Lie 群の表現（例外群）

九後汰一郎 〈京都大学理学部物理学教室 606 京都市左京区北白川追分町〉

1.

一昔前までは，素粒子論の分野に於いて，例外群など全くお目にかからなかったし，それらについて知っている人はごく少数の数学好きのみであったろう．しかし，70年代の後半頃から，強・弱・電磁相互作用統一理論のゲージ群として SU(5),[1] SO(10)[2] に続いて例外群 E_6[3] の可能性が真剣に検討されたり，極大 ($N=8$) 超重力理論が非コンパクト例外群 $E_{7(+7)}$ の対称性を持つ事が発見される[4]など，少し事情が異なってきた．更に最近では，超対称弦理論の展開の中で，例外群中最大の E_8 が self-dual root lattice を持つ（E_8 の単純根の張る 8 次元格子空間がその逆格子空間と同型である）という顕著な性質に基づいて，混成弦 (heterotic string) の理論[5]が構成されるなど，ますます例外群が重要になりつつある．

何故，例外群（特に E 系列の E_6, E_7, E_8）が素粒子論に関係してくるのか？ 多分深淵な理由があるのであろうが，残念ながら筆者には良くわからない．ただ，統一理論に関連した所で例外群がどう関係してくるかについて少し説明しておきたい．

先ず，我々の世界にはクォーク・レプトンが 3 世代分存在して，各世代は質量が異なるのみで他は全く同じ性質の次の構成要素から成ることを思い出そう：各世代で，i) クォークは，その左手型・右手型ワイル (Weyl) 成分両方に対し，up および down の 2 成分があり，それらがそれぞれ 3 色のカラー自由度を持つから，ワイル成分の個数で数えて，$2\times2\times3=12$ 個存在する．ii) レプトンは，左手型・右手型両成分を持つ荷電レプトンと，左手型成分のみのニュートリノから成るから，$2+1=3$ 個ワイル成分がある．これら（一世代当り）都合15個のワイル成分は，強い相互作用のカラー $SU(3)_c$，弱い相互作用の $SU(2)_W$，電磁相互作用 $U(1)_{EM}$，の三つの対称性を統一した Georgi–Glashaw[1] の SU(5) 対称性の下で，**5***次元表現と**10**次元表現に同定される．更にこの可約表現 **5*****+10** を一つの既約表現にしたいという要求から，極めて重い"ニュートリノ"を一つ付け加えて**16**次元表現とし，これをSO(10)のスピノール表現と同定するのが SO(10) 大統一理論 (GUT) である．[2] Gürsey らは，クォーク閉じ込めとからめて，カラー $SU(3)_c$ 対称性を 8 元数 (octonion) の自己同型群 G_2 の部分群として理解したいという動機から $E_6\supset SU(3)\times SU(3)\times SU(3)$ に着目し，SO(10) の更なる拡張ゲージ群として初めて例外群 E_6を考察した．[3]

一方，これとは別の流れとして，クォーク・レプトンを準南部–ゴールドストーン (Nambu–Goldstone: NG) フェルミオンとする考え方がある．[6] すなわち，ある物理系の群 G の（大局的）対称性が部分群 H に自発的に破れる際，零質量のいわゆる NG ボソンが商空間 G/H の次元と同じ数だけ現れるという定理があるが，もし系に更に超対称性 (supersymmetry) があれば，これら NG ボソンの各々に必ず零質量フェルミオンの相棒が存在せねばならず，これを準 NG フェルミオンと呼ぶ．一般に，NG ボソンや準 NG フェルミオンは結合状態として供給されるので，クォーク・レプトンを準 NG フェルミオンと考える立場は，クォーク・レプトンが更に基本的な粒子の結合状態と考える複合模型の立場の一つである．そこで，例えば $G/H=E_7/SU(5)\times SU(3)\times U(1)$ を考えれば，この場合の NG ボソン，従って準 NG フェルミオンは，H の中の SU(5) の表現で言って (**5***+**10**) 表現が 3 組 (!) と **5** 表現が一つ現れる．[7] 前者は，まさに，クォーク・レプトンの 3 世代分とぴったりなのである．しかも，これらの NG ボソン・準 NG フェルミオンの相互作用 Lagrangian は，商空間 G/H がケーラー (Kähler) 多様体の場合一意的に決定されるのである．興味ある読者は文献 8〜10 を見られたい．

この稿の目的は，多分一般の物理の読者には未だ馴染みのない，この様な例外群およびその表現を解説することである．数学を良く知っている人ならば，恐らく 8 元数上の 3×3 ジョルダン (Jordan) 行列などを用いて例外群の美しい構造を手際よく紹介してくれるのだろう[11]けれど，ここでは，非常に散文的に，例外群とその表現の陽な構成法を紹介することにする．一言で言えば，例外群の極大部分群として我々（物理屋）の良く知っている古典群となるものを一つ選び，その古典極大部分群の表現を利用して例外群の構造を見，表現を作るという方法である．（こういう安

直かつ実践的な話なので，実は，ここ以降は数学の人には読んで欲しくない．）

5節がこの稿の本題であるが，リー群に関する術語や基本的概念のおさらいを2，3，4節で行う．それらを周知の読者は5節のみをお読み頂きたい．

2. リー(Lie)群（リー代数）の根と単純根

一般のリー群に関する基本的な数学の術語は最近では物理の文献にも現れるので，その便宜も考えて先ずそれらの簡単な定義から始めよう．[12] わかり易いように良く知っている3次元空間回転群 $SO(3) \simeq SU(2)$ の場合を対照しながら述べる．

空間回転 $SO(3)$ の元は，1, 2, 3 軸まわりの無限小回転の生成子（角運動量演算子）J_1，J_2，J_3 を用いて $\exp(\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\theta_i J_i)$ で与えられた．J_i は交換関係 $[J_i, J_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k$ を満たし，その線形結合の元 $X=\theta_i J_i$ 全体は，交換関係 $[X, Y]$ を掛算として代数（algebra 又は環）を成す．一般の Lie 群 G の場合も同様で，G の元 $g\in G$ は（少くとも単位元近傍では），いくつかの独立な生成子 (generators) X_1，$X_2, \cdots$，X_d を用いて $g=\exp(\mathrm{i}\sum_{i=1}^{d}\theta_i X_i)$ と表され，X_i は，

$$[X_i, X_j]=\mathrm{i}f_{ij}{}^k X_k \qquad (1)$$

の形の交換関係を満たす．独立な**生成子** $X_i (i=1,\cdots, d)$ の個数 d を群 G の**次元** $\dim G$ と呼び，X_i の線形結合の成す代数をリー群 G のリー代数 $\mathscr{G}$ と呼ぶ．［この稿では群の大局的構造には触れないので，群 G の表現と代数 $\mathscr{G}$ の表現を区別しないことにする．］

$\dim G$ 個の生成子 X_i のうち，互いに可換な（それ故同時対角可能な）最大の組が r 個の生成子 $(H_1, H_2, \cdots, H_r)$ で与えられる時，r を群 G の**階数** (rank G) と呼び，線形結合 $\sum_{i=1}^{r}\theta_i H_i$ の元の成す代数を $\mathscr{G}$ のカルタン (Cartan) 部分代数 $\mathscr{H}$（対応する群をカルタン部分群または極大輪環群）と呼ぶ．［SO(3) の例だと，階数は $r=1$ で，例えば J_3 がカルタン部分代数の生成子．］ $H\equiv(H_1, H_2, \cdots, H_r)$ は同時対角可能な演算子の最大の組であるから，G の任意の既約表現 R に属するベクトルの基底は，H の固有値 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r)$ で一意的にラベルされる；

$$H|\mu\rangle=\boldsymbol{\mu}|\mu\rangle. \qquad (2)$$

(1) の交換関係により，代数 $\mathscr{G}$ 自身 G の一つの表現（**随伴表現**と呼ぶ）の線形空間と見做せるから，$\mathscr{G}$ の基底＝独立な生成子も皆 H の同時固有ベクトルにとる事ができる．可換性により $H_i\in\mathscr{H}$ は全て零固有値を持つ；$[H, H_i]=0$. H_i 以外の独立な生成子は皆零でない固有値を持ち，固有値 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ に対応する生成子 X を E_α と記す：

$$[H, E_\alpha]=\boldsymbol{\alpha} E_\alpha. \qquad (3)$$

H_i を hermite にとっておくと固有値 $\boldsymbol{\alpha}$ は実であり，$\boldsymbol{\alpha}(\neq 0)$ は G の H_i 以外の生成子を一意的にラベルする．この H の固有値 $\boldsymbol{\alpha}(\neq 0)$ このとを群 G の根 (roots) と呼ぶ．(3) 式の hermite 共役をとれば，$[H, E_\alpha^\dagger]=-\boldsymbol{\alpha} E_\alpha^\dagger$ が従うから $E_\alpha^\dagger$ は根 $-\boldsymbol{\alpha}$ に対応する生成子 $E_{-\alpha}$ である．生成子の規格化を，N をある定数として*

$$\mathrm{tr}(H_i, H_j)=N\delta_{ij}, \quad \mathrm{tr}(E_\alpha^\dagger E_\beta)=N\delta_{\alpha\beta} \qquad (4)$$

で行えば，任意の E_α と $E_{-\alpha}=E_\alpha^\dagger$ に対し，

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=\boldsymbol{\alpha}\cdot H \qquad (5)$$

が従う事は，$[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ が H 固有値 $\mathbf{0}$ の量である事から容易にわかる．他の交換子 $[E_\alpha, E_\beta]$ も，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ が G の根でなければ零，根であれば $E_{\alpha+\beta}$ に比例し，比例係数は (4) の規格化条件やヤコビ (Jacobi) 恒等式 $[A, [B, C]]+\text{cyclic}=0$ を使って決められる．(3)〜(5) で与えた $\mathscr{G}$ の基底 $(H_i, E_\alpha, E_{-\alpha})$ を**カルタン-ワイル基底**と呼ぶ．［SO(3) の例では，$J_\pm\equiv(J_1\pm \mathrm{i}J_2)/\sqrt{2}$ とすれば，$[J_3, J_\pm]=\pm J_\pm$ だから，根は ± 1 で，$H=J_3$，$E_{+1}=J_+$，$E_{-1}=J_-$ がカルタン-ワイル基底を与える．］結局，G の根全体 $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ がわかれば，G の生成子全体＝カルタン-ワイル基底 $(H_i, E_\alpha, E_{-\alpha})$ が対応し，その代数が一意的に求まることになる．

r 次元ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ に対し，その成分を v_1 から v_r 迄順に見て行った時，初めての零でない成分が正なら $\boldsymbol{v}>0$，負なら $\boldsymbol{v}<0$ と記す．また $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}>0$ なら $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{w}$ より大きいと言う．G の根 $\boldsymbol{\alpha}$ のうち，$\boldsymbol{\alpha}>0$ のものを**正根** (positive roots)，$\boldsymbol{\alpha}<0$ のものを負根と呼ぶ．（G の負根は，正根と1対1対応しており，全て正根の逆符号で与えられる．）全ての G の正根の中で，他の正根の和では決して書けないものを**単純根** (simple roots) と定義する．この定義から直ちに，G が半単純群（semi-simple group: U(1) 不変部分群を含まない群）の場合，次の事が従う．[12]

i) 単純根は，$r(=\text{rank } G)$ 個存在し互いに独立である．これを $\boldsymbol{\alpha}_i (i=1, 2, \cdots, r)$ と記す．

ii) 任意の正根 $\boldsymbol{\alpha}>0$ は，この単純根 $\boldsymbol{\alpha}_i$ を用いて

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{r} n_i\boldsymbol{\alpha}_i \quad (n_i \text{ は}\underline{\text{全て}}\text{非負の整数}) \qquad (6)$$

の形に書ける．

*(4) 式での H_i や E_α はある（任意の忠実な）表現での表現行列と解する．H の固有値の異なる生成子は勿論直交する事に注意．

3. 単純群のディンキン (Dynkin) 図，既約表現の基本系

群 G は，非自明な不変部分群 H （$H\neq G$, $\{1\}$ で $\forall g\in G$ に対し $gHg^{-1}\subset H$ となるもの）を含まない時，**単純群**と呼ばれる．以後，単純リー群 G に話を限る．

今，G の任意の既約表現 R に於いて，その表現空間 V の中のある $\boldsymbol{H}$ 固有ベクトル (2), $\boldsymbol{H}|\mu\rangle=\boldsymbol{\mu}|\mu\rangle$, を持ってこよう．一般に数学ではこの固有値 $\boldsymbol{\mu}$ のことを，表現 R の**重み** (weights) と呼ぶ．（随伴表現の場合の零以外の重みを特に根と呼んでいる訳である．）このベクトル $|\mu\rangle$ に対し，G の任意の一つの正根 $\boldsymbol{\alpha}$ （単純根でなくてよい）に対応する生成子 E_{α}, およびその hermite 共役 $E_{\alpha}^{\dagger}=E_{-\alpha}$, を繰り返し演算すれば次の系列が得られる：

$$|\mu\rangle \begin{array}{l} \xrightarrow{E_\alpha} |\mu+\alpha\rangle \xrightarrow{E_\alpha} |\mu+2\alpha\rangle \xrightarrow{E_\alpha} \cdots \xrightarrow{E_\alpha} |\mu+p\alpha\rangle \xrightarrow{E_\alpha} 0 \\ \xrightarrow[E_\alpha^\dagger]{} |\mu-\alpha\rangle \xrightarrow[E_\alpha^\dagger]{} |\mu-2\alpha\rangle \xrightarrow[E_\alpha^\dagger]{} \cdots \xrightarrow[E_\alpha^\dagger]{} |\mu-q\alpha\rangle \xrightarrow[E_\alpha^\dagger]{} 0, \end{array} \tag{7}$$

$$|\mu+k\alpha\rangle\equiv\begin{cases}(E_\alpha)^k|\mu\rangle & k=1,2,\cdots,p\\ (E_\alpha^\dagger)^{|k|}|\mu\rangle & k=-1,-2,\cdots,-q\end{cases} \tag{8}$$

(3) の交換関係により，$E_\alpha(E_\alpha^\dagger=E_{-\alpha})$ は $\boldsymbol{H}$ の固有値を $\boldsymbol{\alpha}$ だけ上げる（下げる）演算子であるから，(8) の $|\mu+k\alpha\rangle$ は $\boldsymbol{H}$ の固有値が $\boldsymbol{\mu}+k\boldsymbol{\alpha}$ の固有状態である：

$$\boldsymbol{H}|\mu+k\alpha\rangle=(\boldsymbol{\mu}+k\boldsymbol{\alpha})|\mu+k\alpha\rangle,\ -q\leqq k\leqq p. \tag{9}$$

この系列は，(7) に示した様に両端で切れねばならない；すなわち，$^{\exists}p$, $^{\exists}q$ (非負の整数）で

$$E_\alpha|\mu+p\alpha\rangle=0,\quad E_\alpha^\dagger|\mu-q\alpha\rangle=0 \tag{10}$$

となる．何故なら，交換関係 (3), (5) より

$$J_3\equiv\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{H}/|\alpha|^2,\quad J_+\equiv E_\alpha/|\alpha|,\quad J_-\equiv E_{-\alpha}/|\alpha| \tag{11}$$

が SO(3) 角運動量代数を満たす事がわかり，(7) の系列のベクトル $\{|\mu+k\alpha\rangle\}$ はその既約表現を与え，SO(3) の任意の（ユニタリ）既約表現は有限次元でなければならないからである．SO(3) の既約表現の最大・最小固有値は $\pm j$ (j: 整数又は半整数）でなければならないから，$J_3|\mu+k\alpha\rangle=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\mu}+k\boldsymbol{\alpha})/|\alpha|^2|\mu+k\alpha\rangle$ に注意して，(7) より

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\mu}+p\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}=+j,\quad \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\mu}-q\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}=-j \tag{12}$$

が従う．両式を辺々加えて

$$2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu}/|\boldsymbol{\alpha}|^2=-(p-q)\quad (^{\exists}p,\ ^{\exists}q\text{: 非負の整数}) \tag{13}$$

を得る．これは任意の表現の重み $\boldsymbol{\mu}$ が，任意の G の正根 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して満たさねばならない条件式である．

特に，随伴表現を考え，$|\mu\rangle$ として E_β を採れば，

表 1

	θ	長さ比	ディンキン記号
$p=0\ (p'=0)$	90°	決まらない	α β ○ ○
$p=1\ (p'=1)$	120°	$\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert$	α β ○—○
$p=2\ (p'=1)$	135°	$\sqrt{2}\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert$	α β ○⇐○
$p=3\ (p'=1)$	150°	$\sqrt{3}\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert$	α β ○⇚○

$$2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}/|\alpha|^2=-(p-q) \tag{14}$$

なる関係式が，任意の 2 根 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ に対して得られることになる．殊に，$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ が単純根の場合には，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ は根ではない（(6) に注意！）から，$q=0$ であり

$$-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}/|\alpha|^2=p\quad (p\text{: 非負の整数}) \tag{15}$$

となる．同様に $-2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}/|\beta|^2=p'$ も成立つから

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}/|\alpha||\beta|=-\sqrt{pp'}/2,\quad |\beta|/|\alpha|=p/p' \tag{16}$$

を得る．これより，任意の二つの単純根 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}(\neq\boldsymbol{\alpha})$ のなす角度 $\cos\theta=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}/|\alpha||\beta|$ と長さの関係は，表 1 に示した 4 通りの場合（または $\alpha\leftrightarrow\beta$ を入れ換えた場合）しか無い事がわかる．この関係は，表 1 の最後の欄に示した様に，単純根に白丸を対応させ，その間を p 本の線でつなぐ，という約束で図示できる．これを Dynkin の記号と言う．

群 G の $r(=\mathrm{rank}\ G)$ 個の単純根 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ の間の全ての関係を Dynkin の記号で表したものを**ディンキン図**と呼ぶ．いくらかの考察の後，単純群のディンキン図は，図 1（で 2 重丸◎とそれから出る線を除いた図）に示した形のものしか無い事がわかる．[12] 初めの四つのタイプ A_n, B_n, C_n, D_n は，群 G の階数 $r=n$ が任意の値をとれる∞個のシリーズで，古典群の特殊ユニタリ群 SU($n+1$), 固有直交群 SO($2n+1$), ユニタリ・シンプレクティック群 Sp(n)＝USp($2n$), および（固有）直交群 SO($2n$) にそれぞれ対応する．他の五つ E_6, E_7, E_8, F_4, G_2（添字は階数）が，本稿の目的である**例外群**である．

図 1 には，単純根（1 重丸）以外に，群 G の最高の根 $\boldsymbol{\theta}$ （随伴表現中の最大の $\boldsymbol{H}$ 固有値）の逆符号のもの $-\boldsymbol{\theta}$ （すなわち最低の根）を 2 重丸◎で示し，他の単純根との関係を Dynkin 記号を準用して示してある．この 2 重丸まで含めた図形を**拡大ディンキン図**と呼ぶ．

ある既約表現 R の重み（$\boldsymbol{H}$ 固有値）のうち最大のものを，R の**最高の重み** (highest weight) と呼ぶ，最高の重み $\boldsymbol{\mu}$ が

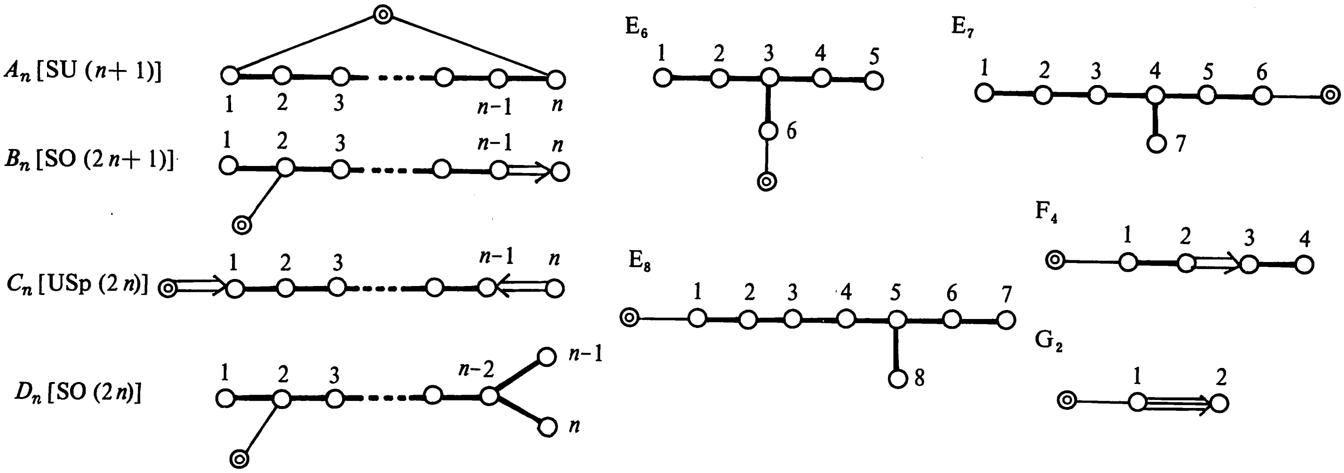

図1 単純群の拡大ディンキン図（太線部はディンキン図）.

与えられると，その状態$|\mu\rangle$ (highest weight state)

$$H|\mu\rangle=\boldsymbol{\mu}|\mu\rangle,\quad \forall\text{正根}\,\boldsymbol{\alpha}\,\text{に対し}\,E_\alpha|\mu\rangle=0, \tag{17}$$

に対し次々降演算子 (lowering operators: 負根$-\boldsymbol{\alpha}<0$に対応する任意の生成子) $E_{-\alpha}=E_\alpha^\dagger$を掛けてゆけば，その既約表現$R$に属する全ての状態が得られるから，既約表現$R$はその最高の重み$\boldsymbol{\mu}$で一意的に指定することが出来る.

最高の重み$\boldsymbol{\mu}$は，(10), (17) より$p=0$であるから，(13) 式により$2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu}/|\alpha|^2={}^{\exists}q$の条件を任意の正根$\boldsymbol{\alpha}$に対して満たさねばならない. これは，$G$の$r$個の単純根$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,\cdots,r)$に対して

$$2\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\mu}/|\alpha_i|^2=q_i\ (q_i\text{: 非負の整数}) \tag{18}$$

の条件と等価で，逆に，(18) のr個の非負整数の組$(q_1, q_2,\cdots,q_r)$により最高の重み$\boldsymbol{\mu}$を指定する事ができる. 実際，単純根$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$は$r$次元ベクトル空間の完全系を張るから，それに対して

$$2\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\mu}_j/|\alpha_i|^2=\delta_{ij} \tag{19}$$

の意味で双対な基底$\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r\}$が一意的に定まり，(18) を満たす最高の重み$\boldsymbol{\mu}$はこの基底$\boldsymbol{\mu}_i$を用いて

$$\boldsymbol{\mu}=q_1\boldsymbol{\mu}_1+q_2\boldsymbol{\mu}_2+\cdots+q_r\boldsymbol{\mu}_r \tag{20}$$

と表される. よって，$(q_1, q_2,\cdots,q_r)$で最高の重み$\boldsymbol{\mu}$が与えられ，Gの既約表現Rが指定できる. このr個の非負整数の組$(q_1, q_2,\cdots,q_r)$を既約表現Rの**ディンキン・ラベル**と呼ぶ. (19) のベクトル$\boldsymbol{\mu}_i$を最高の重みとする既約表現R_i $(i=1, 2,\cdots,r)$ [ディンキン・ラベルが$(0, 0,\cdots,1, 0,\cdots,0)$の形のもの] を$G$の**既約表現の基本系**，又は単に**基本表現** (fundamental representations)，$\boldsymbol{\mu}_i$を**基本の重み** (fundamental weights) と呼ぶ. それは (20) 式により，一般の$\boldsymbol{\mu}$を最高の重みとする既約表現Rが，各基本表現R_iをq_i重用いたテンソル積表現で作れることがわかるからである.

我々に馴染みの古典群で，既約表現の基本系を例示する：$\mathrm{SU}(n)=A_{n-1}$の場合，ディンキン・ラベル$(1, 0,\cdots,0)$ [最高の重み$\boldsymbol{\mu}_1$] の既約表現R_1は，良く知られたn成分 (複素) ベクトルϕ^i $(i=1, 2,\cdots,n)$ 上の (定義表現とも呼ばれる) 表現で，ディンキン・ラベル$(0, 0,\cdots,\overset{j}{1}, 0,\cdots,0)$ [最高の重み$\boldsymbol{\mu}_j$] の既約表現R_jは，j階完全反対称 (複素) テンソル$\phi^{[i_1i_2\cdots i_j]}$上の表現である. $\mathrm{SO}(2n)=D_n$の時は，$(1, 0,\cdots,0)$ [$\boldsymbol{\mu}_1$] の既約表現R_1は，$2n$成分実ベクトル$x^i(i=1, 2,\cdots,2n)$ 上の表現であり，$(0, 1, 0,\cdots,0)$ [$\boldsymbol{\mu}_2$] から$(0, 0,\cdots,1, 0, 0)$ [$\boldsymbol{\mu}_{n-2}$] 迄の既約表現R_j $(2\leqq j\leqq n-2)$ は，j階完全反対称実テンソル$x^{[i_1i_2\cdots i_j]}$上の表現である. $(0,\cdots,0, 1, 0)$ [μ_{n-1}] および$(0,\cdots,0, 1)$ [μ_n] は，いわゆる (カイラル) スピノール表現である.

4. 既約表現の構成法，次元，テンソル積，分岐則

単純群Gのディンキン図が与えられれば，そのr個の単純根$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$の間の“内積”$2\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j/|\alpha_i|^2$が決まり，(6) の形をしている他の全ての正根$\{\boldsymbol{\alpha}\}$を (14) の関係式および (7) を考慮して求める事ができる. [例えば，$-2\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2/|\alpha_1|^2=n$ならば，(14) より$p=n$, $q=0$ (単純根の差$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$は根でないから$q=0$) がわかり，(7) より，$\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1$ $(k=1, 2,\cdots,n)$ が正根である事がわかる. 求まった正根$\boldsymbol{\alpha}$に対して，更に“内積”$-2\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}_i|^2=p-q$を計算し，次々に別の正根$\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}_i$ $(-q\leqq k\leqq p)$ を求めてゆく.[12]

ディンキン・ラベル$(q_1, q_2,\cdots,q_r)$の既約表現Rに属する全ての状態も，原理的には，最高の重み$\boldsymbol{\mu}=\sum q_i\boldsymbol{\mu}_i$の状態$|\mu\rangle$から出発して，次々と降演算子$E_{\alpha_i}^\dagger=E_{-\alpha_i}$ ($\boldsymbol{\alpha}_i$は単純根のみで充分) を演算し，(13) の関係式および (7) を考慮して求めてゆくことができる. また，二つの既約表現R_1, R_2のテンソル積$R_1\times R_2$を，既約表現の直和に分解すること

表 2　F_4, E_8 の既約表現の次元とテンソル積既約分解の例.

群	既約表現の次元（ディンキン・ラベル），テンソル積の既約分解
F_4	26(0001), 52(1000)［随伴表現］, 273(0010), 324(0002), 1053(1001), 1053′(2000), 1274(0100),･･･ $26\times26=1+26+52+273+324$ $52\times26=26+273+1053$
E_8	248(00000010)［随伴表現］, 3875(10000000), 27000(00000020), 30380(00000100), 147250(00000001), 779247(10000010),･･･ $248\times248=1+248+3875+27000+30380$ $3875\times248=248+3875+30380+147250+779247$

$$R_1\times R_2=\sum_i R_i \tag{21}$$

も，角運動量合成則の時と同様に次の様にやれる：R_1, R_2 の重み全体を $\{\boldsymbol{\mu}_{(1)}\}$, $\{\boldsymbol{\mu}_{(2)}\}$ とすれば，テンソル積空間 $R_1\times R_2$の重みは $\{\boldsymbol{\mu}_{(1)}+\boldsymbol{\mu}_{(2)}\}$ であり，その中で最高の重みを採り，それに対応する既約表現に属する重み全体を上の方法で見付け，それらを $\{\boldsymbol{\mu}_{(1)}+\boldsymbol{\mu}_{(2)}\}$ から除く．次に残った重みの組から最高の重みを採り出し，再びそれに対応する既約表現の重み全体を更に除く，等々．同様な方法で，G の一つの既約表現 R を，G のある部分群 H の既約表現 $R_i^{(H)}$ に直和分解すること

$$R=\sum_i R_i^{(H)} \tag{22}$$

もできる．(22) は分岐則 (branching rule) と呼ばれる．

これらは，しかし，原理的な話で，実際にはもっと要領の良い方法が知られている．例えば，$\boldsymbol{\mu}$ を最高の重みとする既約表現の次元 $d(\mu)$ は，次の有名な Weyl の公式

$$d(\mu)=\prod_{\alpha\in\text{正根}}\frac{(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\delta})\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\alpha}} \tag{23}$$

で容易に求まる．ただし $\boldsymbol{\delta}$ は (19) の基本の重み $\boldsymbol{\mu}_i$の和 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2+\cdots+\boldsymbol{\mu}_r$である．テンソル積の既約分解 (21) に対しても，次元の間の条件式 $d(R_1)\cdot d(R_2)=\sum_i d(R_i)$ や，カシミア演算子の値（これに対しても (23) の様な公式がある）の間の条件式などを用いた決定法がある．ここでは詳細に立入らないが，その様な方法で，単純群の種々な表現の次元，テンソル積の既約分解 (21)，分岐則 (22)，が計算機を用いて計算されており，表にして刊行されている.[13, 14] ここでは，後の利用も考えて，例外群 F_4, E_8に対するほんの一例を表2, 表3に引用しておこう．

5. 例外群の代数と表現

物理での実際の応用に於いては，群の代数や表現に関して，もっと具体的でかつ扱い易い表示が必要となる．古典群の場合には，もともと行列群として知られていた由来からして，ベクトルや既約テンソルで容易に表現することができたし，物理でも主にその方法が採られてきた．

表 3　F_4, E_8 の部分群 SO(9), SU(9) による分岐則の例.

$F_4\supset SO(9)$	$26=1+9+16$ $52=16+36$ $273=9+16+36+84+128$
$E_8\supset SU(9)$	$248=80(10000001)+84(00100000)+\overline{84}(00000100)$

表 4　例外群の正則極大部分群.

E_7	$E_6\times U(1)$, $SO(12)\times SU(2)$, $SU(6)\times SU(3)$, $[SU(4)]^2\times SU(2)$, $SU(8)$
E_8	$E_7\times SU(2)$, $E_6\times SU(3)$, $SO(10)\times SU(4)$, $[SU(5)]^2$, $SU(6)\times SU(3)\times SU(2)$, $SU(8)\times SU(2)$, $SO(16)$, $SU(9)$
F_4	$SU(2)\times USp(6)$, $[SU(3)]^2$, $SU(4)\times SU(2)$, $SO(9)$
G_2	$[SU(2)]^2$, $SU(3)$

例外群の代数を陽に求めるには，その**正則極大部分群** (regular maximal subgroup) で古典群になるものを見つけ，それに基づいて生成子を分類するのが多分最も簡単である．群 G の正則極大部分群というのは，G の極大部分群（それを含む群が G 以外にないもの）で，階数が G と同じ r のもの（従ってカルタン部分群を共有するもの）である．これは一意的ではないが，次の様な簡単な求め方が知られている：

拡大ディンキン図$\overline{\mathrm{D}}$から任意に（2重丸以外の）一つの頂点α_iを取り除いた図（$\overline{\mathrm{D}}/\alpha_i$と呼ぶ）が，極大正則部分群のディンキン図を表す．ただし，その図$\overline{\mathrm{D}}/\alpha_i$がもとのディンキン図 D と同じ形の場合は，D からα_iを除いた図 D/α_iの表す群と U(1) 群の直積が極大正則部分群と解する．

例として図1の E_6の場合にこの規則を適用すれば

$$E_6\begin{cases}\alpha_1\,(\text{又は}\,\alpha_5)\,\text{を除く} & \longrightarrow SO(10)\times U(1)\\ \alpha_2\,(\text{又は}\,\alpha_4\,\text{又は}\,\alpha_6)\,\text{を除く} & \rightarrow SU(6)\times SU(2)\\ \alpha_3\,\text{を除く} & \longrightarrow SU(3)\times SU(3)\times SU(3)\end{cases} \tag{24}$$

の3通りの正則極大部分群が得られる．同様にして他の例外群の場合に表4の結果が得られることを確かめられたい．

先ず例として，最大の例外群 E_8の代数を，その極大部分群 SU(9) に基づいて陽に求めて見よう．（勿論，どの極大部分群を用いるかは，その後どの部分群に分解してゆきたいかという物理的要求に応じて便利なものを選べば良い．）E_8の独立な生成子は 248 個あり（表2の E_8の随伴表現の次元），それらは部分群 SU(9) の生成子 $9^2-1=80$ 個と，それ以外の $248-80=168$ 個に分かれる．この 168 個は，SU(9) の表現になっていなければならない事を考えれ

ば，容易に3階反対称テンソル表現（ヤング(Young)図で$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$に対応）=**84**（$={}_9C_3$次元）とその複素共役表現$\overline{\mathbf{84}}$であると推測できる.* 実際これで正しい事は，直ぐ表3を見ても確められる.

そこで，SU(9)の生成子を$T_i^j(\sum_{i=1}^9 T_i^i=0,\ T_i^{j\dagger}=T_j^i)$, 3階反対称テンソルの生成子を$E_{ijk}$, その複素共役を$\overline{E}^{ijk}\equiv(E_{ijk})^\dagger$, と記す．添字$i, j$等は全て1から9迄走る．SU(9)の生成子の交換関係は，良く知っている様に

$$[T_i^j,\ T_k^l]=\delta_k^j T_i^l-\delta_i^l T_k^j \tag{25}$$

である．（T_i^jはSU(9)の9×9行列定義表現でi行j列のみ1, 他は0の行列に対応.）次に，SU(9)共変性から

$$\begin{aligned}&[T_i^j,\ E_{klm}]=\delta_k^j E_{ilm}+\delta_l^j E_{kim}+\delta_m^j E_{kli}-(1/3)\delta_i^j E_{klm},\\&[T_i^j,\ \overline{E}^{klm}]=-\delta_i^k \overline{E}^{jlm}-\delta_i^l \overline{E}^{kjm}-\delta_i^m \overline{E}^{klj}+(1/3)\delta_i^j \overline{E}^{klm}\end{aligned} \tag{26}$$

を直ぐに書き下せる．最後に，E_{ijk}, $\overline{E}^{ijk}$間の交換関係は，再びSU(9)共変性と対称性だけから

$$[E_{ijk},\ \overline{E}^{lmn}]=\delta_{ij}^{lm}T_k^n+\left\{\begin{matrix}\text{他}\ (ijk),\ (lmn)\ \text{巡回}\\ \text{置換で得られる8項}\end{matrix}\right\}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&[E_{ijk},\ E_{lmn}]=(1/3!)\varepsilon_{ijklmnopq}\overline{E}^{opq},\\&[\overline{E}^{ijk},\ \overline{E}^{lmn}]=-(1/3!)\varepsilon^{ijklmnopq}E_{opq},\end{aligned} \tag{28}$$

の形に決まる．ここで$\delta_{ij}^{kl}\equiv\delta_i^k\delta_j^l-\delta_i^l\delta_j^k$であり，$\epsilon_{ijklmnopq}$ ($=\varepsilon^{ijklmnopq}$; $\varepsilon_{123456789}=+1$) は，9階完全反対称SU(9)不変テンソルである．(27)の右辺全体にかかる係数は，生成子の規格化の条件(4)の要求により(5)式と比較して容易に1だとわかる．(28)の右辺の係数$\pm(1/3!)$はヤコビ(Jacobi)恒等式$[[E_{ijk},\ E_{lmn}],\ \overline{E}^{opq}]+\text{cyclic}=0$を見れば決まる．以上(25)〜(28)で$\mathrm{E}_8$の代数が陽に求められた．

もう一つ，直交群に基づいて行う方法を例示すべく，52次元の例外群F_4の代数を求めてみよう．F_4の極大部分群としてSO(9)を採り，その${}_9C_2=36$個の生成子を$T_{ab}(T_{ab}^\dagger=T_{ab}=-T_{ba},\ a,\ b=1,\ 2,\cdots,\ 9)$と記す．ここでも容易に推測できる様に，残りの$52-36=16$個の生成子はSO(9)の（実）スピノール表現$E_\alpha(\alpha=1,\ 2,\cdots,\ 2^{[9/2]}=16)$を張る（表3参照）．先ず$T_{ab}$は周知のSO(9)代数を満たす：

$$[T_{ab},\ T_{cd}]=\mathrm{i}(\delta_{ac}T_{bd}+\delta_{bd}T_{ac}-\delta_{ad}T_{bc}-\delta_{bc}T_{ad}). \tag{29}$$

またE_αがSO(9)スピノールである事から直ちに

$$[E_\alpha,\ T_{ab}]=(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta E_\beta. \tag{30}$$

ただし，σ_{ab}はスピノール上のT_{ab}の表現行列で，具体的には，（クリフォード(Clifford)代数）$\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\delta_{ab}$ ($\gamma_a^\dagger=\gamma_a$)を満たす，いわゆる$\gamma$行列$\gamma_a$ ($a=1,\ 2,\cdots,\ 9$: 16×16行列）を用いて

$$\sigma_{ab}=(1/4\mathrm{i})[\gamma_a,\ \gamma_b] \tag{31}$$

で与えられるものである．ここでSO(9)のスピノール表現は実(real)である事を想い起こしておこう．すなわち，

$$C\gamma_a C^{-1}=\gamma_a^T\ (a=1,\ 2,\cdots,\ 9),\quad C^T=C \tag{32}$$

を満たす行列C(charge conjugation matrix)が存在し，スピノールの生成子E_αは次の実条件を満たす：

$$(E_\alpha)^\dagger\equiv\overline{E}^\alpha=C^{\alpha\beta}E_\beta. \tag{33}$$

最後にE_α間の交換関係を$[E_\alpha,\ \overline{E}^\beta]$の形で書けば，SO(9)共変性と$(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta$の添字構造より一意的に

$$[E_\alpha,\ \bar{E}^\beta]=-\frac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta T_{ab} \tag{34}$$

の形となる．再び右辺の係数は(5)式に一致するように決めた．(29), (30), (34)がF_4の代数を与える．

随伴表現以外の表現も，本質的に同じ方法で極大部分群に基づいて陽に構成することができる．最後に例として，F_4の最低次元の基本表現**26**(0001)を上と同じ部分群SO(9)に基づいて構成してみよう．表3によれば，**26**のSO(9)による分岐則は**1**+**9**+**16**である．**9**は勿論SO(9)ベクトルx_a, **16**は上でも出てきたスピノールy_αで，**1**をzと記す．さすれば**26**表現のベクトルϕは

$$\phi=\begin{pmatrix}z\\x_a\\y_\alpha\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}a=1,\ 2,\cdots,\ 9\\ \alpha=1,\ 2,\cdots,\ 16\end{matrix} \tag{35}$$

と書ける．F_4の生成子T_{ab}, E_αのこのϕの上での表現行列は，再びSO(9)共変性のみから

$$\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}T_{ab}+\bar{\varepsilon}^\alpha E_\alpha\right)\phi=\begin{pmatrix}0 & 0 & v\bar{\varepsilon}^\beta\\ 0 & \theta_{ab} & u\bar{\varepsilon}^\delta(\gamma_a)_\delta{}^\beta\\ s\varepsilon_\alpha & t(\gamma_b)_\alpha{}^\delta\varepsilon_\delta & \dfrac{\mathrm{i}}{2}\theta_{cd}(\sigma_{cd})_\alpha{}^\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\x_b\\y_\beta\end{pmatrix} \tag{36}$$

の形に決まる．θ_{ab}, $\bar{\varepsilon}^\alpha$は，任意の実変換パラメータ，$\theta_{ab}{}^*=\theta_{ab}=-\theta_{ba}$, $\bar{\varepsilon}^\alpha=(\varepsilon_\alpha)^*=C^{\alpha\beta}\varepsilon_\beta$である．対角成分の係数はSO(9)回転の意味から自明．未定係数$s,\ t,\ u,\ v$に対し，(36)のE_α行列が交換関係(34)を満たすべしとの要求から

$$tu=-1/4,\qquad sv+5tu=-2 \tag{37}$$

の条件が出る．これを導く際，フィルツ(Fierz)恒等式

$$3\varepsilon_{1\alpha}\bar{\varepsilon}_2{}^\beta+(\gamma_a\varepsilon_1)_\alpha(\bar{\varepsilon}_2\gamma_a)^\beta-(1\leftrightarrow2)=2(\bar{\varepsilon}_2\sigma_{ab}\varepsilon_1)(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta \tag{38}$$

が必要である．更に，(35)の$z,\ x_a,\ y_\alpha$の相対的大きさを固定するため，例えば

$$z^2+x_a x_a+\bar{y}^\alpha y_\alpha \tag{39}$$

* A_n, D_n, E_6の様にディンキン図が非自明な対称軸を持っている場合のみ複素表現が存在する．それ故E_8は常に実表現であり，**84**があれば$\overline{\mathbf{84}}$も必ず含まれる．

が不変量である事を要請すれば（**26**×**26** が **1** を含む事に注意），$s=-v$, $t=-u$ の条件が出て，

$$s=-v=\sqrt{3}/2, \quad t=-u=1/2 \tag{40}$$

と決定される．他の E_6 や E_7 の例や応用については文献 9 を見て頂きたい．

参考文献

1) H. Georgi and S. L. Glashow: Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438.
2) H. Fritzsch and P. Minkowski: Ann. Phys. (USA) **93** (1975) 193.
3) F. Gürsey, P. Ramond and P. Sikivie: Phys. Lett. B **60** (1975) 177.
4) S. Cremmer and B. Julia: Nucl. Phys. B **159** (1979) 141.
5) D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm: Nucl. Phys. B **256** (1985) 253.
6) W. Buchmüller, S. T. Love, R. Peccei and T. Yanagida: Phys. Lett. **115** B (1982) 233. W. Buchmüller, R. Peccei and T. Yanagida: Nucl. Phys. B **277** (1983) 503.
7) T. Kugo and T. Yanagida: Phys. Lett. **134B** (1984) 313.
8) K. Itoh, T. Kugo and H. Kunitomo: Nucl. Phys. B **263** (1986) 295.
9) K. Itoh, T. Kugo and H. Kunitomo: Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 386.
10) M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki: Phys. Rep. **164** (1988) 217.
11) P. Ramond: *Introduction to Exceptional Lie Groups and Algebras, Erda Research and Development Report,* CALT-68-577 (1976). 伊勢幹夫，竹内　勝：Lie 群 I, 岩波講座基礎数学（岩波書店，1976）.
12) 物理屋に分かり易い Lie 群の教科書は，例えば H. Georgi: *Lie Algebras in Particle Physics,* (Benjamin/Cummings, 1982), R. Gilmore: *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications* (Wiley, 1974).
13) J. Patera and D. Sankoff: *Tables of Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras* (L'Université de Montréal, 1973). W. McKay and J. Patera: *Tables of Dimensions, Second and Fourth Indices and Branching Rules of Simple Algebras* (Dekker, 1980).
14) R. Slansky: Phys. Rep. **79** (1981) 1.

量子カオスと ζ 関数

戸田幹人　〈京都大学理学部物理第一教室　606 京都市左京区北白川追分町〉
足立　聡　〈京都大学理学部物理第一教室　606 京都市左京区北白川追分町〉
長谷川　洋　〈京都大学理学部物理第一教室　606 京都市左京区北白川追分町〉

近年，量子カオスと数論なかでもリーマン (Riemann) の ζ 関数との関連が注目されてきている．本解説では，この話題を簡単に紹介する．[1,2]

I．リーマン予想[3,4]

今，複素変数 s の関数 $\zeta(s)$ を (1) 式で定義する．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad \mathrm{Re}\, s>1, \tag{1}$$

$$=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} \qquad \mathrm{Re}\, s>1. \tag{2}$$

$\zeta(s)$ を全複素平面に解析接続したものをリーマンの ζ 関数という．$\zeta(s)$ は $s=1$ に 1 位の極を持つ以外は解析的である．(2) はオイラー (Euler) 積と呼ばれるもので，すべての素数 p にわたって積をとる．

オイラーは上の式から次の様にして素数が無限にある事の別証を与えた．$\zeta(s)$ に対して $s=1$ とおく．

$$\log\left(\sum_{n}\frac{1}{n}\right)=-\sum_{p}\log(1-p^{-1})=\sum_{p}\frac{1}{p} + (\text{収束する級数}). \tag{3}$$

左辺が発散する事から右辺の $\Sigma(1/p)$ が発散する事，即ち素数 p が無限にある事がわかる．さらに，

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p}\sim\log\log x \quad (x\to\infty) \tag{4}$$

から，素数の分布密度が $1/\log x$ である事が推測される．これは素数定理と呼ばれるもので，一見でたらめに見える素数の分布に統計的な規則性がある事を示す.* 後で述べる様に，素数定理に相当するものがカオス古典軌道の分布則にあり，これが ζ 関数と量子カオスの関連の露頭となっている．[5]

さて，リーマン予想とは次の未証明の命題を言う．

▶$\zeta(s)$ の自明でない零点は，すべて直線 $\mathrm{Re}\, s=1/2$ 上に存在する．

1859年，リーマンがこの予想を述べて以来，多くの数学者がその証明への努力を続けてきた．その中で，ヒルベルト (Hilbert)，ポーリャ (Polya) は次の様に考えた．[6] 今，$\zeta(s)$

* オイラーはこの事に気づかなかった．数値計算により，最初にこの事に気づいたのはガウス (Gauss) である．