation codes Sherpa and POWHEG make their first appearance on the Top Forty list this year [35,38] following a long, steady climb in their annual citation rates [2008 paper, 2004 paper]. Away from the LHC-zone, observational cosmology rules the top twenty, with familiar favorites [3,10,15,17,18] and one very important newcomer [11], to which we now turn.

The gravitational wave discovery paper [11] by the LIGO Scientific and Virgo collaborations appeared simultaneously in *Physical Review Letters* and on arXiv.org in

Categories

Authors (8)

Collaborations (6)

Collections (25)

Conferences (1)

Data (4)

HEP (15)

Jobs (4)

INSPIRE (18)

References and Citations (26)

TopCites (6)

Service and features (20)

Social media (1)

Tips (22)

Search (17)

Syntax (5)

ブラックホールのエントロピー(Bekenstein-Hawking公式)

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4\hbar} \times \frac{A}{4G_N}$$

A : ブラックホールの面積 (→ 幾何学)

G_N : ニュートン定数(→ 重力、相対論)

k_B : ボルツマン定数 (→ 統計力学)

\hbar : プランク定数(→ 量子力学)

様々な分野
を融合する
理論を示唆！

ブラックホールのエントロピー公式の驚き

(1) エントロピーが体積ではなく、面積に比例！

⇒ホログラフィー原理の動機

(2) 古典重力理論(一般相対性理論)

なのに、エントロピーを持っている！

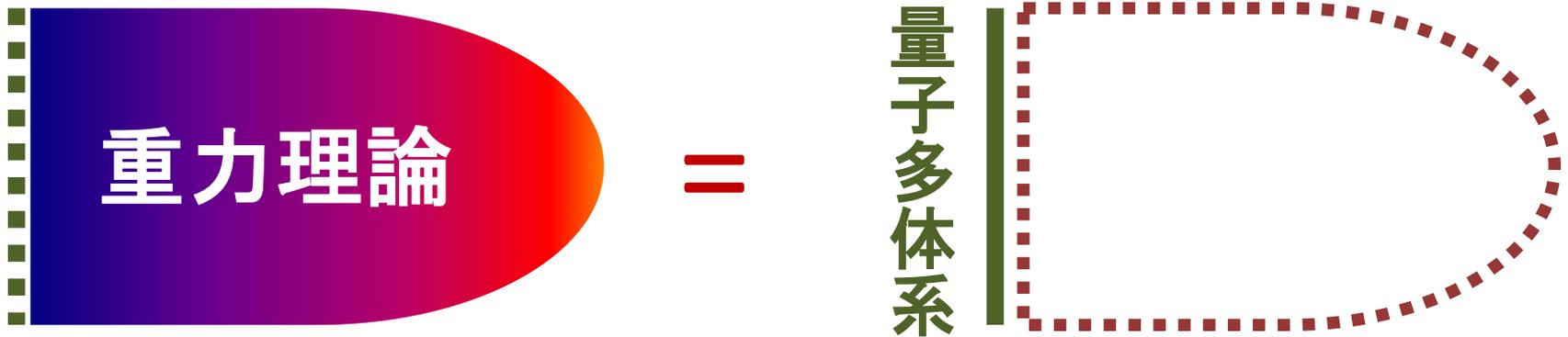
スカラー場やフェルミオン場の古典論を考えてもエントロピーはゼロ。エントロピーは量子化して初めて現れる！ ⇒ Einstein-Hilbert 作用の“topological”な寄与

[エッジモードの寄与？ ⇒ 現在も未解決]

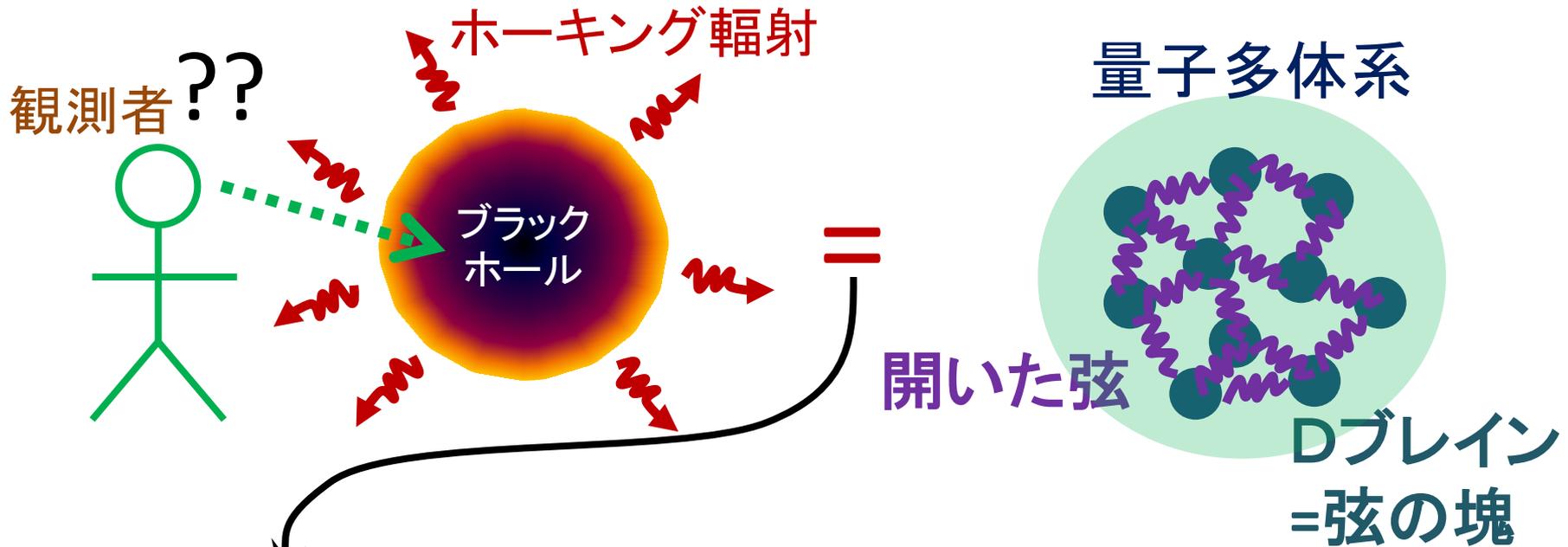
(1)のように重力理論では、自由度が1次元低く見える。
この現象を重力の本質と捉えて、原理とみなしたものを
ホログラフィー原理と呼ぶ。[’t Hooft 93, Susskind 95]

ホログラフィー原理

重力理論 = 境界上の量子多体系



ホログラフィー原理の応用：BHエントロピー



超弦理論は、
BHを拡大する顕微鏡の
役割を果たしている。

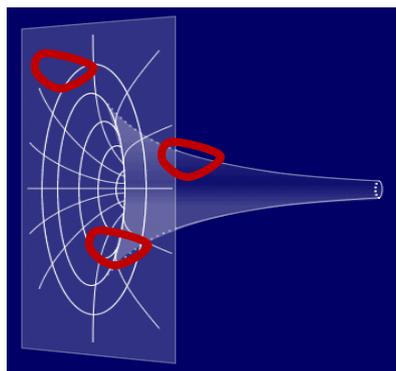
ひもの状態数は、予想される
BHエントロピーと一致する！

[1996 Strominger, Vafa,]

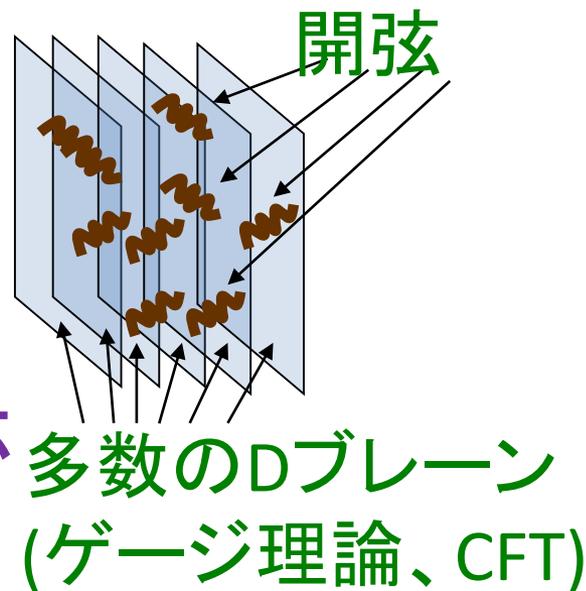
ホログラフィー原理の代表例: AdS/CFT対応

前述のBHの考察の一般化は**AdS/CFT対応**と呼ばれ、ホログラフィー原理の代表例。[1997 Maldacena]

閉弦の理論
= AdS空間の重力理論



等価
AdS/CFT対応



ブラックホールの熱力学
[幾何学的]

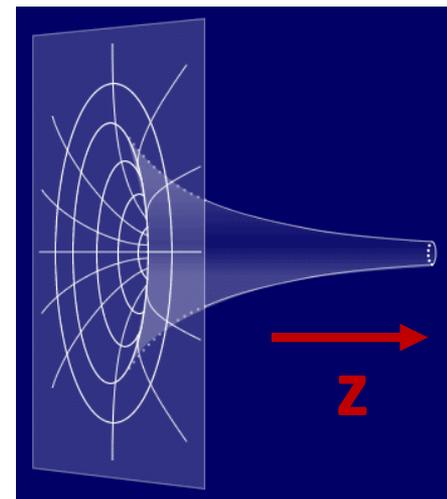
等価

物質の熱力学
[量子論的]

AdS空間(反ドジッター空間)

負の宇宙定数(曲率)を持ち最大対称性を持つ空間=双曲面(Hyperbolic space)

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2}{z^2} \right)$$



CFT(共形場理論)

長さのスケールに依存しない理論。質量がゼロの粒子の量子論。簡単な例を挙げると、4次元の電磁気場(マックスウェル理論)。より一般にゲージ理論。

AdS/CFT対応:

$$Z_{AdS \text{ 重力}} = Z_{CFT}$$

分配関数の一致

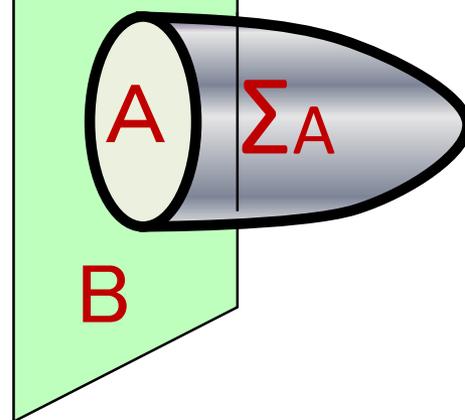
しかし、AdS/CFT対応はブラックボックス！
(基礎原理の証明は現在でも未解決)

そこで、対応原理の基礎的理解を目指したい。
⇒ 双方の情報がどう対応しているのか？



「情報量」の定量化のために
量子情報理論の知識が本質的。
⇒ エンタングルメント・エントロピー
(フォンノイマン・エントロピー)に着目。

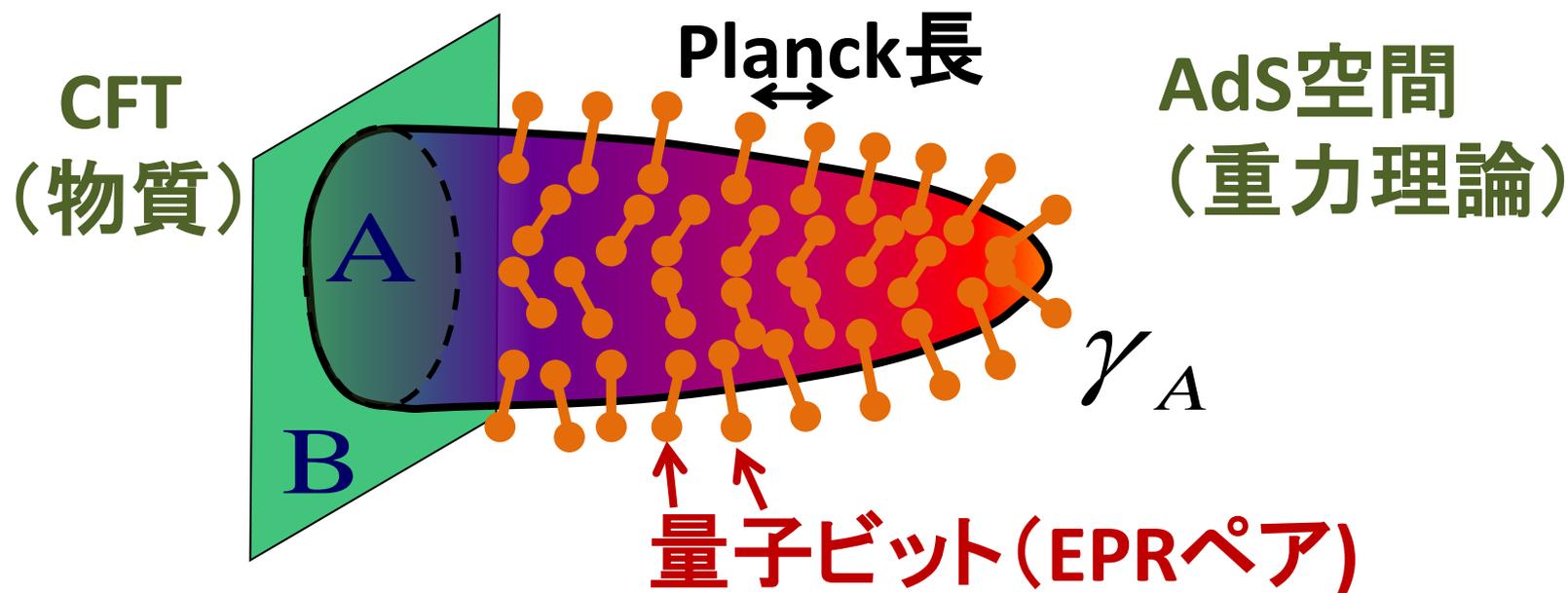
量子多体系 = 重力理論
(CFT) (AdS)



Aの情報 = Σ_A の情報？

ホログラフィックなEE \Rightarrow 重力理論の宇宙が**量子ビット (Qubit)**の集合体とみなせることを示唆している。

$$S_A = \frac{\text{極小曲面 } \gamma_A \text{ の面積}}{[\text{Planck長}]^2} \approx [\gamma_A \text{ 上の量子ビットの数}].$$



\Rightarrow テンソルネットワークの描像へ

参考文献(1) Quantum Entanglement

(1-1) 石坂 智・小川 朋宏・河内 亮周・木村 元・林 正人
「量子情報科学入門」(共立出版)

(1-2) M. Nielsen and I. Chuang
“Quantum Computation and Quantum Information” (Cambridge)

(1-3) M. Wilde
“Quantum Information Theory” (Cambridge)

(1-4) Horodecki⁴, [quant-ph/0702225](#)

(1-5) I. Bengtsson and K. Życzkowski
“Geometry of Quantum States” (Cambridge)

参考文献(2) Holographic Entanglement Entropy

(2-1) 拙著 臨時別冊・数理科学2014年4月SGC106

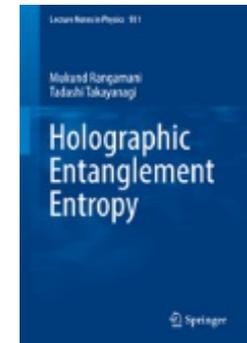
⇒電子版SDB Digital Books 25

「ホログラフィー原理と
量子エンタングルメント」

サイエンス社 2014年4月



(2-2) M. Rangamani and T. Takayanagi,
"Holographic Entanglement Entropy"
Lecture Notes in Physics, Springer, 2017
(arXiv:1609.04645)



(2-3) 西岡-笠-高柳, arXiv:0905.0932