ゲージ場の理論と経路積分

九 後 汰 一 郎

1. はじめに

1970 年代における素粒子の標準理論の成立は，自然界において認識されていた全ての相互作用－すなわち強い相互作用，弱い相互作用，電磁相互作用，そして重力相互作用まで－が，局所ゲージ不変なゲージ理論として記述されるということを明らかにした.（もっとも，標準理論自身は Higgs 場の相互作用（自己相互作用と Yukawa 相互作用）というゲージ原理では決まらない新たな相互作用を持ち込んでしまったのだが.）

観測者が，現在の京都に居るのか，来年のニューヨークに居るのか，はたまた 1969 年 7 月 20 日のアポロ 11 号宇宙飛行士アームストロングのように月面上にいるのか，様々な状況が考えられる．が，それぞれの観測者が**場を測る座標軸は，観測者のいる時空の各点各点で勝手に設定しても良い**はずであり，**自然界の法則は座標軸の取り方に依らず全く同じ形に書かれる**べし，という先験的にも自然な要請ないし原理が，**ゲージ原理**と呼ばれるものである．ここで言う「座標軸の回転」は，2 回続けて行うとまた別角度の回転になるので，一般に数学で言う**群**をなし，この物理の関連では対称性の群とかゲージ群と呼ばれる．自然界にどういう座標軸や回転があるのか，すなわちどういうゲージ群が存在するのかは自然に聞かねばならないが，一旦ゲージ群が決まると，ゲージ原理の要請から，その力を媒介するゲージ場が存在しないといけない事が言え，また，その群の下で変換（回転）する物質場とゲージ場がどういう相互作用をするかが一意的に決まってしまうのである.

ところが，この素晴らしいゲージ理論は量子化しようとすると，まさにこのゲージ不変性のために，以下でも説明するように，通常の量子化手続きが使えず，ゲージ場のプロパゲータが決まらないという困難を持つ．幸いなことに，一番最初のゲージ理論である量子電気力学 (Quantum ElectroDynamics; QED) の場合は，ゲージ不変な作用にフェルミ項と呼ばれるゲージ不変性を壊す項を勝手に手で加えることによって，矛盾のない理論が構成できたのである．しかし，そういう僥倖はアインシュタインの重力理論やヤン-ミルズの（非可換群に基づく）ゲージ理論の場合には最早や成り立たない．実際，Feynman は，重力理論とヤン-ミルズ理論に対して，QED の場合と同じやり方を適用してゲージ場（重力場・ヤン-ミルズ場）のプロパゲータや Feynman ルールを求め，ゲージ場の 1-ループのグラフを計算したところ，出て来るべきでない非物理的偏極モードが零でない寄与をしていることを見つけた．同時に彼は，その非物理的モードの寄与は，ある奇妙な仮想的粒子（重力の場合はベクトルの，ヤン-ミルズの場合はスカラーの粒子）を加えれば，そのループグラフで相殺出来る，ということを発見し，1962 年 7 月ポーランドで開かれた「重力の相対論的理論に関する会議」での講演で発表した[1]．この講演の議論セッ

ションでは，Feynman は少し場の理論の経路積分の表式を書きながらその仮想的粒子のルールについて説明しているが，彼の議論は基本的に摂動論の Feynman グラフの解析に基づくもので，そのため，1-ループまでの議論に留まった．その会議で Feynman と詳しく議論した DeWitt は，同様な解析に基づき 2-ループ以上に対するその仮想的粒子のルールを示唆したが[2]，必ずしも明確ではなかった．

1967 年に現れた Faddeev-Popov の論文[3] は，衝撃的であった．そのわずか 2 ページにも満たない短い論文は，場の理論に対する Feynman の経路積分表式を用いて，簡単なゲージ固定処方を与える事によって，任意ループの場合に成り立つ仮想的粒子の Feynman ルールを一挙に与えることに成功したのである．この論文は Physics Letters B に投稿されるが，そのレフェリーを務めた Veltman を通して't Hooft はいち早くその論文を知ることになって，その後の彼のヤン-ミルズ理論のくり込み可能性の証明にとって決定的な契機となったのである．

本稿では，第 2 節で局所ゲージ変換やゲージ不変作用など，ゲージ理論の基本をおさらいし，第 3 節で Faddeev-Popov に依る経路積分法に基づくゲージ理論の量子化法を解説する．一部 't Hooft によるやり方に従い，Faddeev-Popov の Landau ゲージを任意の共変 α ゲージに一般化し，Faddeev-Popov 行列式を，Faddeev-Popov ゴースト場を導入して書き直す．最後の第 4 節では，経路積分法で見出されたゲージ固定された量子系の作用が持つ BRS 不変性について述べ，それが正準演算子定式化の基礎となったことに触れる．

2. 局所ゲージ変換とゲージ理論

複素数 φ の位相を角度 θ だけ回す変換は

$$\varphi \quad \to \quad \varphi^\theta = e^{i\theta}\varphi$$

と書ける．これは複素数の絶対値の 2 乗 $\varphi^*\varphi =$ (実部)^2+(虚部)^2 を不変に保つガウス平面上での回転である．この変換は，その元 $\{\, e^{i\theta} \,|\, 0 \le \theta < 2\pi \}$ が，1×1 (1 行 1 列) のユニタリー行列 $(e^{i\theta})^\dagger e^{i\theta} = 1$ なので，U(1) 群と呼ばれる群をなす．

複素数が n 成分ベクトルの場合は，変換は

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \to \quad \boldsymbol{\varphi}^U = U \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

と，$n \times n$ 行列 U で与えられる．この変換が複素ベクトルの大きさの 2 乗

$$\varphi^\dagger \varphi = \varphi_1^* \varphi_1 + \cdots + \varphi_n^* \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^* \varphi_i$$

を不変に保つためには，行列 U はユニタリー行列，すなわち $U^\dagger U = 1$，を満たさなければならない．$n \times n$ ユニタリー行列の全体 $\{U\}$ は，群をなし $U(n)$ 群と呼ばれる．$U(n)$ 群は，上述の位相変換（× 単位行列 1 の形）の行列 $\{e^{i\theta}1\}$ の成す U(1) 部分群と，残りの単純群 $SU(n)$ の直積に分解される．$SU(n)$ は，行列式が 1 (special) の $n \times n$ ユニタリー行列全体 $\{U \,|\, U^\dagger U = 1, \det U = 1\}$ の成す群である．$n \ge 2$ の行列のかけ算は非可換，$UV \ne VU$，なので，$SU(n)$ 群は非可換群，上の位相変換群 $U(1)$ は可換群，と呼ばれる．

$SU(n)$ の元 U は，$U = e^{iX}$ のように行列 X の指数関数という形に書け，U がユニタリーで行列式が 1 という条件は，X がエルミート，$X^\dagger = X$，でトレースが 0，すなわち $\mathrm{tr}\, X = 0$，という条件とそれぞれ等価になる．$n \times n$ エルミート行列は，線形独立なものが n^2 個あり，さらにトレースが 0 となるものは一個減って $n^2 - 1$ 個ある．それらを T_a $(a = 1, 2, \cdots, n^2 - 1)$ と書けば，任意の X がそれらの線形結合で書けるので，

$$U = \exp\,(i \sum_{a=1}^{n^2-1} \theta^a T_a) = \exp\,(i\theta^a T_a)\,.$$

(最後の表式の $\theta^a T_a$ の添え字 a のように，くり返された添え字については，和記号 $\sum$ を省略した場合も，その添え字の動ける範囲全体にわたる和をとるという **Einstein の規約**を採用する.) U は（リー）群の元，指数部の元 $X = \theta^a T_a$ は対応する

（リー）代数の元，T_a は，リー代数（またはリー群の）生成子 (generator) と呼ばれる．生成子の交換子は，また生成子の線形結合で書ける．

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c\,. \tag{1}$$

規格化された生成子 T_a の場合，係数 f_{abc} は a, b, c に関して完全反対称であり，群の構造定数と呼ばれ，それぞれの群に固有の定数である．

生成子の規格直交化は，物理では角運動量（スピン）の $SO(3)$ 代数の場合以来，

$$\mathrm{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

ととるのが慣例になっている．以後簡単のため，非可換群の具体例は $n=2$ の $SU(2)$ に話を限ろう．$SU(2)$ の生成子は $2^2-1=3$ 個あるが，それは Pauli が電子スピンの表現に使った Pauli 行列の半分にとる．

$$T_a = \frac{1}{2}\sigma_a,\ (a=1,2,3);$$
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

この $SU(2)$ の場合の構造定数 f_{abc} は，3 階の完全反対称テンソル ε_{abc} ($\varepsilon_{123}=+1$) である．

標準理論における Higgs 場は，2 成分複素数の（ローレンツ）スカラー場である．

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}.$$

この場を測る座標軸は，ゲージ原理にしたがって時空の各点で勝手にとって良いので，各時空点 x^μ 毎に勝手な回転 $U(x)$

$$\boldsymbol{\varphi}(x) \to \boldsymbol{\varphi}^U(x) = U(x)\boldsymbol{\varphi}(x),\ U(x) = e^{ig\theta^a(x)T_a}$$

を許す．成分表示で書けば

$$\varphi^{U\,i}(x) = U^i_j(x)\varphi^j(x), \quad U^i_j(x) = [e^{ig\theta^a(x)T_a}]^i_{\ j}\,.$$

回転角度 $\theta^a(x)$ が時空点 x^μ に依存している．これを局所ゲージ変換と呼ぶ．(後の便宜のため角度のスケールを結合定数 g 倍だけ変えた.)

局所ゲージ変換を許すと，時空点毎に座標軸の向きが違うことを意味し，場の量の成分 $\varphi_i(x)$ は，その点の座標軸への射影成分なので，**どの点の量なのか**を言わないと意味がないことになる．特に普通の微分 $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ は，

$$\partial_\mu \varphi_i(x)\, dx^\mu = \varphi_i(x+dx) - \varphi_i(x)$$

であるから，二つの異なる時空点 $x+dx$ と x における場の i 成分の差 $\varphi_i(x+dx) - \varphi_i(x)$ をとっており，客観的意味を持たない．我々は，先ず，点 x の座標軸と，無限小離れた点 $x+dx$ の座標軸とがお互いどのくらい回転しているのかを知る必要がある．時空の連続性から，無限小間隔 dx だけ離れた点の座標軸間の回転角度 $d\theta^a(x)$ は，同じく無限小で dx に比例するはずである．4 次元時空では，無限小移動の独立な方向は 4 つ dx^μ ($\mu = 0, \cdots, 3$) あるので，この無限小回転は方向 μ 毎に違う係数での足し算になり，したがって，点 $x+dx$ での座標軸は，点 x でのそれから角度

$$d\theta^a(x) = A^a_\mu(x)\, dx^\mu$$

だけ回転していることになる．この比例係数 $A^a_\mu(x)$ は，群の添え字 a と，時空添え字 μ を持ち，x に依存しているので，「リー代数に値を持つ（4 元）ベクトル場」$A^a_\mu(x)$ であり，**ゲージ場**と呼ばれる．すなわち，ゲージ原理を認めると，ゲージ場が存在しなければならない事が導かれるのである．このゲージ場＝隣り合う点の無限小回転角，がわかると，「正しい」微分がわかる．無限小の角度 $d\theta^a$ の場合の回転 $U = 1 + ig\, d\theta^a T_a$ が

$$\varphi^{U\,i}(x) = \varphi^i(x) + ig\, d\theta^a(x)\, (T_a)^i_{\ j}\varphi^j(x)$$

と書けることに注意して，点 x での場 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \big(\varphi_i(x)\big)$ を，点 $x+dx$ へ「平行移動」して点 $x+dx$ の座標軸で見た i 成分を求めると，

$$\varphi^i_{\|}(x+dx) = \varphi^i(x) + ig\, A^a_\mu(x)(T_a)^i_{\ j}\varphi^j(x)dx^\mu.$$

これは，元から $x+dx$ にあった場 $\varphi^i(x+dx)$ と同じ座標軸で測った i 成分だから，その差を計算するのは意味があり，

$$\begin{aligned}&\varphi^i(x+dx)-\varphi^i_{\|}(x+dx)\\&=\Big(\partial_\mu\varphi^i(x)-igA^a_\mu(x)(T_a)^i{}_j\varphi^j(x)\Big)dx^\mu\\&\equiv D_\mu\varphi^i(x)\,dx^\mu\ .\end{aligned}$$

この D_μ が共変微分と呼ばれる，局所ゲージ変換の下で共変な微分を与える．標記の簡潔さのため，ベクトル $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_i)$ 記号と，群の添え字を持つゲージ場 A^a_μ の行列表示

$$A_\mu\equiv A^a_\mu T_a,\ \text{すなわち}\ A_\mu{}^i{}_j=A^a_\mu(T_a)^i{}_j$$

を使ってこれを書き直すと，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}(x+dx)-\boldsymbol{\varphi}_{\|}(x+dx)\\&=\big(\partial_\mu-igA_\mu(x)\big)\boldsymbol{\varphi}(x)\,dx^\mu\equiv D_\mu\boldsymbol{\varphi}(x)\,dx^\mu.\end{aligned}$$

この量は点 $x+dx$ での共変量であるので，局所ゲージ変換の下では，$U(x+dx)$ で回転を受ける．この式の両辺を局所ゲージ変換して，dx の 1 次の量までとれば，$U(x+dx)$ は $U(x)$ に置き換えられて，

$$(D_\mu\boldsymbol{\varphi})^U(x)=U(x)D_\mu\boldsymbol{\varphi}(x) \qquad (2)$$

を得る．これは $D_\mu\boldsymbol{\varphi}(x)$ が元の $\boldsymbol{\varphi}(x)$ と同じ変換 $\boldsymbol{\varphi}^U(x)=U(x)\boldsymbol{\varphi}(x)$ をする点 x での共変量であることを意味している．左辺の $(D_\mu\boldsymbol{\varphi})^U$ の意味が，$D^U_\mu\boldsymbol{\varphi}^U=(\partial_\mu-igA^U_\mu)\boldsymbol{\varphi}^U$ であることに注意して，右辺に $\boldsymbol{\varphi}(x)=U^{-1}(x)\boldsymbol{\varphi}^U(x)$ を代入すれば，それが任意の場 $\boldsymbol{\varphi}^U(x)$ の上で成り立つことから，共変微分の変換式

$$D^U_\mu=U(x)D_\mu U^{-1}(x) \qquad (3)$$

が導かれる．$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu(x)$ を代入すれば，ゲージ場の局所ゲージ変換の下での変換則は（式を短く書くため $U(x)$ の x を省略して），

$$A^U_\mu(x)=\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1}+U\,A_\mu(x)U^{-1} \qquad (4)$$

と求まる．場の強さと呼ばれる量 $F_{\mu\nu}(x)$ は，

$$F_{\mu\nu}(x)\equiv\frac{i}{g}[D_\mu,\,D_\nu] \qquad (5)$$

で定義されるが，見かけにかかわらず，この交換子は最早や微分演算子ではなく普通の場の量となる：

$$F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu,A_\nu]\,.$$

成分表示では，$F_{\mu\nu}\equiv F^a_{\mu\nu}T_a$ と (1) 式を用いて，

$$F^a_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\,f_{abc}A^b_\mu A^c_\nu\,.$$

共変微分演算子の変換則 (3) から直ちに，(5) 式で定義される $F_{\mu\nu}(x)$ のゲージ変換則が従う：

$$F^U_{\mu\nu}(x)=U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)\,. \qquad (6)$$

物質場およびゲージ場の Lagrangian（密度）は，ゲージ不変性（と Lorentz 不変性とくりこみ可能性）だけから決まってしまう．スカラー場 $\boldsymbol{\varphi}$ の Lagrangian は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}=(D^\mu\boldsymbol{\varphi})^\dagger D_\mu\boldsymbol{\varphi}-V(\boldsymbol{\varphi}^\dagger\boldsymbol{\varphi}) \qquad (7)$$

で，ゲージ場の Lagrangian は，

$$\mathcal{L}_{\text{gauge場}}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} \quad (8)$$

で与えられる．これらが局所ゲージ変換で不変なことは，(2) 式および (6) の変換則から明らかである．ここでは特に，物質場とゲージ場との相互作用の形が，物質場の運動項の微分が共変微分に置き換えられた形に一意的に決まったことに注意したい．共変微分を通じての相互作用は極小相互作用と呼ばれている．

3. Faddeev-Popov 論文

一般のゲージ理論の物質場部分 Lagrangian $\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}$ は，(7) 式のような基本表現のスカラー場の他，種々な表現に属するフェルミオン場とスカラー場を含む．しかし，以下の議論では，問題は専らゲージ場に関することなので，自明な物質場部分は無視し，系の Lagrangian $\mathcal{L}$ と言えば (8) 式の $\mathcal{L}_{\text{gauge場}}(A)$ を指し，その作用を $S[A]$ と記す．

ヤン-ミルズ場 A_μ のゲージ変換 (4) は，$U(x)=\exp(ig\theta(x))$ が無限小変換 $|\theta|\ll 1$ の場合は，

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x)\ &\equiv\ A^U_\mu(x)-A_\mu(x)\\&=\partial_\mu\theta(x)-ig[A_\mu(x),\,\theta(x)]\equiv D_\mu\theta(x)\end{aligned}$$

となる．ここでゲージ場 $A_\mu(x) = \sum_a A_\mu^a(x)T_a$ も，角度 $\theta(x) = \sum_a \theta^a(x)T_a$ も行列表示である．成分表示では，交換関係 (1) を用いて，

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu\theta^a + gf_{abc}A_\mu^b\theta^c \equiv D_\mu\theta^a(x) \quad (9)$$

で与えられる．この変換で Lagrangian $\mathcal{L}$ は不変なため，場の 2 次項の演算子が 0 固有値を持ち，その逆で与えられるプロパゲーターが求まらなくなる．実際，ゲージ場の 2 次の部分は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2\text{次}} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^{a\mu}\partial_\nu A^{a\nu}) \\
&= \frac{1}{2}A^{a\mu}(\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)A^{a\nu} \qquad (10)
\end{aligned}$$

[ここで第 2 行目の最後の項では（作用 $\int d^4x\,\mathcal{L}$ の中で許される）部分積分をして ∂_μ と ∂_ν を入れ替え，第 3 行目へ行く時も，∂_μ の部分積分をした] となるが，この項は無限小ゲージ変換 (9) の非斉次部分

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu\theta^a(x)$$

で不変なので，演算子 $\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu$ の固有値 0 の固有ベクトル

$$(\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)(\partial^\nu\theta(x)) = 0$$

を与え，そのため演算子 $\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu$ は逆を持たず，プロパゲーターが決まらない．そこで，量子電気力学では，Lagrangian に単純に Fermi 項と呼ばれる “ゲージ固定項” $-(1/2\alpha)(\partial_\mu A^\mu)^2$ を加えて手でゲージ不変性を壊し，プロパゲータが決まるようにして，(後から見れば）奇跡的にうまく行ったのである．特に，ゲージパラメータと呼ばれる係数 α を 1 にとれば，Lagrangian の 2 次項は，(10) 式の最後の項が消されて $(1/2)A^\mu\eta_{\mu\nu}\Box A^\nu$ となるので，その逆で与えられるプロパゲータは

$$i\eta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{\Box}\right]_{xy} = \int\frac{d^4p}{i(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon}\,. \quad (11)$$

すなわち，運動量表示で $\eta_{\mu\nu}/p^2$ という一番簡単な Feynman ゲージのプロパゲータとなる．

第 1 節でも述べたように，Feynman は，重力やヤン-ミルズ場の場合には，このプロパゲータを用いると，非物理的な縦波やスカラーモードの寄与がノンゼロで効いてきて，その寄与を消すためには「仮想的粒子 (fictitious particle)」を導入する必要があると初めて指摘し，1-ループまでの次数で Feynman ルールを与えたのである．

Faddeev と Popov が 5 年後に，場の理論に対する Feynman の経路積分表式を用いて，ゲージ固定の手続きを再考することによって，仮想粒子の起源とその Feynman ルールとを一挙に解明することに成功したのである[3]．ここでは先ず彼らのそのアイデアを，場の変数についての無限重積分である経路積分の代わりに超簡単な次の 2 重積分の例をとって説明しよう．

$$I = \int dxdy\,F(x,y)\,. \qquad (12)$$

ここで，被積分関数 $F(x,y)$ は，2 次元 (x,y) 平面 P 上の回転

$$\boldsymbol{x} \to \ \boldsymbol{x}^\theta = \begin{pmatrix} x^\theta \\ y^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

で不変であるとする．この回転をゲージ変換，不変性をゲージ不変性と呼ぼう．回転角 θ を 0 から 2π まで変化させると点 (x^θ, y^θ) は，2 次元平面 P 上で原点を中心とする半径 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ の円を描くが，それを点 (x,y) の**ゲージ軌跡**と呼ぶ．平面 P は，色々な半径 $r \geq 0$ のゲージ軌跡で埋め尽くされるが，平面積分 $dx\,dy$ は被積分関数 $F(x,y)$ が各ゲージ軌跡上で一定の値をとる (ゲージ不変) ので，ゲージ軌跡をパラメトライズする半径 r の積分 dr と，ゲージ変換の回転角 θ の積分 $d\theta$ に書きかえると，関数 $F(r)$ が依存しない「空回り」の θ 積分が自明に分離できる．これは良く知っている極座標への変数変換で実現できる：

$$\int dx\,dyF(x,y) = \int dr\,rF(r)\cdot\int d\theta\,. \quad (14)$$

このようなゲージ変換の「空回り」積分 $\int d\theta$ の因子分離を極座標の知識なしに導くのが Faddeev-Popov の方法である．

先ず，各ゲージ軌跡（この場合，円）から一つず

つ代表点を選ぶことにし，それを指定する条件をゲージ固定条件と呼ぶ．ゲージ変換 (13) を使えば，ゲージ軌跡上の任意の点は，例えば $y=0$（x-軸上）に持ってこれるので，ゲージ固定条件として $y=0$ を採る．この固定条件の定める'面' $y=0$ (今は線で，正の x-軸)[*1]に，各点 (x,y) のゲージ軌跡 (x^θ,y^θ) がどのくらいの「重み」で交わるかの尺度は，次式で計算できる：

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \delta(y^\theta(x,y)) = \Delta^{-1}(x,y)\,. \qquad (15)$$

ここで $\delta(y^\theta)$ は，Dirac のデルタ関数[*2]である．y^θ は，(13) の示すように，最初の点 (x,y) の関数なので，この量 $\Delta^{-1}(x,y)$ も (x,y) の関数である．この量（の逆数）$\Delta(x,y)$ は，Faddeev-Popov (FP) 行列式と呼ばれるが，それがゲージ不変性を持つことが重要である．すなわち，最初の点 (x,y) がそのゲージ軌跡上のどこにあっても同じ値をとる：

$$\Delta(x^\phi,\, y^\phi) = \Delta(x,y) \quad \text{for } \forall \text{ 角度 } \phi.$$

この性質は，(15) の θ 積分が全周 2π 分（U(1) 群上全体）にわたっているので，出発点 (x,y) が軌道上のどこにあろうと，(x^θ,y^θ) は同じゲージ軌跡上を一周走り，積分 (15) は同じ値を与えるからである．式で書けば，

$$y^\theta(x^\phi,y^\phi) = y^{\theta+\phi}(x,y)$$

であり，$d\theta = d(\theta+\phi)$ であるから

$$\Delta^{-1}(x^\phi,\, y^\phi) = \int_0^{2\pi} d\theta\, \delta(y^\theta(x^\phi,y^\phi))$$
$$= \int_\phi^{2\pi+\phi} d(\theta+\phi)\, \delta(y^{\theta+\phi}(x,y)) = \Delta^{-1}(x,y).$$

*1) Faddeev-Popov のやり方では「ゲージ固定面は，各ゲージ軌跡と一回だけ交わる」ことが仮定されている．ここでは，単に $y=0$（x-軸）の条件だと，各ゲージ軌跡（原点中心の円）は皆二回交わることになるので，一回とするために，$y=0$ で $x>0$ の条件を満たすものとしておく．しかし非可換ゲージ理論の場合は，ゲージ固定面が各ゲージ軌跡と何回交わるかは，一般にゲージ固定条件の取り方に依存して，ゲージ軌跡毎に違う可能性がある．そうすると，単純な Faddeev-Popov のやり方は正しい量子化を与えないことになるが，Gribov[4] によって指摘されたこの問題は，Gribov 問題と呼ばれ，未だ明確な理解も対処法も知られていない．

*2) 本稿で用いる Dirac デルタ関数の定義や公式は，付録にまとめたので参照のこと．

(15) 式を

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \Delta(x,y)\, \delta(y^\theta(x,y)) = 1$$

と書いて，これを積分 (12) 式に掛ける：

$$I = \int dxdy\, F(x,y) \int_0^{2\pi} d\theta\, \Delta(x,y)\delta(y^\theta(x,y))\,. \qquad (16)$$

ここで，$F(x,y)$ と $\Delta(x,y)$ のゲージ不変性を使い，(x,y) から $(x'=x^\theta, y'=y^\theta)$ への変数変換を行い，測度の回転不変性 $dxdy = dx'dy'$ を使えば，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int dxdy\, F(x^\theta,y^\theta)\Delta(x^\theta,y^\theta)\delta(y^\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int dx'dy'\, F(x',y')\Delta(x',y')\delta(y') \\ &= \int dxdy\, F(x,y)\Delta(x,y)\delta(y)\cdot \int_0^{2\pi} d\theta \quad (17) \end{aligned}$$

となり，θ 積分が自明な形に分離された．最後の $\delta(y)$ を用いて dy 積分を行えば，

$$I = \int dx\, F(x,0)\Delta(x,0) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

となり，これは (14) 式を再現している．何故なら，$\Delta(x,y{=}0)$ の値は，定義式 (15) において $y=0$ の時に $y^\theta(x,y)$ がゼロになるのは $\theta = 0$ の時だということに注意して，$\theta \ll 1$ での近似式 $y^\theta(x,0) = x\theta$ を用い，付録 (A1) の公式を適用して $d\theta$ 積分を評価すれば

$$\Delta^{-1}(x,0) = \int d\theta\, \delta(x\theta) = 1/x\,.$$

すなわち $\Delta(x,0) = x$ が得られるからである．このやり方をゲージ理論に適用したい．

さて，一般の場の理論において，$t=-\infty$ で初期状態 $\Psi_{\rm i}$ にあった状態が $t=+\infty$ で終状態 $\Psi_{\rm f}$ になる遷移振幅 Z は，経路積分

$$Z = \int \mathcal{D}A\, \Psi_{\rm f}^* \Psi_{\rm i} \exp\left(iS[A]\right),$$
$$\mathcal{D}A \equiv \prod_{x,\mu,a} dA_\mu^a(x),\ \ S[A] = \int d^4x\, \mathcal{L}(A) \quad (18)$$

で与えられる．しかし，ゲージ理論の場合，この

積分はゲージ不変性に起因する発散を含み well-defined でない．それは，摂動計算では，場の 2 次項の係数の逆数で与えられるプロパゲーターが決まらなかった（0 固有値のため発散した）という形で現れたのだが，Faddeev と Popov は，この経路積分表式で言えば，被積分関数である作用汎関数 $S[A]$ がゲージ不変なため，この経路積分がゲージ変換の元 $U(x) = \exp\left(ig\sum_a \theta^a(x)T_a\right)$ の分だけ「空回り」の積分[*3]．

$$\int \mathcal{D}U = \int \prod_x \int_G dU(x) = \int \prod_{x,a} d\theta^a(x) \quad (19)$$

を含んでおり，それが発散の原因であると見抜いたのである（各時空点 x 毎の群 G 上にわたる積分 $\int_G dU(x)$ 自体は，コンパクト群の場合は有限なのだが，時空点が連続濃度分あるので発散するのである．コンピュータ上の格子ゲージ理論の場合には，時空点の数が有限なので発散せず，ゲージ固定する必要は必ずしもない.）

そこで Faddeev-Popov は，遷移振幅表式 (18) に対して，上述の簡単な例で説明した方法を適用して，ゲージ固定条件を課して，ゲージ変換群上の「空回り」積分因子の無限大 (19) をあらわに抜き出し割り算して，残りの有限部分を正しく計算することによって，正しい Feynman ルールを与える経路積分表式を得たのである．

そこで，先ず，ゲージ場の関数空間 $\left\{ A_\mu^a(x) \right\}$ 内の各ゲージ軌跡から一つずつ代表元を選ぶためのゲージ固定条件として，ローレンツ変換で不変な

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = 0$$

(Landau ゲージ) を採ることにする．そして (15) と同様に FP 行列式を

$$\int \mathcal{D}U \prod_{x,a} \delta(\partial^\mu A_\mu^{Ua}(x)) = \Delta^{-1}[A] \quad (20)$$

で定義する．$A_\mu^U(x)$ は，初めの関数 $A_\mu(x)$ から，ゲージ群 G の元 $U(x) \in G$ でゲージ変換した関数 (4) で，$\mathcal{D}U$ は，全ての時空点上のゲージ群 G 上にわたる積分 $\prod_x dU(x)$ である．よって，FP 行列式 $\Delta[A]$ は，最初の関数 $A_\mu(x)$ の汎関数であるが，前と同様，ゲージ不変であること

$$\Delta[A^V] = \Delta[A] \quad \text{for } {}^\forall V(x) \in G$$

が，$(A^V)^U = A^{VU}$ および $\mathcal{D}U$ 積分測度の不変性 $\mathcal{D}(VU) = \mathcal{D}U$ から従うことがわかる．次に，また上の (16) 式と同様，1 である $\Delta[A] \times (20)$ 式を遷移振幅 (18) に掛けて，$S[A]$ と $\Delta[A]$ のゲージ不変性を使って，(17) 式と同じ変形をする：(短くするため初期，終状態の波動汎関数 $\Psi_\mathrm{f}^*\Psi_\mathrm{i}$ や，ゲージ場 A_μ^a の群の添え字 a はしばらく省略して）

$$\begin{aligned} &Z \\ &= \int \mathcal{D}A \, \exp\bigl(iS[A]\bigr) \int \mathcal{D}U \Delta[A] \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^U(x)) \\ &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A \, \Delta[A^U] \exp iS[A^U] \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^U(x)). \end{aligned}$$

さらに経路積分測度のゲージ不変性 $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^U$ も使って変数変換 $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu^U$ をした後，積分変数 A' を A と書き直せば，望みの空回り因子 $\int \mathcal{D}U$ をくくり出せる:

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' \, \Delta[A'] \exp iS[A'] \prod_x \delta(\partial^\mu A'_\mu(x)) \\ &= \int \mathcal{D}A \, \Delta[A] \exp\left(iS[A]\right) \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu(x)) \cdot \int \mathcal{D}U. \end{aligned}$$

したがって，正しい遷移振幅の表式は，この無限大の空回り因子で割って，次式で与えられる:

$$T = \int \mathcal{D}A \, \Psi_\mathrm{f}^* \Psi_\mathrm{i} \, \Delta[A] \, e^{iS[A]} \prod_{x,a} \delta(\partial^\mu A_\mu^a(x)) \, . \quad (21)$$

ここで，終，初期状態の波動汎関数 $\Psi_\mathrm{f}^*\Psi_\mathrm{i}$ を復活しておいたが，実はこの表式までの変形では，それぞれ $A_\mu(\boldsymbol{x}, x^0 = \pm\infty)$ の汎関数である $\Psi_\mathrm{f}^*\Psi_\mathrm{i}$ がゲージ不変であることを暗に仮定していたことに注意しておこう．すなわちゲージ不変な物理的状態に対してだけ正しいのである．

ここで FP 行列式 $\Delta[A]$ のあらわな表式が必要である．ここ (21) 式ではゲージ固定のデルタ関数

---

*3) (19) 式の $dU(x)$ は，正確に言えば，Haar 測度と呼ばれる群 G 上の不変測度であり，それが最右辺の簡単な表式に書けるのは単位元の近傍 $|\theta^a| \ll 1$ のみである．

$\delta(\partial^\mu A^a_\mu(x))$ の前に現れているので，$\partial^\mu A^a_\mu = 0$ を満たすゲージ場 A_μ に対してのみ，$\Delta[A]$ の定義式 (20) を評価すれば良い．そのような A_μ に対して $\delta(\partial^\mu A^{U\,a}_\mu(x))$ の U-積分であるから，U の単位元近傍 $U(x) = 1 + ig\,\theta^a(x)T_a$ のみが効き，そこでは

$$A^{U\,a}_\mu(x) = A^a_\mu(x) + D_\mu\theta^a(x)$$

だから，$\partial^\mu A^a_\mu = 0$ を満たすゲージ場 A_μ に対して $\Delta[A]$ の定義式 (20) は，単位元近傍の群 G 上の積分測度が

$$\mathcal{D}U = \prod_{x,a} d\theta^a(x)$$

であること，および付録の公式 (A4) を用いて，

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}[A] &= \int \prod_{x,a} d\theta^a(x)\,\delta(\partial^\mu D_\mu\theta^a(x)) \\ &= \mathrm{Det}^{-1}(\partial^\mu D_\mu)\,. \qquad (22)\end{aligned}$$

これは汎関数行列式なので，$\Delta[A]$ が FP 行列式と呼ばれる所以である．

この FP 行列式を持つ遷移行列の経路積分表式 (21) は，$\partial^\mu A^a_\mu = 0$ のゲージ条件を満たすいわゆる Landau ゲージの場合の Feynman ルールを与えるものであるが，実用上便利な Feynman ゲージなどにも適用できるよう 't Hooft に従いもう少し一般化しておこう[5]．そのため，先ず勝手な関数 $f^a(x)$ を持ってきて上のゲージ条件を $\partial^\mu A^a_\mu(x) - f^a(x) = 0$ に拡張する．その場合に上の手続きをくり返すと，遷移振幅 T に対する表式（再び前の省略をして）

$$T = \int \mathcal{D}A\,\Delta[A]\,e^{iS[A]} \prod_{x,a} \delta(\partial^\mu A^a_\mu(x) - f^a(x)) \qquad (23)$$

が得られる．ここで重要な点は FP 行列式 $\Delta[A]$ が，$\partial^\mu A^a_\mu(x) - f^a(x) = 0$ を満たす $A^a_\mu(x)$ の近傍だけで評価して良いので，上の表式 (22) と全く同じ $\mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)$ が得られ，関数 $f^a(x)$ に依らないことである．しかも，この遷移振幅 T 自体も Laudau ゲージの表式 (21) の T と同じ量であり，$f^a(x)$ に全く依らないことである．何故なら，それらは同じ Z の表式 (18) から出発し，同じ因子 (19) で割って得られた表式だからである．

したがって，この表式 (23) を任意の重み関数 $\exp(iS_{\mathrm{GF}}[f])$ を付けて $f^a(x)$ について積分しても（全重みが 1 である限り）同じ T を与える．Dirac デルタ因子 $\delta(\partial^\mu A^a_\mu(x) - f^a(x))$ があるので，$f^a(x)$ についての積分は自明にできて，遷移振幅 T は

$$T = \int \mathcal{D}A\,\Psi^*_{\mathrm{f}}\Psi_{\mathrm{i}}\,\Delta[A]\exp\left(iS[A] + iS_{\mathrm{GF}}[\partial^\mu A_\mu]\right)$$

となる．重み関数 $\exp(iS_{\mathrm{GF}}[f])$ としてガウス関数 $\exp\left(i\int d^4x(-1/2\alpha)f^a(x)f^a(x)\right)$ をとれば，この肩の上の作用 $S_{\mathrm{GF}}[\partial^\mu A_\mu]$ は，QED 以来良く使われてきた Fermi 項の Lagrangian $-(1/2\alpha)(\partial^\mu A^a_\mu)^2$ を与え，したがって，特に $\alpha = 1$ の時は一番簡単な Feynman ゲージを実現する．

Feynman ルールをさらに読み取りやすくするために，FP 行列式 (22) を書きかえよう．付録の公式 (A5) により，一般にデルタ汎関数 $\prod_{x,a}\delta(X^a(x))$ が，新しい積分変数（関数）$\bar{\theta}^a(x)$ を導入して指数関数の積分

$$\prod_{x,a}\delta(X^a(x)) = \int \mathcal{D}\bar{\theta}\exp\Big(i\int d^4x\,\bar{\theta}^a(x)X^a(x)\Big)$$

に書けることを用いれば，FP 行列式 (22) は

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\bar{\theta}\,\exp\Big(i\int d^4x\,\bar{\theta}^a(x)\partial^\mu D_\mu\theta^a(x)\Big)$$

と書ける．指数関数の肩の量は，$\theta^a(x)$ をスカラー場，$-\bar{\theta}^a(x)$ をそれに「共役な」スカラー場と見なせば，場の理論の通常のボソン場の作用の形をしている．ところが遷移振幅 T に実際に必要なのは，逆数 $\Delta^{-1}[A]$ ではなく，$\Delta[A]$ なのである．幸いなことに，それは単にここでの $\theta^a(x)$ と $\bar{\theta}^a(x)$ を，普通の実数ではなく，反可換な数 =Grassmann 数と考え直すだけで良いこと，場の理論の言葉では，単にボソン場 $\theta^a(x), \bar{\theta}^a(x)$ をフェルミオン場と考え直すだけで良いこと，が知られていた．（実際，Grassmann 数の積分は電子などのフェルミ統計に従う場に対して経路積分表式を得るために考えられていた[6]．）Grassmann 数に置き換えた $\theta^a(x)$ と $\bar{\theta}^a(x)$ の場を，区別して $c^a(x)$ と $\bar{c}^a(x)$ と記せば，

$$\Delta[A] = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\ \exp\Big(iS_{\rm FP}[c,\bar{c},A]\Big)$$

$$S_{\rm FP}[c,\bar{c},A] \equiv \int d^4x\, \bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c^a(x)$$

と書ける．$c^a(x), \bar{c}^a(x)$ を（スカラーの）フェルミオン場として扱うことは，Feynman ルールで言えばさらに単純で，この粒子のループグラフの一つずつにボソン場の場合に比べて余分な -1 の符号を付けるだけの違いである．このフェルミオン場 $c^a(x)$ と $\bar{c}^a(x)$ は，Faddeev-Popov (FP) ゴースト場，FP 反ゴースト場，と呼ばれる．

結局遷移振幅は

$$\begin{aligned} T &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\ \Psi_{\rm f}^*\Psi_{\rm i}\ \exp\big(iS_{\rm full}[A,c,\bar{c}]\big) \\ S_{\rm full} &= S[A] + S_{\rm GF}[\partial A] + S_{\rm FP}[A,c,\bar{c}] \\ &= \int d^4x\Big(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \\ &\qquad + \bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c^a(x)\Big) \quad (24) \end{aligned}$$

で与えられることがわかった．ゲージ固定項も，それに対応する FP 行列式も，今や全てが,「普通」の Lorentz 共変な Lagrangian 密度の作用積分の形で書けているので，そこから Feynman ルールを読み取ることができる．特に，ゲージ場の 2 次項は，前に説明したように，ゲージパラメータ α が 1 の時に $(1/2)A^\mu\eta_{\mu\nu}\Box A^\nu$ となって，特に簡単な Feynman ゲージのゲージ場のプロパゲータ (11) となる．この任意の α の共変ゲージの場合，FP ゴースト場の Lagrangian 密度は，あらわには

$$\mathcal{L}_{\rm FP} = \bar{c}^a(x)\Big(\Box c^a(x) + gf_{abc}\partial^\mu\big(A^b_\mu(x)c^c(x)\big)\Big)$$

と書けるので，運動量表示のプロパゲータが $1/p^2$，ゲージ場との相互作用頂点 $\bar{c}^a(p_1)A^b_\mu(p_2)c^c(p_3)$ には，因子 $-g\,f_{abc}p_1^\mu$ を付与し，フェルミオン場なのでループ毎に -1 を付ける，という Feynman ルールが即座に読み取れる．Feynman が見つけた 1-loop で入れるべき仮想的粒子とは，この FP ゴーストだったわけで，今やこの Lagrangian で任意ループが計算出来る．

Feynman が既に指摘していることであるが，ここで，なぜ量子電気力学 QED の場合に，この FP ゴーストを入れなくて良かったのかの理由がわかる．それは，QED の $U(1)$ ゲージ理論の場合は，生成子が 1 成分（群の添え字 a が不要）なので完全反対称な構造定数 f_{abc} が 0 ゼロであり，フォトンは電荷を持たず自己相互作用しない．FP ゴーストも電荷を持たずフォトンと相互作用しないので全くの自由場となり，初期状態に存在しなければ，永久に生成されず，その存在を忘れていても理論のユニタリー性には全く影響しなかった，という訳である．

4. BRS 対称性

このようにして得られた共変ゲージの (24) 式の作用積分 $S_{\rm full}[A,c,\bar{c}]$ と経路積分表式に基づき，非可換ゲージ理論は 't Hooft を初めとする人々により，くり込み可能性やユニタリー性の証明，さらには，漸近自由性の発見など大きく発展させられた．ところがその発展が一息ついた頃，Becchi(ベッキ), Rouet(ルエ), Stora(ストラ) の 3 人は，(24) の作用 $S_{\rm full}[A,c,\bar{c}]$ がある奇妙な大域的変換の下で不変であることに気づいた[7)]．この変換は，変換パラメータが反可換な Grassmann 数であり，2 回続けて行うと 0 になる（べき零性）という特殊な性質を持つ（超対称性タイプの）もので，今日 BRS 変換と呼ばれている．BRS 対称性は，それに先行していたゲージ固定処方，くりこみ可能性・ユニタリー性の証明を簡略化したのみならず，従来，経路積分定式化でしか不可能と思われていたゲージ理論の量子化，すなわちローレンツ共変な演算子定式化[8)]，を可能にし，ゲージ理論の構造全般に関し透徹した理解を与える出発点になったものである．

BRS 対称性のべき零性を明白にするため，作用 $S_{\rm full}$ のゲージ固定部分 $S_{\rm GF}[\partial A]$ を, 中西-Lautrup 場[9)] と呼ばれる新たな場 $B^a(x)$ を導入して

$$-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \ \to\ \frac{\alpha}{2}B^aB^a + B^a\partial^\mu A^a_\mu$$

と置き換える．この置き換えをしても，B^a に関して先に経路積分すれば,（あるいは同じ事だが，B^a

変分で出る運動方程式 $\alpha B^a + \partial^\mu A_\mu^a = 0$ を用いて代数的場 B^a を消去すれば,）元の表式に戻るので，初めのゲージ固定項との等価性は明らかである．すなわち，我々の場の理論の全系の Lagrangian 密度は，今や次の形となる：

$$\mathcal{L}_{\text{full}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} + \frac{\alpha}{2}B^aB^a + B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c^a(x) \quad (25)$$

BRS 変換は，先ず元のゲージ場（や他の物質場）に対しては，無限小ゲージ変換のパラメータ $\theta^a(x)$ を Grassmann 数パラメータ λ と FP ゴースト場 $c^a(x)$ の積で置き換え[*4)]

$$\theta^a(x) \quad \to \quad \lambda c^a(x)$$

とすれば得られる:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{B}}(\lambda)A_\mu(x) &= \lambda(\partial_\mu c^a + g\, f_{abc}A^b_\mu c^c)\\ &= \lambda D_\mu c^a(x).\end{aligned}$$

Grassmann 数 λ が BRS 変換の x に依らない変換パラメーターである．元の局所ゲージ変換パラメータ $\theta^a(x)$ の x-依存性は FP ゴースト場 $c^a(x)$ に引き継がれた訳だ．パラメータ λ を外したフェルミ的 BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}$ を，$\delta_{\text{B}}(\lambda) = \lambda\,\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}$ で定義する．そうすると，上式は，行列表示（$A_\mu \equiv \sum_a A^a_\mu T^a, C = \sum_a c^aT^a$）で

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}A_\mu = \partial_\mu C - ig[A_\mu(x), C(x)] = D_\mu C(x)$$

と書ける．この変換量 $D_\mu C$ をもう一度変換した量 $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}(D_\mu C) = D_\mu(\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}C) - ig\{D_\mu C, C\}$ が零になるよう（すなわち BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}$ が**べき零性** $(\boldsymbol{\delta}_{\text{B}})^2 = 0$ を持つ様）FP ゴースト場の変換 $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}C$ を決めると，$\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}C = igC^2$．成分表示に戻して，

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}c^a(x) = -\frac{1}{2}g\, f_{abc}c^b(x)c^c(x)$$

と決まる．FP 反ゴースト場 $\bar{c}^a$ の変換は，中西-Lautrup 場 B^a のマイナスと定義すると，べき零性の要求から中西-Lautrup 場の変換は 0 となる：

$$\delta_{\text{B}}\bar{c}^a(x) = -B^a(x), \quad \delta_{\text{B}}B^a(x) = 0\ .$$

これで全ての場の BRS 変換が定義されたが，この変換の下で上の全系の Lagrangian (25) が不変性を満たすことは，すぐわかる．先ず，元のゲージ不変 Lagrangian 部分 $-(1/4)F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ は，BRS 変換が $\theta^a(x) = \lambda c^a(x)$ をパラメータとする特殊なゲージ変換に過ぎないことから自明である．さらに，残りのゲージ固定項と FP ゴースト項の部分は，その和がある量の BRS 変換の形に書けるということから従う．実際，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\Big(-\bar{c}^a(x)\left(\partial^\mu A^a_\mu(x) + \frac{\alpha}{2}B^a\right)\Big)\\ &\quad = B^a\left(\partial^\mu A^a_\mu(x) + \frac{\alpha}{2}B^a\right) + \bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c^a(x)\end{aligned}$$

であり，ちょうど (25) のゲージ固定項と FP ゴースト項の和を与えている．（フェルミ的 BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}$ が，FP 反ゴースト $\bar{c}^a$ を飛び越して後ろを変換する時には負号 -1 が余分に付くことに注意.）したがって，BRS 変換のべき零性からその BRS 不変性は明白である．

この事は，逆にゲージ固定条件をもっと一般化する方法を教えてくれる．すなわち任意のゲージ固定関数 $\mathcal{F}^a(A, B, c, \bar{c})$ を持ってきて

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} = \boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\big(-\bar{c}^a\mathcal{F}^a(A, B, c, \bar{c})\big)$$

とすれば，望みのゲージ固定項 $B^a\mathcal{F}^a(A, B, c, \bar{c})$ と，それに対応する FP ゴースト項 $\bar{c}^a\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\mathcal{F}^a$ とが一挙に与えられるというわけである．しかも，実は，この方法の方が元の Faddeev-Popov の経路積分法によるゲージ固定法よりも一般的である．何故なら，後者では，FP(反) ゴースト場は，FP 行列式を書きかえるトリックで現れたので，必ず $\bar{c}$ と c の双一次形式だが，前者だと，ゲージ固定関数 $\mathcal{F}^a(A, B, c, \bar{c})$ 自体に FP ゴースト場 $c, \bar{c}$ を含んでいても良いから FP ゴースト場の高次項が出得るのである．

筆者は 1977 年小嶋泉氏と共に，経路積分法によって発見された FP ゴースト場とゲージ固定項

*4) 変換パラメータ θ^a は普通の数なので，λ が Grassmann 奇の量だということは，FP ゴースト場 c^a も Grassmann 奇でなければならないこと，したがってフェルミオン場であることと整合する．

を持つ (25) 式の Lagrangian から出発してそれまで不可能と思われてきた「正統的」場の理論の正準量子化の手続きでローレンツ共変な演算子定式化[8,10] (operator formalism) を与えることに成功した．その定式化で中心的役割を果たすのが，BRS 変換の生成子である BRS 電荷 Q_{B} であり，全状態空間から物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ を選び出す補助条件

$$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle = 0$$

である．演算子定式化の内容にこれ以上立ち入ることは，この特集号の範囲外なので，できないが，その後の超重力理論，弦理論，弦の場の理論など，あらゆるゲージ理論に経路積分法と共に，広範に適用されることとなった．経路積分法と演算子定式化はもちろん等価であるが，問題によりそれぞれに得手，不得手がある．例えば，演算子定式化では理論のユニタリー性は，ハミルトニアンがエルミートであり，BRS 電荷 Q_{B} がエルミートでべき零であれば，ほとんど自明に成り立つことがわかるが，経路積分法でそれを直接示すのはかなり難しい．逆に，経路積分法の方がずっと見通しが良い，という例も多い．今日では両者の方法を理解し，アタックする問題毎にどういう方法が有効かを見極めることが重要である．

A. 付録：デルタ（汎）関数の公式

Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ は，$x = 0$ 以外では常にゼロで，$x = 0$ でだけ（無限大の）値を持つ（超）関数で，任意の関数 $f(x)$ との積の積分は，

$$\int dx\, \delta(x-a)f(x) = \int dx\, \delta(x)f(x+a) = f(a)$$

を満たす．これをデルタ関数の定義としても良い．

x から $x' = ax$ への変数変換を考えれば，

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x) \qquad \text{(A1)}$$

は容易に示せる．これの n 成分変数 $\boldsymbol{x} = (x_i)$ の場合の n 次元デルタ関数 $\delta^n(\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{i=1}^n \delta(x_i)$ への一般化公式は，

$$\delta^n(A\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^n \delta\Big(\sum_j A_{ij}x_j\Big) = \frac{1}{\det A}\delta^n(\boldsymbol{x})\,. \qquad \text{(A2)}$$

$\det A$ は，$n \times n$ 行列 $A = (A_{ij})$ の行列式である．対角成分が a_i の対角行列 $A_{ij} = a_i\delta_{ij}$ の場合は，$\det A = a_1a_2\cdots a_n$ だから 1 成分の場合の公式 (A1) の自明な n 重の積に一致する．

またフーリエ変換で基本的な役割を果たす公式

$$\int \prod_i \frac{dp_i}{2\pi}\, \exp\Big(i\sum_{i=1}^n p_ix_i\Big) = \delta^n(\boldsymbol{x})\,. \qquad \text{(A3)}$$

は，左辺がデルタ関数 $\delta^n(\boldsymbol{x})$ の積分表示を与える，とも読むことができる．これらの公式は皆，離散添え字 i を連続変数 x に，変数 x_i を関数 $X(x)$ に，多重積分 $\prod_i dx_i$ を経路積分 $\mathcal{D}X = \prod_x dX(x)$ に，$\sum_i$ を $\int dx$ に，それぞれ置き換えれば，経路積分の場合の公式に読み替えられる．上の (A2) 式や (A3) 式の経路積分版は，$\mathcal{A}$ を関数 $X(x)$ に作用する（微分等の）演算子として

$$\prod_x \delta\big(\mathcal{A}X(x)\big) = \mathrm{Det}^{-1}\mathcal{A}\ \prod_x \delta\big(X(x)\big)\,, \qquad \text{(A4)}$$

$$\prod_x \delta\big(X(x)\big) = \int \mathcal{D}P \exp\Big(i\int dxP(x)X(x)\Big)\,. \qquad \text{(A5)}$$

参考文献

1) R. P. Feynman, Acta Phys. Polon. **24** (1963) 697.
2) B. S. DeWitt, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 742; Les Houches Lect. Notes **13** (1964) 585-820.
3) L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
4) V. N. Gribov, Nucl. Phys. B **139** (1978) 1.
5) G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33** (1971) 173, Appendix A.
6) Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. **60** (1978) 548.
7) C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Commun. Math. Phys. **42** (1975) 127 ; Annals Phys. **98** (1976) 287.
8) T. Kugo and I. Ojima, Phys. Lett. **73B** (1978) 459; Prog. Theor. Phys. Suppl. **66** (1979) 1.
9) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **35** (1966) 1111; Prog.Theor.Phys.Suppl. 51 (1972) 1-95.
10) 九後汰一郎：ゲージ場の量子論 I, 第 5 章（培風館 1989）.

（くご・たいちろう，京都産業大学益川塾）