

THE REPORT ON THE EXPERIMENT OF A2'(ACCELERATOR) COURSE IN 1997

Taro Naito

Yuji Asano

Takehiro Azuma

Naoki Osawa

Katuhiko Furuta

目次

レポートの分担 (太字は \TeX file 作成者)

- 第 1 章: 大澤直樹
- 第 2 章 (2.1-2.3) 大澤直樹, 古田勝彦
- 第 2 章 (2.4) 東 武大
- 第 2 章 (2.5) 東 武大, 内藤太郎
- 第 3 章 (3.1) 内藤太郎
- 第 3 章 (3.2.1) 浅野祐司, (3.2.2) 内藤太郎, (3.2.3) 東 武大
- 第 4 章 (4.1) 内藤太郎, 古田勝彦
- 第 4 章 (4.2) 東 武大
- 第 5 章 浅野祐司, 東 武大, 大澤直樹, 内藤太郎, 古田勝彦

Chapter 1

実験の概要

原子核物理や素粒子物理の研究には線形加速器、サイクロトロン、シンクロトロン、といったさまざまな荷電粒子加速器が利用されている。このうち線形加速器は、cavity(加速空洞)を直線状に並べ、荷電粒子を何度も加速することにより高エネルギーの粒子を得る装置である。私達の実験では、円筒形の加速空洞内に高周波を送り、この中に生じる電場によって電子を加速してその電子のエネルギーを測定する。これは、線形加速器の最も簡単な形と言える。この実験の測定結果とコンピュータによるシミュレーションとの比較も行なった。具体的に行なった実験は次の通りである。

- 加速空洞の Q 値とシャントインピーダンス測定
- 測定用 DC、ATT、LPF の製作
- 電子ビームの加速とそのエネルギー測定

Chapter 2

Cavity(加速空洞)

2.1 Cavity 内の電磁場

この実験で用いられた加速空洞は、図 2.1 に示されているものである。基本的には両端を導体で仕切られた銅製の円筒なので、簡単のため円筒形の空洞共振器内の電磁場を考える。

中心軸方向に z 軸をとり、cavity の長さを d 、半径を R とする。cavity 内部の電磁場が正弦的に時間変化するとき、定常的に存在できる電磁場は次の 2 種類である。

TM 波 cavity 内の磁場は常に中心軸方向に垂直である。電場の z 成分 (中心軸成分) E_z は

$$E_z(\rho, \phi) = J_m \left(\frac{x_{mn}}{R} \rho \right) e^{\pm im\phi} \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) e^{i\omega t} \quad (m, p = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

で与えられる。ここで x_{mn} は m 次ベッセル関数 J_m の n 個目の零点であり、周波数 ω は

$$\omega_{mnp}^{TM} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}} \quad (m, p = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

を満たす。

TE 波 cavity 内の電場は常に中心軸方向に垂直である。磁場の z 成分 (中心軸成分) B_z は

$$B_z(\rho, \phi) = J_m \left(\frac{x'_{mn}}{R} \rho \right) e^{\pm im\phi} \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n, p = 1, 2, \dots)$$

で与えられる。ここで x'_{mn} は m 次ベッセル関数の導関数 J'_m の n 個目の零点であり、周波数 ω は

$$\omega_{mnp}^{TE} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{x'_{mn}{}^2}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n, p = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

を満たす。

角周波数 ω が式 (2.1)、(2.2) を満たす波が、定常波として存在できる。この ω のことを共振 (角) 周波数と呼ぶ。TM 波の最小の共振周波数は式 (2.1) で $m = p = 0; n = 1$ のとき、TE 波の最小の共振周波数は式 (2.2) で $m = n = p = 1$ のときで、それぞれ

$$\omega_{010}^{TM} = \frac{2.405}{\sqrt{\mu\epsilon}R} \quad \omega_{111}^{TE} = \frac{1.841}{\sqrt{\mu\epsilon}R} \sqrt{1 + 2.912 \frac{R^2}{d^2}}$$

となる。すなわち $d < 2R$ なら、最小の共振周波数は TM 波の $(m, n, p) = (0, 1, 0)$ で与えられる ω である。このモードは、電場の z 成分 (中心軸方向) が z に依らず (時間に依存する部分を除いて) 一定なモードであるから、この実験において電子を加速するのにもっとも適した電磁場であることがわかる。

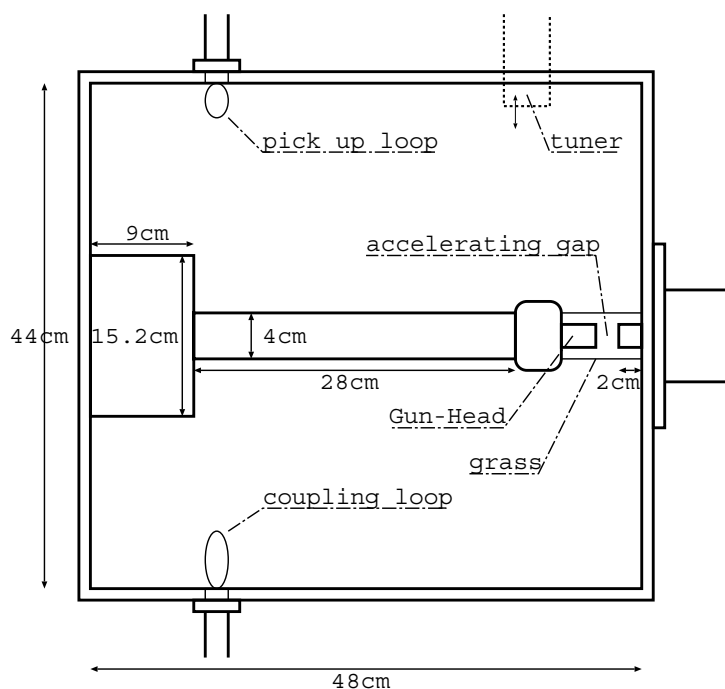


Figure 2.1: cavity の構造 (概略)

2.2 Cavity の性能

cavity の性能を表すパラメータとして、 Q 値とシャントインピーダンスがある。

Q 値 理想的な空洞共振器 (完全導体で密閉されている) の場合、一旦空洞内にマイクロ波が入るといつまでも減衰することなく振動を続ける。しかし実際の空洞共振器の場合にはエネルギーの損失があるため、マイクロ波は時間とともに減衰する。そこで、空洞内にあるマイクロ波のエネルギーに対するエネルギー損失の割合を表す量として、 Q 値

$$Q = \omega_0 \frac{W}{P} \quad (2.3)$$

が定義される。ここで ω_0 は共振周波数、 W は cavity 内に蓄えられているマイクロ波のエネルギーの時間平均、 P は周期当りの cavity のエネルギー損失である。 Q 値が大きいほど、cavity のエネルギー損失の割合は少ない。

シャントインピーダンス cavity 内で発生させた加速電圧の 2 乗と周期当りのエネルギー損失 P は比例関係にあるはずであり、この比例定数がシャントインピーダンス Z で

$$Z = \frac{V^2}{P} \quad (2.4)$$

で定義される。

最終的に Q 値および Z から加速電圧を求めることができる。

2.3 Q 値の求め方

2.3.1 Cavity の Q 値

cavity の Q 値は式 (2.3) で与えられる。蓄えられているエネルギー W は損失 P で減衰していくので

$$P = -\frac{dW}{dt} \quad (2.5)$$

の関係がある。これに式 (2.3) を代入して、 $t=0$ のとき $W = W_0$ として解くと

$$W = W_0 \exp(-\omega_0 t/Q) \quad (2.6)$$

が得られる。確かに、エネルギーが時間とともに減衰していることがわかる。ここで損失 P の中身を検討する。損失として考えられるのは、まず実際の cavity の材質が完全導体でないことにある。伝導度が有限なために、内壁の表面を流れる高周波電流がジュール熱として失うエネルギー損失は避けることができない。この避けることのできない損失を P_0 と表すことにする。

この他にも損失の原因はいろいろ考えられる。例えば何かの必要があって内部に誘電体を入れれば、その誘電体による損失が加わるし、空洞内に光や粒子線を入れるための穴を壁に開ければ、この穴から外界に洩れてしまうマイクロ波も損失である。また、cavity の製作上の不手際に由来するものもあるが、これらはすべて本来的な損失 P_0 を増加させるものだと同類の扱いをし、これらも含めた損失を P_u とする。

更に、cavity を外界と結び付けるために導波管との間の壁に開けた結合用の窓について考えてみる。窓は外界との出入口なので、外界からのマイクロ波の入口の役目もするが、逆に内部に蓄えられているマイクロ波の一部は、この窓を通して外界の導波管の方へ逃げていくことになる。これは高周波エネルギー W の方から見れば壁に吸い込まれて消失するものと同じく損失であり、これを結合による損失 P_c とする。すると全損失 P はこの両者の和で

$$P = P_u + P_c \quad (2.7)$$

となる。 P_u と P_c を区別するのは、 P_c は立体回路を調節することによって制御できるからである。

そこで式 (2.3) にならって結合に起因する損失 P_c に対して

$$Q_c = \omega_0 W / P_c \quad (2.8)$$

として結合の Q (coupling Q) と呼び、それ以外の損失 P_u に対して

$$Q_u = \omega_0 W / P_u \quad (2.9)$$

を定義して、これを無負荷の Q (unloaded Q) と呼ぶことにする。これに対して全損失を考えに入れた Q は式 (2.7) から

$$1/Q = 1/Q_u + 1/Q_c \quad (2.10)$$

の関係がある。この Q は他の Q と区別して、導波管が結合しているという意味で負荷時の Q (loaded Q) と呼ぶ。我々が導波管を通じて直接測定できるのは、この負荷時の Q である。これに対して P_u に含まれる高周波がジュール熱として失う損失 P_0 は、空洞を作る材料がわかっているならば、少なくとも原理的には計算可能である。従って、この部分に対応する量

$$Q_0 = \omega_0 W / P_0 \quad (2.11)$$

は本来の Q (intrinsic Q) と呼ばれる。

また式 (2.10) より臨界結合 ($Q_u = Q_c$) の時

$$\text{loaded } Q = \frac{1}{2} \text{unloaded } Q \quad (2.12)$$

が成立する。

2.3.2 導波管との結合

cavityの手前につけた導波管の適当な位置に基準面を選び、そこを通過してcavityへ単位振幅のマイクロ波を投入した時、cavityから反射させて基準面まで戻ってくる振幅(振幅反射率)は、朝永によって与えられている。それによると、cavityの共振周波数 ω_0 と異なる周波数 ω を持ったマイクロ波に対する反射率を、位相も含めて(従って複素数で表現して) r とすると

$$r = \left(\frac{\omega_0/Q_c}{(\omega - \omega_0) - i(\omega_0/2Q)} - i \right) \quad (2.13)$$

電力としての反射率 R は、 r の複素共役を r^* とすれば $|r|^2 = r^*r$ で与えられるから

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad (2.14)$$

とすると

$$R = \frac{(\Delta\omega/\omega_0)^2 + \{(1/2Q) - (1/Q_c)\}^2}{(\Delta\omega/\omega_0)^2 + (1/2Q)^2} \quad (2.15)$$

ここで式(2.10)を用いると

$$R = \frac{(2\Delta\omega/\omega_0)^2 + \{(1/Q_u) - (1/Q_c)\}^2}{(2\Delta\omega/\omega_0)^2 + \{(1/Q_u) + (1/Q_c)\}^2} \quad (2.16)$$

となる。特に、 $\Delta\omega = 0$ の時の電力反射率を R_0 とすると

$$R_0 = \left\{ \frac{(1/Q_u) - (1/Q_c)}{(1/Q_u) + (1/Q_c)} \right\}^2 \quad (2.17)$$

となる。臨界結合の時 $P_u = P_c$ すなわち $Q_u = Q_c$ であるから、 $R_0 = 0$ となって無反射になることを示している。この最小値 R_0 と $R = 1$ との中間の反射が起こるまでのずれに相当する周波数の幅 $\Delta\nu$ を共振の半幅といい、その2倍 $\Delta\nu_{1/2}$ を半値幅という。この共振の鋭さを示す半値幅は、cavityの損失を示す定数 Q 値と密接な関係がある。式(2.16)で $(2\Delta\omega/\omega_0) = (1/Q)$ の時の反射 R は完全反射 $R = 1$ と $\omega = \omega_0$ の時の反射 R_0 との中間の値である $(1 + R_0)/2$ となるので、この $\Delta\omega$ が共振の半幅 $\Delta\nu$ の 2π 倍である。空洞の共振周波数 $(\omega_0/2\pi)$ を ν_0 とすれば $(\Delta\nu/\nu_0) = (1/2Q)$ なので

$$\Delta\nu_{1/2}/\nu_0 = 1/Q \quad (2.18)$$

となる。臨界結合($Q_u = Q_c$)の時、 $\Delta\nu_{1/2}$ は $(\Delta\nu_{1/2})_{\min}$ の2倍になる。

2.3.3 測定による Q 値の求め方

実験では、反射波ではなくcavity内のエネルギーの一部を取り出して測定する。入射エネルギーのうちcavityに蓄積されるエネルギーを T とすると、式(2.16)を変形することで

$$T = 1 - R \propto \frac{1}{(\Delta\omega)^2 + (\omega_0/2Q)^2} \quad (2.19)$$

となる。このグラフを描くとローレンツ型となり、半値幅は式(2.12)より

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{1/2}} \quad (2.20)$$

となる。この式を用いて Q 値を求める。

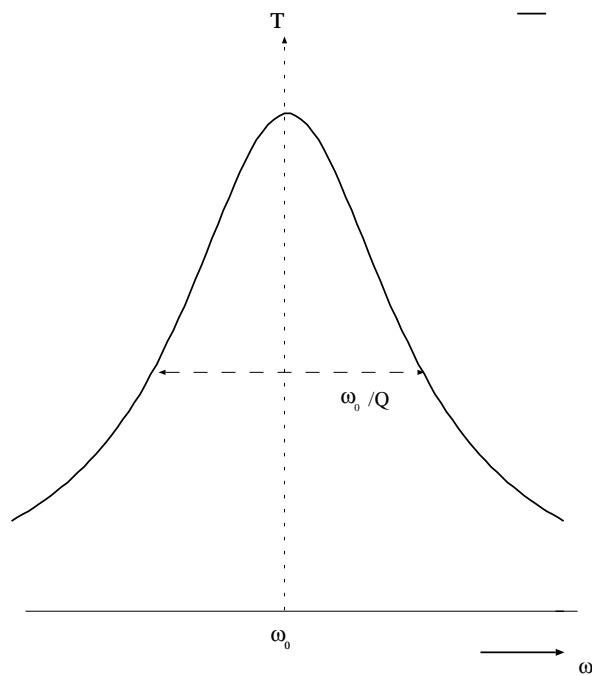


Figure 2.2: 透過波

2.3.4 Q 値の測定

cavity からの透過波の図は、図 2.2 のようになる。
 オシロスコープで測定することを考えて、1/2 を対数で表す。

$$10\log_{10} \frac{1}{2} \approx -3 \quad (2.21)$$

より、透過波 1/2 となるのは、-3dB のところである。したがって、透過波のピークを探し、そこから 3dB 下がったところの周波数の幅をはかると、そこが半値幅である。

実際の操作としては、ネットワークアナライザにおいて横軸を周波数、縦軸を透過波の強さとして透過率 $R = 1$ の位置をセットし、透過波のピークの部分にマークをセットすると、自動的に Q 値は算出される。

$$Q = 4256.1 \quad (2.22)$$

2.4 Beadpull によるシャントインピーダンスの測定

2.4.1 概要および目的

Beadpull とは、加速器内部に小さな金属球 (bead) を通して、それによって生じる共振周波数の変化を利用して電場分布を調べる方法である。また、シャントインピーダンスは加速空洞の性能を示す物理量であり

$$Z = \frac{V^2}{P}$$

なる関係式で得られるので、電場分布よりシャントインピーダンスを算出できる。

2.4.2 電場分布測定の原理

電場と加速器の共振周波数の減衰の間には、関係式

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\epsilon \pi r^3 E^2}{W}$$

が成立することが知られている。この関係式は以下のようにして証明される。

証明 1st step: 電磁場の直交関数展開

完全導体によって囲まれた cavity 内の電磁場に関して、以下の2種類の境界条件を考える。

$$\text{境界 } S: \text{電場 } \mathbf{E} \text{ の接線成分 } \mathbf{E}_{\parallel} = 0, \text{ かつ磁場の法線成分 } \mathbf{B}_{\perp} = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{境界 } T: \text{電場 } \mathbf{E} \text{ の法線成分 } \mathbf{E}_{\perp} = 0, \text{ かつ磁場の接線成分 } \mathbf{B}_{\parallel} = 0 \quad (2.24)$$

領域 V は、境界 S 、 T によって囲まれる領域とする。また、任意のベクトル場について

$$\forall \mathbf{A}, \exists \mathbf{A}_a \text{ and } \mathbf{A}_b \text{ s.t. } \mathbf{A} = \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_b, \nabla \cdot \mathbf{A}_a = 0, \nabla \times \mathbf{A}_b = 0 \quad (2.25)$$

が成立する。これを電場ベクトル \mathbf{E} と磁場ベクトル \mathbf{H} に適用して、 \mathbf{E}_a は \mathbf{H}_a は divergence を持たないので、ある定数 k_a に対して、以下の式を満たす。

$$k_a \mathbf{E}_a = \nabla \times \mathbf{H}_a, \quad k_a \mathbf{H}_a = \nabla \times \mathbf{E}_a \quad (2.26)$$

さらに \mathbf{n} = (境界の外法線) とすると、境界条件より

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = 0 \text{ (on } S), \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a = 0 \text{ (on } T) \quad (2.27)$$

以上より、Stokes の定理を適用すると

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_a = 0 \text{ (on } S), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0 \text{ (on } T) \quad (2.28)$$

また、ベクトル解析の良く知られた公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いることで

$$\nabla^2 \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H}_a + k_a^2 \mathbf{H}_a = 0 \quad (2.29)$$

を得る。また、ベクトル解析の公式より以下の式も一般のベクトルについて成立する。

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \quad (2.30)$$

よって、 \mathbf{E} と \mathbf{H} の発散が 0 になるような、別のベクトルをそれぞれ \mathbf{E}_b 、 \mathbf{H}_b としたとき、式 (2.29)(2.30) を用いて

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_b \times (\nabla \times \mathbf{E}_a)) - \nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times (\nabla \times \mathbf{E}_b)) = (k_b^2 - k_a^2) \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b \quad (2.31)$$

となる。よって、Gauss-Green の公式

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.32)$$

を適用することで

$$\int_{S,T} \mathbf{n} \cdot (k_a \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a - k_b \mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) da = (k_b^2 - k_a^2) \int_V \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b dv \quad (2.33)$$

となる。境界条件 (2.23)(2.24) より、左辺は 0 となるので

$$\int_V \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b dv = 0 (a \neq b) \quad (2.34)$$

となる。磁場ベクトルに関しても同様の関係式を得る。また、ベクトル解析の公式 (2.30) を適用することで

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times (\nabla \times \mathbf{E}_a)) = (\nabla \times \mathbf{E}_a)^2 - \mathbf{E}_a \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_a)) = k_a^2 (\mathbf{H}_a^2 - \mathbf{E}_a^2) \quad (2.35)$$

が導出される。これを積分すれば、左辺は境界条件より消えるから

$$\int_V \mathbf{H}_a^2 dv = \int_V \mathbf{E}_a^2 dv \quad (2.36)$$

となる。よって、発散成分を持たないベクトル同士の直交関係

$$\int_V \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b dv = \delta_{ab}, \quad \int_V \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b dv = \delta_{ab} \quad (2.37)$$

が成立する。

次に、発散成分のないベクトルと、回転成分のないベクトルの直交関係を考察する。 \mathbf{F}_a に関しては、 $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ が成立するので

$$\exists \psi_a \text{ s.t. } k_a \mathbf{F}_a = \nabla \psi_a \quad (2.38)$$

を満たす。また、 ψ_a に関して

$$\nabla^2 \psi_a + k_a^2 \psi_a = 0 \quad (2.39)$$

が成立する。また、境界条件より S および T 上で

$$\psi_a = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{F}_a = 0 \quad (2.40)$$

が成立する。ベクトル解析の公式より、次式が成立する。

$$\nabla \cdot (\psi_a \nabla \psi_b) = \psi_a \nabla^2 \psi_b + \nabla \psi_a \cdot \nabla \psi_b \quad (2.41)$$

よって、a と b を入れ換えたものを引いて V で積分すれば、Gauss の定理より

$$\int_V \nabla \cdot (\psi_a \nabla \psi_b - \psi_b \nabla \psi_a) dv = \int_{S,T} (\psi_a \frac{\partial \psi_b}{\partial n} - \psi_b \frac{\partial \psi_a}{\partial n}) da = (k_a^2 - k_b^2) \int_V \psi_a \psi_b dv \quad (2.42)$$

が成立する。よって ψ に関しては、直交関係

$$\int_V \psi_a \psi_b dv = 0 (a \neq b) \quad (2.43)$$

が成り立つ。よって、 \mathbf{F}_a について直交関係

$$\int_V \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{F}_b dv = \delta_{ab} \quad (2.44)$$

を得る。また、 $\nabla \cdot \mathbf{E}_b = 0$ より

$$\nabla \cdot (\psi_a \mathbf{E}_b) = \psi_a \nabla \cdot \mathbf{E}_b + \nabla \psi_a \cdot \mathbf{E}_b = k_a \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{E}_b \quad (2.45)$$

が成り立つので、 \mathbf{E} と \mathbf{F} 同士の直交関係

$$\int_V \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{E}_b dv = 0 \quad (2.46)$$

を得る。次にベクトルを直交関数系を用いて展開することを考える。ここで使われる方法は Fourier 変換で使われる手法と同一であるが、Fourier 級数の収束に関する細かい議論はここでは割愛する。あるベクトル \mathbf{A} が

$$\mathbf{A} = \sum_a e_a \mathbf{E}_a + \sum_a f_a \mathbf{F}_a \quad (2.47)$$

のように展開できると仮定すると、両辺に \mathbf{E}_a または \mathbf{F}_a をかけて領域 V 内で積分することによって、 e_a 、 f_a が決定されて

$$\mathbf{A} = \sum_a (\mathbf{E}_a \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_a dv + \mathbf{F}_a \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_a dv) \quad (2.48)$$

のように展開される。

証明 2nd step: 直交関数展開を用いての cavity 内での Maxwell 方程式の記述

1st step では、関数の直交性を用いて任意のベクトルを \mathbf{E}_a 、 \mathbf{F}_a を用いて展開した。次にこの節では、この結果を用いて Maxwell 方程式を書き直すことを試みる。式 (2.48) を用いると、電場、磁場、電流、電荷密度はそれぞれ次のように展開される。

$$\mathbf{E} = \sum_a (\mathbf{E}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \mathbf{F}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{H} = \sum_a \mathbf{H}_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \quad (2.50)$$

$$\mathbf{J} = \sum_a (\mathbf{E}_a \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv + \mathbf{F}_a \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_a dv) \quad (2.51)$$

$$\rho = \sum_a \int_V \rho \psi_a dv \quad (2.52)$$

一方、Maxwell の方程式は、以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.53)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.56)$$

まず、 $\nabla \times \mathbf{E}$ の展開を考えると

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sum_a \mathbf{H}_a \int_V \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_a dv \quad (2.57)$$

となる。ここで、式 (2.30) より

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}_a)) = k_a \mathbf{H}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{E} - k_a^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a) \quad (2.58)$$

を得る。これより

$$\int_{S,T} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_a) da = \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a dv - k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \quad (2.59)$$

となる。また、ベクトル解析の良く知られた公式より

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.60)$$

となるので、これを利用すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sum_a \mathbf{H}_a (k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da) \quad (2.61)$$

となる。同様にして、磁場の表式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sum_a \mathbf{E}_a (k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_T (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da) \quad (2.62)$$

となる。また、D に関しては

$$\nabla \cdot (\psi_a \mathbf{D}) = \psi_a \nabla \cdot \mathbf{D} + k_a \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_a \quad (2.63)$$

を利用して、最終的には

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sum_a -k_a \psi_a \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_a dv \quad (2.64)$$

となる。以上で、Maxwell 方程式を記述する級数とその諸表式がもどまったので、式 (2.53)(2.54)(2.58) を、式 (2.61)(2.62)(2.64) を用いて展開すれば、それぞれ以下の関係式を得る。

$$-k_a \epsilon \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv = \int_V \rho \psi_a dv \quad (2.65)$$

$$k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \mu \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv - \epsilon \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_T (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \\ -\epsilon \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_a dv \end{aligned} \quad (2.67)$$

これらの式より、波動方程式を得ることができる。E と H に関する式は

$$\epsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + k_a^2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = -\mu \frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_T (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right) - k_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \quad (2.68)$$

$$\epsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + k_a^2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = -\mu \frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_T (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right) - k_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \quad (2.69)$$

以上で、波動方程式は得られた。次節では式 (2.68)(2.69) を用いて cavity の電磁場の振動に関して考察していくことにする。

証明 3rd step: 境界振動による共振周波数の変化

次に、式 (2.68)(2.69) を用いて、cavity の境界を振動させた時の周波数の変化を調べる。まず、完全導体で囲まれ、 \mathbf{E}_a と \mathbf{H}_a で表される電磁波を閉じ込めた cavity を考える。故に、表面では $\mathbf{J} = 0$ として表面電流を無視することができる。よって

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv = 0, \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da = 0 \quad (2.70)$$

となる。外壁を押し込むことで、摂動を与えたとする。この時、摂動後の電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{H} は壁 W_0 と W_1 の間では 0 であると考えられる。すると、 W_1 で \mathbf{H} の接線成分が不連続になる。これが W_1 での表面電流に相当する。ここで

$$\begin{aligned} \int_{W_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da &= \int_{W_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot \mathbf{E}_a da \cdot \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = \int_{W_1} -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_a da \times \mathbf{H}_a) \cdot \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \\ &= \int_{V'} \nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a) dv' \cdot \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = k_a \int_{V'} (\mathbf{H}_a^2 - \mathbf{E}_a^2) dv' \cdot \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \end{aligned} \quad (2.71)$$

となる。よって、式 (2.70)(2.71) を式 (2.69) に代入して、共通因数 $\int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv$ を落とすと

$$\omega_0^2 = \frac{k_a^2}{\epsilon\mu}$$

として

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \int_{V'} (\mathbf{H}_a^2 - \mathbf{E}_a^2) dv') \quad (2.72)$$

が成立する。次節では、式 (2.72) を用いて加速ギャップの中に小さな金属球をいれた場合を考察していく。

証明 4th step: 小金属球の挿入による電場への影響

次に、加速ギャップに bead をいれた時の周囲の電磁場の変化を考察する。ここでは、bead は十分小さいため、加速ギャップの電場は一様であると思倣することができる。

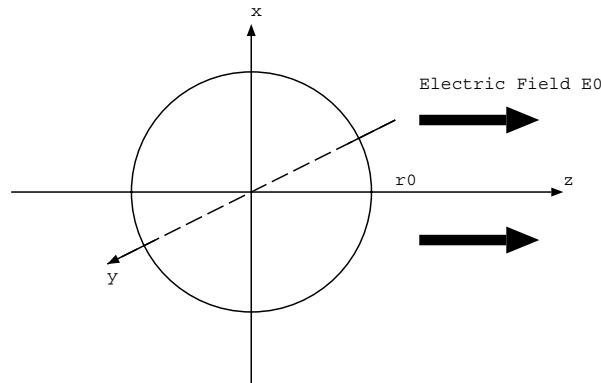


Figure 2.3: 一様な電場内に金属球をおいた場合

原点に半径 r_0 の導体球がある時の電場分布の問題を考える。電場が $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$ であるとする。極座標での Laplace 方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2}) = 0 \quad (2.73)$$

であり、ここでは電場が z 軸対称であることから、 ψ 成分は一定であるとして

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) = 0 \quad (2.74)$$

とできる。ここでは、変数分離法を用いて

$$\psi = \frac{u(r)}{r} P(\theta) \quad (2.75)$$

とすると、これを代入して左辺は r だけの、右辺は θ だけの式にして

$$\frac{r^2}{u(r)} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} = -\frac{1}{p(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (2.76)$$

とする。 θ の式に関して、 $t = \cos \theta$ と変数変換することで、

$$(1-t^2) \frac{d^2 P(t)}{dt^2} - 2t \frac{dP(t)}{dt} + l(l+1) = 0 \quad (2.77)$$

を得る。これは Legendre の陪微分方程式と呼ばれるものであり、この方程式の解は l が整数の時に限って存在して、それは Legendre 多項式、つまり

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (t^2 - 1)^l}{dt^l} \quad (2.78)$$

となる。一方、 r に関する方程式を解くことで

$$u_l(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l} \quad (2.79)$$

を得る。ここで、次の二つの境界条件が課される。

- $r \rightarrow \infty$ のとき $\phi = -E_0 r \cos \theta$
- 金属球の表面では $\phi = 0$

これを考慮して計算すると、電場は

$$\phi(r, \theta, \psi) = E_0 \left(-r + \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos(\theta) \quad (2.80)$$

となる。よって、電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \hat{\psi} \quad (2.81)$$

$$= E_0 \left(1 + \frac{2r_0^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{r} + E_0 \left(-1 + \frac{r_0^3}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\theta} \quad (2.82)$$

である。よって

$$\mathbf{E}_a^2 = \frac{\mathbf{E}^2}{\int_{Cavity} \mathbf{E}^2 dv} = \frac{E_0^2}{\int_{Cavity} \mathbf{E}^2 dv} \left(\left(1 + \frac{2r_0^3}{r^3} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(-1 + \frac{r_0^3}{r^3} \right)^2 \sin^2 \theta \right) \quad (2.83)$$

を得る。ここで、導体球の半径を r' から $r' + dr'$ にして摂動を加えると

$$\int_{\Delta v'} \mathbf{E}_a^2 dv' = \int_{r'}^{r'+dr'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_a^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi = 12\pi \frac{E_0^2}{\int_{Cavity} \mathbf{E}^2 dv} r'^2 dr' \quad (2.84)$$

となる。ここで、 r' を 0 から r_0 まで積分することで、何も無い状態に半径 r_0 の完全導体球を入れた時の摂動になる。よって

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \int_{Bead} \mathbf{E}_a^2 dv' = 3 \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \frac{E_0}{\int_{Cavity} \mathbf{E}^2 dv} \quad (2.85)$$

として、 $\mathbf{H}_a = 0$ のときの摂動の式を得る。同様に、 $\mathbf{E}_a = 0$ のときの摂動の式は

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \frac{H_0}{\int_{Cavity} \mathbf{H}^2 dv} \quad (2.86)$$

である。加速ギャップ上では磁場は存在しないので、式 (63) は実は考慮する必要がなく、cavity の蓄積エネルギーは

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int_{Cavity} \mathbf{E}^2 dv \quad (2.87)$$

であるから、式 (2.84) を書き換えて

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2\pi\epsilon r_0^3}{W} E_0^2 \quad (2.88)$$

である。これを周波数を使って書き直して

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\epsilon\pi r^3 E^2}{W} \quad (2.89)$$

を得る。(証明終)

よって

$$Z = \frac{V^2}{P} = \frac{(\int_{-L/2}^{L/2} E(z) dz)^2}{P}$$

であり、また Q 値の定義により $Q = \omega_0 W / P$ であるから、シャントインピーダンスの式として周波数の変化を用いて

$$Z = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon r_0^3 f_0^2} \left(\int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{-\Delta f} dz \right)^2$$

が導出される。これより、小さな金属球をビーム軸に沿って cavity 内を移動させると、その金属球の位置での電場の強さに応じて共振周波数の変化が観測されるはずである。

2.4.3 実験に使う装置

Beadpull の実験では、下図のような装置を用いてなされている。

このセットアップでは、空洞内部のビームが通る部分にテグスを張り、そのテグスをモーターで引っ張ることによって、bead を移動させている。bead が入ったことによって共振周波数が変動すると空洞から出る共振周波数の位相が変動することを利用して、その変動を Double Balanced Mixer で電圧出力に変換し、SG の FM 出力に戻している。但し、実際のビームが加速されるエネルギーは、これに加えて Transit Time Factor Synchronous Phase を考慮した上で計算せられねばならない。そこで、以下のような装置を用いているのである。

1. Double Balanced Mixer(DBM) : bead が cavity 内にある時に共振周波数が変化するので、方向性結合器により分けられた phase shifter を通るマイクロ波と cavity を通るマイクロ波に差ができる。そこで

(a) RF=cavity を通るマイクロ波 = $\sin(\omega t + \psi)$

(b) LO=phase shifter を通るマイクロ波 = $\cos(\omega t)$

とすると

$$IF = \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t + \psi) + \sin \psi \Rightarrow \frac{1}{2} \sin \psi$$

なる変換を DBM 内で行なっている。DBM ではさらに時間に依存する部分を落としており、位相関係を調整することで、 $\psi = 0$ の近傍で $\sin \psi = \psi$ の電圧を出力する。

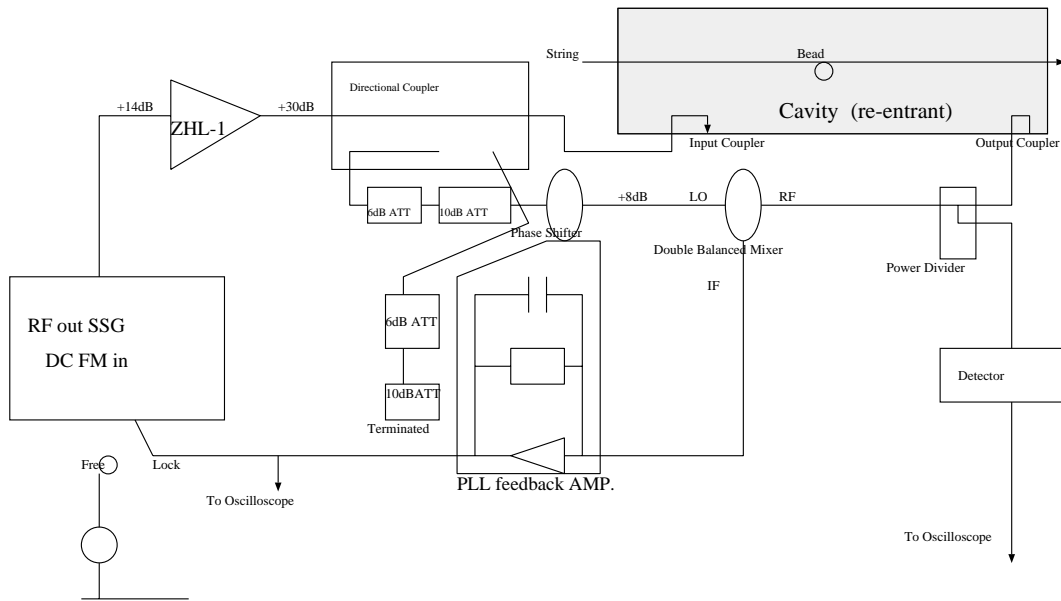


Figure 2.4: Beadpull の実験装置

2. PLL Feedback Amp. : Free/Lock の切替がついており、Lock にすると SG の出力周波数を cavity の共振周波数に追従させることができる。基本的な仕組みとしては、DBM から来る電圧信号によって

$$f = f_0 + AV \frac{df}{dV}$$

として追従させる。 f は SG の出力周波数、 f_0 は cavity の共振周波数、 V は DBM の電圧変化である。

3. computer : 本実験では、データ解析のために PC9801-VX を用いた。周波数を数値データに変換するためにスロットボード (AD12-8J(98)) が差し込まれている。BASIC によって、一定時間電圧変化を取り込み、記録するプログラムが書かれている。

2.4.4 データ解析の BASIC プログラム

本実験では、コンピューターが数値データを処理し、 $(f \sqrt{-\delta f dz})^2$ を計算するプログラムを製作した (220step までは既成のもので、それ以降は我々で作った)。以下にそのリストを記す。

```

10 DEFINT I
20 DIM IY(10000)
30 INPUT 'extension number [from-to] ??', NUM1, NUM2
40 INPUT 'Choose the drive to read(A: or B:);DR $
45 INPUT 'Choose the drive to write (A: or B:)'DR1 $
50 INPUT 'Input the filename of your data.?'FL $
60 IF NUM2=0 THEN NUM2=NUM1
70 FOR NUM=NUM1 TO NUM2
80 N$ =STR$(NUM):N$ =RIGHT$( '000'+RIGHT$( N$ ,LEN(N$ )-1),3)

```



```

90 INAM$ = DR$ +FL$ +'.'+N$
100 ONAM$ =DR1$ +'a2'+N$ +'.'DAT' : PRINT INAM $ ;' -> ';ONAM$
110 OPEN ONAM$ FOR OUTPUT AS # 1
120 IAD=VARPTR(IY(0),1)
130 IBASE=VARPTR(IY(0),1)
140 DEF SEG=IBASE
150 BLOAD INAM$ ,IAD
160 PRINT IY(0)
170 FOR I=0 TO IY(0)
180 PRINT IY(I);
190 WRITE # 1, IY(I);
200 NEXT I
210 CLOSE:PRINT
220 NEXT
230 ***** THE ANALYSIS OF THE DATA *****
240 HORI0=IY(2):HORI=HORI0:X=0
250 INPUT 'Which came first 1)bead or 2)stapler?';ORD
260 PRINT 'Now, let me integrate the data. Are you OK?'
270 GOSUB 380
280 GOSUB 460
290 FOR I=L1 TO L2
300 DF=(IY(I)-HORI0)*UF:IF DF<0 THEN FF=SQR((-1)*DF) ELSE FF=0
310 X=X+FF*DL
320 NEXT I:X=X*X
330 PRINT 'The length of one unit is ;DL;(m)'
340 PRINT 'The frequency per one unit is ;UF;(Hz)'
350 PRINT 'The region you integrated is ;L1;';L2
360 PRINT 'The result of the integration is ;X
370 END
380 ***** THE CALCULATION OF THE FREQUENCY PER ONE UNIT ****
390 INPUT 'Input the frequency you dropped(Hz)';UF
400 I=2:ISC=0
410 IF ISC=0 AND IY(I)+300<HORI THEN LS=I:ISC=1
420 IF ISC=1 AND IY(I)-300>IY(LS) THEN LE=I-1:I=I+10:GOTO 440
430 I=I+1:GOTO 410
440 XF=0:FOR I=LS TO LE:XF=XF+IY(I):NEXT I:XF=XF-(LE-LS+1)
450 UF=UF/(HORI-XF):HORI=IY(I):RETURN
460 ***** THE CALCULATION OF THE LENGTH PER UNIT *****
470 INPUT 'Input the distance between the bead and the seed of the stapler(m)';DL
480 DIM EDGE(2), BOT(2), ENDE(2):FOR J=1 TO 2:GOSUB 520:NEXT
490 DL=DL/(BOT(2)-BOT(1))
500 IF ORD=1 THEN L1=EDGE(1):L2=ENDE(1) ELSE L1=EDGE(2):L2=ENDE(2)
510 RETURN

```

```

520 ISC=0:REC=IY(I):REX=I
530 I=I+1
540 IF ISC<>0 OR IY(I)>HORI THEN 570
550 PM1=1:FOR K=11 TO 20:IF IY(I+K)=150>=HORI THEN PM1=0:K=20
560 NEXT:IF PM1=1 THEN EDGE(J)=I:ISC=1
570 IF ISC<>1 THEN 530
580 IF IY(I)<REC THEN REC=IY(I):REX=I
590 IF IY(I)=50<IY(I+20) THEN 620
600 PM1=1:FOR K=1 TO 20:IF IY(I+K)=50<IY(I) THEN PM1=0:K=20
610 NEXT:IF PM1=1 THEN BOT(J)=REX:ENDE(J)=I:I=I+10:HORI=IY(I):RETURN
620 GOTO 530

```

このプログラムの主な変数は以下の通りである。

- HORI0=一番最初の目盛の値。ここを電場のない状態とする
- UF= 1 目盛あたりの周波数 (Hz)
- EDGE(i)=i 番めの谷の左の縁の x 座標
- BOT(i)=i 番めの谷の最底部の x 座標
- ENDE(i)=i 番めの谷の右の縁の x 座標
- IY(i)=点 i における raw data の値
- DL=1 目盛あたりの対応する長さ

このプログラムの仕組みは、以下に述べるようになっている。

- まず、実験過程で x (Hz) の周波数を落としたとして、この時の目盛が XF であるとする。(したがって落差は HORI0-XF)。すると、自然に

$$UF = \frac{x}{\text{HORI0} - XF}$$

として得られる。(390 ~ 450 行)

- 本プログラムは、得られる実験データが 2 つの谷 (それぞれ bead とホッチキスの針によるもの) を持っていることを前提としており、1 目盛あたりの長さ DL は次のようにして計算されている。まず、ホッチキスの針と bead の間隔を計ってこれを $x[n]$ とする。次にそれぞれの谷の底の data number を一つの谷の中で最小値をピックアップするアルゴリズム (570 ~ 580 行) によって、求める。

$$x = (\text{BOT}(2) - \text{BOT}(1)) \times DL$$

であるとみなして、DL を求める。

- 次に積分すべき領域を調べる。bead とホッチキスの針のいずれが先に来たかは本プログラムでは判定しないので、これは 250 行において人間が自己申告するようになっている。そして i 番めの谷が bead のデータに起因するものとする。

まず、谷の最初を検索するために、以下のアルゴリズムを用いている。ある点 a において、そこから先の $a+11 \sim a+20$ における IY の値がすべて $HORI0-150$ を下回れば、そのような条件をみたす a の中で最小のものを $EDGE(i)$ として採用する。

次に、谷の終りの点を検索するためには、ある点 a においてそこから先の点 $IY(a+1) \sim IY(a+20)$ のうちの全てが $IY(a+20)-50$ より大きければ、そこが谷の終りであるとして初めてそうなる点を $ENDE(i)$ として採用する。よって、bead に起因するデータは $[EDGE(i), ENDE(i)]$ であるとする。(590 ~ 620 行)

- そして、 $(\int \sqrt{-\delta f dz})^2$ を積分する過程においては

$$\left(\int \sqrt{-\delta f dz}\right)^2 = \left(\sum_{k=EDGE(i)}^{ENDE(i)} \sqrt{(-1) \times (IY(i) - HORI0) \times UF \times DL}\right)^2$$

として求めている。但し、1 回目のデータについては、bead のずれなどの要因で、bead の通る前後で周波数が異なっている。そこで、図のように基準面を変えて積分を行なっている。

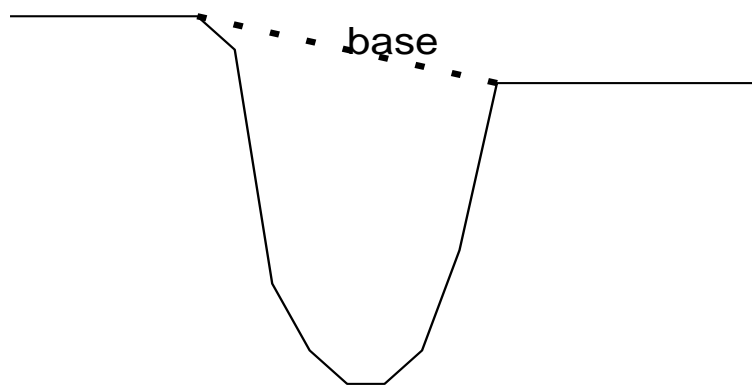


Figure 2.5: 1 回目のデータにおける基準面の補正

2.4.5 実験の方法

- まずテグスに bead とホッチキスの針を固定して、cavity に取り付ける。
- 次にノギスで d (bead とホッチキスの針の間隔)、 r (bead の半径) を測定する。
- bead とホッチキスの針が cavity の外に出ている状態で回路に電流を流し、共振周波数で DBM の出力が 0 になるように調節する。
- 次に、モーターの電源を入れ、データ収集プログラムを作動させる。周波数を 10kHz ずつ上げ下げすることで目盛をつける。測定が終わった後、上で説明したプログラムにかけてデータ解析を行なう。今回は時間もなく、データの中に不良品が多かったことから 2 つしかデータをとれなかった。

2.4.6 Beadpull 実験の結果

上記の操作によって、下図のような 2 つのデータを得た。

まず、ノギスを使って d と r の値を測定し、また共振周波数は以下ようになった。

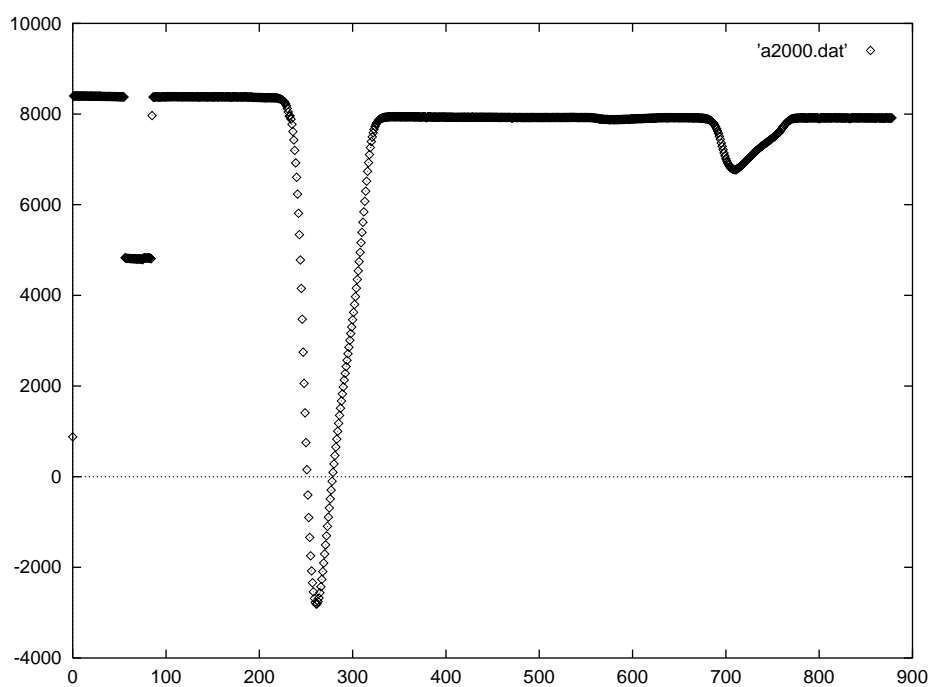


Figure 2.6: 1回目の実験のデータ

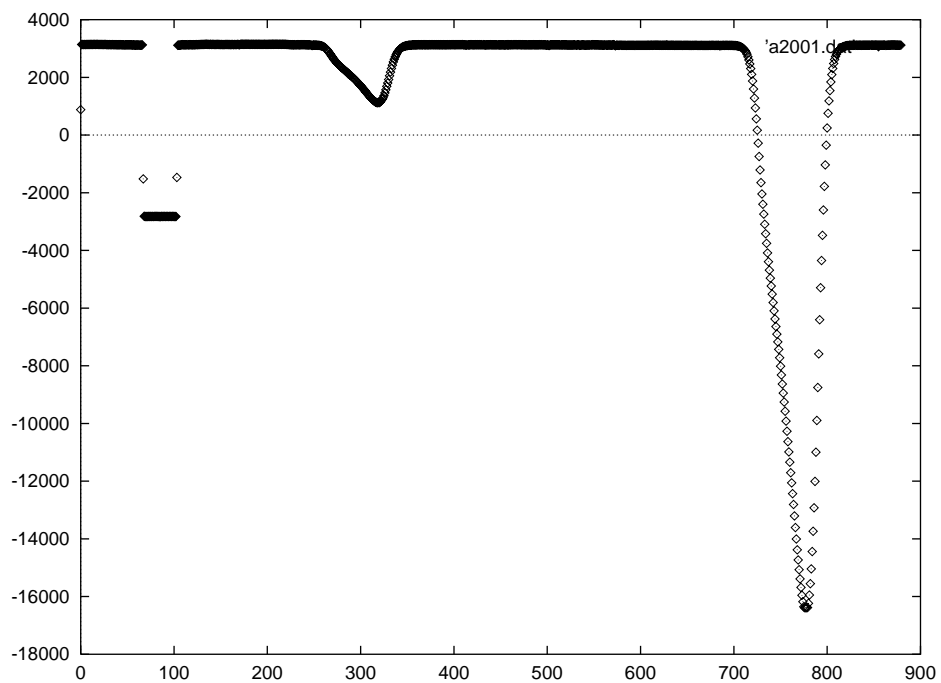


Figure 2.7: 2回目の実験のデータ

- $d = 4.87 \times 10^{-2} [m]$
- $r = 1.0 \times 10^{-3} [m]$
- f_0 (共振周波数)=144.060MHz

また、上記のデータを前々節で述べた BASIC のプログラムにかけて

- 1 回目 : $(\int \sqrt{-\delta f} dz)^2 = 1.3858$
- 2 回目 : $(\int \sqrt{-\delta f} dz)^2 = 1.5486$

が得られた。

2.4.7 シャントインピーダンスについて

シャントインピーダンスとは、加速空洞の性能を表す指標であり、消費電力 P と加速電圧 V の 2 乗との比で表されて

$$Z = \frac{V^2}{P} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon r_0^3 f_0^2} (\int \sqrt{-\delta f} dz)^2$$

である。この実験で加速空洞の Q 値は 4256.1 であることが分かっているので、シャントインピーダンスは

- 1 回目 : 1629k Ω
- 2 回目 : 1820k Ω

であると計算される。よって、結果としては 1 回目のデータには不備があり信頼性が低いと考えて、2 回目のデータのみをとって

加速空洞のシャントインピーダンスは 1.820M Ω である

とする。

2.5 SUPERFISH

2.5.1 SUPERFISH の概要

SUPERFISH は cavity の形と素材から、cavity の Q 値、シャントインピーダンス Z 、電場分布、そして共振周波数 f を求めるプログラムである。今回はこのプログラムによって Q 値とシャントインピーダンスを求めて、それを Beadpull などの実験で求めた値と比較することにする。

2.5.2 シミュレーション結果

SUPERFISH のシミュレーションの結果、次のようになった。

$f=149.0$ [MHz]

$Q=20842$

$Z=7108$ [k Ω]

また電場分布は図に示す。

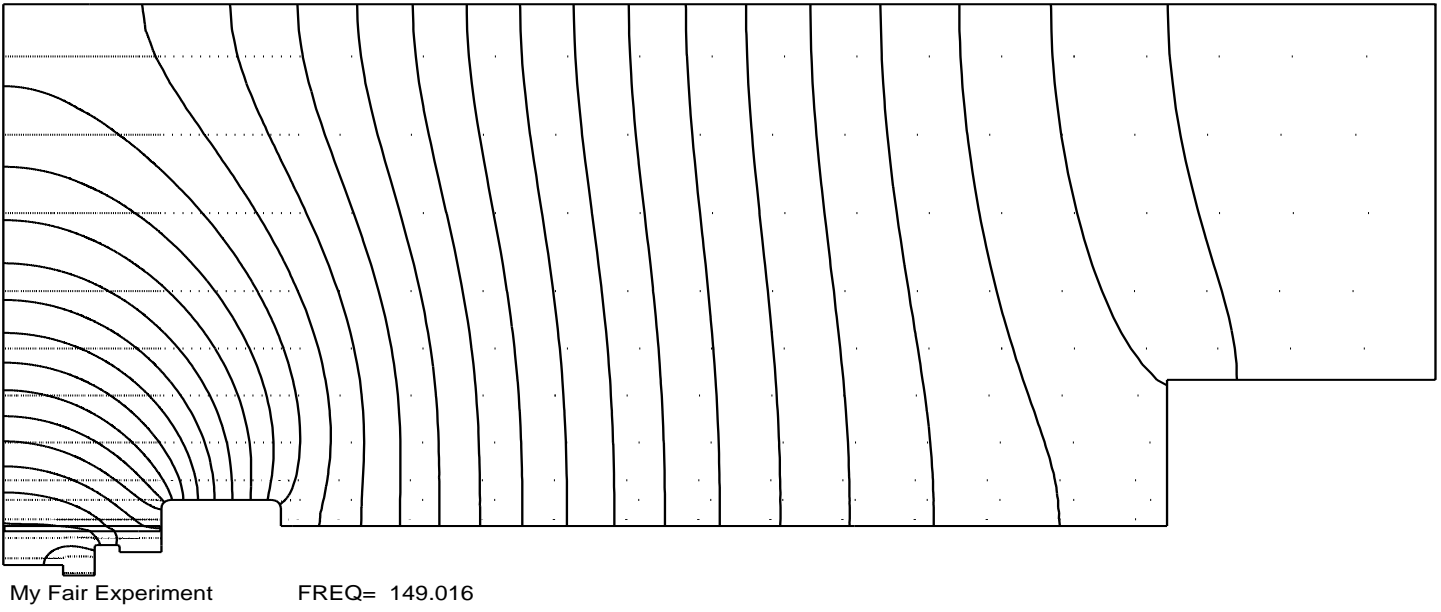


Figure 2.8: SUPERFISH による電場分布の計算結果

2.5.3 考察

実験で求められた値とシミュレーションの結果求められた値を比較してみると大きく違うことがわかる。この原因として以下にあげたような様々なことが考えられる。この内1番上のことは本質的なことであり、きちんと考慮されなければならないことである。

Q 値については次のようなことが考えられる。

1. SUPERFISH で求められた Q 値は、coupling loop からエネルギーが洩れていくことを考えていない、つまり unloaded Q である。しかし、実験で求めたものは coupling loop によって外界と結合している Q 値、つまり loaded Q である。臨界結合の時は、式より SUPERFISH で求めた Q 値は実験から求めた値の2倍になる。
2. 共振周波数や半値幅を求めた際の誤差によって実験から求めた値が真の値とずれているため。
3. cavity の内面の汚れなどのために損失が大きくなり、SUPERFISH の理想化した内面で求めた値と違ってしまうため。

シャントインピーダンスについては次のようなことが考えられる。

1. Beadpull による測定にはどうしても bead の動きなどに誤差があるため。
2. 数値積分を行う時の誤差のため。

Chapter 3

実験装置

3.1 全般的な装置の説明

3.1.1 実験装置の概略

実験に用いられた装置を、cavity で加速された電子を magnet に送る部分、cavity などに対して電気を供給したり magnet から出てきた電子を観測したりする部分、真空状態を作り出す装置、の3つに分けて説明する。cavity、magnet などについては別の chapter で述べられている。

3.1.2 cavity から magnet

cavity から出てきた電子ビームはそのままでは広がってしまい、magnet へ届かなくなってしまう。それを防ぐために電子ビームを磁場で収束させる必要がある。そこで用いられるのが収束コイルである。

のぞき窓 N1 のところでは蛍光塗料を塗ったものを差し込めるようになっていて、電子がそれに衝突すると発光する。これをのぞき窓 N1 から見ることで電子が飛んできていることを確認できる。

また、magnet の入口には幅 4mm のスリットがついていて通過する粒子の位置がわかるようになっている。磁場の出口にも同じものがあり、この隙間の周りの電子の衝突する面にも塗料が塗ってあり、電子が衝突すると光るようになっている。この光がのぞき窓 N2 から見えるようになっていて、電子が曲がって来ていることを確認できる。

ファラデーカップ C1 は直進コースの電子を検出するためのものである。C2 は磁場で曲げられた電子を検出するためのものである。

3.1.3 真空系

電子が通過する際に、抵抗になるようなものがあると電子は減速したり、吸収されたりしてしまう。そのため、電子の通過経路は真空である必要がある。

今回の実験では、ロータリーポンプ、ターボポンプ、スパッタイオンポンプを使って真空状態を作った。ロータリーポンプは、単純化すると入口と出口が異なるピストンで、ポンプのシリンダー内に気体を入口から取り込んで、それを出口から排出することを繰り返すことによって真空をつくり出す。これは大気圧から数 Torr の範囲で使用できる。ターボポンプはロータリーポンプと接続されている。これは扇風機のようなもので、回転しているタービンにぶつかった分子をロータリーポンプ側にたたき出す。これは数 Torr 以下で使用できる。スパッタイオンポンプは上の2つのポンプとは直接つながっていない。このポンプは、電氣的に分子をイオン化させて、それを極板に吸着させて真空を作る。これは真空を維持するために使用する。

今回の実験では、最初にロータリーポンプである程度まで気圧を下げてから、ターボポンプを使った。スパッタイオンポンプを使用して、 $1.0 \times 10^{-5.9}$ Torr の高真空を維持した。

3.1.4 電気系統

ここの役割は、電子を発生させ、cavity の中に高周波を送り込んで電子を加速し、マグネットで電子ビームを曲げ、最後にその電子を検出することである。

まず電子を発生させるにはフィラメントに電流を流して熱電子を放出させれば良い。この電子を最後にファラデーカップで受けとり、電流の量を電圧から計って電子ビームの量を調べる。

トランシーバーで発生させた高周波をアンプで増幅し、coupling loop を通して cavity に送り込む。その途中にあるサーキュレーターはその先での反射波がトランシーバーの方へ反射していくのを防ぐもの、VS メーターは入射波と反射波を調べるもの、方向性結合器は cavity への入射波と反射波の一部をとりだし cavity にはいつているパワーなどを測定するものである。

トランシーバーにはパルスジェネレーターがついている。これはトランシーバーに適当な間隔で高周波を出力させ、またオシロスコープにトリガーをかける働きをする。

以下にここで出てきた部分の簡単な説明を加える。

- フィラメント (太さ 0.2mm のタングステンをコイル状に巻いたもの。ここに電流を流すと電子が放出される。)
- ファラデーカップ (電子を受け止め、電流に変換して検出する装置。)
- トランシーバー (143-145MHz の高周波を発生させることができる。また、パルスジェネレーターで変調を起こすことができる。)
- サーキュレーター (反射波がトランシーバーに戻るのを防ぐ装置。1、2、3 の3つの端子がついている。1から入った信号は2へ、2から入った信号は3へ向かう。この時、3で反射が起こらないようにすれば、1へは反射波が戻らないようにできる。)
- VS メーター (cavity からの反射波を見る。)

3.2 実験に用いた回路の説明

3.2.1 Attenuator(減衰器)

抵抗減衰器は入力信号を一定の割合で減衰させて出力するための装置である。これを伝送線の途中に挿入するが、この場合減衰器の入力、出力インピーダンスを伝送線の実効インピーダンス Z_0 と等しくする必要がある。これは回路と伝送線との接続部で信号の反射を無くすためである。

計算によれば、入力信号の電圧を E_1 、出力信号の電圧を E_2 として

$$R_1 = \frac{K-1}{K+1} Z_0$$

$$R_2 = \frac{K}{K^2-1} Z_0$$

$$\left(\frac{1}{K} = \frac{E_2}{E_1} \right)$$

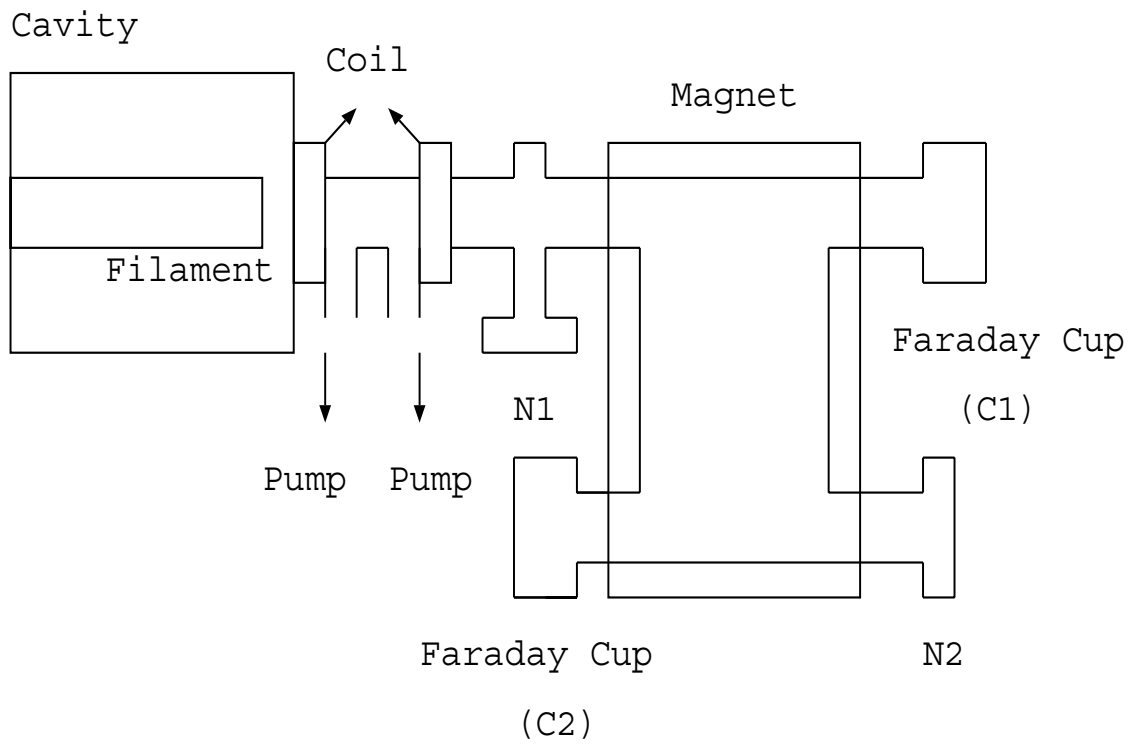


Figure 3.1: 全体図

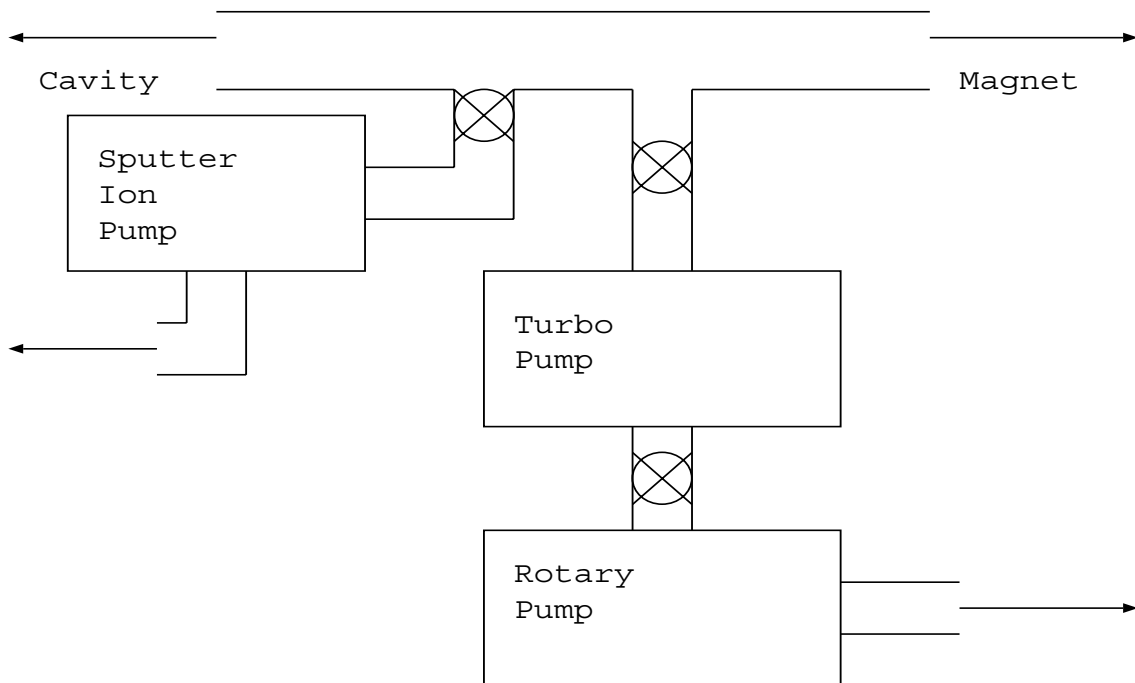


Figure 3.2: ポンプ

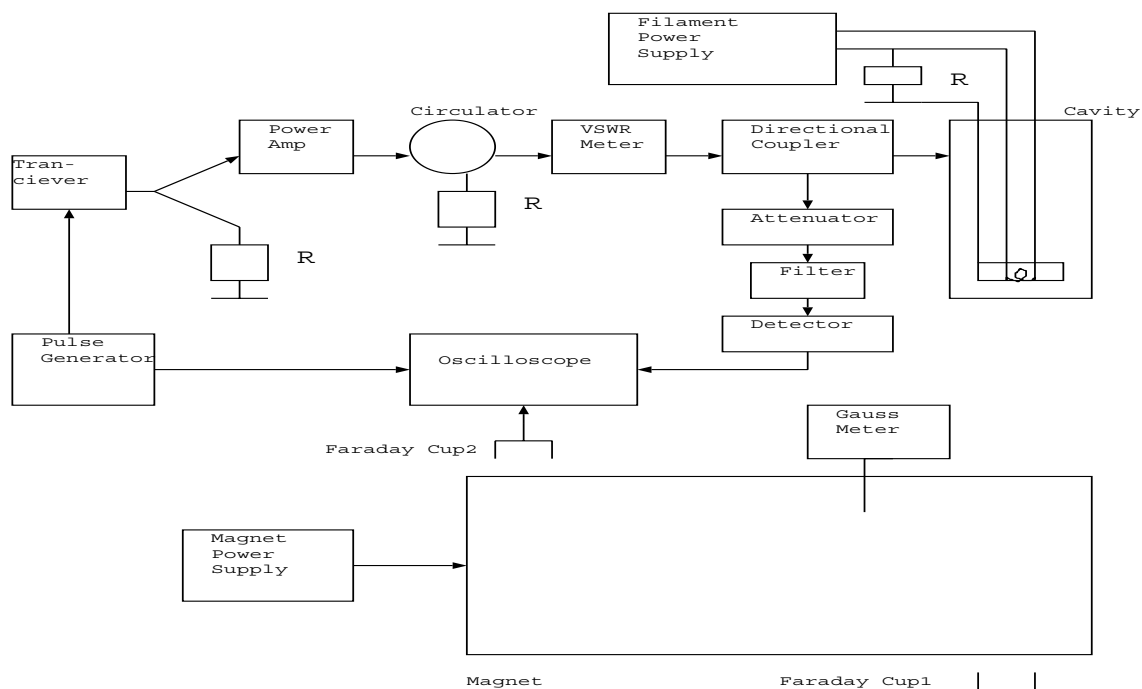


Figure 3.3: 電気系統

今回の実験では、電力で出力信号が入力信号の $\frac{1}{10}$ に、すなわち電圧で $\frac{1}{\sqrt{10}}$ になるよう、また、特性インピーダンスが 50Ω の伝送線に接続できるように設計した。この値から上の式より

$$R_1 = 26.0(\Omega)$$

$$R_2 = 35.1(\Omega)$$

と求まる。

実際には R_1 として 26Ω 、 R_2 として 35Ω の抵抗を使用し、その結果、この抵抗減衰器は、透過波の電力： -10dB という特性を示した。

ところが後にも述べる様に、Attenuator、Low Pass Filter、Directional Coupler の三つを一つの回路にまとめる際に不手際があったことが後日見付き、再測定の結果、透過波の電力： -34dB と大きく特性が狂っていたと思われる。

3.2.2 Low Pass Filter

$144[\text{MHz}]$ より大きい高周波をカットするためにローパスフィルターを用いる。これはコイルとコンデンサーを組み合わせたものである。以下 L と C の決め方を解説する。

図の記号をそのまま用いる。角周波数は ω とする。

フィルターの前の Directional Coupler はメインラインの電流が作る磁場の時間変動によって脇のラインに誘導起電力を起こして、電流を流すものである。よってメインラインの電流が交流であれば、脇のラインを交流電源と考えることができる。

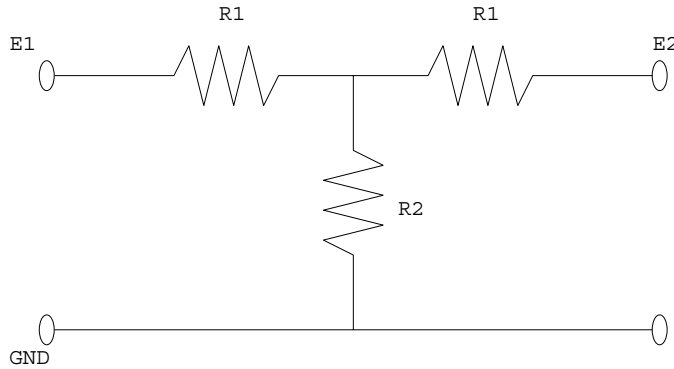


Figure 3.4: Attenuator 回路図

また、Directional Coupler のラインの特性インピーダンスはインピーダンス整合をするようにしており、Attenuator もそのようになっているので、全体は図の回路（フィルターを入れない場合と入れた場合）と同じものになる。cut off 周波数とは、フィルターを入れた場合と入れない場合とを比較した時に、右の抵抗での電力の消費が半分になる周波数のことである。これを以下のようにして求めていく。

まず、フィルターを入れない場合を考える。この時、右の抵抗 R で消費される電力 P_1 は、次式で与えられる。

$$P_1 = \frac{\int R \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{V_0 \exp(i\omega t)}{R+R} \right) \right\}^2 dt}{2\pi/\omega} = \frac{V_0^2}{8R}$$

次に、フィルターを入れた場合を考える。フィルターを入れた時の点 A より右の特性インピーダンス Z は次のようになる。

$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}} = R + i \frac{\omega(2L - CR^2) - \omega^3 L^2 C}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR}$$

今、 ω が十分小さい波は反射しないようにインピーダンス整合をさせると、 ω が十分小さい時には $Z = R$ になる。

$$2L = CR^2$$

またこの時、右の抵抗 R で消費される電力 P_2 は次式のように表される。

$$P_2 = \frac{\int R \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{V_0 \exp(i\omega t)}{Z_1 Z_3} Z_2 \right) \right\}^2 dt}{2\pi/\omega}$$

Z_1 、 Z_2 、 Z_3 は以下の通りである。

$$Z_1 = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}}$$

$$Z_3 = R + i\omega L$$

これらを代入して、計算すると次のようになる。

$$P_2 = \frac{RV_0^2}{2 \{ 4R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(CR^2 + 2L - \omega^2 L^2 C)^2 \}}$$

よって

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4R^2}{4R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(CR^2 + 2L - \omega^2 L^2 C)^2}$$

cut off 周波数は、今の場合は

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

と求まる。

以上のことから L 、 C を決定する。実際の実験では L は 55[nH]、 C は 33[pF] であり、この時 cut off 周波数は 167.1[MHz] となる。また、今回の実験ではフィルターを 2 つつなげて用いた。こうすると減衰が急になって、通過する高周波の量をより急激に減らすことができる。



Figure 3.5: フィルターを入れない場合

3.2.3 Directional Coupler (方向性結合器)

方向性結合器とは、主伝送線路（真中の太い線）にそって一方向に進行する波の一部を取りだし、それを副伝送線路に移して特定の方向に進行させるものである。従って、進行波と反射波の両方に比例した成分の波を取り出して、電力の分割に用いられる。

回路としては、上図のような装置を用いて、真中の strip line(主要伝送路) の特性インピーダンスが 50Ω となるように設計する。そのために上図に示したように、strip line の幅が 2.5~3.0mm であり、長さが 15cm ぐらいであるようにした。誘電体の材質にはガラスエポキシを用いている。

方向性結合器を特徴づける物理量として

- C (coupling factor) : 結合度
- D (directivity) : 方向性結合度
- SWR 値 : Directional Coupler の return loss を表す

の 3 つのパラメータがある。開孔 1 から高周波を入力すると、開孔 2 の方向に進む進行波と、負荷の不整合によって反射する波が生じる。

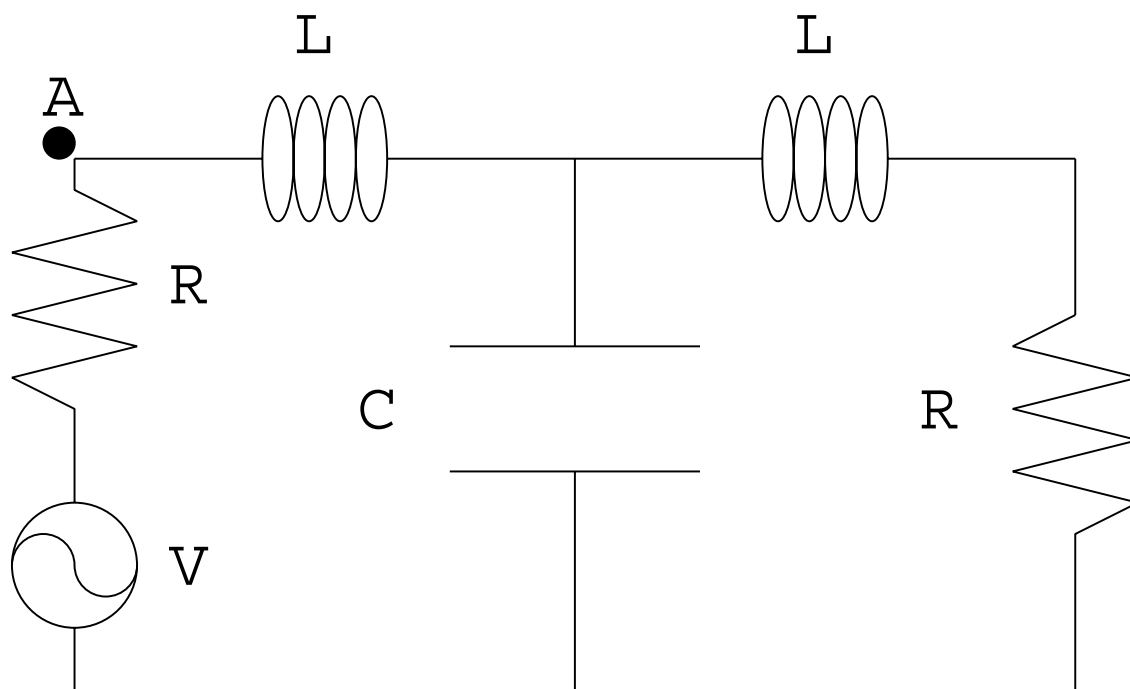


Figure 3.6: フィルターを入れた場合

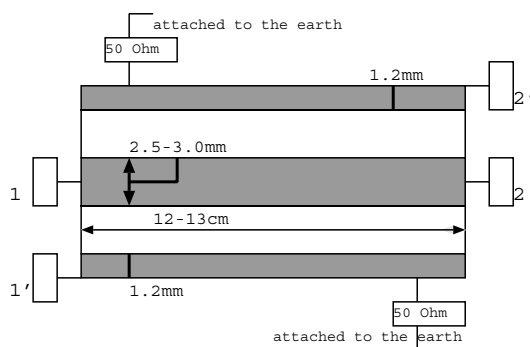


Figure 3.7: Directional Coupler(方向性結合器)の概形

- 開孔 1': 反射電力 P_r に比例した量のみが現れる
- 開孔 2': 進行波電力 P_i に比例した量のみが現れる

このように、横側の strip line に 2 つの開孔を設ける。開孔 2 が反射のない無反射終端抵抗で終端された状態で、進行波電力 P_i が開孔 2 に向かって進んでいる時

- P_r' = 開孔 1' に生じる電力
- P_i' = 開孔 2' に生じる電力

とする。結合度、方向性結合度はそれぞれ次式で定義され、測定の際には下図のように回路を接続する。こうして下の表に示す結果を得られた。

- $C = 10 \log_{10} \frac{P_i}{P_r'}$
- $D = 10 \log_{10} \frac{P_i'}{P_r'}$

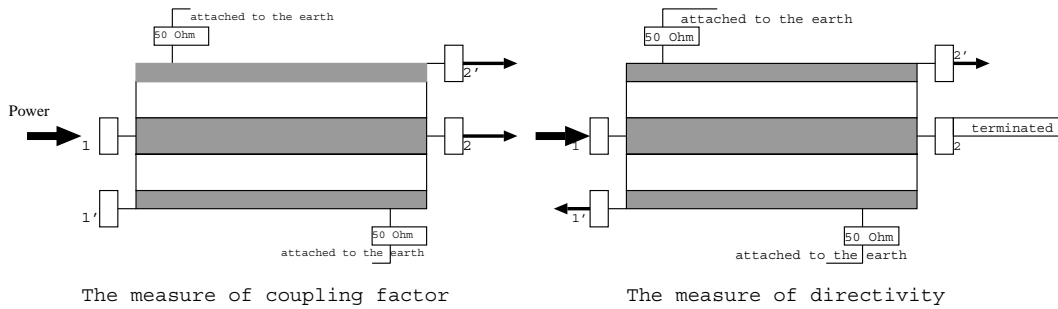


Figure 3.8: 結合度及び方向性結合度測定時の回路の接続

	coupling ($\frac{P_i}{P_r'}$ itself)	directivity ($\frac{P_i'}{P_r'}$ itself)
(1)	-28dBm (1.585×10^{-3})	-37dBm (1.995×10^{-4})
(2)	-26dBm (2.512×10^{-3})	-37dBm (1.995×10^{-4})

また、反射率は 29dBm、透過率は 0.25dBm であった。
SWR 値は反射係数を D とすれば

$$SWR = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (\rho = 10^{\frac{D}{20}})$$

で定義される。Directional Coupler は、SWR 値が低いほど (反射係数 D が小さいほど) 性能が優れているといえる。この回路では

$$D = -18dBm \Rightarrow SWR = 1.288$$

という結果が得られた。

Chapter 4

パソコンによるシミュレーション

4.1 電場での加速シミュレーション

4.1.1 シミュレーションの概要

cavity 内の電場分布を元に、cavity で加速された後の電子のエネルギーをシミュレーションする。
cavity 内の電場は $E(z, t) = E(z)\sin\omega t$ で表される。この時、電子の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}p(t) = -eE(z)\sin(\omega t) \quad (4.1)$$

である。今、与えられたデータは電場分布なので

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} = v \frac{d}{dz} \quad (4.2)$$

の関係より、独立変数を z に置き換える。

エネルギーを ε と書くと

$$\varepsilon^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2 \quad (4.3)$$

であるから、 z で微分して

$$\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dz} = p \frac{dp}{dz} c^2 \quad (4.4)$$

また、運動エネルギーを W と書くと

$$\varepsilon = W + mc^2 \quad (4.5)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{pc^2}{\varepsilon} \frac{dp}{dz} \quad (4.6)$$

ここで

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad (4.7)$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad (4.8)$$

これら 2 式より

$$v = \frac{pc^2}{\varepsilon} \quad (4.9)$$

よって、式 (4.6) に代入して

$$\frac{dW}{dz} = v \frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dt} = -eE(z)\sin(\phi) \quad (4.10)$$

が成り立つ。ここで $\phi = \omega t$ とおいた。一方

$$\frac{d\phi}{dz} = \omega \frac{dt}{dz} = \frac{\omega}{v} \quad (4.11)$$

である。さらに、式 (4.7) より

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2} \\ v^2 &= c^2 \left(1 - \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2}\right) = c^2 \frac{\varepsilon^2 - m^2 c^4}{\varepsilon^2} \\ &= c^2 \frac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{\varepsilon^2} = c^2 \frac{W(W + 2mc^2)}{(W + mc^2)^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

これを式 (4.11) に代入して

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{W + mc^2}{\sqrt{W(W + 2mc^2)}} \frac{\omega}{c} \quad (4.14)$$

式 (4.10)、(4.14) を差分方程式に直すと、

$$W(z + \delta z) = W(z) - eE(z) \sin(\phi(z)) \delta z \quad (4.15)$$

$$\phi(z + \delta z) = \phi(z) + \frac{W(z) + mc^2}{\sqrt{W(z)(W(z) + 2mc^2)}} \frac{\omega}{c} \delta z \quad (4.16)$$

この 2 式を用いて、電子の加速シミュレーションが行える。

4.1.2 シミュレーションの結果

cavity 内の電場分布は、シャントインピーダンスの測定 (Beadpull) の際に得られた各点での $\delta\omega$ より得られる。

$$E \propto \sqrt{\delta\omega} \quad (4.17)$$

この比例定数は、 E を加速ギャップ全域で積分したものが加速電圧になるということから得られる。ここでは入力パワーの実験結果に従って 21.726kV で加速されたとして、シミュレーションを行なった。シミュレーションでは、初速度 0 で初期位相がばらばらな 1000 個の電子の、加速後のエネルギー分布を求めた。なお、上の δz は今回は 0.13mm ととった。

以下、図 4.1 にギャップ内中心軸上での電場の強さを、図 4.2 のこの電場分布を用いたシミュレーションの結果を示す。

図 4.2 では 17.0kV に小さな山があるが、電子の初期位相と加速後のエネルギーとの関係 (図 4.3) によると、187 度付近でエネルギーが極小値 17.15kV をとっているため、17.0kV のところの分布が多くなっている。

また、電子の初期位相とギャップを出るときの位相との関係を図 4.4 に示す。

ここまでのシミュレーションは、電子はフィラメントから全くばらばらの位相を持って飛び出してきたと仮定して行なった。ところが、実際には電圧がかかっていて電子を引っ張っている場合の方が電子はフィラメントから飛び出しやすい。そして、電子の飛び出しやすさは、ギャップにかかっている電圧の $3/2$ 乗に近似的に比例すると思っよい (4.1.3 節参照)。このことを考慮してシミュレーションを行なった結果を、図 4.5 に示す。具体的には、ギャップ間の電圧が $\sin(\omega t)$ の時間依存性を持っていたとして、飛び出した電子の初期位相を ϕ としたとき、各電子に $|\sin \phi|^{\frac{3}{2}}$ の重みをもたせてエネルギー分布を計算した。最後に図 4.2 と比較のために、全電子数が 1000 になるように規格化した。

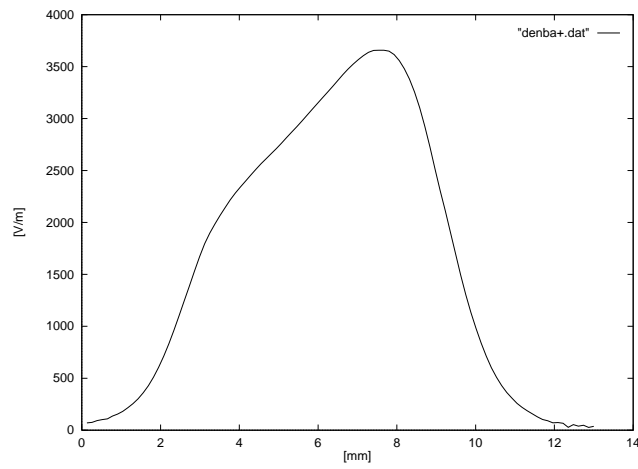


Figure 4.1: cavity のギャップ内の電場 (中心軸上)
 縦軸は電場の中心軸方向成分の強さ。横軸は位置 (相対値)。左側がフィラメント側。

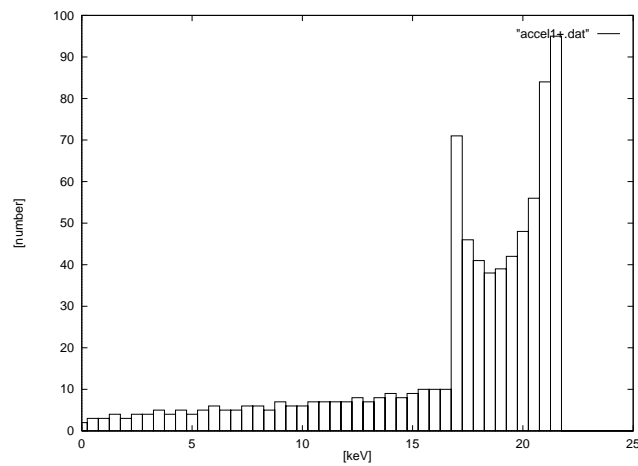


Figure 4.2: 電子の加速シミュレーション (その1)
 初速度 0 で初期位相が異なる 1000 個の電子を加速させたときのエネルギー分布。電場は Beadpull により得られたもの。加速電圧 21.726kV。

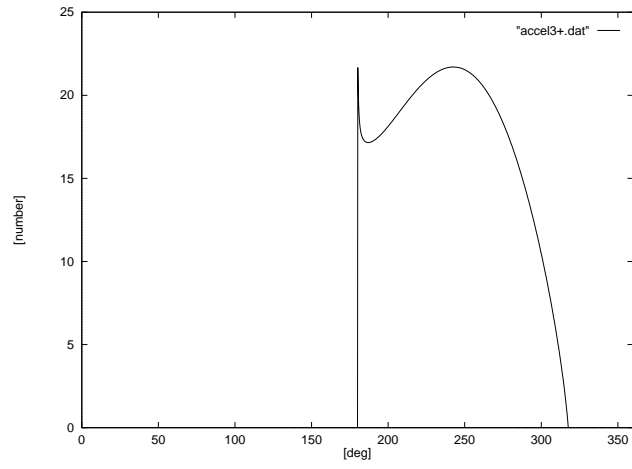


Figure 4.3: 電子の初期位相と加速後のエネルギーの関係

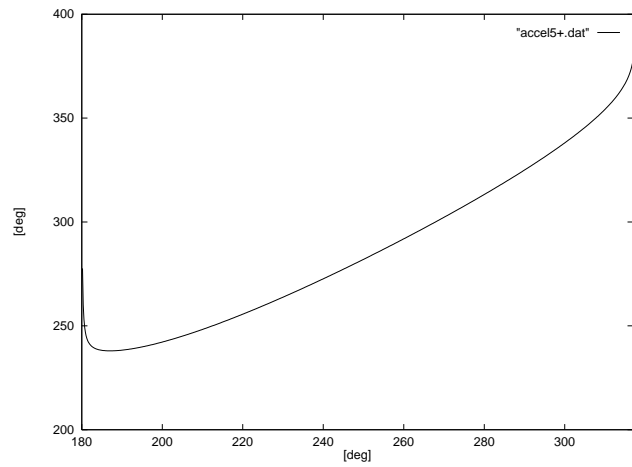


Figure 4.4: 電子の初期位相とギャップを出るときの位相との関係
横軸が初期位相で、縦軸がギャップを出るときの位相である。

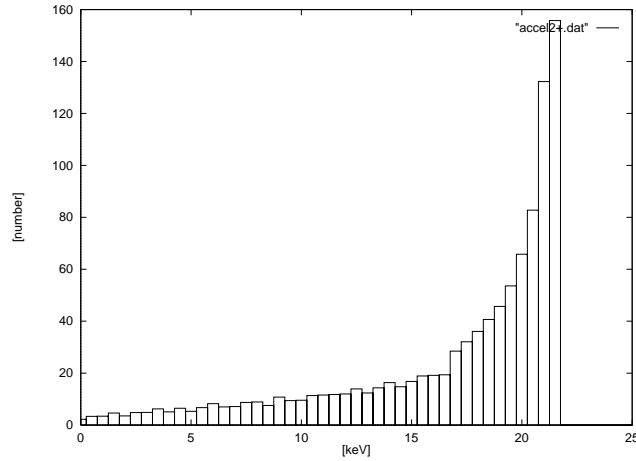


Figure 4.5: 電子の加速シミュレーション (その2)

電子のフィラメントからの飛び出しやすさを考慮したときのエネルギー分布。全電子は1000個に規格化されている。電場はBeadpullにより得られたもの。加速電圧21.726kV。

4.1.3 フィラメントからの電子の飛び出しやすさについて

次のような状況を考えてみる。2枚の無限に広い導体板が距離 d を置いて並行に置かれており、その間に電圧 V がかかっている。ここで、陰極板からは電子が初速度0で無限に飛び出すことができるとする。この時の定常状態について考えてみる。

2枚の極板に垂直な向きに z 軸をとり、陰極を $z = 0$ 、陽極を $z = d$ とする。定常状態では、電場や電荷密度は時間に依らず、それぞれ、 $E(z)$ 、 ρ と書ける。また、電流密度は一定値 j である。

Maxwell 方程式から

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

が得られる。

電子は極板間を連続的に流れており、位置 z における電子の速度を $v(z)$ とすると

$$\rho(z)v(z) = j \quad (4.19)$$

が成り立つ。

一方、一つ一つの電子の運動方程式は、Lagrange 微分を $\frac{D}{Dt}$ と書くと

$$m \frac{D}{Dt} v(z_0, t) = -eE(z(t)) \quad (4.20)$$

である。ここで、Lagrange 微分と Euler 微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ の間には

$$\frac{D}{Dt} f(z_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(z, t) + v(z) \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) \quad (4.21)$$

という関係がある。ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} v(z_0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} v(z) + v(z) \frac{\partial}{\partial z} v(z) \\ &= v(z) \frac{\partial}{\partial z} v(z) \end{aligned} \quad (4.22)$$

よって、式(4.20)は、

$$mv(z)\frac{\partial}{\partial z}v(z) = -eE(z) \quad (4.23)$$

と書き直せる。境界条件 $E(0) = 0$ 、 $v(0) = 0$ 及び極板間の電位差が V であることを用いれば、式(4.18)、(4.19)、(4.23)を解くことが出来て

$$j = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\epsilon_0}{d^2}V^{\frac{3}{2}} \quad (4.24)$$

$$v(z) = \sqrt{\frac{2eV}{m}}\left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.25)$$

$$\rho(z) = \frac{4}{9}\frac{\epsilon V}{(d^2z)^{\frac{2}{3}}} \quad (4.26)$$

となる。すなわち、電子の飛び出す数は電圧の $3/2$ 乗になる。

4.2 磁場中の加速シミュレーション

4.2.1 概要および目的について

今回の実験の目的は、電子が cavity で加速されて得たエネルギーを測定することである。この測定のために、電磁石を用いている。今回の実験では、一方のスリットから入ってきた電子が磁石内で一定半径の円軌道を描いてもう一方のスリットへと抜けていくのを観測し、そのときの磁場の大きさを測定した。そして、それによって電子の運動量を計算し、さらにその値によって電子のエネルギーを得ることができる。

4.2.2 実験の装置について

この実験では、電子を円運動させるために、下図のようなコイルを使った。これは96年度の後期 A2 グループが作成したものであり、数 mT の一様磁場を生じるための磁気回路となっている。この電磁石は、ヒステリシス効果を少なくするために純鉄を材料としており、relative permeability(比透磁率)は理科年表によれば最大で 8000 ~ 9000 であるから、ここでは 8000 であると考ええる。

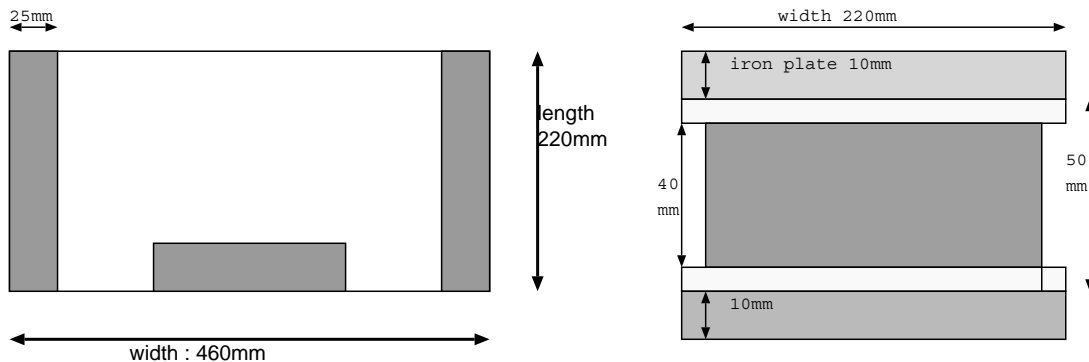


Figure 4.6: Momentum analysing magnet

この回路では、回路に間隙があるので、磁束はそこで空气中に漏れる。近似的に考察すると、純鉄中に閉じ込められていた磁束が間隙の部分で空气中に漏れると、磁束はたがいに反発して広がろうとする。ところが鉄で囲まれた部分より外側に行くことはできないので、磁束が一番安定な等間隔を保つのである。

昨年の実験班によって、100turn のコイルが3本作成され、上図のように組み立てられている。また、空気中で加速すれば、電子が空気中の分子と衝突するためエネルギーの多くが失われる。そこで下図に示すような容器を用い、その中を真空ポンプによって真空状態にした上で加速することになっている。電子はこの容器の中を円運動することになる。

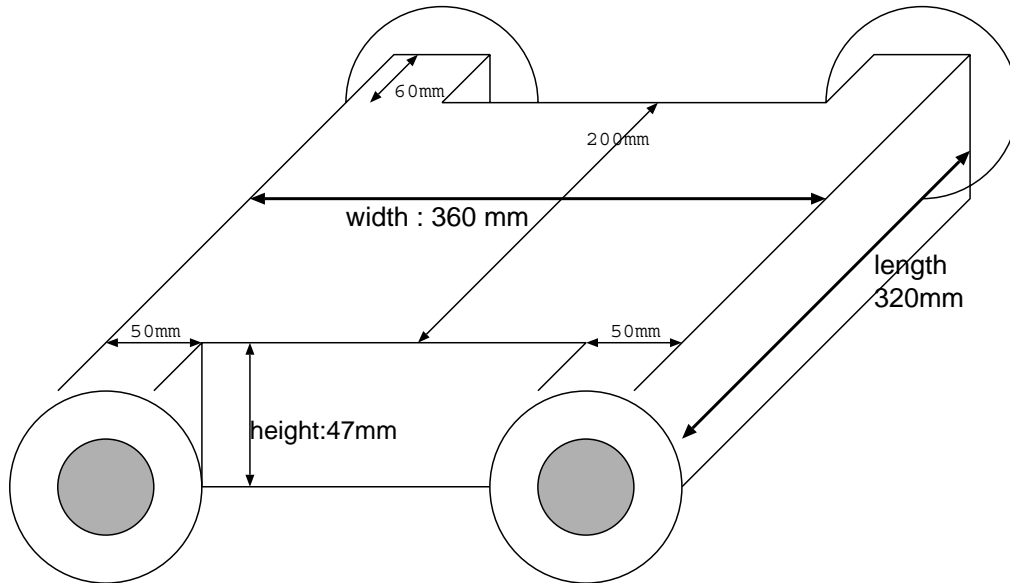


Figure 4.7: 真空容器の概形

4.2.3 相対論における一様磁場中の電子の運動について

まず、一様な磁場中の電子の運動を考える。ここでは、 $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ であるとし、運動量を p 、速度を v 、電荷を q とする。

ここでは、まず $t = 0$ において電荷は原点にあり、初速度を $(v_{0x}, 0, 0)$ であるとする。また、ローレンツ力は電荷の運動方向に垂直に働くことから、電荷のエネルギーは常に保存され、これを \mathcal{E} とする。

粒子にはローレンツ力 $F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が作用するので、以下

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.27)$$

と定義する。まず

$$mv = \frac{p}{\gamma}, \quad \mathcal{E} = \gamma mc^2 \quad (4.28)$$

であるから、一様磁場内での運動方程式は

$$\frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{p}}{\gamma} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.29)$$

である。よって、 $\omega = \frac{c^2 B q}{\mathcal{E}}$ とすれば、微分方程式

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (4.30)$$

が成立する。これを解くと、上記の方程式の両辺を微分して

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x, \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y \quad (4.31)$$

を得るので、これを初期条件に合うように解けば

$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t), \quad v_y = -v_{0x} \sin(\omega t) \quad (4.32)$$

を得て、座標に関しては

$$x = \frac{v_{0x} \mathcal{E}}{Bqc^2} \sin\left(\frac{Bqc^2}{\mathcal{E}} t\right), \quad y = \frac{v_{0x} \mathcal{E}}{Bqc^2} (-1 + \cos\left(\frac{Bqc^2}{\mathcal{E}} t\right)) \quad (4.33)$$

となり、相対論的に考察した時、半径 $r = \frac{v_{0x} \mathcal{E}}{Bqc^2}$ の円運動をすることが分かる。

今年の A2 実験では磁場測定は行なわなかったが、磁場分布の決定は後に述べる POISSON を用いて行ない、それで求めた磁場分布を用いて考察していくことにする。従って、磁場分布は必ずしも一様分布ではなく、特に磁石の外部にも磁場が存在することから、電子のスリットへの入射角に影響を及ぼすさまがシミュレーションで見られることであろう。この微分方程式の数値解の取り扱いについては、後に述べる。

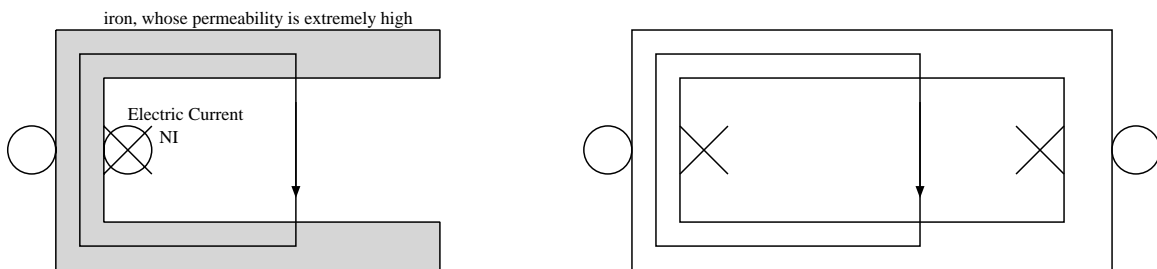
4.2.4 磁場測定プログラム POISSON について

POISSON/SUPERFISH コードグループは、2次元電磁場プログラムのパッケージである。このうち POISSON(PANDIRA) は電磁石 (または永久磁石) によって作られる静磁場および静電場の計算コードであり、このプログラムによって磁場分布などを知ることができる。京大の UNIX よりこのプログラムを利用する場合は、まず

```
set path = ( $ path /home0/iwashita/PS/PSxeq)
```

のように path を設定する必要があるが、データファイルをつくって電磁石の形状を指定しなければならない。

これについて、補足説明を加えたい。このデータでは、上図に示したように3つコイルがあるうちの真中の一つしかないものとしてシミュレーションを行なっているが、実はこのように近似しても状況は同じことである。



上図の左側のような系での金属版の間の磁場を考える。変位電流の存在しない時の Maxwell 方程式は $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ である。また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とより、二つの異なる物質の境界では磁場の面に垂直な成分は $\mathbf{B} = \mathbf{H}\mu$ が連続である。よって、純鉄中では relative permeability が極めて大きいため、金属中では $\mathbf{H} = 0$ であると見做すことができる。よって、Ampere の法則により

$$\int_S \mathbf{j} ds = \int_S \nabla \times \mathbf{H} ds = \int_{\Omega_S} \mathbf{H} dl = Hd \quad (4.34)$$

すなわち金属板の間隔を d として $H = \frac{NI}{d}$ と表せて、これは電流との距離に依存せず一定の値をとるので、これに注目する。よって、右側の図に関して言えば、同様にループをとって考察すれば、コイルが二つ存在したとしても、内部の磁場の値は変化しないことが分かる。

このことをふまえれば、3つ作ったコイルのうち一つしかないとして考察したとしても内部の磁場の値は変わらない。したがって、以下に示すようなデータで解析することの正当性が示された。

```
title
Magnet in Uji
poisson
mode -1
ymax 50.0
xmax 7.0
xmesh 0.5
ymesh 0.5
pxtop 3.5
pxbot 3.5
pytop 50
pybot 0.0
ltop 51
lbot 1
cartesian

nseg 4
rseg 0.00 50.00 50.00 0.00
zseg 0.00 0.00 7.00 7.00

nseg 8
rseg 0.00 22.00 22.00 2.50 2.50 22.00 22.00 0.00
zseg 0.00 0.00 1.00 1.00 6.00 6.00 7.00 7.00
matpro 2
fixgama 0.000125

nseg 4
rseg 2.50 3.00 3.00 2.50
zseg 1.50 1.50 5.50 5.50
matpro 1
current 100

begin
end
```

使用される命令は、SUPERFISH と重なるものも多いが、POISSON の命令について解説しておく。

- `nseg`: 電磁石の形状を決定する際に、座標の個数を設定する
- `zseg, rseg`: POISSON では、cartesian 座標であって、SUPERFISH とは違って円筒座標ではない。cartesian 座標では、それぞれ横方向、縦方向の座標を表す。
- `mode`: permeability(透磁率)のオプションを示す命令である。mode-0 に対しては permeability は有限でユーザーが設定したテーブルによって得られる。mode-1 については permeability は後に述べる命令 `fixgama` によって設定される。mode -2 では、permeability は無限大であることを示す。
- `cartesian`: 特に SUPERFISH に関して、円筒座標でなく、通常の座標系で計算をしたい時にこの命令を用いる (Poisson は何も指定しなければ cartesian 座標系となる)。また、円筒座標系にしたければ `cylindrical` を用いる。
- `fixgama`: 領域の permeability を設定する。ここでは、物質の relative permeability(比透磁率)の逆数で指定する。故に、ここでは比透磁率が 8000 の純鉄を想定しているため、`fixgama 0.000125` とするのである。
- `current`: 領域内の (電流 [A]) × (コイルの巻き数) = IN を指定する。ここで注意しなければいけないのは、POISSON は 2 次元磁場解析プログラムであるため、電流は図を書いている平面に垂直な成分しか指定できないことである。従って、ここでは平面の表から裏に電流が流れていることを示している。
- `px(y)top(bot)`: このシミュレーションでは、磁場の値はファイル `outpoi` に出力されるが、このままでは $y=0$ の点のデータしか得られないという問題が起こる。そこで、`outpoi` のファイルに出力したい範囲を指定するために、これらの命令を用いる。磁場の強さを出力する範囲は、 $(pxbot, pxtop) \times (pybot, pytop)$ となり、間隔は特に断りがなければメッシュのサイズに一致する。

POISSON は 2 次元磁場解析ソフトであるから、磁場の x 成分は出せないことになる。従って、 y, z 成分のみが得られ、 x 成分は無視することにして、電流が 1A のときの結果は下の表に示す通りとなった。このデータから分かるように、磁石の中だけでなく外でも y 成分に比べて z 成分のほうが割合として大きい。そのため、 y 成分は無視して考えることに問題はないと考えられる。以下に、 z 座標の磁場の大きさをプロットしたグラフを示しておく。

実際の電子の加速シミュレーションでは、ガウスメーターによってある一点だけの磁場のみを測定しているため、磁石内では一様磁場であると仮定する。このことの妥当性は、下のデータにも示されている。本来は鉄は残留磁場が残るのでヒステリシスの効果は無視できないが、今回はその効果を考慮せず、Ampere の法則より磁場の大きさは電流に比例し、磁場分布の値各点間の比は電流の大きさによらないとして近似して、後のシミュレーションを行なう。

4.2.5 鉄のヒステリシス効果

今回測定に使った磁石は純鉄でできているため、コイルに流す電流を変化させる今回のような実験では、ヒステリシスの効果が見られる。つまり、電流を変化させた時残留磁場が生じるので同じ電流を流した時でも磁場の値が異なる場合がある。

測定に際しては、まず電流を 0[A] から始めて 0.10[A] ずつ変化させていき、1.00[A] まで上げ、それぞれの点における磁場の大きさを測定する。次に、0.10[A] 間隔で -1.00[A] まで下げていってそれぞれの点の磁場を測定する。そして、最後に 0.00[A] まで上げていく。すると下に示すようなグラフが得られた。

しかし、実際の実験で行なうような電流を上げたり下げたりする時の効果は再現できない。また、今回は POISSON による見積りの下での磁場を用いているため、ヒステリシスが磁場分布に影響を及ぼさない

y 座標	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
磁場 (y 成分)	0.014	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
磁場 (z 成分)	26.695	25.548	25.164	25.036	24.985	24.957	24.937	24.919	24.904	24.890	24.876
y 座標	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
磁場 (y 成分)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.009	0.003	-0.001	-0.001
磁場 (z 成分)	24.864	24.850	24.828	24.776	24.619	24.117	22.647	19.360	14.617	10.079	6.645
y 座標	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	***
磁場 (y 成分)	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	***
磁場 (z 成分)	4.299	2.760	1.766	1.129	0.721	0.461	0.294	0.188	0.120	0.077	***

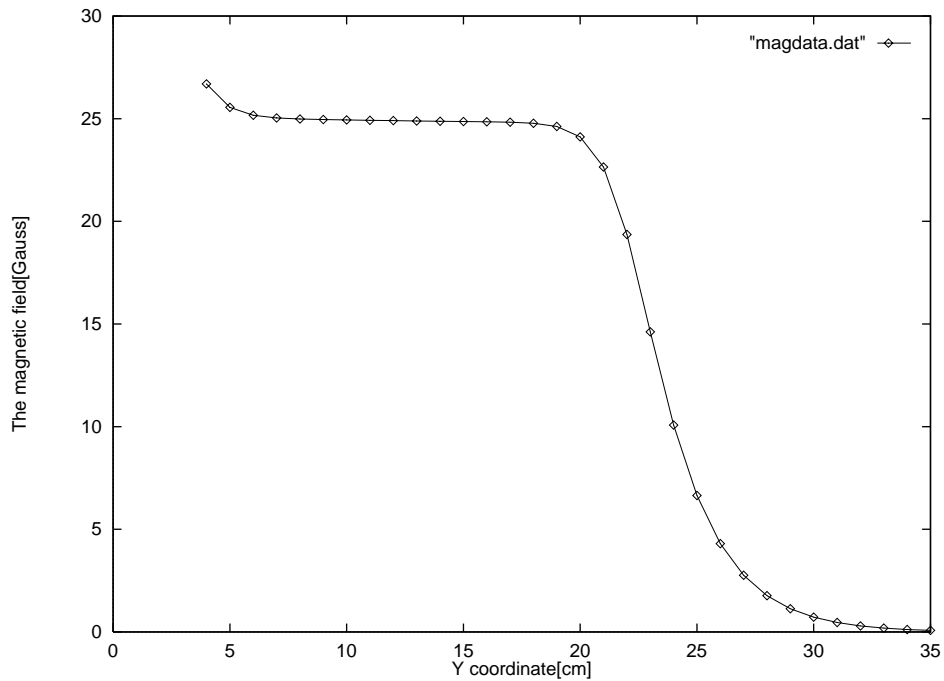


Figure 4.8: 1A の電流を流した時の磁場の z 成分

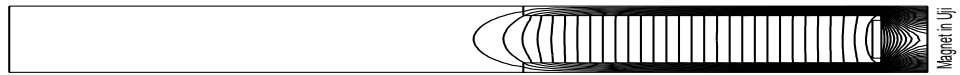


Figure 4.9: POISSON によるシミュレーションで得た磁力線

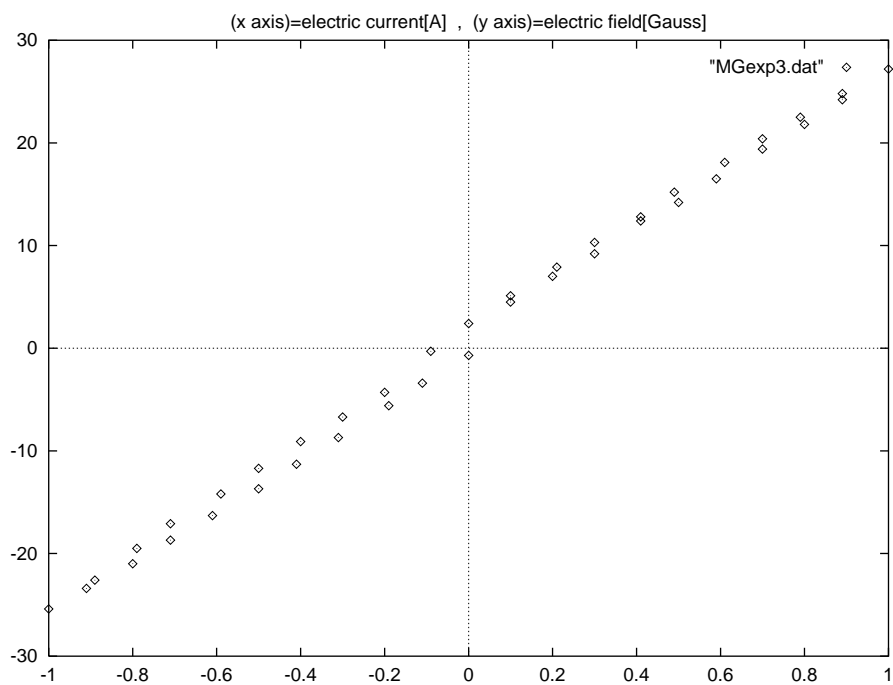


Figure 4.10: 鉄のヒステリシス効果

なら、その効果は無視していいことにする。ただ、ヒステリシスが分布に影響するかどうかを調べる術はないので、ヒステリシスによる影響は考慮しないことにする。

4.2.6 Momentum analysing magnet 内での電子の運動シミュレーション

次に、電子の運動シミュレーションを FORTRAN のプログラム上で行なうことにした。POISSON のシミュレーションの目的は、磁石のコイルに流す電流と、内部磁場の強さの対応をつけることにあった。この分布を基にして、コイルの電流が一定の時に、どれくらいの入射エネルギーに対して電子がスリットを抜けるのが観測されるのかどうか(本実験では、スリットの孔の周辺に蛍光物質を塗ってあるので、スリットの近辺に電子が当たることで緑色の蛍光が生じ、それによって電子がスリットを通ったかどうかを観測している)を見る。シミュレーションでは入射エネルギーを変化させて電流との対応を見た。これによって本実験で得られた電流のデータを、入射エネルギーのデータに変換できる。

POISSON によるシミュレーションにより磁場分布が得られているので、これより x 方向については磁場の z 成分は一樣として、 y 方向について 1cm 刻みの磁場分布を得る。これを基に、磁石中の任意の座標における磁場の強さ $B(y)$ [Gauss] を線形近似によって求めた。

シミュレーションの方法として、まず入射エネルギーを T [keV] とすると、相対論的な計算により T は

$$m^2 c^4 = (mc^2 + T)^2 - c^2 p^2 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{T^2 + 2mc^2 T}}{c} \quad (4.35)$$

で与えられるので、これによって電子の初速度を知ることができる。また、入射角度を考慮して $(0, -1)$ 方向とのなす角を(反時計回りに) θ とすると

$$(p_x, p_y) = (p \sin \theta, -p \cos \theta) \quad (4.36)$$

となる。また、これによって初速度は

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = \frac{cp}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} \quad (4.37)$$

として得ることができる。その後は、前に一樣な磁場について考察した時の式を用いて、速度については

$$(v_x, v_y) = \left(\frac{c^2 B q}{\mathcal{E}} \frac{dv_y}{dt}, -\frac{c^2 B q}{\mathcal{E}} \frac{v_x}{dt} \right) \quad (4.38)$$

が得られる。特に $\mathcal{E} = mc^2 \gamma$ であることを考えて、微分演算を差分に置き換えて近似することで、数値的に処理する。 δt を十分小さい時間とすれば

$$\frac{v_x(t + \delta t) - v_x(t)}{\delta t} = \frac{Bq \sqrt{1 - \frac{v_x^2(t) + v_y^2(t)}{c^2}}}{m} \quad (4.39)$$

$$\frac{v_y(t + \delta t) - v_y(t)}{\delta t} = -\frac{Bq \sqrt{1 - \frac{v_x^2(t) + v_y^2(t)}{c^2}}}{m} \quad (4.40)$$

として求めることができる。また、座標が

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \delta t, \quad y(t + \delta t) = y(t) + v_y(t) \delta t \quad (4.41)$$

で求めることができることはいうまでもない。このアルゴリズムに基づいて電子の軌跡を計算して行って、磁石の壁に当たったところでシミュレーションを打ち切る(ただ、ここでは電子が円軌道を描いてスリットを通り抜けたかどうかのみが問題であるから、壁の形や壁との衝突は本シミュレーションでは厳密に再現していない)。このシミュレーションを、入射角度を変えて繰り返し、最終的にスリットを抜けるような電子の数が最も多い時の T と I の値を記録する。

4.2.7 結果および考察

シミュレーションの結果、電子銃から放たれた電子がスリットを通過して反対側の faraday cup に入る時の電流の大きさと、電子エネルギーの関係が得られた。

コイル電流 [A]	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
電子エネルギー [keV]	3.1	4.4	6.0	7.8	9.9	12.2	14.7
コイル電流 [A]	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
電子エネルギー [keV]	17.5	20.5	23.7	27.1	30.7	34.5	38.6

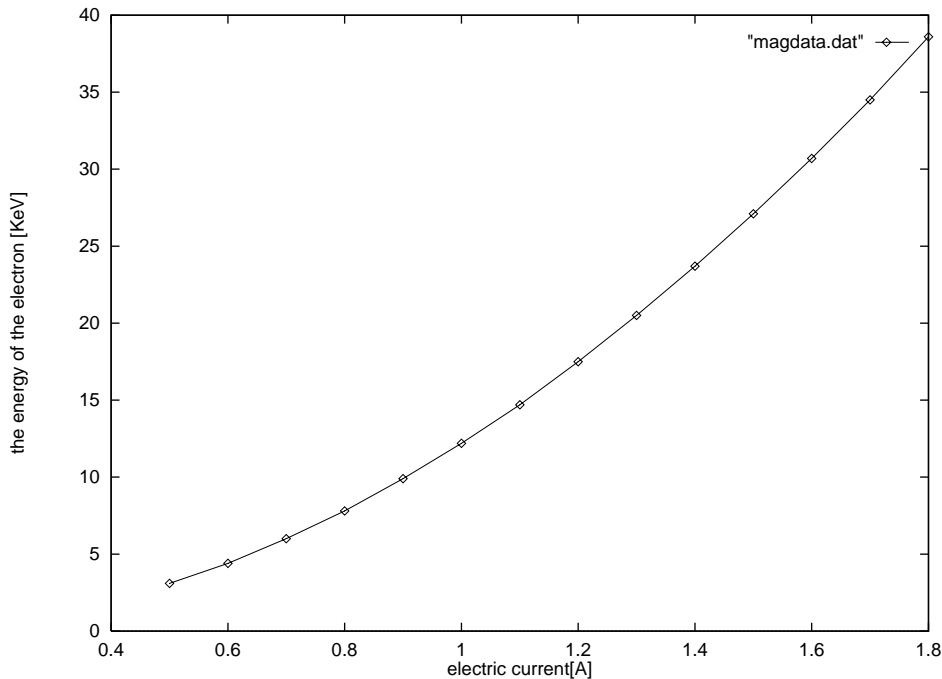


Figure 4.11: コイルの電流と粒子のエネルギーの関係

グラフに fitting した結果を $E[\text{keV}]$ と $I [\text{A}]$ の関係にして表す。そのためにはこの関数が 2 次関数 $ax^2 + bx + c$ で表されるとして、最小二乗法を用いる。今、 n 個のデータ $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ が与えられて、これが放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の上にあるとすると、各点における誤差 $\delta y = ax_i^2 + bx_i + c - y_i$ を得る。これより、二乗誤差の総和は、

$$\Delta = a^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + nc^2 + 2ab \sum_{i=1}^n x_i^3 + 2ac \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2bc \sum_{i=1}^n x_i - 2b \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2c \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.42)$$

であり、これの極小値を求める。これを a 、 b 、 c について偏微分すると

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 2(a \sum_{i=1}^n x_i^4) + b(\sum_{i=1}^n x_i^3) + c(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i) = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = 2(a \sum_{i=1}^n x_i^3) + b(\sum_{i=1}^n x_i^2) + c(\sum_{i=1}^n x_i) - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c} = 2(a \sum_{i=1}^n x_i^2) + b(\sum_{i=1}^n x_i) + cn - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \quad (4.45)$$

が成り立つので、この連立方程式を解けばよく、結論としては

$$E = 11.2297I^2 + 1.57165I - 0.576401 \quad (4.46)$$

を得る。また、電子の描く軌道は下図のようになり、外側にも磁場のリークがあることで、入ってくる軌道が少し湾曲しているさまが分かる。

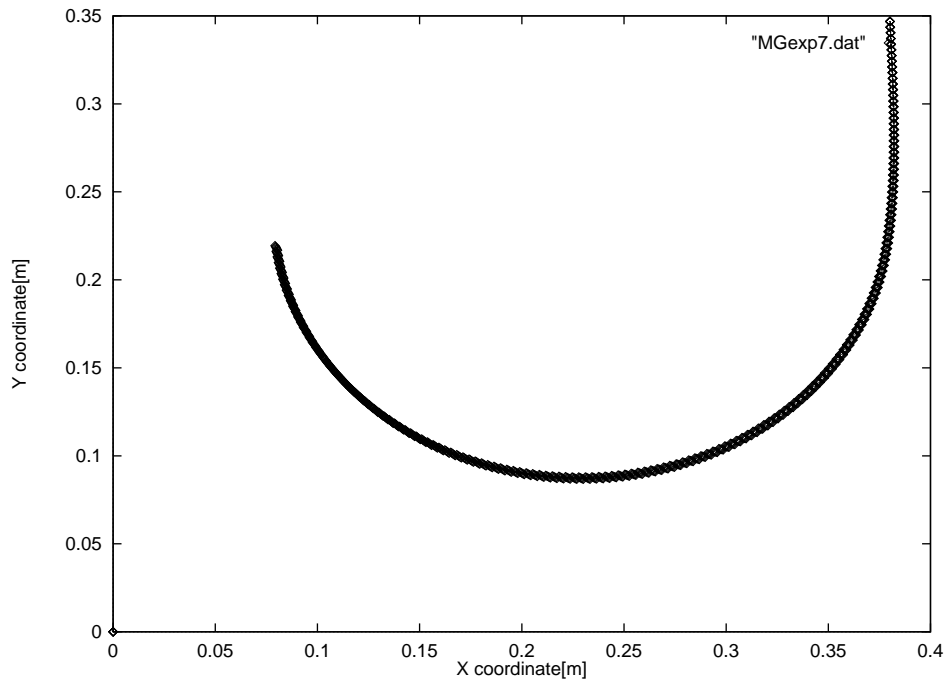


Figure 4.12: 磁石内を加速して円運動をする電子の軌跡

Chapter 5

実験結果

5.1 測定結果

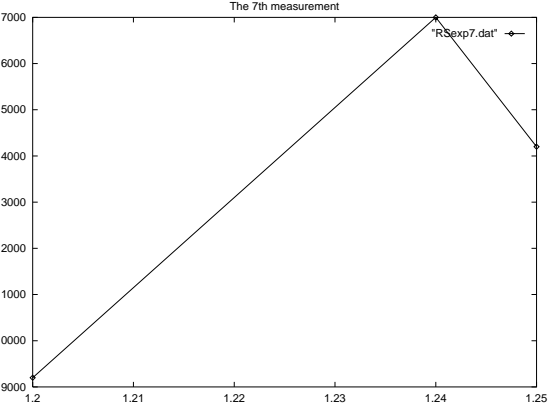
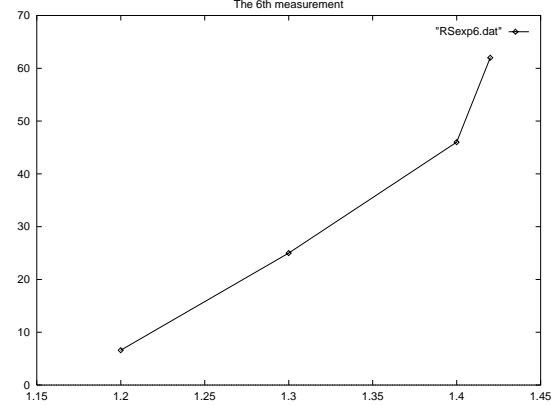
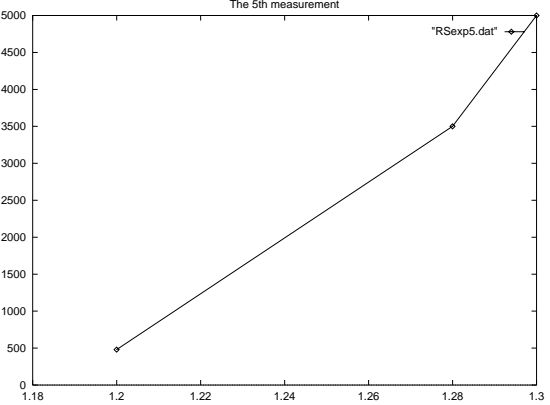
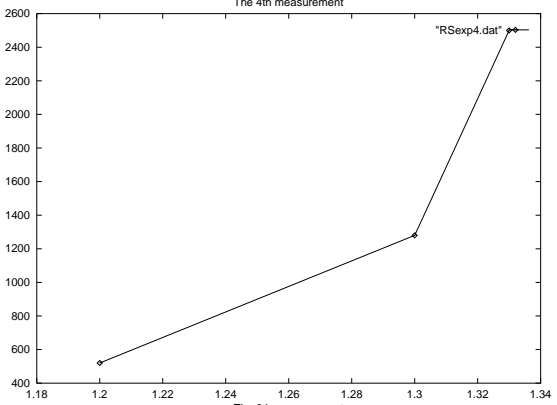
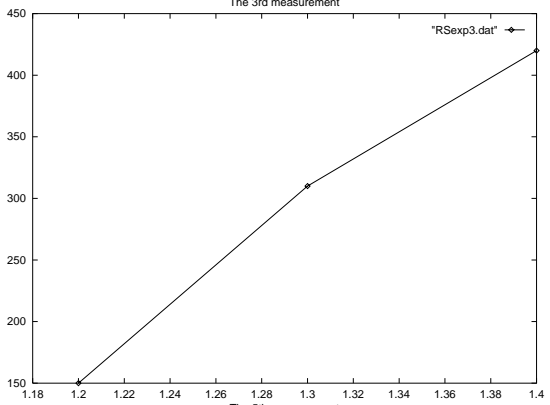
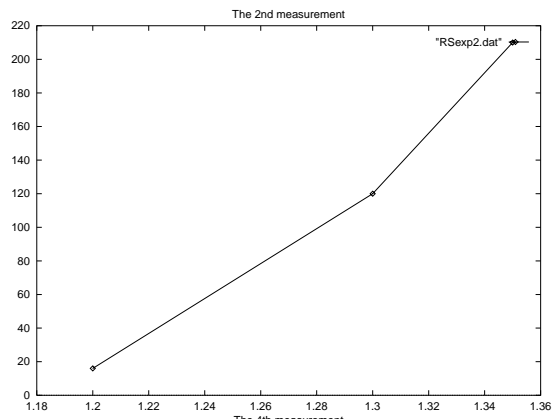
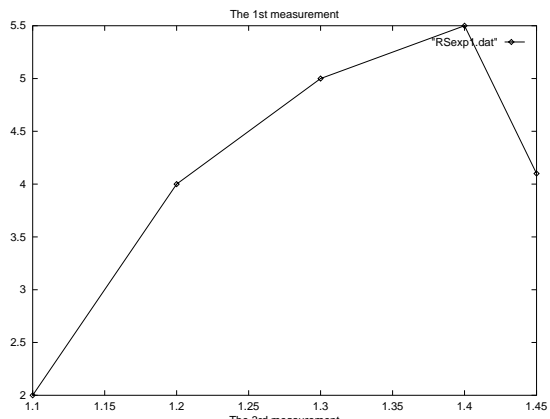
この実験の最終目的は、加速器で加速された電子のエネルギーを測定することにあつた。そのために、以下のデータを測定した。測定に当たっては、コイルの電流を変化させてビーム電圧が最高になる点を検出した。この時に電子は磁石の中を運動して最も多くの数がスリットを通過し、エネルギー測定に当たってはこの値が意味のある値であると言える。従って、以下の表ではビーム電流が最大になる点のみを記すことにする。

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
共振周波数 (MHz)	144.0434	144.0425	144.0386	144.0473	144.0410	144.0395	144.0400
入力電圧 (mV)	3.0	8.8	8.8	8.6	7.5	8.4	8.0
反射電圧 (mV)	8.8	24.0	23.0	24.5	22.0	24.0	22.5
フィラメント電流 (A)	3.0	3.5	3.7	4.0	4.2	3.3	4.4
収束コイル電流 (A)	0.24	0.28	0.26	0.26	0.28	0.27	0.26
マグネットコイル電流 (A)	1.40	1.35	1.36	1.33	1.30	1.42	1.24
マグネットの磁場 (A)	32.5	31.7	32.5	31.0	30.7	32.8	28.9
ビーム電圧 (最大値)(mV)	5.5	210	420	2500	5000	62.0	17000

Table 5.1: 電子エネルギー測定実験によるデータ

また、以下にコイルに流した電流とビーム電圧の関係を表したグラフを示す。ただし実験では最大値を検出した後のビーム電流の測定は行なっていないため、山型になってないグラフもある。

いずれのグラフも、横軸はコイルの電流 [A] を、縦軸はビーム電圧の大きさ [mV] を表す。また、磁場の大きさを見れば、前節で挙げた POISSON によるコイル電流 1[A] の時の磁場解析の結果と合致するので、前節での磁場のシミュレーションの結果を今回のケースに当てはめることの妥当性が分かる。また、前節では電子の電場内加速シミュレーションを行ない、異なる位相の電子を初速度 0 で加速させた時の、相対論的効果を加味しての最終的に電子の得るエネルギーの分布を求めた。この結果より、電子の加速エネルギーが (かけた電圧) $\times(1\text{eV})$ となっていることが保証されている。



5.2 入力パワーの計算

前節で述べたように、鉄は残留磁場が生じやすいので、ヒステリシスの効果が現れる。つまり同じ電流値でも電流を上げた時と下げた時とでは磁場の大きさが異なるわけであるが、電流の上げ下げの再現は不可能である。従って、ヒステリシスの効果はここでは考えないことにする。その代わりに、ここでは前に記した表中の磁場の実験値を用いて考察することにする。

この実験では、ガウスメーターを用いてある一点の磁場を求め、磁石内では一様磁場であると仮定している。計ったポイントは、下図に示すように、磁石の出口から 16mm 離れたところである。

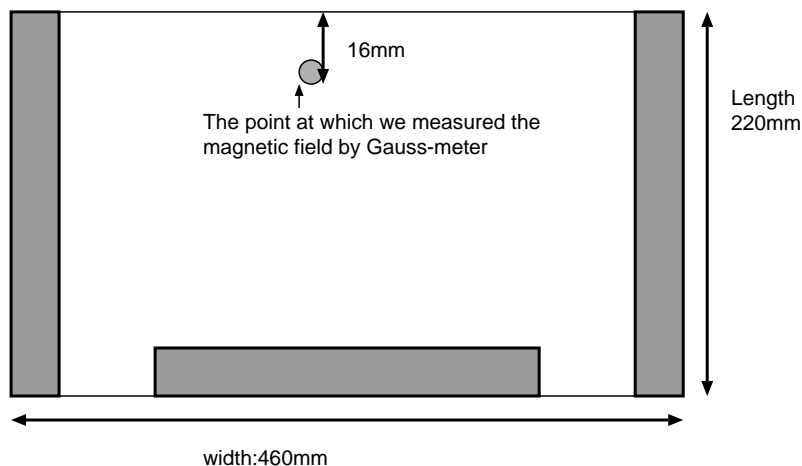


Figure 5.1: 実験で磁場を測定した位置

つまり、第4章で示した磁場加速シミュレーションのデータでいえば、 $y = 20.4\text{cm}$ の点に当たる。POISSONのシミュレーション結果によれば電流 $1[\text{A}]$ の時の磁場は $23.741[\text{Gauss}]$ である。従って、ヒステリシスの効果を考慮せず磁場が電流に比例するとすれば、関係式

$$B[\text{Gauss}] = I[\text{A}] \times 23.741[\text{Gauss/A}] \quad (5.1)$$

が成立する。また、第4章で行なった磁場内シミュレーションより、電流と電子のエネルギーの関係は、 E をエネルギー $[\text{keV}]$ 、 I を電流 $[\text{A}]$ として

$$E = 11.2297I^2 + 1.57195I - 0.576401 \quad (5.2)$$

である。これを用いてシミュレーションの結果を算出すれば、以下の表のようになる。

次に、電子が加速によって得たエネルギーを実験のデータから求めることにする。我々はすでに前節で cavity のシャントインピーダンスを Beadpull の手法によって実験的に求めている。その値は、前に述べたように

$$Z = 1.820 \times 10^6 \Omega$$

である。シャントインピーダンスの定義により、加速電圧を V 、入力パワーを P とすると

$$Z = \frac{V^2}{P}$$

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目	7 回目
マグネット中磁場 [Gauss]	32.5	31.7	32.5	31.0	30.7	32.8	32.9
マグネット電流 [A]	1.37	1.33	1.37	1.31	1.29	1.38	1.22
電子エネルギー [keV]	22.61	21.54	22.61	20.62	20.23	23.03	17.98

Table 5.2: 磁場中シミュレーションによる計算結果

となる。ここで欲しいのは電子の加速電圧である。前節の電場内加速シミュレーションにより、これが分かれば電子のエネルギーも直ちに計算できる。上式を変形して

$$V = \sqrt{ZP}$$

となる。

上式を見て分かる通り、我々が求めるものは cavity への入力パワーである。これを以下の手順によって求める。

- step1: 検波器直前のパワー測定 ここでは、Attenuator および Directional Coupler に入って減衰された後の、検波器直前のパワー (以下 P_1 [mW] と表す) を求める。ここでは、入力電圧が実験データとして得られている。前節ですでに説明した通り、検波器の calibration によってパワーと電圧の関係は求まっており、電圧を V [mV] として

$$P_1 = -2.27622 \times 10^{-5} V^2 + 0.0187445 \times V + 0.00100635$$

であることがわかっている。つまりほぼ 1 次関数的に変化している。この式を用いて、実験データの入力電圧から P_1 [mW] を求める。

- step2: cavity の入力パワーの算出 前述のとおり、上で得られたエネルギーはあくまで減衰したものであって、cavity の直接の値とは異なる。ここでは Directional Coupler および Attenuator によって減衰した割合から、cavity への入力パワーを逆算することにする。まず、Attenuator は電力を $\frac{1}{10}$ に落とすように作られているので、これによってエネルギーは 10dBm だけ落ちる。また、Directional Coupler の coupling の値は -28dBm であることが判明している。Low Pass Filter については理論上減衰は起こらないものとして、都合 $28+10=38$ dBm の減衰があったと見做せる。故に、cavity への入力パワーを P [mW] とすると、関係式

$$P_1 = 10^{-3.8} \times P$$

が成り立つ。ゆえに P を求める式は、 $P = 10^{3.8} \times P_1$ である。

以上のように段階を踏んで、入力電圧を求めると、結果は以下の表のようになった。

電子の加速シミュレーションによる分布の考察で分かっていることは、 x [kV] の電圧を電子にかけると電子のエネルギーはその大多数が x [keV] のエネルギーを持つ、ということであった。この点を考慮すると、このデータを解釈する限り、電子はわずか 1 [keV] 強のエネルギーしか得ていないことを意味し、明らかに最初に示したシミュレーションの結果と著しく異なる。

これは明らかにおかしな結果である。そこで、我々はこのようなおかしな値を得た原因を考察したところ、次の問題点が判明した。問題は Attenuator の回路とスイッチの絶縁不良にあった。我々は京大 (左京キャンパス) にある Net Work Analyser で再度 Attenuator のパワーロス測定したところ、

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目	7 回目
入力電圧 [mV]	3.0	8.8	8.8	8.6	7.5	8.4	8.0
検波器前のパワー [mW]	0.057	0.164	0.164	0.160	0.140	0.157	0.150
cavity への入力パワー [W]	0.359	1.0347	1.0347	1009.5	0.8833	0.9906	0.9464
加速エネルギー [kV]	0.828	1.407	1.407	1.390	1.300	1.377	1.346

Table 5.3: 加速エネルギーの計算結果 (Attenuator の絶縁不良考慮せず)

- 絶縁不良のため 34dBm のエネルギーの減衰が見られた

ということが判明した。よって、この点を考慮すれば

- エネルギーの減衰は合わせて $28+34=62\text{dBm}$ である

と考えられる。次に、この点を考慮してデータを解析したところ、以下の表のような値を得た。

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目	7 回目
絶縁不良を考慮した入力パワー (W)	90.34	259.92	259.92	253.58	221.89	248.82	237.73
上データから求めた加速電圧 (kV)	13.15	22.30	22.30	22.02	20.60	21.82	21.32

Table 5.4: Attenuator の絶縁不良を考慮した時のデータ

このように、Attenuator の絶縁不良を考慮すれば、磁場内シミュレーションの結果と非常に良く合致したデータが得られた。また、入力パワーをみても、ここで用いたアンプが最大 250[W] の出力を持っていることから、アンプを出力いっぱいまで上げて実験していたことにも合致する。

5.3 Beam Loading について

今回のように高周波で空洞を励振すると、空洞には高周波エネルギーが蓄えられるが、同時にその一部は空洞内壁で表面抵抗のために失われ、空洞内壁での損失に相当する電力を供給する。この時、空洞と高周波電源とが整合状態にあれば、電源から見て空洞は定常状態で純抵抗負荷に見える。高周波型の加速器は、高周波のエネルギーを荷電粒子の運動エネルギーに変換する装置であるから、粒子ビームが加速されてエネルギーを得れば高周波はその分だけさらにエネルギーを失うことになる。これは電源側からみれば、空洞負荷にさらに負荷が並列に追加されたことに相当する。このビームによる高周波電源、空洞ビーム負荷の関係は、等価回路で示すと、図のようになる。

従って、進行波型加速では、ビーム負荷によって電流が上がるにつれて加速電場が減少し、ひいては電子の運動エネルギーがそれに応じて減少することになる。以下、ビーム電流の値と電子のエネルギーの相関関係について考察していく。

本来であれば、カソード電流を実験的に測定してそれに基づいて考察すべきであるが、今回の実験では不手際によりこの値を測定し損ねた。従って、定量的な議論は不可能であり、ビーム電流と、マグネットに関するシミュレーションによる電子のエネルギーの値を比較することによる定性的な議論にとどめることとする。

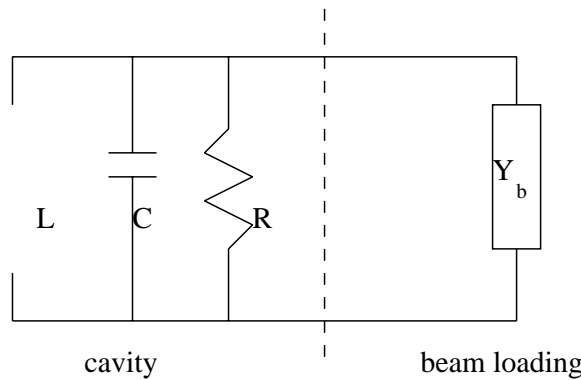


Figure 5.2: cavity とビーム負荷の関係の等価回路

ビーム電流 [A]	5.5×10^{-6}	2.1×10^{-4}	4.2×10^{-4}	2.5×10^{-3}	5.0×10^{-3}	6.2×10^{-5}	1.7×10^{-2}
電子エネルギー [keV]	22.61	21.54	22.61	20.62	20.23	23.03	17.98

Table 5.5: ビーム電流と、磁場内シミュレーションによる電子エネルギーの関係

以下にビーム電流と電子のエネルギーの相関関係を示す。

このデータを見れば、概してビーム電流が大きくなればなるほど電子の得るエネルギーが低くなることが観察される。まず、1番目のデータであるが、後で述べる通りこれはデータとしては意味のある値ではないので、考慮の対称外とする。2番目以降に関してみれば、2番目と3番目のデータに関しては例外的にビーム電流の高いほうがエネルギーが高くなっているが、それ以外はビーム電流が上がるほどエネルギーが下がるという関係が得られる。例えば7番目のデータを見ればビーム電流を高い値に上げたことでビームのエネルギーは著しく減少している。

つまり、cavity が失ったエネルギーは、流れた電流が上がるにつれて大きくなり、その結果加速電圧を下げているということが、以上の考察より定性的に明らかとなった。

5.4 考察、および反省点

とはいうものの、我々に磁場内シミュレーションの結果に合致する「いい」データをもたらしたのは、Attenuator が絶縁不良であってきちんと 10dBm 下げるとい役割を果たさなかったという事実である。今回の回路系は我々が自分で作ったものであるから、本来は接触不良はないか、とかは実験の直前には見ておくべきである。そのことを怠ったという意味において Attenuator の件は我々の不手際であるといわれてしかるべきである。

また、34dBm という値は、あくまで後で計った値であって、直前に確かめたことではない（しかも、Directional Coupler の線が切れていたので一度蓋をあけて修理していた）。従って、本当に実験を行なった時は 34dBm の減衰であったのか、これとは多少誤差が存在するのではないかという懸念が残ることは言を待たない。事実、誤差原因の探求のために Attenuator の減衰を測定した時、一度回路を押えて手を離すと、34 ~ 37dBm と値がいろいろ変わっていた。

とどのつまり実験中の本当の減衰の値を知る術はなく、今回の実験の測定結果は 3dBm 分くらい、すな

わち V にしてみれば、小さく見積もっても $\sqrt{10^{0.3}} = 1.4 \sim 1.5$ 倍の誤差があると解釈すべきであろう。

また、1 番目のデータは、他の実験結果と比較して、よくないデータであり、棄却すべきものであると考えられる。この不良データの原因として考えられることは、器具が電源をつけたばかりでまだ温まっていないなどの事情が考えられる。故にデータとして意味があるのは 2 番目以降である。

また、Directional Coupler や Low Pass Filter の Net Work Analysing を見ても、我々の半田づけなどの技術の未熟さゆえにオシロスコープの曲線は理想的な図とは大きくかけ離れたものであり、結合度の値にも多少のずれはあるかも知れないし、Low Pass Filter による減衰も数 dBm 程度ではあるにしても存在することは十分考えられる。今回求めるべき電子のエネルギーは、上記の求め方を見ても分かる通り数 dBm の誤差が大きくデータを狂わせる。そう考えると、今回の「いい」データは、間違いに間違いが重なって「中和」された末の産物に過ぎないといえる。我々は実験の全体像をしっかりと見定め、これらの回路系の減衰が最終的結論に大きく影響していることをしっかりと認識すべきであったのではないかと、というのが今回の結論より得た反省点である。回路の製作、およびその接続はしっかりとやるべきであった。

感想

- 実験の目的がはっきりしないまま準備及び測定したので、無駄な時間を費やしたり、必要なデータが不完全だったりしたことが反省点としてあげられる。ただ、今までの実験とは違う雰囲気味わえたので楽しかった。(浅野)

- 今回の実験ではどういうわけかレポートの大部分(約 30 ページ)を担当させて頂くことになったわけですが、おそらく私が今回の実験で一番恩恵を受けている人間ではないかと思い、幸福に思います。OHP を使って発表会をしたり、助手クラスでも使えない人がいるような POISSON/SUPERFISH などのソフトを使わせて頂いたことで、子供心にも何となく自分が偉くなった気がしたものです。今までさせて頂いたことは非常に勉強になり、このコースをとって本当に良かったと感じています。

話は変わって、大澤君には迷惑をかけたなと思っています。打ち上げの酒の席の上で彼が「お前 ESS 部員なのになんでこんなにスペルミス多いねん」とおっしゃいましたが、全くその通りで恥ずかしい限りです。こんなことなら私がちゃんと責任をとれば良かったと後悔しています。大澤君にはこの場を借りてお詫び致します。

(東)

- 実験に入る前に、実験の目的やデータの意味などをもっと良く理解しておくべきだったと思う。「研究所」に入れたのが何だかとても楽しかった。文書整形とスペルミスのチェックなど、レポートの仕上げを任された。最初は生きがいを感じていたのだが、あまりの訂正箇所の多さにちょっと驚いてしまった。分担するべきだったかもしれない。(大澤)

- 今回の実験では僕の作ったものは失敗ばかりでした。フィルターや方向性結合器を作るのもうまくいかず、結局 10 個以上作ってしまいました。久しぶりに物を作る難しさを感じました。また、必要なデータをとっていなかったこともあり、実験の前の勉強が足りなかったことを思い知らされました。とにかく反省点の多い実験でした。(内藤)
- 本実験では、なかなかうまく実験が進まず、作り直してばかりで、かなりだれました。実験とは、思い通りにいかないものだ痛感しました。しかし、研究所で実験をして、ようやく自分は理学部にいるのだという実感がわきました。あと、レポートはしんどかったけど、シミュレーションはおもしろかったです。(古田)