

Ads/CF T 文法への
直接的検証への道

2000. 06. 25 (Sun). 09:30-10:00

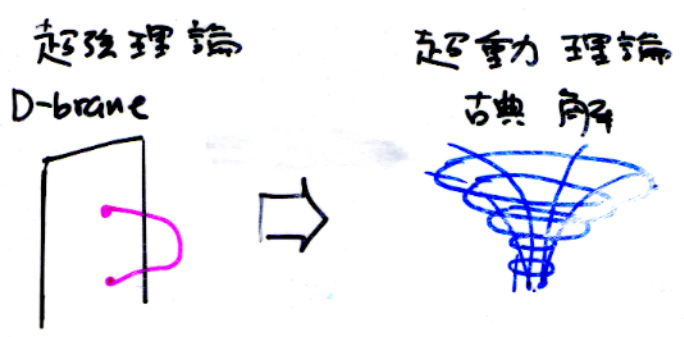
京大理・物Ⅱ-素論 M2.

東 武大

§1-Introduction

⊗ AdS/CFT 対応とは？

超重力理論 と gauge 理論 の間の双対性
(see. hep-th/9711200)



特に D3-brane の場合:

- $AdS_5 \times S^5$ 空間上の type IIB 超弦理論
- $N=4$ 4dim の Super Yang-Mills (SYM) 理論

⊗ black p-brane solution. (12.1.7)

[see Horowitz & Strominger.
Nucl. Phys. B360(1991) 197]

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} (-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx_i^2) + \sqrt{H(r)} r^2 \sum_{a=1}^{9-p} d\alpha_a d\alpha_a$$

where. $H(r) = (1 + \frac{r_{sch}^2}{r^2})^{7-p}$, $r^a = r \theta^a$, $\sum_{a=1}^{9-p} \theta^a \theta^a = 1$

$r_{sch} = [Schwarzschild 半径] = l_p (dp g_s N)^{\frac{1}{4-p}}$

Yang-Mills 理論
の結合定数

$dp = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma(\frac{7-p}{2})$, $(2\pi)^{p-2} g_s \alpha'^{\frac{p-3}{2}} = \frac{g^2}{2}$

- 古典的超重力理論 による記述がよい $\Rightarrow g^2 N \gg 1$
- D-brane による記述がよい $\Rightarrow g^2 N \ll 1$

④ 対称性から見た AdS/CFT 対応.

- (1) Super conformal group $SO(5,1)$
- (2) Montonen - Olive $SL(2, \mathbb{Z})$ duality.

⑤ 従来知 SN^7 13. 具体的に有物理量の一覧

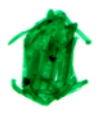
(13.1) Adler - Bell - Jackiw anomaly.

• $N=4$ 4 dim SYM について.

$$\langle J_m^a(x) J_n^b(y) J_p^c(z) \rangle = \frac{N^2-1}{32\pi^6} i d^{abc} \frac{\text{Tr}[\gamma_m(x-y) \gamma_n(y-z) \gamma_p(z-x)]}{(x-y)^4 (y-z)^4 (z-x)^4}$$

$$\Rightarrow (D^m J_m)^a_{\text{sym}} = \frac{N^2-1}{384\pi^2} i d^{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c$$

(where $d^{abc} = 2 \text{Tr}[T^a \{T^b, T^c\}]$)

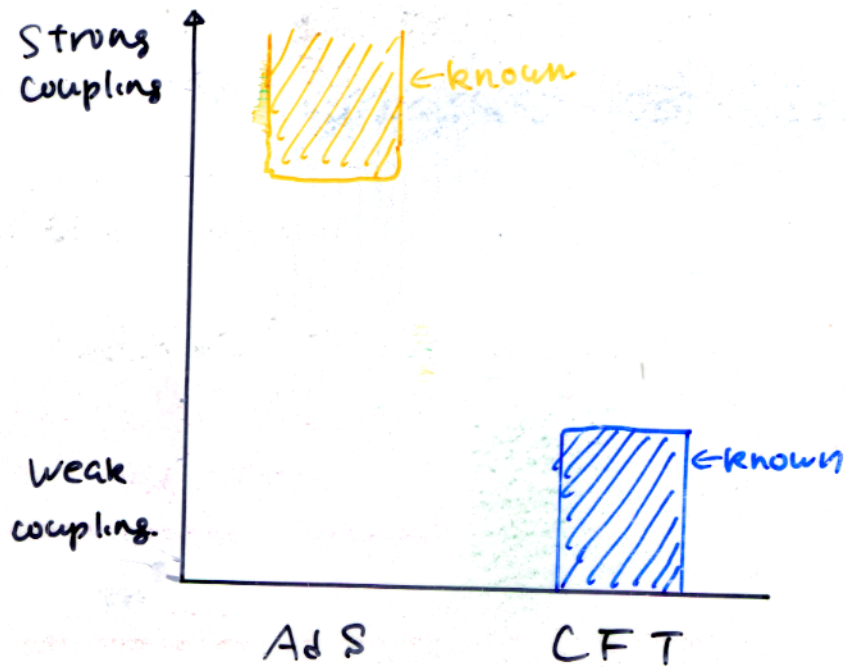


• $AdS_5 \times S^5$ 上の type II B 超重力理論 について.

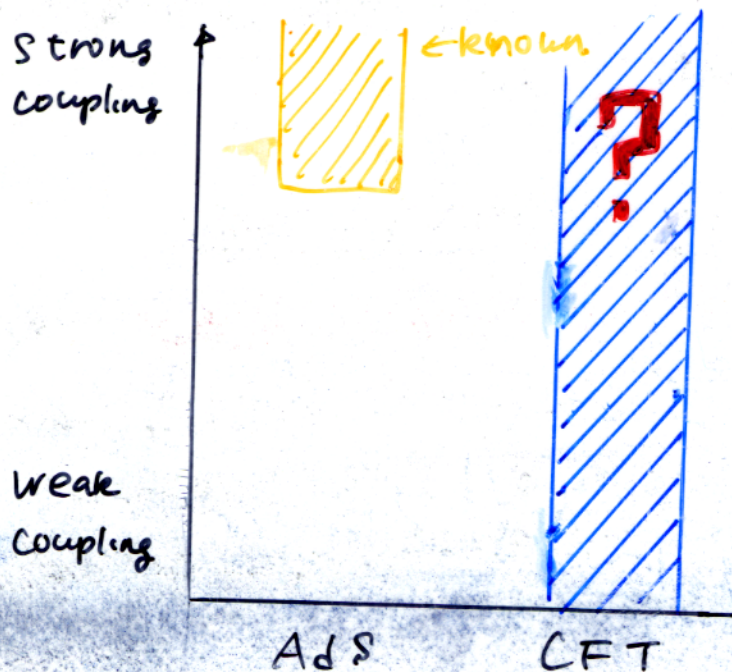
Chern - Simons 項を考慮して.

$$\frac{iN^2}{96\pi^2} \int_{AdS^5} d^5x (d^{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b \partial_\sigma A_n^c + \dots)$$

$$\Rightarrow (D^m J_m)^a_{\text{ads}} = \frac{iN^2}{384\pi^2} d^{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c$$



○従来の .ABJ anomaly や 3点関数 などによる AdS / CFT 対応の検証



- Erickson S1 による Wilson loop を用いた AdS / CFT 対応の **直接的** 検証の試み

§2 - Wilson loop

④ $N=4$ SYMの Wilson loop については. gauge群を

$SU(N+1) \rightarrow SU(N) \times U(1)$ に破れて考える



(*) 以下 $N \rightarrow \infty$ $g^2 N \rightarrow \text{fixed}$ の 't Hooft limit をとるものとする!

* Euclid 化をさせた Wilson loop

$$W = \frac{1}{N} \text{Tr} \text{Pexp} \left[\int d\tau \left(i A_\mu^a(x) T^a \dot{x}^\mu + \Phi_i^a(x) |\dot{x}| T^a \theta^i(\tau) \right) \right]$$

where $T^a := SU(N)$ 群の generator.

• $\theta^i := [S^3 \text{ 球面の座標}]$. $\sum_{i=1}^{10} \theta^i \theta^i = 1$.

effective には τ -依存性はないものとして仮定せよ.

• $2W := [$ 時空の次元]

④ $N=4$ SYMの作用と Feynman rule.

以下では. Feynman 't Hooft gauge を採用する. ($\xi=1$)

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \frac{1}{2g^2} & \left[\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + (\partial_\mu \phi_i^a + f^{abc} A_\mu^b \phi_i^c)^2 + i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi^a + f^{abc} A_\mu^b \psi^c) \right. \\ & + i f^{abc} \bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b \phi_i^c + \sum_{i,j} f^{abc} f^{ade} \phi_i^b \phi_j^c \phi_i^d \phi_j^e \\ & \left. + \partial_\mu \bar{c}^a (\partial_\mu c^a + f^{abc} A_\mu^b c^c) + \xi (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right] \end{aligned}$$

• Vector field

$$\begin{array}{c} a \\ \text{~~~~~} \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} b \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} = g^2 \frac{f^{ab} \delta_{\mu\nu}}{p^2}$$

• Scalar field

$$\begin{array}{c} a \\ \text{-----} \\ i \end{array} \begin{array}{c} b \\ \text{-----} \\ j \end{array} = g^2 \frac{\delta^{ab} \delta_{ij}}{p^2}$$

① 最低次の展開:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{N} \text{Tr} P \left[1 + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left(\overbrace{(i A_\mu^a(x) T^a \dot{\chi}^\mu(\tau_1) + \Phi_i^a(x) T^a |\dot{\chi}(\tau_1)| \theta^i)}^{\text{Wick contraction}} \right) \right. \\ \left. \overbrace{(i A_\nu^b(x) T^b \dot{\chi}^\nu(\tau_2) + \Phi_j^b(x) T^b |\dot{\chi}(\tau_2)| \theta^j)}^{\text{Wick contraction}} \right) + \dots \right]$$



$$\langle A_\mu^a(\tau_1) A_\nu^b(\tau_2) \rangle = \frac{g^2}{p^2} \delta^{ab} \delta_{\mu\nu}$$

$$\langle \Phi_i^a(\tau_1) \Phi_j^b(\tau_2) \rangle = \frac{g^2}{p^2} \delta^{ab} \delta_{ij}$$

Fourier 変換の公式

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} e^{ip \cdot x} (p^2)^s = \frac{\Gamma(\omega-s)}{4s\pi^\omega \Gamma(s)} \frac{1}{(\lambda^2)^{\omega-s}}$$

$$\langle A_\mu^a(\tau_1) A_\nu^b(\tau_2) \rangle = \frac{g^2 \Gamma(\omega-1)}{4\pi^2 \lambda^2} \delta^{ab} \delta_{\mu\nu}, \quad \langle \Phi_i^a(\tau_1) \Phi_j^b(\tau_2) \rangle = \frac{g^2 \Gamma(\omega-1)}{4\pi^2 \lambda^2} \delta^{ab} \delta_{ij}$$

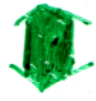


$$\langle W \rangle = 1 + \frac{g^2 N \Gamma(\omega-1)}{16\pi^2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left[\frac{(\dot{\chi}(\tau_1) | \dot{\chi}(\tau_2) - \dot{\chi}(\tau_1) \cdot \dot{\chi}(\tau_2))}{|\chi(\tau_1) - \chi(\tau_2)|^{2(\omega-1)}} \right] + \mathcal{O}(g^4 N^2)$$

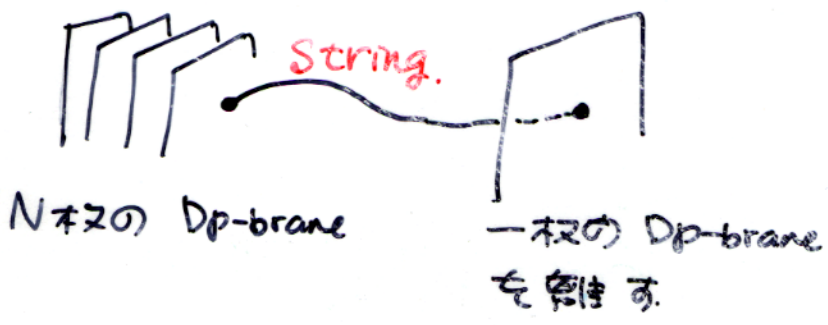
Wilson loop of $AdS_5 \times S^5$ classical SYM

• $N=4$ 4dim SYM:

ゲージ群を $SU(N+1) \mapsto U(1) \times SU(N)$ に破る



• $AdS_5 \times S^5$ 古典的超重力:



(1) 円状の Wilson loop

$$\langle W \rangle_{\text{circle}} = e^{-S} \approx e^{R^2/\alpha'} = \exp(\sqrt{g^2 N})$$

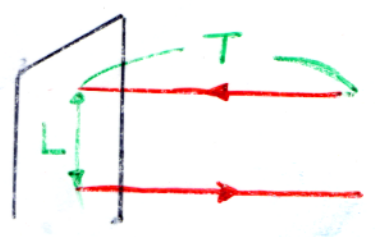
($R := [AdS_5$ 空間の hyperbolic surface の r 半径].

$$R = l_s (4\pi g_s N)^{1/4} = l_s (g^2 N)^{1/4}$$

(2) 反平行な直線の Wilson loop.

minimal surface の考え方をを用いて. 作用

$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\det g_{\mu\nu} \partial x^\mu \partial x^\nu}$ を極小化.



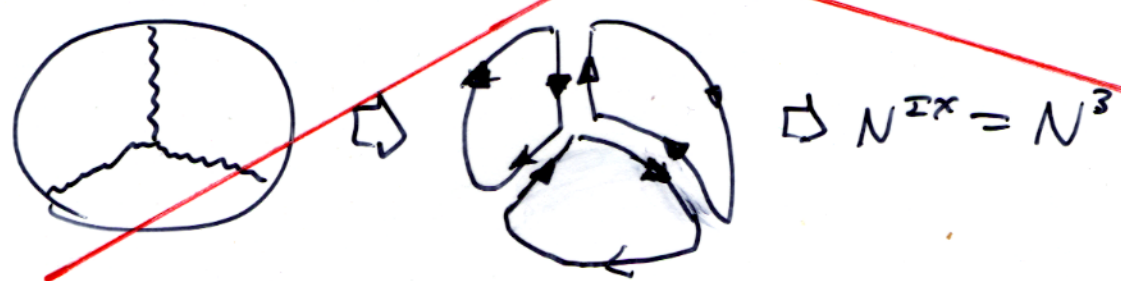
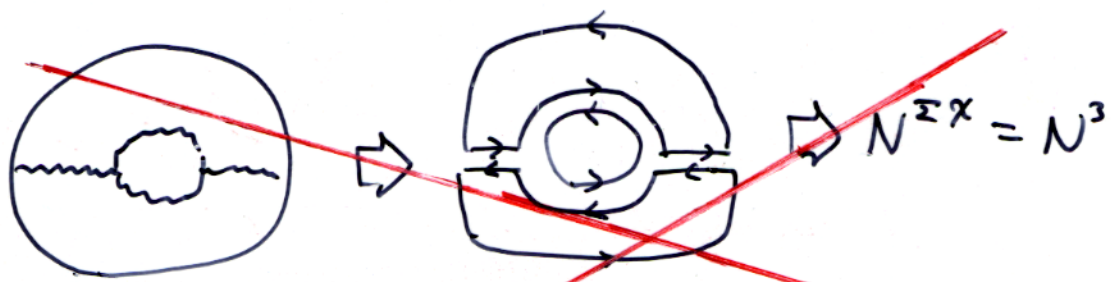
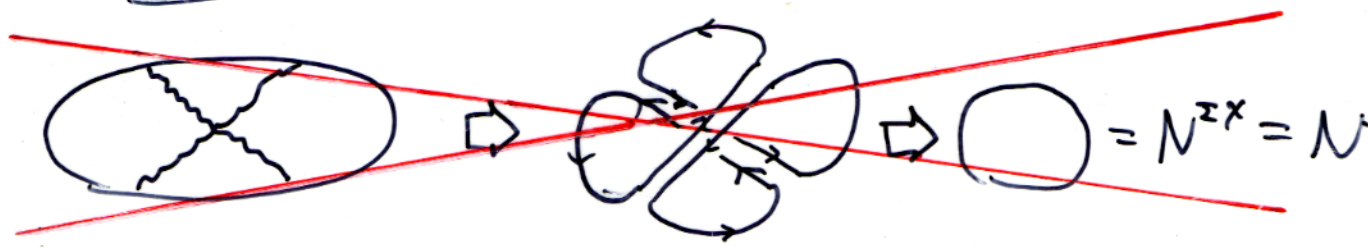
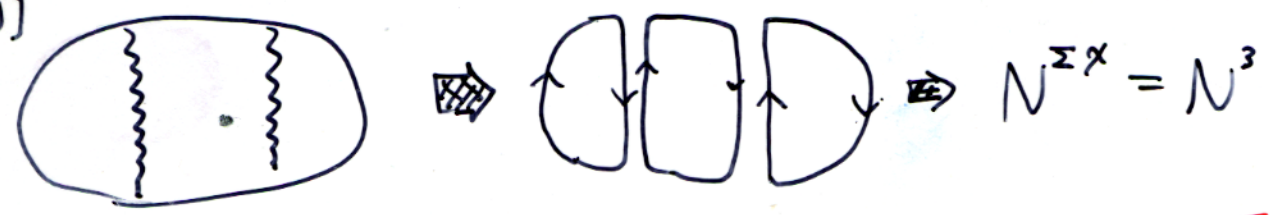
$$\Rightarrow \langle W \rangle_{\text{anti-para}} = \exp\left[\frac{4\pi^2 (g^2 N)^{1/2} T}{\Gamma(1/4)^4 L}\right] = \exp\left[0.228 \sqrt{g^2 N} \frac{T}{L}\right]$$

§3 - ladder 近似 による評価

⊗ ladder approximation とは?

- 2点関数 $\chi(\tau_1) \dots \chi(\tau_{2n})$ に対する外場について、Wick contraction をするときに、Vector field の propagator が交点をもたない ような diagram のみを抽出する。
- 内線について、loop補正をもつもの、propagator の内部に vertex をもつものを排除する

[例]



⊗ 円状の Wilson loop の評価

共形不変性より 半径1の円のみを考慮すれば十分である。

$$\chi(\tau) = (\cos \tau, \sin \tau, 0, 0)$$

$$\langle W \rangle_{\text{ladder}} = \text{circle} + \text{circle with 1 wavy line} + \text{circle with 2 wavy lines} + \text{circle with 3 wavy lines} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} d\tau_{2n} \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^{2n} (iA(\tau_k) + \Phi(\tau_k)) \right)_{\text{ladder}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{g^2 N}{4} \right)^n \cdot \left(\# \text{ } 2n \text{ 点の ladder } \left(\pi/2 \right) \text{ の contraction の } \tau \text{ の } \right) \right]$$

" カタラン数: $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

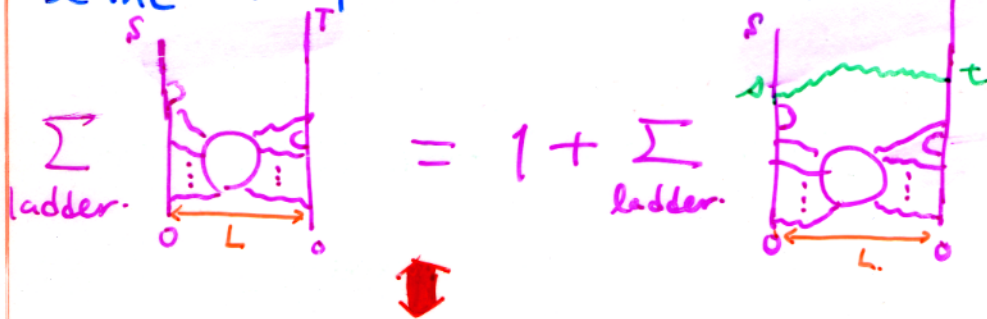
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g^2 N}{4} \right)^n \frac{1}{n!(n+1)!} = \frac{2}{\sqrt{g^2 N}} I_1(\sqrt{g^2 N})$$

$$\langle W \rangle_{\text{ladder}} = \frac{2 I_1(\sqrt{g^2 N})}{\sqrt{g^2 N}} \xrightarrow{g^2 N \gg 1} \frac{\exp(\sqrt{g^2 N})}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} (g^2 N)^{3/4}}$$

⊗ 反平行直線の Wilson loop の計算

$\Gamma(S, T) := \left[\begin{array}{l} \text{ランダム長土 } S, T \text{ の 2 本の 反平行な} \\ \text{直線の ladder } \sqrt{T} \times 2 \text{ の Wilson loop の 期待値} \end{array} \right]$

⇒ Bethe Salpeter 方程式に従う。



積分方程式

$$\Gamma(S, T) = 1 + \int_0^S ds \int_0^T dt \frac{\Gamma(s, t) g^2 N}{4\pi^2 [(s-t)^2 + L^2]}$$

⊗ 弱結合 ($g^2 N \ll 1$) の極限

$$\Gamma(T, T) \cong \exp\left[\frac{T}{L} \left(\frac{g^2 N}{4\pi} - \frac{g^4 N^2}{8\pi^3} \ln \frac{1}{g^2 N} + \dots \right)\right]$$


⊗ 強結合 ($g^2 N \gg 1$) の極限

$$\begin{aligned} \Gamma(T, T) &\cong \exp\left[\frac{T}{L} \left(\frac{\sqrt{g^2 N}}{\pi} - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{g^2 N}}\right) \right)\right] \\ &\cong \exp\left[\frac{T}{L} \left(0.318 \dots \sqrt{g^2 N} \right)\right] \end{aligned}$$

§4 - ladder 近似の正当性の議論

◦ hep-th/0003055 の論じたこと:

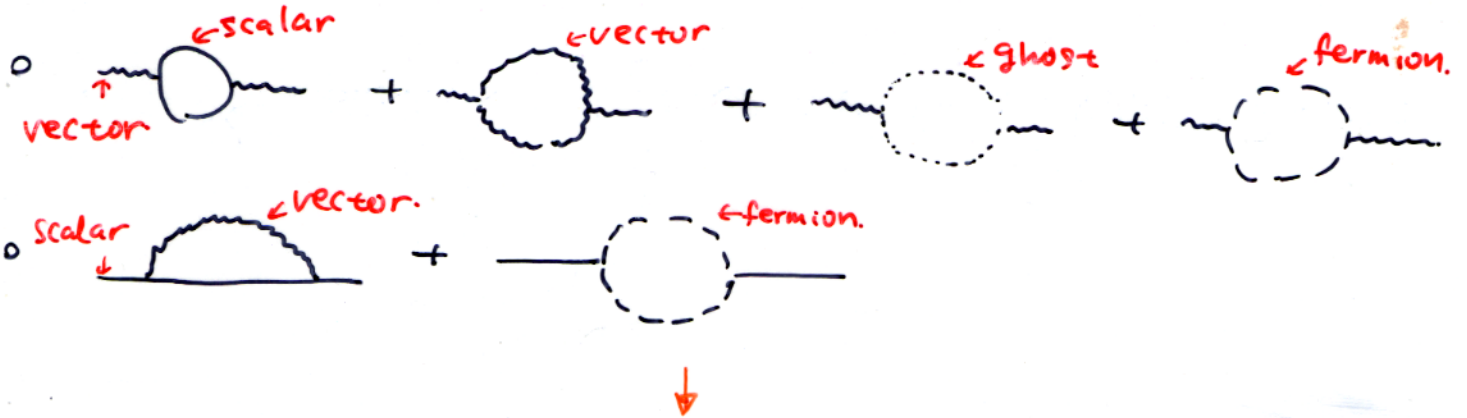
円状 Wilson loop, 互平行直線の Wilson loop の差について.



と(7)の Cancellation が $g^4 N^2$ の order まで成り立つ。

⑧ $\Sigma_2 =$ の評価:

$N=4$ 4dim SYM について. One-loop の計算から次の Feynman diagram の評価を行う。



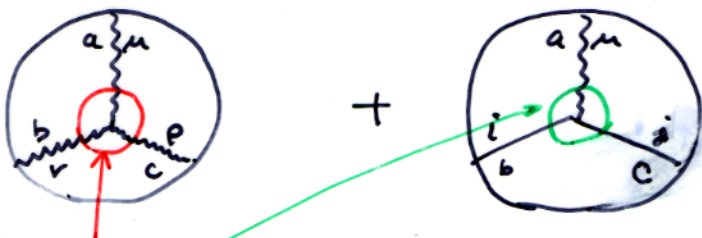
◦ Scalar, vector 場ともに Fourier 変換後の diagram は.

$$\text{---} : \text{---} \text{---} \text{---} = 1 : \frac{-g^2 N \Gamma(\omega-1)}{8\pi^\omega (2-\omega)(2\omega-3)(\lambda^2)^{\omega-2}}$$

§2 で求めた. 最低次の展開でも. 上記と. 同様の比が成り立つ。

$$\Sigma_2 = \frac{-g^4 N^2 \Gamma^2(\omega-1)}{128\pi^{2\omega} (2-\omega)(2\omega-3)} \int d^2\tau_1 d^2\tau_2 \frac{(\dot{x}(\tau_1) \|\dot{x}(\tau_2) - \dot{x}(\tau_1) \cdot \dot{x}(\tau_2) - \dot{x}(\tau_1) \cdot \dot{x}(\tau_2))}{L(x(\tau_1) - x(\tau_2))^{2\omega-3}}$$

⊗ $\Sigma_3 =$  の言平価



$$\left[\frac{-i}{4g^2} \int d^4y f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a(y) A_\mu^b(y) A_\nu^c(y) \right] \times 4$$

$$\left[\frac{-i}{2g^2} \int d^4y f^{abc} \partial_\mu \phi_i^a(y) A_\mu^b(y) \phi_j^c(y) \right] \times 2$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \frac{-g^4 N^2}{4} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \in(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \left[(\dot{x}^{(1)} | \dot{x}^{(3)} | - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)}) \dot{x}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \int d^{2\omega} y \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \Delta(x^{(1)} - y) \right] \\ &= \frac{g^4 N^2}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha\beta\gamma)^{\omega-2} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \in(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ &\quad \times \frac{(|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)}) (\alpha(1-\alpha) \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(1)} - \alpha\gamma \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(3)} - \alpha\beta \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(1)})}{[\alpha\beta |\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)}|^2 + \alpha\gamma |\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(3)}|^2 + \beta\gamma |\dot{x}^{(2)} - \dot{x}^{(3)}|^2]^{2\omega-2}} \end{aligned}$$

where $\in(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} 1 & \text{(if } \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 \text{ or } \tau_2 > \tau_3 > \tau_1 \text{ or } \tau_3 > \tau_1 > \tau_2) \\ -1 & \text{(if } \tau_2 > \tau_1 > \tau_3 \text{ or } \tau_1 > \tau_3 > \tau_2 \text{ or } \tau_3 > \tau_2 > \tau_1) \end{cases}$

$$\Delta(x^i - y) = \frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega} \frac{1}{[|x^i - y|^2]^{\omega-1}}$$

④ 具体的に、Wilson loop についての Σ_2 と Σ_3 の計算

○ 円状の Wilson loop: $\chi(\tau) = (\cos \tau, \sin \tau, 0, 0)$ $\forall \tau \in \lambda \Rightarrow$

$$\Sigma_3 = -\Sigma_2 = \frac{g^4 N^2 \Gamma^2(\omega-1)}{2^{2\omega+4} \pi^{2\omega} (2-\omega)(2\omega-3)} \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2\omega-4}}$$

○ 反平行直線の Wilson loop

$\Sigma_3 \neq 0$ であるための non-trivial な配置

○ $(\dot{x}^{(1)} | \dot{x}^{(2)}) - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(2)} \neq 0 \Rightarrow \underline{\chi^{(1)} \text{ と } \chi^{(2)} \text{ は 反対側}}$

○ $\alpha(1-\alpha) \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(1)} - \alpha \beta \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(3)} - \alpha \beta \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(3)} \neq 0$

$\Rightarrow \underline{\chi^{(2)} \text{ と } \chi^{(3)} \text{ は 同側}}$

$\chi^{(1)} = (\tau_1, \frac{1}{2}, 0, 0)$ $\chi^{(2)} = (\tau_2, \frac{1}{2}, 0, 0)$ $\chi^{(3)} = (-\tau_3, \frac{1}{2}, 0, 0)$

[n と 同等な配置は、4通り]

$$\Sigma_3 = -\Sigma_2 = \frac{g^4 N^2 \Gamma^2(\omega-1)}{32 \pi^{2\omega} (2\omega-3)(2-\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2 d\tau_3}{[(\tau_2 + \tau_3)^2 + L^2]^{2\omega-3}}$$

いずれの場合も $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 + O(g^6 N^3)$ である!!

§5-まとめ

- ◎ Wilson loopについて. CFT側 ($N=4$, 4dim SYM) における. 強・弱両結合領域における Wilson loopの計算を試みた。
- ◎ 円状, 反平行直線の Wilson loop について.
 - 指数部分が $\sqrt{g^2 N}$ に比例するという振舞いについていすれもよく再現した。
 - 特に円状の loop については, $\sqrt{g^2 N}$ の係数まで, よく再現した。
 - しかし反平行直線の場合, 係数については, あまり一致をしなかった。
- ◎ ladder 近似の正当性については, $g^4 N^2$ の Order については, 確認されている。

§ A- カタラン数について!

定義: カタラン数 $N_n \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ 点 $(0,0)$ から点 (n,n) まで、格子点上を、 \uparrow または \rightarrow の方向に歩いて、なおかつ常に $x \geq y$ を満たしながらかくときの、場合の数。

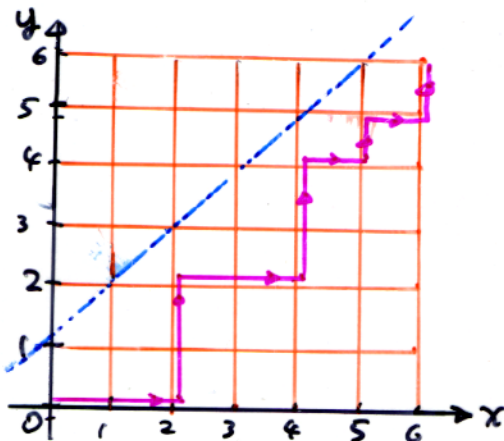
[問題]

n の子供と、 n の大人が、あるホテルに宿泊する。宿泊料は 5000円であり、子供は、5000円札しか持っていない。大人は、10000円札しか持っていない。最初、受付は一切おつちを用意しているとして、おつちが不足することなく、全つの客を捌ける。並べ方の、場合の数を求めなさい。

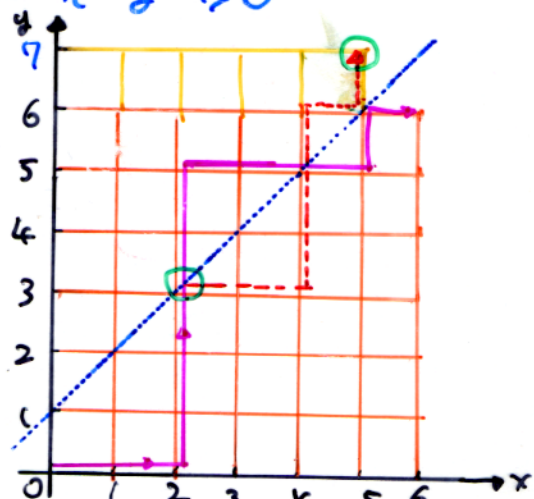
[解答] 子供を x 人、大人を y 人 捌いたとき:

$$[5000 \text{円札の枚数}] = x - y \geq 0$$

でなければいけない...



可能な道筋



ダメな道筋. $\Rightarrow 2n C_{n+1}$ 通り

$$\Rightarrow N_n = 2n C_n - 2n C_{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

★ カタラン数と diagram の 切数分けの関係

先の議論の「可能な通筋」を次のようにして。
planar diagramの書き方の場合の数に対応させる

