$\boxed{\text{夢と修論}}$

The Investigation of a Supermatrix Theory

東 武大 (京大理：物 II 素粒子論)

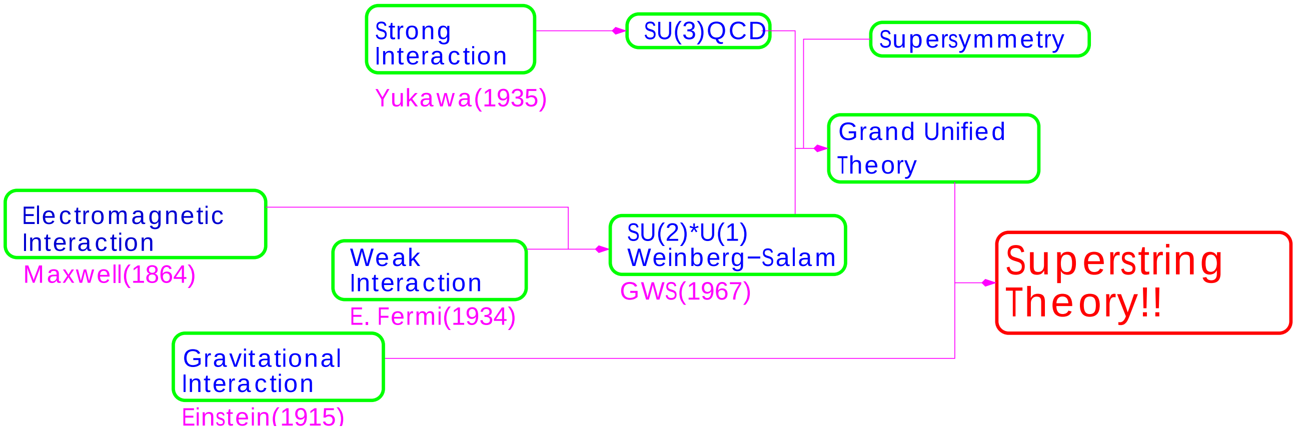
於 東浦サンパーク

2000 年 11 月 23 日 (修士論文提出まで **あと 70 日**)

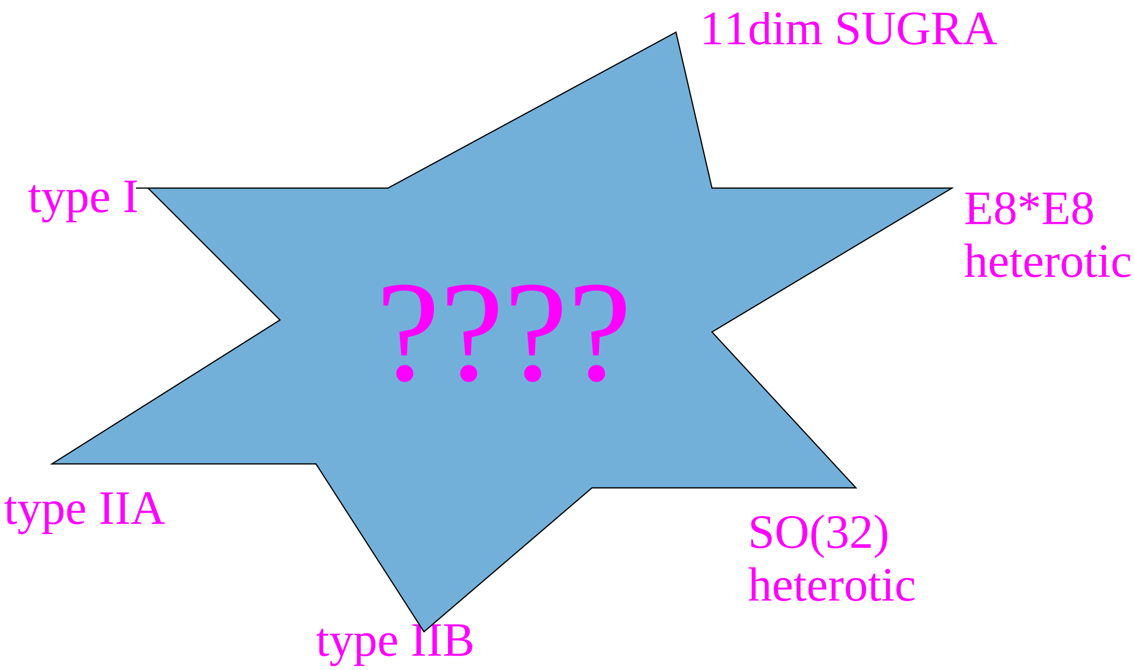
1 Introduction

統一理論としての超弦理論

超弦理論 ⇒ 4つの相互作用を統一的に記述する理論の最有力候補



D-brane の発見 ⇒ 双対性による5種類の超弦理論の統一



超弦理論を統一的に捉えるために、超弦理論の構成的定義が必要

構成的定義としての行列模型

For a review, see P.Ginsparg and G.Moore hep-th/9304011

場の理論及び超弦理論における非摂動領域の記述

場の理論	超弦理論
格子ゲージ理論	弦の世界面の離散化
large N QCD による $\frac{1}{N}$ 展開	行列模型による記述

- 2 次元以下の重力の量子化: J.Distler and H.Kawai *Nucl.Phys.* **B321**(1989) 509

  2 次元以下の non-critical string について、宇宙項のある理論として量子化可能

  全ての Riemann 面の genus の値について string susceptibility を計算

$$\gamma(h) = \frac{1}{12}(1-h)(D-25 \pm \sqrt{25-D}\sqrt{1-D}) + 2 \ (\text{for } D \leq 1)$$

  (*)D は non-critical string についての時空の次元。non-critical string では Liouville mode はもはや gauge 自由度ではない。よってこれが更に 1 次元の空間たるの役割を果たす。

- Random Triangulation : F. David *Nucl. Phys.* **B257**(1985) 45

  $D=0$ 次元時空における bosonic string を、world sheet を多角形の張り合わせとして離散化による近似して記述。

  (*) この方法は superstring に関しては、lattice ゲージ理論における SUSY および chiral fermion の再現と同様の困難により、拡張することが出来ていない。

- 非摂動領域における行列模型の厳密解

  E.Brezin and V.A.Kazakov *Phys. Rev. Lett.***B236**(1990) 144

  c(central charge) $= 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ $(m = 2, 3, \cdots)$ の場合に関して行列模型を厳密に解いた。

  - $m = 2$(pure gravity) $\Rightarrow t = f^2 + \frac{d^2 f}{dt^2}$
  - 上記 Painleve 方程式の漸近解によって求めた string susceptibility は、Distler and Kawai の結果に一致。

$$\gamma(h) = 2 - \frac{5}{2}(1-h) \tag{1}$$

では、現実の critical string に対してはどうしよう？

critical string の行列模型

BFSS matrix : n 個の D0-brane 系の作用の行列正則化

T.Banks, W.Fischer, S.H.Shenker and L.Susskind hep-th/9610043

$$L = Tr_{N\times N}\left(\frac{1}{2R}\sum_{i=1}^{9} D_0 X^i D_0 X^i - \frac{R}{4}\sum_{i,j=1}^{9}[X^i, X^j]^2 - \psi^T D_0\psi + R\sum_{i=1}^{9}\psi^T\Gamma_i[X^i,\psi]\right)$$

この理論は、10 次元の type IIA の弱結合領域でかつ非相対論的領域を見ているに過ぎない。

IKKT model : type IIB の Green Schwarz action の行列正則化

N.Ishibashi, H.Kawai, Y.Kitazawa and A.Tsuchiya hep-th/9612115. For a review,hep-th/9909038

$$S = -\frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}\left(\frac{1}{4}\sum_{i,j=0}^{9}[A_i, A_j]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\sum_{i=0}^{9}\Gamma^i[A_i,\psi]\right)$$

- 作用が積分を含まず、経路積分が普通の積分で表せられる。
- type II 超弦理論の持つ、$\mathcal{N}=2$ SUSY を再現する。
  - homogeneous : $\delta^{(1)}A_i = i\bar{\epsilon}\Gamma_i\psi, \quad \delta^{(1)}\psi = \frac{i}{2}\Gamma^{ij}[A_i, A_j]\epsilon$
  - inhomogeneous : $\delta^{(2)}A_i = 0, \quad \delta^{(2)}\psi = \xi$
  - $[\delta_\epsilon^{(1)}, \delta_\xi^{(2)}]A_i = -i\bar{\epsilon}\Gamma_i\xi, \quad [\delta_\epsilon^{(1)}, \delta_\xi^{(2)}]\psi = 0$

  (Proof) それぞれの SUSY 変換について 2 つの経路の差を取ればよい。

  - $A_\mu \overset{\delta_\xi^{(2)}}{\to} A_\mu \overset{\delta_\epsilon^{(1)}}{\to} A_\mu + i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi$, whereas $A_\mu \overset{\delta_\epsilon^{(1)}}{\to} A_\mu + i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi \overset{\delta_\xi^{(2)}}{\to} A_\mu + i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu(\psi+\xi)$
  - $\psi \overset{\delta_\xi^{(2)}}{\to} \psi+\xi \overset{\delta_\epsilon^{(1)}}{\to} \psi+\xi+\frac{i}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\epsilon$,whereas $\psi \overset{\delta_\epsilon^{(1)}}{\to} \psi+\frac{i}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\epsilon \overset{\delta_\xi^{(2)}}{\to} \psi+\xi+\frac{i}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\epsilon$
- 一つの行列が多体系、およびその相互作用を記述する。
- 理論は free parameter を持たない。 $A_\mu \to g^{\frac{1}{2}}A_\mu$,$\psi \to g^{\frac{3}{4}}\psi$

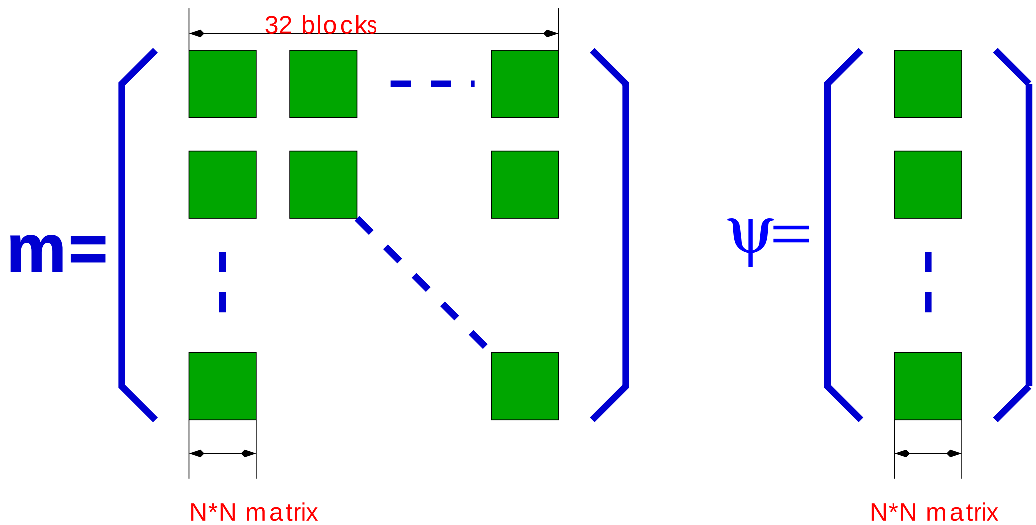
2 New Cubic Matrix Theory

我々の研究のテーマ :新しいタイプの行列模型の研究

New Cubic Matrix Theory

$$S = \frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}(str_{33\times 33} M_\alpha{}^\beta [M_\beta{}^\gamma, M_\gamma{}^\alpha]) \Leftarrow \text{non-gauged action}$$
$$S = \frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}(str_{33\times 33} M_\alpha{}^\beta M_\beta{}^\gamma M_\gamma{}^\alpha) \Leftarrow \text{gauged action}$$

- $M_\alpha{}^\beta$ は supermatrix であり、この行列模型は bosonic field と fermionic field が一つの multiplet の中に内包されている。
- この行列模型では、supermatrix の中に、$N \times N$ 行列が内包されているという立場をとる。



- $M_\alpha{}^\beta$ は、今のところ $GL(1|32,R)$、$Osp(1|32,R)$、$U(1|16,16,C)$ の Lie algebra を想定している。
  - $Osp(1|32,R)$ non-gauged action L.Smolin hep-th/0002009

    $M = \begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}$, where $m = u_{\mu_1}\Gamma^{\mu_1} + \frac{1}{2!}u_{\mu_1\mu_2}\Gamma^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{5!}u_{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}$

    $u_{\mu_1}u_{\mu_1\mu_2}, u_{\mu_1\cdots\mu_5}$ および ψ の各成分は全て hermitian $N\times N$ 行列。

    nongauged action : $I^{ng} = \frac{1}{g^2}Tr_{N\times N}(m_A^B[m_B^C, m_C^A] + 3i(m_{AB}\psi_B\bar{\psi}_A + m_{AB}\bar{\psi}_A\psi_B))$
  - $GL(1|32,R)$ non-gauged action

    $M = \begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\phi} & v \end{pmatrix}$

    * $m = u\mathbf{1} + u_{\mu_1}\Gamma^{\mu_1} + \frac{1}{2!}u_{\mu_2\nu_2}\Gamma^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{3!}u_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} + \frac{1}{4!}u_{\mu_1\cdots\mu_4}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_4} + \frac{1}{5!}u_{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}$ の各係数 $u, u_{\mu_1}, \cdots u_{\mu_1\cdots\mu_5}$ 及び ψ, ϕ の各成分は全て hermitian $N\times N$ matrix。
    * $Osp(1|32,R)$ 及び $GL(1|32,R)$ 理論においては、$\bar{\psi} = \psi^T\Gamma^0$ の意味である。
    * 具体的な作用の形は次の通りである。

    $$I^{ng} = \frac{1}{g^2}Tr_{N\times N}(m_A^B[m_B^C, m_C^A] + 3i(m_{AB}\psi_B\bar{\phi}_A + m_{AB}\bar{\phi}_A\psi_B) - 3iv\{\psi_A, \bar{\phi}_A\})$$

  - $U(1|16,16,C)$ gauged action L. Smolin hep-th/0006137

    $M = \begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\psi} & v \end{pmatrix}$, where $m = m_h + m_a$

    * $m_h = u_{\mu_1}\Gamma^{\mu_1} + \frac{1}{2!}u_{\mu_1\mu_2}\Gamma^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{5!}u_{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}$ の各係数は hermitian $N\times N$ matrix。
    * v 及び $m_a = u\mathbf{1} + \frac{1}{3!}u_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} + \frac{1}{4!}u_{\mu_1\cdots\mu_4}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_4}$ の各係数は、anti-hermitian $N\times N$ matrix 。
    * fermion ψ は、hermitian part と anti-hermitian part の和に分解することができる。
    * 複素化した理論では、$\bar{\psi} = \psi^\dagger\Gamma^0$ の意味である。
    * 具体的な作用の形は以下の通りである。

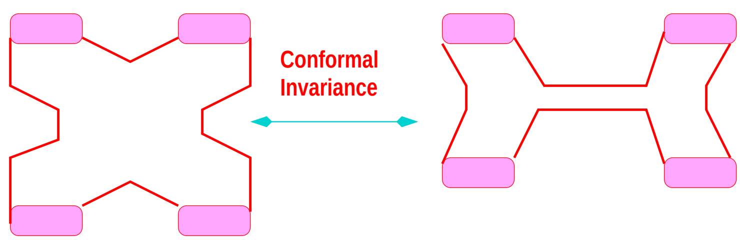
    $$I = \frac{1}{g^2}Tr_{N\times N}(trm^3 - 3i\bar{\psi}m\psi - 3iv\bar{\psi}\psi - v^3)$$

以下では下記のごとく記号を用いることにする。

- $\sharp$ は時空の第十成分を表すものとする。
- supermatrix の bosonic な部分に関しては、次のような記号で表すものとする。
  - $Z = u, W = u_\sharp, A_i = u_i, B_i = u_{i\sharp}, C_{ij} = u_{ij}, D_{ij} = u_{ij\sharp}$
  - $E_{ijk} = u_{ijk}, F_{ijk} = u_{ijk\sharp}, G_{ijkl} = u_{ijkl}, H_{ijkl} = u_{ijkl\sharp}, I_{ijklm} = u_{ijklm}$

Cubic Action の持つ「夢」

- 従来の理論体系の内包および統一：
  - 理論をしかるべき真空の回りで展開することで、IKKT model や BFSS model を取り出せるかも知れない。
  - 一般相対論における loop gravity をも内包する可能性も秘めている。
- 時空を 11 次元に拡張している：
  IKKT model では記述しにくかった、$S_1 \times R^9$ などの空間の記述も可能にするかも知れない。
- 作用が行列の 3 次で表せられる：
  - 3 次は、弦理論における最低次かつ最も fundamental な相互作用である。



  - String Field Theory と、行列模型の対応が見られるかも知れない。
  - Chern Simons Theory は、結び目理論の Jones 多項式を用いて厳密に解けることが知られている。

    E. Witten *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351

    非摂動領域を厳密に解ける行列模型たりうるのでは？

3　IKKT model との SUSY の対応

$Osp(1|32,R)$ 行列模型

$Osp(1|32,R)$ 行列模型における SUSY 変換

- homogeneous：supercharge $Q=\begin{pmatrix} 0 & \chi \\ i\bar{\chi} & 0 \end{pmatrix}$ による変換。

  $$[Q,M]=[\begin{pmatrix} 0 & \chi \\ i\bar{\chi} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}]=\begin{pmatrix} i(\chi\bar{\psi}-\psi\bar{\chi}) & -m\chi \\ i\bar{\chi}m & 0 \end{pmatrix}$$

  つまり、これは $\delta^{(1)}_{\chi}m=i(\chi\bar{\psi}-\psi\bar{\chi}),\ \delta^{(1)}_{\chi}\psi=-m\chi$ を与える。

- inhomogeneous :作用が non-gauged であり commutator で書かれるので、fermion の並進 $\delta^{(2)}_{\epsilon}m=0,\ \delta^{(2)}_{\epsilon}\psi=\epsilon$ も SUSY として許される。

- commutator： $[\delta^{(1)}_{\chi},\delta^{(2)}_{\epsilon}]m=-i(\chi\bar{\epsilon}-\epsilon\bar{\chi})$,$[\delta^{(1)}_{\chi},\delta^{(2)}_{\epsilon}]\psi=0$

  (Proof) それぞれについて 2 つの経路の差を取ればよい。

  - $m\overset{\delta^{(2)}_{\epsilon}}{\to}m\overset{\delta^{(1)}_{\chi}}{\to}m+i(\chi\bar{\psi}-\psi\bar{\chi})$, whereas $m\overset{\delta^{(1)}_{\chi}}{\to}m+i(\chi\bar{\psi}-\psi\bar{\chi})\overset{\delta^{(2)}_{\epsilon}}{\to}m+i(\chi(\bar{\psi}+\bar{\epsilon})-(\psi+\epsilon)\bar{\chi})$
  - $\psi\overset{\delta^{(2)}_{\epsilon}}{\to}\psi+\epsilon\overset{\delta^{(1)}_{\chi}}{\to}\psi+\epsilon-m\chi$, whereas $\psi\overset{\delta^{(1)}_{\chi}}{\to}\psi-m\chi\overset{\delta^{(2)}_{\epsilon}}{\to}\psi+\epsilon-m\chi$

$Osp(1|32,R)$ 行列模型は、fermion を IKKT model の 2 倍含んでいる。では、対称性を identify するためにどうしよう？

そこで、fermion の chirality を left と right にわけてみよう！

$$
\begin{aligned}
[\delta^{(1)}_{\chi}, \delta^{(2)}_{\epsilon}]A_i &= \frac{1}{32}[\delta^{(1)}_{\chi}, \delta^{(2)}_{\epsilon}]tr(m\Gamma_i) = \frac{i}{32}(-\bar{\chi}\Gamma_i\epsilon + \bar{\epsilon}\Gamma_i\chi) \\
[\delta^{(1)}_{\chi}, \delta^{(2)}_{\epsilon}]B_i &= \frac{1}{32}[\delta^{(1)}_{\chi}, \delta^{(2)}_{\epsilon}]tr(m\Gamma_{i\sharp}) = \frac{i}{32}(-\bar{\chi}\Gamma_{i\sharp}\epsilon + \bar{\epsilon}\Gamma_{i\sharp}\chi)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
[\delta^{(1)}_{\chi_L}, \delta^{(2)}_{\epsilon_L}]A_i &= +[\delta^{(1)}_{\chi_L}, \delta^{(2)}_{\epsilon_L}]B_i = \frac{i}{16}(\bar{\epsilon}_L\Gamma_i\chi_L) \\
[\delta^{(1)}_{\chi_R}, \delta^{(2)}_{\epsilon_R}]A_i &= -[\delta^{(1)}_{\chi_R}, \delta^{(2)}_{\epsilon_R}]B_i = \frac{i}{16}(\bar{\epsilon}_R\Gamma_i\chi_R)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

このとき消えずに残る commutator は次のとおりであるとわかる。

$$[\delta^{(1)}_{\chi_L}, \delta^{(2)}_{\epsilon_L}]A^{(+)}_i = \frac{i}{8}(\bar{\epsilon}_L\Gamma_i\chi_L), \quad [\delta^{(1)}_{\chi_R}, \delta^{(2)}_{\epsilon_R}]A^{(-)}_i = -\frac{i}{8}(\bar{\epsilon}_R\Gamma_i\chi_R)$$

where $A^{(+)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_i + B_i, \quad A^{(-)}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_i - B_i$

- $A^{(+)}_i = A_i + B_i$ の組み合わせは、commutator commutator $[\delta^{(1)}_{\chi_L}, \delta^{(2)}_{\epsilon_L}]$ を nonzero にする。これは IKKT model の left に対応する。
- $A^{(-)}_i = A_i - B_i$ の組み合わせは、commutator commutator $[\delta^{(1)}_{\chi_R}, \delta^{(2)}_{\epsilon_R}]$ を nonzero にする。これは IKKT model の right に対応する。

$U(1|16,16,C)$ 行列模型

$Osp(1|32,R)$ との主な相違点

- 今度は action が gauged であるため、naive な fermion の並進によって inhomogeneous transformation を構築できない。
- fermion には、今度は hermitian と anti-hermitian の成分がある ($\psi = \psi_h + i\psi_a$)。よって、fermion の数は IKKT model の 4 倍である。

そこで、ある古典解およびその周りの揺らぎにわけて考える。

古典解として、$< M >= \begin{pmatrix} U_\sharp \Gamma^\sharp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。また、このような古典解を持つために、action に一次の項を付け加える。

$$S = \frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}(str_{33\times 33} M_\alpha{}^\beta M_\beta{}^\gamma M_\gamma{}^\alpha - 3U_\sharp^2 str_{33\times 33} M_\alpha{}^\alpha)$$

supermatrix を古典解と、そのまわりの揺らぎにわけて考える。

$$M =< M > + \tilde{M} = \begin{pmatrix} U_\sharp \Gamma^\sharp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\psi} & v \end{pmatrix}$$

supercharge $Q = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ i\bar{\epsilon} & 0 \end{pmatrix}$ による変換を考える。

$$\delta_\epsilon M = [Q, M] = \begin{pmatrix} i(\epsilon\bar{\psi} - \psi\bar{\epsilon}) & \epsilon v - m\epsilon - U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon \\ i(\bar{\epsilon} m + \bar{\epsilon} U_\sharp \Gamma^\sharp - v\bar{\epsilon}) & i(\bar{\epsilon}\psi - \bar{\psi}\epsilon) \end{pmatrix}$$

従って、このときの古典解のまわりでの SUSY 変換はこうなる。

$$\delta_\epsilon \psi = \epsilon v - m\epsilon - U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon, \quad \delta_\epsilon m = i(\epsilon\bar{\psi} - \psi\bar{\epsilon})$$

そこで、諸々の物理量を hermitian matrix と anti-hermitian matrix にわけて考えよう！

- 変換量：fermion を $\psi = \psi_h + i\psi_a$ としてわける。

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon m &= i(\epsilon\bar{\psi} - \psi\bar{\epsilon}) \\
\delta_\epsilon \psi_h &= -U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon_h - \frac{1}{2}(\epsilon_a v_a + v_a \epsilon_a) + \frac{i}{2}(\epsilon_h v_a - v_a \epsilon_h) - (m\epsilon \text{ の hermite 部分}) \\
\delta_\epsilon \psi_a &= -U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon_a + \frac{1}{2}(\epsilon_h v_a + v_a \epsilon_h) + \frac{i}{2}(\epsilon_a v_a - v_a \epsilon_a) - (m\epsilon \text{ の anti-hermite 部分})
\end{aligned}$$

以下、簡単のために $m\epsilon$ の項は省略する。

- 上記の変換量を、hermite と anti-hermite にわける。

$$\delta_\epsilon^{(h)} \psi_h = -U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon + \frac{i}{2}(\epsilon v_a - v_a \epsilon), \quad \delta_\epsilon^{(a)} \psi_h = -\frac{1}{2}(\epsilon v_a + v_a \epsilon)$$
$$\delta_\epsilon^{(h)} \psi_a = \frac{1}{2}(\epsilon v_a + v_a \epsilon), \quad \delta_\epsilon^{(a)} \psi_a = -U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon + \frac{i}{2}(\epsilon v_a - v_a \epsilon)$$

(*) ここで、$\delta_\epsilon^{(h)}, \delta_\epsilon^{(a)}$ とは、supercharge $Q_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ i\bar{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_h + i\epsilon_a \\ i(\bar{\epsilon}_h - i\bar{\epsilon}_a) & 0 \end{pmatrix}$ に対して hermite と anti-hermite な部分を抜き出したものとする。

$$\delta_\epsilon^{(h)} M = [Q_\epsilon^{(h)}, M] = [\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ i\bar{\epsilon} & 0 \end{pmatrix}, M], \quad \delta_\epsilon^{(a)} M = [Q_\epsilon^{(a)}, M] = [\begin{pmatrix} 0 & i\epsilon \\ \bar{\epsilon} & 0 \end{pmatrix}, M]$$

つまり、$\delta_\epsilon = \delta_\epsilon^{(h)} + \delta_\epsilon^{(a)}$ として分解している。

- 次に、field および super 変換を次のようにして組み合わせる。
  - SUSY 変換：$\delta_\epsilon^{(1)} = \delta_\epsilon^{(h)} + i\delta_\epsilon^{(a)}, \quad \delta_\epsilon^{(2)} = \delta_\epsilon^{(h)} - i\delta_\epsilon^{(a)}$
  - fermion 場：$\psi^{(1)} = \psi_h + i\psi_a, \quad \psi^{(2)} = \psi_h - i\psi_a$

- そうすれば、最終的に次のようにして homogeneous と inhomogeneous な変換を得ることができる。

	$\psi^{(1)} = \psi_h + i\psi_a$	$\psi^{(2)} = \psi_h - i\psi_a$
$\delta_\epsilon^{(1)} = \delta_\epsilon^{(h)} + i\delta_\epsilon^{(a)}$	0	$-2U_\sharp \Gamma^\sharp - 2iv_a\epsilon$
$\delta_\epsilon^{(2)} = \delta_\epsilon^{(h)} - i\delta_\epsilon^{(a)}$	$-2U_\sharp \Gamma^\sharp \epsilon + 2i\epsilon v_a$	0

次に、同様にしてIKKT modelのfieldとのidentificationを行ないたい。そこで、bosonic fieldの変換に関して次の式を用いる。

$$[\delta_\epsilon, \delta_\delta]m = [[Q_\epsilon, Q_\delta], m + U_\sharp \Gamma^\sharp]$$

ここで考えるのは、古典解のまわりの変換であって、揺らぎmはzeroとする。これに対して、次の4通りのsuper変換のcommutatorを考える。

$$[\delta_\epsilon^{(h)}, \delta_\delta^{(h)}], [\delta_\epsilon^{(h)}, \delta_\delta^{(a)}], [\delta_\epsilon^{(a)}, \delta_\delta^{(h)}], [\delta_\epsilon^{(a)}, \delta_\delta^{(a)}]$$

- $[\delta_\epsilon^{(a)}, \delta_\delta^{(h)}]A_i \Rightarrow \frac{1}{32} tr([U_\sharp \Gamma^\sharp, \epsilon\bar{\delta} + \delta\bar{\epsilon}]\Gamma^i) = \frac{-1}{16}(\bar{\delta} U_\sharp \Gamma^{i\sharp}\epsilon + \bar{\epsilon} U_\sharp \Gamma^{i\sharp}\delta)$
  しかし、これは消えることがわかる。(公式 $\bar{\delta}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon = -\bar{\epsilon}\Gamma^{\mu\nu}\delta$ を使えばよい)
  同様にして、次のことが言える。

$$[\delta_\epsilon^{(a)}, \delta_\delta^{(h)}]A_i = [\delta_\epsilon^{(h)}, \delta_\delta^{(a)}]A_i = [\delta_\epsilon^{(a)}, \delta_\delta^{(h)}]B_i = [\delta_\epsilon^{(h)}, \delta_\delta^{(a)}]B_i = 0$$

- $[Q_\epsilon^{(h)}, Q_\delta^{(h)}] = [Q_\epsilon^{(a)}, Q_\delta^{(a)}] = \begin{pmatrix} i(\epsilon\bar{\delta} - \delta\bar{\epsilon}) & 0 \\ 0 & i(\bar{\epsilon}\delta - \bar{\delta}\epsilon) \end{pmatrix}$ より、両者は同じSUSY変換と見做せる。これに対して、

$$[Q_\epsilon^{(h)}, Q_\delta^{(h)}]A_i \Rightarrow \frac{i}{16}(\bar{\delta} U_\sharp \Gamma^{i\sharp}\epsilon - \bar{\epsilon} U_\sharp \Gamma^{i\sharp}\delta)$$
$$[Q_\epsilon^{(h)}, Q_\delta^{(h)}]B_i \Rightarrow \frac{i}{16}(\bar{\delta} U_\sharp \Gamma^{i}\epsilon - \bar{\epsilon} U_\sharp \Gamma^{i}\delta)$$

  これをchiralとanti-chiralにわければ、残る組み合わせは次のとおり。

	$A_i^{(+)}$	$A_i^{(-)}$
$[\delta_{\epsilon_L}^{(h)}, \delta_{\delta_L}^{(h)}]$	$\frac{i}{4}(\bar{\delta}_L U_\sharp \Gamma^i \epsilon_L)$	0
$[\delta_{\epsilon_L}^{(h)}, \delta_{\delta_R}^{(h)}]$	0	0
$[\delta_{\epsilon_R}^{(h)}, \delta_{\delta_L}^{(h)}]$	0	0
$[\delta_{\epsilon_R}^{(h)}, \delta_{\delta_R}^{(h)}]$	0	$-\frac{i}{4}(\bar{\delta}_R U_\sharp \Gamma^i \epsilon_R)$

- 従って、次のSUSY変換が消えずに残る。

$$[\delta_{\epsilon_L}^{(1)}, \delta_{\delta_L}^{(2)}]A_i^{(+)} = \frac{i}{2}(\bar{\delta}_L^\dagger U_\sharp \Gamma^i \epsilon_L), \quad [\delta_{\epsilon_R}^{(1)}, \delta_{\delta_R}^{(2)}]A_i^{(-)} = -\frac{i}{2}(\bar{\delta}_R^\dagger U_\sharp \Gamma^i \epsilon_R)$$
$$\text{where } A^{(+)} \stackrel{\text{def}}{=} A_i + B_i, \quad A_i^{(-)} \stackrel{\text{def}}{=} A_i - B_i$$

4 Cubic Modelの問題点

cublc actionでは、古典解のまわりで理論を展開することができない。
問題点は拘束条件が緩すぎて、古典解が多すぎることにある。

(例)cubic actionでは $A_i\Gamma^i(1+\Gamma^\sharp)$、$E_{ijk}\Gamma^{ijk}(1+\Gamma^\sharp)$、$I_{ijklm}\Gamma^{ijklm}(1+\Gamma^\sharp)$ の形は、A, E, I の如何を問わず古典解となる。

(証明) 抽象的にcubic actionのbosonic partが次のように書かれるとする。

$$S_b = \frac{1}{g^2} Tr(u_A^a u_B^b u_C^c) e_{abc} tr(\Gamma^A \Gamma^B \Gamma^C)$$

ここで、e_{abc} は一般的な構造定数を表すものとする。

これに対して、u_A^a についてのEuler-Lagrange方程式を解く。

$$\frac{\partial S_b}{\partial u_A^a} = \frac{3}{g^2} Tr(u_B^b u_C^c) e_{abc} tr(\Gamma^A \Gamma^B \Gamma^C) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{32}\Sigma_A(\Gamma^A \frac{\partial S_b}{\partial u_A^a}) = \frac{3}{g^2}\Gamma^B\Gamma^C Tr(u_B^b u_C^c) e_{abc} = 0$$

これに対して、$u = f_{odd}\Gamma^{odd}(1+\Gamma^{odd})$ が解であったとする。このとき、gamma行列を評価すれば次がいえる。

$$\Gamma^{odd}(1+\Gamma^\sharp)\Gamma^{odd}(1+\Gamma^\sharp) = \Gamma^{odd}\Gamma^{odd}(1-\Gamma^\sharp)(1+\Gamma^\sharp) = 0$$

以上より、$u = f_{odd}\Gamma^{odd}(1+\Gamma^{odd})$ の形は全て解であると言える。(証明終)

このように拘束条件が緩すぎるということは、path integralを実行してfieldをmode展開してintegrate outしたいときにzero modeが多すぎることを意味する。

結局cubic actionは不適当なのでは？

5 Conclusion

これまでの議論のまとめ

- supergroupによるbosonic fieldと、IKKT modelのfieldの対応を、SUSYを調べることでidentifyすることに成功した。これは主にsupergroupに依存する議論であり、(ある古典解を想定して、それが本当に理論の古典解であるかどうかを別にして)作用の形は(ほぼ)仮定しない議論である。

- cubic actionでは、古典解の拘束条件が緩すぎて、ある古典解を選んでそのまわりでpath integralを実行することが困難である。したがって、cubic actionは不適当であると考えている(同じ議論は4次、5次$\cdots$のone matrix modelについても言える)。

今後の課題

- 拘束条件が緩すぎないような、適切なactionをsearchする。そのためにいろいろなpatternの作用を試行錯誤してみる。

  2次の項を付け加えてみる、multimatrix model を考えてみるなど。

- ある程度「孤立した」古典解が見つかれば、そのまわりで理論のpath integralを実行して、IKKT modelがどのように埋まっているかを調べる。

以下ではそれぞれの理論に関して、action を $Z, W, A \sim I$ の変数で表した具体形およびその運動方程式について述べる。

bosonic な項を調べるための諸公式

A gamma 行列の定義

- Clifford 代数：$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$
- 計量：$\eta^{\mu\nu} = diag(-1, +1, \cdots, +1)$
- 行列の具体型：$\Gamma^i = \begin{pmatrix} \gamma^i & 0 \\ 0 & -\gamma^i \end{pmatrix}$, $\Gamma^{10} = \Gamma^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$
- 第十成分に対する gamma 行列：$\Gamma^\sharp = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\cdots\Gamma^9$
- epsilon tensor：$\epsilon_{0123\cdots 9\sharp} = 1 \Rightarrow \epsilon^{0123\cdots\sharp} = -1$
- dual の公式：$\Gamma^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_k} = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(10-k)!}\epsilon^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_9\mu_\sharp}\Gamma_{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_\sharp}$

B gamma 行列の積の公式

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_n} &= \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_m\nu_1\cdots\nu_n} + (-1)^{m-1}{}_mC_1{}_nC_1\eta^{\mu_1\nu_1}\Gamma^{\mu_2\cdots\mu_m\nu_2\cdots\nu_n} \\
&+ (-1)^{(m-1)+(m-2)}{}_mC_2{}_nC_2 2!\eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\Gamma^{\mu_3\cdots\mu_m\nu_3\cdots\nu_n} \\
&+ (-1)^{(m-1)+(m-2)+(m-3)}{}_mC_3{}_nC_3 3!\eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\eta^{\mu_3\nu_3}\Gamma^{\mu_4\cdots\mu_m\nu_4\cdots\nu_n} + \cdots
\end{aligned}
$$

ここで、右辺における $\mu_1, \cdots, \mu_n$ and $\nu_1, \cdots \nu_n$ の添字は、あらわには書かなかったものの、反対称化されているものとする。

$\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ と $\Gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$ の積で残りうる gamma 行列の階数は下記の表の通りである (イタリック体は dual によって得られたものをさす)。

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
n=1	2,0	3,1	4,2	5,3	*5*, 4
n=2	3,1	4,2,0	5,3,1	*5*,4,2	*4*,5,3
n=3	4,2	5,3,1	*5*,4,2,0	*4*,5,3,1	*3*,*5*,4,2
n=4	5,3	*5*,4,2	*4*,5,3,1	*3*,*5*,4,2,0	*2*,*4*,5,3,1
n=5	*5*,4	*4*,5,3	*3*,*5*,4,2	*2*,*4*,5,3,1	*1*,*3*,*5*,4,2,0

C　fermion の交換に関する公式

$\boxed{(1)\bar{\chi}\eta = \bar{\eta}\chi, \quad (2)\bar{\chi}\Gamma^{\mu}\eta = -\bar{\eta}\Gamma^{\mu}\chi, \quad (3)\bar{\chi}\Gamma^{\mu\nu}\eta = -\bar{\eta}\Gamma^{\mu\nu}\chi, \quad (4)\bar{\chi}\Gamma^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\eta = -\bar{\eta}\Gamma^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\chi}$

(Proof) この議論では転置に関する次の公式を用いる。

$$(\Gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \ \ ({}^T\Gamma^0) = -\Gamma^0, \ \ ({}^T\Gamma^i) = \Gamma^i, \ \ ({}^T\Gamma^\sharp) = \Gamma^\sharp$$

ここで、$\mu = 0, 1, \cdots, 9, \sharp$ である。そうすれば次の式を得る。

$$\begin{aligned}
\Gamma^0\Gamma^\mu\Gamma^0 &= {}^T\Gamma^\mu \\
\Gamma^0({}^T\Gamma^{\mu\nu})\Gamma^0 &= -(\Gamma^0({}^T\Gamma^\nu)\Gamma^0)(\Gamma^0({}^T\Gamma^\mu)\Gamma^0) = -\Gamma^\nu\Gamma^\mu = \Gamma^{\mu\nu} \\
\Gamma^0({}^T\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_k})\Gamma^0 &= (-1)^{k-1}(\Gamma^0({}^T\Gamma^{\mu_k})\Gamma^0)\cdots(\Gamma^0({}^T\Gamma^{\mu_1})\Gamma^0) = (-1)^{k-1}\Gamma_{\mu_k\cdots\mu_1} = (-1)^{k-1}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_k}
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, 5$ 階の gamma 行列に関しては符号が変わらないことから、次を得る。

1. $\bar{\chi}\eta = ({}^T\chi)\Gamma^0\eta = -({}^T(\eta)({}^T\Gamma^0)\chi)$ について、転置をとる際に fermion が別の fermion を飛び越したので符号が変わることに注意しよう。そうすれば上記の性質より、次を得る。$(*) = -{}^T\eta(-\Gamma^0)\chi = \bar{\eta}\chi$
2. 以下同様に証明をする。
   $\bar{\chi}\Gamma^\mu\eta = -({}^T\chi)\Gamma^0\Gamma^\mu(\Gamma^0)^2\eta = -({}^T\chi)({}^T\Gamma^\mu)\Gamma^0\eta = ({}^T\eta)({}^T\Gamma^0)\Gamma^\mu\chi = -\bar{\eta}\Gamma^\mu\chi$
3. $\bar{\chi}\Gamma^{\mu\nu}\eta = -({}^T\chi)\Gamma^0\Gamma^{\mu\nu}(\Gamma^0)^2\eta = -({}^T\chi)({}^T\Gamma^{\mu\nu})\Gamma^0\eta = -({}^T\eta)\Gamma^0\Gamma^{\mu\nu}\chi = -\bar{\eta}\Gamma^{\mu\nu}\chi$
4. $\bar{\chi}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\eta = -({}^T\chi)\Gamma^0\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}(\Gamma^0)^2\eta = -({}^T\chi)({}^T\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5})\Gamma^0\eta = -({}^T\eta)\Gamma^0\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\chi = -\bar{\eta}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\chi$

以上で上記の公式を証明することができた。

D　action の具体型および運動方程式

$Osp(1|32,R)$ 群の行列の具体形

$$I=\frac{1}{g^2}Tr_{N\times N}\{(112)+(155)+(222)+(255)+(555)+(fermions)\}$$

$$\begin{aligned}
(112) &= -96[A_{i_1},A_{i_2}]C^{i_1i_2}+192[W,A_i]B^i \\
(155) &= (-\frac{1}{150}[W,I_{i_1\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}}+\frac{1}{15}[A_{i_1},H_{i_2\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(222) &= 32[C_{i_1i_2},C^{i_1}{}_{i_3}]C^{i_2i_3}+96[B_{i_1},B_{i_2}]C^{i_1i_2} \\
(255) &= -4[C_{i_1i_2},I^{i_1}{}_{i_3\cdots i_6}]I^{i_2\cdots i_6}+8[B_{i_1},H_{i_2\cdots i_5}]I^{i_2\cdots i_5}-16[C_{i_1i_2},H^{i_1}{}_{i_3\cdots i_5}]H^{i_2\cdots i_5} \\
(555) &= (\frac{10}{270}[H^{\rho}{}_{i_1i_2i_3},H_{\rho i_4i_5i_6}]H_{i_7i_8i_9i_{10}}+\frac{6}{270}[H^{\rho\sigma}{}_{i_1i_2},I_{\rho\sigma i_3i_4i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} \\
&+ \frac{5}{270}[I^{\rho\sigma}{}_{i_1i_2i_3},I_{\rho\sigma i_4i_5i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(fer.) &= \frac{1}{g}(-3i\bar{\phi}\Gamma^{\sharp}[W,\psi]-3i\bar{\phi}\Gamma^{i}[A_i,\psi]-3i\bar{\phi}\Gamma^{i\sharp}[B_i,\psi]-\frac{3i}{2}\bar{\phi}\Gamma^{i_1i_2}[C_{i_1i_2},\psi] \\
&- \frac{3i}{4!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1i_2i_3i_4\sharp}[H_{i_1i_2i_3i_4},\psi]-\frac{3i}{5!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1i_2i_3i_4i_5}[I_{i_1i_2i_3i_4i_5},\psi])
\end{aligned}$$

これに対して、Euler-Lagrange 方程式は naive な微分によって得ることができる (ここで、$\tilde{I}^{i_1\cdots i_5}\stackrel{def}{=}-\frac{1}{5!}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp}I_{i_6\cdots i_{10}}$ の意味である)。ここでは考えるのは古典解なので、fermionic field は 0 であるとして考える。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial W} &= 192[A_{i_1},B^{i_1}]+\frac{4}{5}[I_{i_1\cdots i_5},\tilde{I}^{i_1\cdots i_5}]=0 \\
\frac{\partial I}{\partial A_i} &= -192[A_{i_2},C^{i_1i_2}]-192[W,B^{i_1}]-8[H_{i_2\cdots i_5},\tilde{I}^{i_1\cdots i_5}]=0 \\
\frac{\partial I}{\partial B_i} &= 192[W,A^i]+192[B_{i_2},C^{i_1i_2}]+8[H_{i_2\cdots i_5},I^{i_1\cdots i_5}]=0 \\
\frac{\partial I}{\partial C_{i_1i_2}} &= -96[A^{i_1},A^{i_2}]+96[B_{i_1},B_{i_2}]+96[C^{[i_1}{}_{i_3},C^{i_2]i_3}]-16[H^{[i_1}{}_{i_3i_4i_5},H^{i_2]i_3i_4i_5}]-4[I^{[i_1}{}_{i_3\cdots i_6},I^{i_2]i_3\cdots i_6}])=0 \\
\frac{\partial I}{\partial H_{i_1\cdots i_4}} &= +8[A_{i_5},\tilde{I}^{i_1\cdots i_5}]-8[B_{i_5},I^{i_1\cdots i_5}]-32[C_{\rho}{}^{[i_1},H^{\rho i_2\cdots i_4]}]+\frac{1}{27}[H^{\rho}{}_{i_4\cdots i_7},H_{\rho i_8i_9i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&+ \frac{2}{27}[H^{[i_1}{}_{i_5i_6i_7},H_{i_8\cdots i_{11}}]\epsilon^{i_2i_3i_4]i_5\cdots i_{11}\sharp}+\frac{1}{54}[I^{\rho\sigma}{}_{i_5\cdots i_7},I_{\rho\sigma i_8i_9i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&+ \frac{1}{45}[I^{[i_1i_2}{}_{i_5i_6i_7},I_{i_8\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3i_4]i_5\cdots i_{12}\sharp}=0 \\
\frac{\partial I}{\partial I_{i_1\cdots i_5}} &= -\frac{1}{15}[A_{i_6},H_{i_7\cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp}+8[B^{[i_1},H^{i_2\cdots i_5]}]-8[C_{\rho}{}^{[i_1},I^{\rho i_2\cdots i_5]}]-\frac{1}{45}[H_{\rho\sigma}{}^{i_6i_7},I^{\rho\sigma i_8i_9i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&- \frac{1}{45}[H^{[i_1i_2}{}_{i_6i_7},I_{i_8\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3i_4i_5]i_6\cdots i_{12}\sharp}+\frac{1}{27}[I^{[i_1i_2}{}_{i_6i_7i_8},H_{i_9\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3i_4i_5]i_6\cdots i_{12}\sharp}-\frac{8}{5}[W,\tilde{I}^{i_1\cdots i_5}]=0
\end{aligned}$$

$GL(1|32,R)$ 群の行列の具体形

$$I = \frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}\{(F1)+(F2)+(fermions)\}$$

- $(F1) = (112)(155)(222)(255)(555)$: $Osp(1|32,R)$ で現れたのと同一の項。
- $(F2) = (134)(233)(244)(335)(345)(445)$
- ここで F-term と呼ぶものは、commutator で現れる項であり、名前の由来は、$[T^a, T^b] = if^{ab}{}_c T^c$ なる関係式である。

$$\begin{aligned}
(112) &= -96[A_{i_1}, A_{i_2}]C^{i_1 i_2} + 192[W, A_i]B^i \\
(134) &= 32[A_{i_1}, E_{i_2 i_3 i_4}]G^{i_1 i_2 i_3 i_4} - 32[\mathcal{D}_\sharp + \tilde{u}_\sharp, E_{i_1 i_2 i_3}]F^{i_1 i_2 i_3} + 96[A_{i_1}, D_{i_2 i_3}]F^{i_1 i_2 i_3} \\
(155) &= (-\frac{1}{150}[W, I_{i_1\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} + \frac{1}{15}[A_{i_1}, H_{i_2\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(222) &= 32[C_{i_1 i_2}, C^{i_1}{}_{i_3}]C^{i_2 i_3} + 96[B_{i_1}, B_{i_2}]C^{i_1 i_2} \\
(233) &= 48[C_{i_1 i_2}, E^{i_1}{}_{i_3 i_4}]E^{i_2 i_3 i_4} - 96[B_{i_1}, D_{i_2 i_3}]E^{i_1 i_2 i_3} + 96[C_{i_1 i_2}, D^{i_1}{}_{i_3}]D^{i_2 i_3} \\
(244) &= -16[C_{i_1 i_2}, G^{i_1}{}_{i_3\cdots i_5}]G^{i_2\cdots i_5} - 32[B_{i_1}, F_{i_2\cdots i_4}]G^{i_1\cdots i_4} - 48[C_{i_1 i_2}, F^{i_1}{}_{i_3 i_4}]F^{i_2 i_3 i_4} \\
(255) &= -4[C_{i_1 i_2}, I^{i_1}{}_{i_3\cdots i_6}]I^{i_2\cdots i_6} + 8[B_{i_1}, H_{i_2\cdots i_5}]I^{i_2\cdots i_5} - 16[C_{i_1 i_2}, H^{i_1}{}_{i_3\cdots i_5}]H^{i_2\cdots i_5} \\
(335) &= (-\frac{6}{45}[D_{i_1 i_2}, E_{i_3\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} - \frac{5}{45}[E_{i_1\cdots i_3}, E_{i_4\cdots i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(345) &= 16[E^\rho{}_{i_1 i_2}, G_{\rho i_3\cdots i_5}]I^{i_1\cdots i_5} - 16[D_{i_1 i_2}, F_{i_3\cdots i_5}]I^{i_1\cdots i_5} - 32[D_{\rho i_1}, G^\rho{}_{i_2\cdots i_4}]H^{i_1\cdots i_4} + 48[E_{\rho i_1 i_2}, F^\rho{}_{i_3 i_4}]H^{i_1\cdots i_4} \\
(445) &= (\frac{6}{45}[F^\rho{}_{i_1 i_2}, G_{\rho i_3\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} + \frac{5}{45}[G^\rho{}_{i_1\cdots i_3}, G^{\rho i_4\cdots i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(555) &= (\frac{10}{270}[H^\rho{}_{i_1 i_2 i_3}, H_{\rho i_4 i_5 i_6}]H_{i_7 i_8 i_9 i_{10}} + \frac{6}{270}[H^{\rho\sigma}{}_{i_1 i_2}, H_{\rho\sigma i_3 i_4 i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} + \frac{5}{270}[I^{\rho\sigma}{}_{i_1 i_2 i_3}, I_{\rho\sigma i_4 i_5 i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp}) \\
(fer.) &= \frac{1}{g}(-3i\bar{\phi}[Z,\psi] - 3i\bar{\phi}\Gamma^\sharp[W,\psi] - 3i\bar{\phi}\Gamma^i[A_i,\psi] - 3i\bar{\phi}\Gamma^{i\sharp}[B_i,\psi] - \frac{3i}{2}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2}[C_{i_1 i_2},\psi] - \frac{3i}{2}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2\sharp}[D_{i_1 i_2},\psi] \\
&- \frac{3i}{3!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2 i_3}[E_{i_1 i_2 i_3},\psi] - \frac{3i}{3!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2 i_3\sharp}[F_{i_1 i_2 i_3},\psi] - \frac{3i}{4!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2 i_3 i_4}[G_{i_1 i_2 i_3 i_4},\psi] - \frac{3i}{4!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2 i_3 i_4\sharp}[H_{i_1 i_2 i_3 i_4},\psi] \\
&- \frac{3i}{5!}\bar{\phi}\Gamma^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}[I_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5},\psi]
\end{aligned}$$

これに対して、同様にして運動方程式は次のようにして得ることができる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial W} &= 192[A_{i_1}, B^{i_1}] + -32[E_{i_1 i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + \frac{4}{5}[I_{i_1\cdots i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}]) = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial A_{i_1}} &= -192[W, B^{i_1}] - 192[A_{i_2}, C^{i_1 i_2}] + 96[D_{i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + 32[E_{i_2 i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}] - 8[H_{i_2\cdots i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial B_{i_1}} &= 192[W, A^{i_1}] + 192[B_{i_2}, C^{i_1 i_2}] - 96[D_{i_2 i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}] - 32[F_{i_2 i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}] + 8[H_{i_2\cdots i_5}, I^{i_1\cdots i_5}]) = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial C_{i_1 i_2}} &= -96[A^{i_1}, A^{i_2}] + 96[B_{i_1}, B_{i_2}] + 96[C^{[i_1}{}_{i_3}, C^{i_2]i_3}] + 96[D^{[i_1}{}_{i_3}, D^{i_2]i_3}] + 48[E^{[i_1}{}_{i_3 i_4}, E^{i_2]i_3 i_4}] \\
&+ -48[F^{[i_1}{}_{i_3 i_4}, F^{i_2]i_3 i_4}] - 16[G^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, G^{i_2]i_3 i_4 i_5}] - 16[H^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, H^{i_2]i_3 i_4 i_5}] - 4[I^{[i_1}{}_{i_3\cdots i_6}, I^{i_2]i_3\cdots i_6}]) = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial D_{i_1 i_2}} &= -96[A_{i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + 96[B_{i_3}, E^{i_1\cdots i_3}] + 192[C_\rho{}^{[i_1}, D^{\rho i_2]}] + 16[E_{i_3 i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] - 16[F_{i_3 i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}] \\
&- 32[G^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, H^{i_2]i_3 i_4 i_5}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial E_{i_1 i_2 i_3}} &= +32[W, F^{i_1 i_2 i_3}] - 32[A_\rho, G^{\rho i_1 i_2 i_3}] - 96[B^{[i_1}, D^{i_2 i_3]}] + 96[C_\rho{}^{[i_1}, E^{\rho i_2 i_3]}] - 16[D_{i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] \\
&- \frac{2}{9}[E_{i_4 i_5 i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + 48[F^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, H^{i_2 i_3]i_4 i_5}] + 16[G^{[i_1}{}_{i_4 i_5 i_6}, I^{i_2 i_3]i_4 i_5 i_6}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial F_{i_1 i_2 i_3}} &= -32[W, E^{i_1 i_2 i_3}] + 96[A^{[i_1}, D^{i_2 i_3]}] + 32[B_\rho, G^{\rho i_1 i_2 i_3}] - 96[C_\rho{}^{[i_1}, F^{\rho i_2 i_3]}] + 16[D_{i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}] \\
&- 48[E^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, H^{i_2 i_3]i_4 i_5}] - 16[G^{[i_1}{}_{i_4 i_5 i_6}, \tilde{I}^{i_2 i_3]i_4 i_5 i_6}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial G_{i_1\cdots i_4}} &= +32[A^{[i_1}, E^{i_2 i_3 i_4]}] - 32[B^{[i_1}, F^{i_2 i_3 i_4]}] - 32[C_\rho{}^{[i_1}, G^{\rho i_2 i_3 i_4]}] - 32[D_\rho{}^{[i_1}, H^{\rho i_2 i_3 i_4]}] \\
&- 16[E^{[i_1}{}_{i_5 i_6}, I^{i_2 i_3 i_4]i_5 i_6}] + 16[F^{[i_1}{}_{i_5 i_6}, \tilde{I}^{i_2 i_3 i_4]i_5 i_6}] + \frac{2}{9}[G^{[i_1}{}_{i_5 i_6 i_7}, H_{i_8\cdots i_{11}}]\epsilon^{i_2 i_3 i_4]i_5\cdots i_{11}\sharp} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial H_{i_1\cdots i_4}} &= +8[A_{i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] - 8[B_{i_5}, I^{i_1\cdots i_5}] - 32[C_\rho{}^{[i_1}, H^{\rho i_2\cdots i_4]}] - 32[D_\rho{}^{[i_1}, G^{\rho i_2 i_3 i_4]}] \\
&- \frac{1}{9}[E^{i_5 i_6 i_7}, E^{i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + 48[E_\rho{}^{[i_1 i_2}, F^{\rho i_3 i_4]}] + \frac{1}{9}[G^\rho{}_{i_5 i_6 i_7}, G_{\rho i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&- \frac{1}{27}[H^\rho{}_{i_4\cdots i_7}, H_{\rho i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + \frac{2}{27}[H^{[i_1}{}_{i_5 i_6 i_7}, H_{i_8\cdots i_{11}}]\epsilon^{i_2 i_3 i_4]i_5\cdots i_{11}\sharp} + \frac{1}{54}[I^{\rho\sigma}{}_{i_5\cdots i_7}, I_{\rho\sigma i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&+ \frac{1}{45}[I^{[i_1 i_2}{}_{i_5 i_6 i_7}, I_{i_8\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4]i_5\cdots i_{12}\sharp} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial I_{i_1\cdots i_5}} &= -\frac{8}{5}[W, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] - \frac{1}{15}[A_{i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + 8[B^{[i_1}, H^{i_2\cdots i_5]}] - 8[C_\rho{}^{[i_1}, I^{\rho i_2\cdots i_5]}] + \frac{2}{15}[D_{i_6 i_7}, E_{i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&- 8[D^{[i_1 i_2}, F^{i_3 i_4 i_5]}] + 8[E_\rho{}^{[i_1 i_2}, G^{\rho i_3\cdots i_5]}] - \frac{2}{15}[F^\rho{}_{i_6 i_7}, G_{\rho i_8\cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} - \frac{1}{45}[H_{\rho\sigma}{}^{i_6 i_7}, I^{\rho\sigma i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
&- \frac{1}{45}[H^{[i_1 i_2}{}_{i_6 i_7}, I_{i_8\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4 i_5]i_6\cdots i_{12}\sharp} + \frac{1}{27}[I^{[i_1 i_2}{}_{i_6 i_7 i_8}, H_{i_9\cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4 i_5]i_6\cdots i_{12}\sharp} = 0
\end{aligned}
$$

$U(1|16,16,C)$ 群の行列の具体形

$$I = \frac{1}{g^2} Tr_{N\times N}\{(F1)+(F2)+(D1)+(D2)+(fermions)\}$$

ここで列挙するもののうち、$-3U_\sharp^2 StrM$ の一次の項を含むものを赤色で表す。

- $(F1) = (112)(155)(222)(255)(555)$: $Osp(1|32,R)$ で現れたのと同一の項。
- $(F2) = (134)(233)(244)(335)(345)(445)$
- $(D1) = (000)(033)(044)(334)(344)(444)(vvv)$
- $(D2) = (011)(022)(055)(123)(145)(224)(235)(245)(355)(455)$
- ここで F(D)-term と呼ぶものは、commutator(anti-commutator) で現れる項であり、名前の由来は、$[T^a, T^b] = if^{ab}{}_c T^c$ ($\{T^a, T^b\} = d^{ab}{}_c T^c$) なる関係式である。

$$
\begin{aligned}
(112) &= -48[A_{i_1}, A_{i_2}]C^{i_1 i_2} + 96[W, A_i]B^i \\
(155) &= (-\frac{1}{300}[\mathcal{D}_\sharp + \tilde{u}_\sharp, I_{i_1\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} + \frac{1}{30}[A_{i_1}, H_{i_2\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(222) &= 16[C_{i_1 i_2}, C^{i_1}{}_{i_3}]C^{i_2 i_3} + 48[B_{i_1}, B_{i_2}]C^{i_1 i_2} \\
(255) &= -2[C_{i_1 i_2}, I^{i_1}{}_{i_3\cdots i_6}]I^{i_2\cdots i_6} + 4[B_{i_1}, H_{i_2\cdots i_5}]I^{i_2\cdots i_5} - 8[C_{i_1 i_2}, H^{i_1}{}_{i_3\cdots i_5}]H^{i_2\cdots i_5} \\
(555) &= (\frac{5}{270}[H^\rho{}_{i_1 i_2 i_3}, H_{\rho i_4 i_5 i_6}]H_{i_7 i_8 i_9 i_{10}} + \frac{3}{270}[H^{\rho\sigma}{}_{i_1 i_2}, I_{\rho\sigma i_3 i_4 i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} \\
&+ \frac{5}{540}[I^{\rho\sigma}{}_{i_1 i_2 i_3}, I_{\rho\sigma i_4 i_5 i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(134) &= 16[A_{i_1}, E_{i_2 i_3 i_4}]G^{i_1 i_2 i_3 i_4} - 16[W, E_{i_1 i_2 i_3}]F^{i_1 i_2 i_3} + 48[A_{i_1}, D_{i_2 i_3}]F^{i_1 i_2 i_3} \\
(233) &= 24[C_{i_1 i_2}, E^{i_1}{}_{i_3 i_4}]E^{i_2 i_3 i_4} - 48[B_{i_1}, D_{i_2 i_3}]E^{i_1 i_2 i_3} + 48[C_{i_1 i_2}, D^{i_1}{}_{i_3}]D^{i_2 i_3} \\
(244) &= -8[C_{i_1 i_2}, G^{i_1}{}_{i_3\cdots i_5}]G^{i_2\cdots i_5} - 16[B_{i_1}, F_{i_2\cdots i_4}]G^{i_1\cdots i_4} - 24[C_{i_1 i_2}, F^{i_1}{}_{i_3 i_4}]F^{i_2 i_3 i_4} \\
(335) &= (-\frac{3}{45}[D_{i_1 i_2}, E_{i_3\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} - \frac{5}{90}[E_{i_1\cdots i_3}, E_{i_4\cdots i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(345) &= 8[E^\rho{}_{i_1 i_2}, G_{\rho i_3\cdots i_5}]I^{i_1\cdots i_5} - 8[D_{i_1 i_2}, F_{i_3\cdots i_5}]I^{i_1\cdots i_5} \\
&- 16[D_{\rho i_1}, G^\rho{}_{i_2\cdots i_4}]H^{i_1\cdots i_4} + 24[E_{\rho i_1 i_2}, F^\rho{}_{i_3 i_4}]H^{i_1\cdots i_4} \\
(445) &= (\frac{3}{45}[F^\rho{}_{i_1 i_2}, G_{\rho i_3\cdots i_5}]I_{i_6\cdots i_{10}} + \frac{5}{90}[G^\rho{}_{i_1\cdots i_3}, G^{\rho i_4\cdots i_6}]H_{i_7\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(000) &= 16Z\{Z, Z\} \\
(033) &= -8Z\{E_{i_1 i_2 i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}\} - 24Z\{D_{i_1 i_2}, D^{i_1 i_2}\} \\
(044) &= 2Z\{G_{i_1\cdots i_4}, G^{i_1\cdots i_4}\} + 8Z\{F_{i_1 i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}\} \\
(334) &= 12\{E_{i_1 i_2 i_3}, E^{i_1}{}_{i_4 i_5}\}G^{i_2\cdots i_5} + 48\{D_{i_1 i_2}, E^{i_1}{}_{i_3 i_4}\}F^{i_2 i_3 i_4} + 12\{D_{i_1 i_2}, D_{i_3 i_4}\}G^{i_1\cdots i_4} \\
(344) &= (-\frac{1}{9}E_{i_1 i_2 i_3}\{F_{i_4 i_5 i_6}, G_{i_7\cdots i_{10}}\} - \frac{1}{24}D_{i_1 i_2}\{G_{i_3\cdots i_6}, G_{i_7\cdots i_{10}}\})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(444) &= -2G_{i_1\cdots i_4}\{G^{i_1 i_2}{}_{j_3 j_4}, G^{i_3 i_4 j_3 j_4}\} - 12\{F_{\rho i_1 i_2}, F^\rho{}_{i_3 i_4}\}G^{i_1\cdots i_4} \\
(vvv) &= Tr(-v^3) \\
(011) &= 48Z\{W, W\} + 48Z\{A_{i_1}, A^{i_1}\} \\
(022) &= -24Z\{C_{i_1 i_2}, C^{i_1 i_2}\} - 48Z\{B_{i_1}, B^{i_2}\} \\
(055) &= \frac{2}{5}Z\{I_{i_1\cdots i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} + 2Z\{H_{i_1\cdots i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(123) &= -48\{A_{i_1}, C_{i_2 i_3}\}E^{i_1 i_2 i_3} - 48W\{C_{i_1 i_2}, D^{i_1 i_2}\} - 96\{A_{i_1}, B_{i_2}\}D^{i_1 i_2} \\
(145) &= 4\{A_{i_1}, G_{i_2\cdots i_5}\}I^{i_1\cdots i_5} + 16\{A_{i_1}, F_{i_2 i_3 i_4}\}H^{i_1\cdots i_4} + 4W\{G_{i_1\cdots i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} \\
(224) &= 12\{C_{i_1 i_2}, C_{i_3 i_4}\}G^{i_1\cdots i_4} + 48\{B_{i_1}, C_{i_2 i_3}\}F^{i_1\cdots i_3} \\
(235) &= 8\{C_{i_1 i_2}, E_{i_3 i_4 i_5}\}I^{i_1\cdots i_5} + 24\{C_{i_1 i_2}, D_{i_3 i_4}\}H^{i_1\cdots i_4} - 16\{B_{i_1}, E_{i_2\cdots i_4}\}H^{i_1\cdots i_4} \\
(245) &= \frac{1}{60}(-5\{C_{i_1 i_2}, G_{i_3\cdots i_6}\}H_{i_7\cdots i_{10}} + 4\{C_{i_1 i_2}, F_{i_3\cdots i_5}\}I_{i_6\cdots i_{10}} + 2\{B_{i_1}, G_{i_2\cdots i_5}\}I_{i_6\cdots i_{10}})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(355) &= \frac{1}{72}(3D_{i_1 i_2}\{H_{i_3\cdots i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}\} + 3D_{i_1 i_2}\{I_{\rho i_3\cdots i_6}, I^{\rho}{}_{i_7\cdots i_{10}}\} + 8E_{i_1\cdots i_3}\{H_{\rho i_4\cdots i_6}, I^{\rho}{}_{i_7\cdots i_{10}}\})\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} \\
(455) &= -2G_{i_1\cdots i_4}\{I^{i_1 i_2}{}_{j_3 j_4 j_5}, I^{i_3 i_4 j_3 j_4 j_5}\} - 6G_{i_1\cdots i_4}\{H^{i_1 i_2}{}_{j_3 j_4}, H^{i_3 i_4 j_3 j_4}\} + 8F_{\rho i_1 i_2}\{H^{\rho}{}_{i_3 i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} \\
-3U_\sharp^2 StrM &= -96U_\sharp^2 Z + 3U_\sharp^2 v
\end{aligned}
$$

同様にして、運動方程式は次で得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial v} &= 3U_\sharp^2 - 3v^2 = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial Z} &= 96Z^2 - 96U_\sharp^2 + 96W^2 + 48\{A_{i_1}, A^{i_1}\} - 48\{B_{i_1}, B^{i_1}\} - 24\{C_{i_1 i_2}, C^{i_1 i_2}\} \\
&- 24\{D_{i_1 i_2}, D^{i_1 i_2}\} - 8\{E_{i_1 i_2 i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}\} + 8\{F_{i_1 i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}\} + 2\{G_{i_1\cdots i_4}, G^{i_1\cdots i_4}\} \\
&+ 2\{H_{i_1\cdots i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} + \frac{2}{5}\{I_{i_1\cdots i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial W} &= 96[A_{i_1}, B^{i_1}] + 96\{Z, W\} - 48\{C_{i_1 i_2}, D^{i_1 i_2}\} - 16[E_{i_1 i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + 4\{G_{i_1\cdots i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} \\
&+ \frac{2}{5}[I_{i_1\cdots i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial A_{i_1}} &= 96\{Z, A^{i_1}\} - 96[W, B^{i_1}] - 96[A_{i_2}, C^{i_1 i_2}] - 96\{B_{i_2}, D^{i_1 i_2}\} - 48\{C_{i_2 i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}\} \\
&+ 48[D_{i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + 16[E_{i_2 i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}] + 16\{F_{i_2 i_3 i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} + 4\{G_{i_2\cdots i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} \\
&- 4[H_{i_2\cdots i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial B_{i_1}} &= -96\{Z, B^{i_1}\} + 96[W, A^{i_1}] + 96\{A_{i_2}, D^{i_1 i_2}\} + 96[B_{i_2}, C^{i_1 i_2}] + 48\{C_{i_2 i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}\} \\
&- 48[D_{i_2 i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}] - 16\{E_{i_2 i_3 i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} - 16[F_{i_2 i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}] - 4\{G_{i_2\cdots i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}\} \\
&+ 4[H_{i_2\cdots i_5}, I^{i_1\cdots i_5}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial C_{i_1 i_2}} &= -48\{Z, C^{i_1 i_2}\} - 48\{W, D^{i_1 i_2}\} - 48[A^{i_1}, A^{i_2}] - 48\{A_{i_3}, E^{i_1 i_2 i_3}\} + 48[B_{i_1}, B_{i_2}] + 48\{B_{i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}\} \\
&+ 48[C^{[i_1}{}_{i_3}, C^{i_2]i_3}] + 24\{C_{i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}\} + 48[D^{[i_1}{}_{i_3}, D^{i_2]i_3}] + 24\{D_{i_3 i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} + 24[E^{[i_1}{}_{i_3 i_4}, E^{i_2]i_3 i_4}] \\
&+ 8\{E_{i_3 i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} - 24[F^{[i_1}{}_{i_3 i_4}, F^{i_2]i_3 i_4}] - 8\{F_{i_3 i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}\} - 8[G^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, G^{i_2]i_3 i_4 i_5}] \\
&- \frac{1}{12}\{G_{i_3\cdots i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} - 8[H^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, H^{i_2]i_3 i_4 i_5}] - 2[I^{[i_1}{}_{i_3\cdots i_6}, I^{i_2]i_3\cdots i_6}] = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial D_{i_1 i_2}} &= -48\{Z, D^{i_1 i_2}\} - 48\{W, C^{i_1 i_2}\} - 96\{A^{[i_1}, B^{i_2]}\} - 48[A_{i_3}, F^{i_1 i_2 i_3}] + 48[B_{i_3}, E^{i_1\cdots i_3}] \\
&+ 96[C_\rho{}^{[i_1}, D^{\rho i_2]}] + 24\{C_{i_3 i_4}, H^{i_1\cdots i_4}\} + 24\{D_{i_3 i_4}, G^{i_1\cdots i_4}\} + 48\{E^{[i_1}{}_{i_3 i_4}, F^{i_2]i_3 i_4}\} \\
&+ 8[E_{i_3 i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] - 8[F_{i_3 i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}] - \frac{1}{24}\{G_{i_3\cdots i_6}, G_{i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} - 16[G^{[i_1}{}_{i_3 i_4 i_5}, H^{i_2]i_3 i_4 i_5}] \\
&+ \frac{1}{24}\{H_{i_3\cdots i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + \frac{1}{24}\{I_{\rho i_3\cdots i_6}, I^{\rho}{}_{i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial E_{i_1 i_2 i_3}} &= -16\{Z, E^{i_1 i_2 i_3}\} + 16[W, F^{i_1 i_2 i_3}] - 48\{A^{[i_1}, C^{i_2 i_3]}\} - 16[A_\rho, G^{\rho i_1 i_2 i_3}] - 48[B^{[i_1}, D^{i_2 i_3]}] \\
&+ 16\{B_\rho, H^{\rho i_1 i_2 i_3}\} + 48[C_\rho{}^{[i_1}, E^{\rho i_2 i_3]}] + 8\{C_{i_4 i_5}, I^{i_1\cdots i_5}\} - 8[D_{i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1\cdots i_5}] \\
&- 48\{D_\rho{}^{[i_1}, F^{\rho i_2 i_3]}\} + 24\{E^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, G^{i_2 i_3]i_4 i_5}\} - \frac{1}{9}[E_{i_4 i_5 i_6}, H_{i_7\cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + 24[F^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, H^{i_2 i_3]i_4 i_5}] \\
&- \frac{1}{9}\{F_{i_4 i_5 i_6}, G_{i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} + 8[G^{[i_1}{}_{i_4 i_5 i_6}, I^{i_2 i_3]i_4 i_5 i_6}] + \frac{1}{9}\{H^{\rho}{}_{i_4 i_5 i_6}, I^{\rho i_7\cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1\cdots i_{10}\sharp} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial F_{i_1 i_2 i_3}} &= 16\{Z, F^{i_1 i_2 i_3}\} - 16[W, E^{i_1 i_2 i_3}] + 48[A^{[i_1}, D^{i_2 i_3]}] + 16\{A_\rho, H^{\rho i_1 i_2 i_3}\} + 48\{B^{[i_1}, C^{i_2 i_3]}\} \\
&+ 16[B_\rho, G^{\rho i_1 i_2 i_3}] - 48[C_\rho{}^{[i_1}, F^{\rho i_2 i_3]}] - 8\{C_{i_4 i_5}, \tilde{I}^{i_1 \cdots i_5}\} + 48\{D_\rho{}^{[i_1}, E^{\rho i_2 i_3]}\} \\
&+ 8[D_{i_4 i_5}, I^{i_1 \cdots i_5}] - 24[E^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, H^{i_2 i_3] i_4 i_5}] + \frac{1}{9}\{E_{i_4 i_5 i_6}, G_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - 24\{F^{[i_1}{}_{i_4 i_5}, G^{i_2 i_3] i_4 i_5}\} \\
&- 8[G^{[i_1}{}_{i_4 i_5 i_6}, \tilde{I}^{i_2 i_3] i_4 i_5 i_6}] + 8\{H^{[i_1}{}_{i_4 i_5 i_6}, I^{i_2 i_3] i_4 i_5 i_6}\}) = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial G_{i_1 \cdots i_4}} &= 4\{Z, G^{i_1 \cdots i_4}\} + 4\{W, H^{i_1 \cdots i_4}\} + 16[A^{[i_1}, E^{i_2 i_3 i_4]}] + 4\{A_\rho, I^{i_1 \cdots i_4 \rho}\} - 16[B^{[i_1}, F^{i_2 i_3 i_4]}] \\
&- 4\{B_{i_5}, \tilde{I}^{i_1 \cdots i_5}\} + 12\{C^{[i_1 i_2}, C^{i_3 i_4]}\} - 16[C_\rho{}^{[i_1}, G^{\rho i_2 i_3 i_4]}] - \frac{1}{12}\{C_{i_5 i_6}, H_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&+ 12\{D^{[i_1 i_2}, D^{i_3 i_4]}\} - \frac{1}{12}\{D_{i_5 i_6}, G_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - 16[D_\rho{}^{[i_1}, H^{\rho i_2 i_3 i_4]}] + 12\{E_\rho{}^{i_1 i_2}, E^{\rho i_3 i_4}\} \\
&- \frac{1}{9}\{E_{i_4 i_5 i_6}, F_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - 8[E^{[i_1}{}_{i_5 i_6}, I^{i_2 i_3 i_4] i_5 i_6}] - 12\{F_\rho{}^{[i_1 i_2}, F^{\rho i_3 i_4]}\} + 8[F^{[i_1}{}_{i_5 i_6}, \tilde{I}^{i_2 i_3 i_4] i_5 i_6}] \\
&- 6\{G^{[i_1 i_2}{}_{j_1 j_2}, G^{i_3 i_4] j_1 j_2}\} + \frac{1}{9}[G^{[i_1}{}_{i_5 i_6 i_7}, H_{i_8 \cdots i_{11}}]\epsilon^{i_2 i_3 i_4] i_5 \cdots i_{11} \sharp} - 6\{H^{[i_1 i_2}{}_{j_1 j_2}, H^{i_3 i_4] j_1 j_2}\} \\
&- 2\{I^{[i_1 i_2}{}_{j_1 j_2 j_3}, I^{i_3 i_4] j_1 j_2 j_3}\} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial H_{i_1 \cdots i_4}} &= 4\{Z, H^{i_1 \cdots i_4}\} + 4\{W, G^{i_1 \cdots i_4}\} + 16\{A^{[i_1}, F^{i_2 i_3 i_4]}\} + 4[A_{i_5}, \tilde{I}^{i_1 \cdots i_5}] - 16\{B^{[i_1}, E^{i_2 \cdots i_4]}\} \\
&- 4[B_{i_5}, I^{i_1 \cdots i_5}] + 24\{C^{[i_1 i_2}, D^{i_3 i_4]}\} - \frac{1}{12}\{C_{i_5 i_6}, G_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - 16[C_\rho{}^{[i_1}, H^{\rho i_2 \cdots i_4]}] \\
&- 16[D_\rho{}^{[i_1}, G^{\rho i_2 i_3 i_4]}] + \frac{1}{12}\{D_{i_5 i_6}, H_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - \frac{1}{18}[E^{i_5 i_6 i_7}, E^{i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} + 24[E_\rho{}^{[i_1 i_2}, F^{\rho i_3 i_4]}] \\
&- \frac{1}{9}\{E_{i_5 i_6 i_7}, I^{[i_1}{}_{i_8 \cdots i_{11}}\}\epsilon^{i_2 i_3 i_4] i_5 \cdots i_{11} \sharp} + 8\{F^{[i_1}{}_{i_5 i_6}, I^{i_2 i_3 i_4] i_5 i_6}\} + \frac{1}{18}[G^\rho{}_{i_5 i_6 i_7}, G_{\rho i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&- 12\{G^{i_1 i_2 j_1 j_2}, H^{i_3 i_4}{}_{j_1 j_2}\} + \frac{1}{54}[H^\rho{}_{i_4 \cdots i_7}, H_{\rho i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} + \frac{1}{27}[H^{[i_1}{}_{i_5 i_6 i_7}, H_{i_8 \cdots i_{11}}]\epsilon^{i_2 i_3 i_4] i_5 \cdots i_{11} \sharp} \\
&+ \frac{1}{108}[I^{\rho\sigma}{}_{i_5 \cdots i_7}, I_{\rho\sigma i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} + \frac{1}{90}[I^{[i_1 i_2}{}_{i_5 i_6 i_7}, I_{i_8 \cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4] i_5 \cdots i_{12} \sharp} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial I_{i_1 \cdots i_5}} &= \frac{4}{5}\{Z, I^{i_1 \cdots i_5}\} - \frac{4}{5}[W, \tilde{I}^{i_1 \cdots i_5}] + 4\{A^{[i_1}, G^{\rho i_2 \cdots i_5]}\} - \frac{1}{30}[A_{i_6}, H_{i_7 \cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&- \frac{1}{30}\{B_{i_6}, G_{i_7 \cdots i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} + 4[B^{[i_1}, H^{i_2 \cdots i_5]}] + 8\{C^{[i_1 i_2}, E^{i_3 i_4 i_5]}\} - \frac{1}{15}\{C_{i_6 i_7}, F_{i_8 i_9 i_{10}}\}\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&- 4[C_\rho{}^{[i_1}, I^{\rho i_2 \cdots i_5]}] + \frac{1}{15}[D_{i_6 i_7}, E_{i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} - 8[D^{[i_1 i_2}, F^{i_3 i_4 i_5]}] + \frac{1}{12}\{D_{i_6 i_7}, I^{[i_1}{}_{i_8 \cdots i_{11}}\}\epsilon^{i_2 \cdots i_5] i_6 \cdots i_{11} \sharp} \\
&+ 8[E_\rho{}^{[i_1 i_2}, G^{\rho i_3 \cdots i_5]}] + \frac{1}{9}\{E_{i_6 i_7 i_8}, H^{[i_1}{}_{i_9 i_{10} i_{11}}\}\epsilon^{i_2 \cdots i_5] i_6 \cdots i_{11} \sharp} - \frac{1}{15}[F^\rho{}_{i_6 i_7}, G_{\rho i_8 \cdots i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&+ 8\{F_\rho{}^{[i_1 i_2}, H^{\rho i_3 \cdots i_5]}\} - 4\{G_{\rho\sigma}{}^{[i_1 i_2}, I^{\rho\sigma i_3 i_4 i_5]}\} - \frac{1}{90}[H_{\rho\sigma}{}^{i_6 i_7}, I^{\rho\sigma i_8 i_9 i_{10}}]\epsilon^{i_1 \cdots i_{10} \sharp} \\
&- \frac{1}{90}[H^{[i_1 i_2}{}_{i_6 i_7}, I_{i_8 \cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4 i_5] i_6 \cdots i_{12} \sharp} + \frac{1}{54}[I^{[i_1 i_2}{}_{i_6 i_7 i_8}, H_{i_9 \cdots i_{12}}]\epsilon^{i_3 i_4 i_5] i_6 \cdots i_{12} \sharp} = 0
\end{aligned}
$$