ツイスター理論入門

2008/1/31 大阪セミナー

1 Introduction.

ツイスター理論. R. Penrose (1967) ～

(複素)時空 ←→ (射影)ツイスター空間 多：多

クライン対応.

(非)線形微分方程式の解 ←→ 複素幾何学的データ.
ペンローズ変換
(正則関数 or コホモロジー類)
cf. フーリエ変換.

― 成果 ― (ツイスターの世界 (高崎) 前書き より)

1. YM方程式のインスタントン解やモノポール解の構成, 特徴づけ
2. Einstein方程式の"インスタントン解"の構成, 特徴づけ
3. 高次元可積分系の構成, そこからソリトン方程式などを導くこと.
4. 表現論, 積分幾何学, 多変数複素関数論, 代数解析学に題材を提供すること.

。ツイスター弦理論?

Ref.

"An Introduction to Twistor Theory" S.A. Huggett & K.P. Tod.
London Mathematical Society Student Texts 4 (Cambridge U. Press)

"Twistor Geometry and Field Theory" R.S. Ward & R.O. Wells Jr.
Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge U. Press)

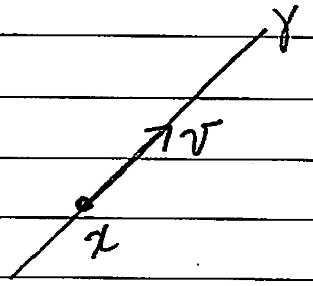
◎「ツイスターの世界」 高崎金久 (共立出版)

この lecture は ◎ の 2章に沿ったもの.

2. ヌル直線とヌルツイスター

ミンコフスキー時空 M の中のヌル直線(光線) γ を考える。

γ を指定するには 1点 x と接ベクトル v を与えれば良い。



しかし、この指定は redundant.

(x として γ 上のどの点を選んでも良い。)

無駄を含まない指定の仕方 → ヌルツイスター

まず接ベクトル v^μ をスピノルで表す。

$$\boxed{v_{\alpha\dot\alpha} = v^\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} \qquad v^\mu = \frac{1}{2}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\alpha} v_{\alpha\dot\alpha} \qquad \sigma_\mu = (\mathbb{1}, \sigma_i)}$$

行列で表すと

$$v_{\alpha\dot\alpha} = \begin{pmatrix} v^0+v^3 & v^1-iv^2 \\ v^1+iv^2 & v^0-v^3 \end{pmatrix}$$

$$\det v_{\alpha\dot\alpha} = -v^\mu v_\mu .$$

$\bar\lambda_\alpha = (\lambda_{\dot\alpha})^*$

$\therefore$ v^μ がヌル $\leftrightarrow$ $\det v_{\alpha\dot\alpha} = 0$ $\leftrightarrow$ $v_{\alpha\dot\alpha} = \tilde\lambda_\alpha \lambda_{\dot\alpha}$

$v_{\alpha\dot\alpha}$ はエルミートだから $\tilde\lambda_\alpha = c\bar\lambda_\alpha$; v^μ or $\lambda_{\dot\alpha}$ はスカラー倍の任意性があるので $v_{\alpha\dot\alpha} = \bar\lambda_\alpha \lambda_{\dot\alpha}$ としても一般性を失わない。

こうして 任意のヌルベクトルは

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\lambda}_\alpha \lambda_{\dot{\alpha}}, \qquad \lambda = (\lambda_{\dot{\alpha}}) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

ゼロスピノル

という形に表せる。$\lambda_{\dot{\alpha}}$（即ちび）は γ に対してスカラー倍

$\lambda \to c\lambda,\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の任意性を除いて決まる。

即ち $\boxed{\gamma \text{ の接方向} \leftrightarrow [\lambda] \in \mathbb{CP}^1}$

次に γ の位置情報を取り出す。

γ 上の任意の2点 $x_{\alpha\dot{\alpha}}, x'_{\alpha\dot{\alpha}}$ を考えよう。その差は $v_{\alpha\dot{\alpha}}$ の実数倍となるから、

$$x'_{\alpha\dot{\alpha}} - x_{\alpha\dot{\alpha}} = r v_{\alpha\dot{\alpha}} = r \bar{\lambda}_\alpha \lambda_{\dot{\alpha}} \qquad r \in \mathbb{R}.$$

両辺 $\lambda^{\dot{\alpha}}$ と縮約すると、$\lambda_{\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \lambda_{\dot{\alpha}} \lambda_{\dot{\beta}} = 0$ より、

$$(x'_{\alpha\dot{\alpha}} - x_{\alpha\dot{\alpha}}) \lambda^{\dot{\alpha}} = 0.$$

即ち、$x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}$ は γ 上の点 x の選び方に依らず、

γ（および λ）のみによって決まる。これを $-i\mu_\alpha$ とおくと
スカラー倍について

$$\boxed{\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}}$$

また複素共役を取って $(x_{\alpha\dot{\alpha}})^* = \bar{x}_{\dot{\alpha}\alpha} = x_{\alpha\dot{\alpha}}$ を用いると、

$$\boxed{\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\lambda}^{\alpha} x_{\alpha\dot{\alpha}}}$$

こうして得られた1対のスピノル μ_α, $\lambda^{\dot{\alpha}}$ を4成分に並べた

$$\zeta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

を γ に対するツイスターと呼ぶ。

γ に対して決まるのはスカラー倍。

$$\zeta \sim c\zeta \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

に対する同値類 $[\zeta] \in \mathbb{CP}^3$. 但し、ツイスターは

$$\mu_\alpha \bar{\lambda}^\alpha = i\bar{\lambda}^\alpha x_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = -\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}$$

or

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$ を用いて

$$\boxed{\Phi(\zeta) := \zeta^\dagger J \zeta = \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} + \bar{\lambda}^\alpha \mu_\alpha = 0}$$

を満たす。

定理1

$[\zeta] \in \mathbb{CP}^3$ が $\lambda \neq 0$, $\Phi(\zeta)=0$ を満たすとき,

$$\gamma = \{ x \in M \mid \mu_\alpha = i x_{\alpha\dot\alpha} \lambda^{\dot\alpha} \}$$

はヌル直線であり, そのヌルツイスターはスカラー倍を除いて ζ に一致する。

証明

γ が空でなければ, M の線形部分多様体. その上の任意の2点 x, x' は $\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$, $\mu_\alpha = i x'_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$ を満たすので

$$(x'_{\alpha\dot\alpha} - x_{\alpha\dot\alpha})\lambda^{\dot\alpha} = 0$$

同様に

$$\bar\lambda^{\alpha}(x'_{\alpha\dot\alpha} - x_{\alpha\dot\alpha}) = 0$$

従って γ の任意の点での接ベクトル $v_{\alpha\dot\alpha}$ は

$$v_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha} = \bar\lambda^{\alpha} v_{\alpha\dot\alpha} = 0$$

を満たすので $v_{\alpha\dot\alpha} = c\bar\lambda_\alpha \lambda_{\dot\alpha}$ $c \in R$ 即ち γ は ヌル直線.

従って γ が空でないことを示せば良い。

2つの場合に分けて示す。

1　$\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} \neq 0$ の場合.

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = i\frac{\mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}}{\bar{\lambda}^\beta \mu_\beta}$$ と取れば

$\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = -\bar{\lambda}^\alpha \mu_\alpha$ だから

$$i x_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = -\frac{\mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}}{\bar{\lambda}^\beta \mu_\beta} = \mu_\alpha$$

2.　$\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = 0$ の場合.　　$\mu_\alpha = c\bar{\lambda}_\alpha$

$\lambda \neq 0$ であるから $\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} = c^*\lambda_{\dot{\alpha}}$　$(\mu_\alpha = c\bar{\lambda}_\alpha)$　$c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

今 あるスピノル $\kappa_{\dot{\alpha}}$ を用いて

$x_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\lambda}_\alpha \kappa_{\dot{\alpha}} + \bar{\kappa}_\alpha \lambda_{\dot{\alpha}}$　と書けたとすると.

$i x_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = i(\kappa_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}})\bar{\lambda}_\alpha$

従って κ を　$c = i(\kappa_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}})$　となるように選べば

x は γ 上の点となる。

従って ヌル直線 $\gamma \subset M$ は ヌルツイスター $[Z] \in \mathbb{CP}^3$ に

よって無駄なく指定できる。⟺ ヌルツイスターは ヌル直線のモジュライ.

3. ツイスター空間.

2で導入したZから$\Phi(Z)=0$を除いて.

$Z \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{T}$.　　$[Z] \in \mathbb{CP}^3 = \mathbb{PT}$.

$\mathbb{T}$：ツイスター空間　（線形ツイスター空間）

$\mathbb{PT}$：射影ツイスター空間　（ツイスター空間）

（ペンローズ）　（高崎）

この他に双対ツイスター空間 $\mathbb{PT}^*$，アンビツイスター空間 $\mathbb{AT}$ も導入する。

3.1. 一般のツイスターの解釈.

2.で見たように.

ヌル直線 $\gamma \subset M$ $\leftrightarrow$ $\lambda \neq 0$ のヌルツイスター.

更に $\lambda = 0$ のヌルツイスターに対応する"ヌル直線"をMに加えてMをコンパクト化することができる。従って $\lambda \neq 0$ の条件ははずして、一般のヌルツイスターを

これを $M^\#$ と書く

$$\boxed{\mathbb{P}N = \{[Z] \in \mathbb{P}\mathbb{T} \mid \Phi(Z) = 0\}}$$

と書く。$[Z] \in \mathbb{P}\mathbb{T}$ は ヌル直線 $\gamma \subset M^{\#}$ を定める。

$\mathbb{P}\mathbb{T}$ の一般の点はどう解釈すれば良いか。

一般の $[Z] \in \mathbb{P}\mathbb{T}$ に対しても、

$$\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} \qquad (*)$$

を $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ に対する方程式と見て、これが定める集合を ヌル直線の代わりとすれば良い。但しそのような集合は M の中には存在しない。$\because$ $x \in M$ なら $\Phi(Z) = 0$.

そこで M の複素化

$$\boxed{\mathbb{C}M = \mathbb{C}^4 = \{x_{\alpha\dot{\alpha}} = x^\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}},\ x^\mu \in \mathbb{C}^4\}}$$

を考え、$(*)$ を $\mathbb{C}M$ における方程式と考え直す。

このとき $(*)$ の解は $\mathbb{C}M$ 中の 平面 $\simeq \mathbb{C}^2$ となる。これを α-平面と呼ぶ。

即ち [ζ] の定めるα-平面とは、

$$\boxed{\alpha_{[\zeta]} = \{ x \in \mathbb{C}M \mid \mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} \}}$$

これが一般の $[\zeta] \in \mathbb{P}T$ に対するヌル直線の代替物となる。

このときヌル直線は $\alpha_{[\zeta]} \cap M$ として復元される。

$$\alpha_{[\zeta]} \cap M = \begin{cases} \gamma & \text{for } [\zeta] \in \mathbb{P}N \\ \{\phi\} & \text{for } [\zeta] \notin \mathbb{P}N \end{cases}$$

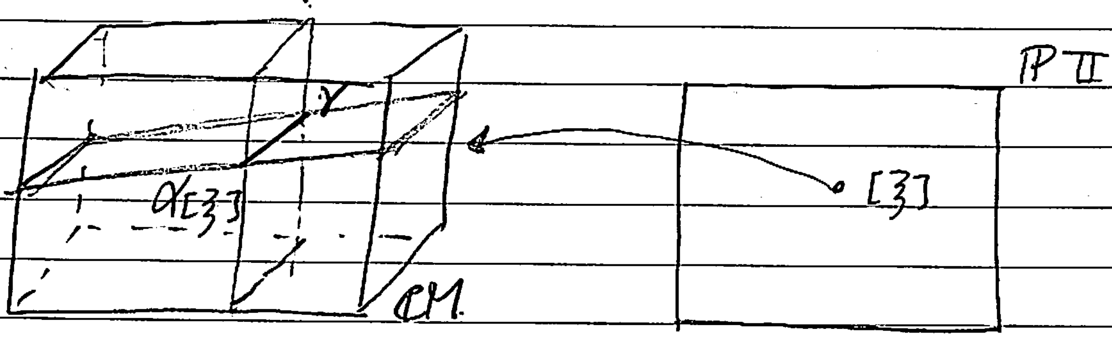
$\mathbb{C}M$ の計量は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad x^\mu \in \mathbb{C}^4$$

のように取る。（複素計量）$d\bar{x}^\nu$ が現れないことに注意。

このとき $\alpha_{[\zeta]}$ は以下のような幾何学的特徴を持つ。

このことを α-平面 $\alpha_{[\zeta]}$ は totally null であるという。



定理 2

$\mathfrak{a}[3]$ の各点 x における任意の接ベクトル $v \in T_x\mathfrak{a}[3]$ は複素計量に対してヌルである。更に、もう1つの接ベクトル $v' \in T_x\mathfrak{a}[3]$ を任意に与えたとき $v^\mu v'_\mu = 0$ である。

証明、

v が $\mathfrak{a}[3]$ の接ベクトルなら $v_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha} = 0$ だから

$\exists\kappa_\alpha$ を用いて $v_{\alpha\dot\alpha} = \kappa_\alpha\lambda_{\dot\alpha}$ と書ける。このとき、

$$\det v_{\alpha\dot\alpha} = -v^\mu v_\mu = 0.$$

同様に $v'_{\alpha\dot\alpha} = \kappa'_\alpha\lambda_{\dot\alpha}$ と書けるので

$$-v^\mu v'_\mu = \frac{1}{2}v^{\dot\alpha\alpha}v'_{\alpha\dot\alpha} = (\kappa^\alpha\kappa'_\alpha)\lambda^{\dot\alpha}\lambda_{\dot\alpha} = 0. \quad //$$

3.2 双対ツイスター空間、及びアンビツイスター空間、

$$\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}} = -i\tilde{\lambda}^{\alpha} x_{\alpha\dot{\alpha}}$$

に基づいてヌル直線の代替物を考えることもできる。

(注) $x \in \mathbb{C}M$ に対しては2つは別の集合を与える。

複素共役を変数とするのは不都合なので、新に、

$\eta = (\tilde{\lambda}^{\alpha}, \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}})$ を導入して、$[\eta]$ によって決まる

$\mathbb{C}M$ の部分多様体

$$\boxed{\beta_{[\eta]} = \{x \in \mathbb{C}M \mid \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}} = -i\tilde{\lambda}^{\alpha} x_{\alpha\dot{\alpha}}\}}$$

を考える。これを β-平面と呼ぶ。

α-平面と同様に β-平面も totally null である。

$\mathbb{C}^4 \ni \eta$ をペアリング ($\Phi(\zeta)$ の複素化)

$$\langle \eta, \zeta \rangle = \tilde{\lambda}^{\alpha} \mu_{\alpha} + \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}$$

によって $\mathbb{T} \ni \zeta$ の双対空間 $\mathbb{T}^*$ と見なす。$\mathbb{P}\mathbb{T}^*$ を

双対ツイスター空間と呼ぶ。β-平面は双対ツイスター

$[\eta] \in \mathbb{P}\mathbb{T}^*$ によって指定される。

定理3.

$$\boxed{\langle \eta, \xi \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha[\xi] \cap \beta[\eta] \neq \{\phi\}}$$

証明

1. $\tilde{\lambda}^{\alpha}\mu_{\alpha} \neq 0$ のとき.

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = i\frac{\mu_{\alpha}\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}}{(\tilde{\lambda}^{\beta}\mu_{\beta})} \quad \text{ととると} \quad \tilde{\lambda}^{\alpha}\mu_{\alpha} = -\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} \ \text{より.}$$

$$i x_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = -\frac{\mu_{\alpha}(\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}})}{(\tilde{\lambda}^{\beta}\mu_{\beta})} = \mu_{\alpha}.$$

$$\therefore x \in \alpha[\xi]$$

同様に

$$-i\tilde{\lambda}^{\alpha}x_{\alpha\dot{\alpha}} = +\frac{(\tilde{\lambda}^{\alpha}\mu_{\alpha})\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}}{(\tilde{\lambda}^{\beta}\mu_{\beta})} = \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}$$

$$\therefore x \in \beta[\eta]$$

2. $\tilde{\lambda}^{\alpha}\mu_{\alpha} = 0$ のとき, $\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} = 0$ $\quad \lambda \neq 0, \tilde{\lambda} \neq 0$ より

$$\mu_{\alpha} = c\tilde{\lambda}_{\alpha} \quad \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}} = c'\lambda_{\dot{\alpha}}$$

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = \kappa_{\alpha}\lambda_{\dot{\alpha}} + \tilde{\kappa}_{\dot{\alpha}}\tilde{\lambda}_{\alpha} \quad \text{と書けるとすると}$$

$i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} = i(\tilde{\kappa}_{\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}) \tilde{\lambda}_{\alpha}$.

$-i \tilde{\lambda}^{\alpha} x_{\alpha\dot{\alpha}} = -i(\tilde{\lambda}^{\alpha} \kappa_{\alpha}) \lambda_{\dot{\alpha}}$

$\therefore$ $c = i(\tilde{\kappa}_{\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}})$, $c' = -i(\tilde{\lambda}^{\alpha} \kappa_{\alpha})$ となるように

$\kappa_{\alpha}, \tilde{\kappa}_{\dot{\alpha}}$ を取れば、 $x \in \alpha[\xi] \cap \beta[\eta]$ //

$\alpha[\xi] \cap \beta[\eta]$ は $\mathbb{C}M$ 内の複素直線 $L \simeq \mathbb{C}$.

その接ベクトル v は

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} = \tilde{\lambda}^{\alpha} \cdot v_{\alpha\dot{\alpha}} = 0$$

を満たすので $v_{\alpha\dot{\alpha}} = c \tilde{\lambda}_{\alpha} \lambda_{\dot{\alpha}}$ $\quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

と書けるので複素計量に関してヌル、(複素ヌル直線)

即ち $\alpha[\xi] \cap \beta[\eta]$ は複素ヌル直線、逆も言える。

定理4.

$\mathbb{C}M$内の任意の複素ヌル直線γに対して、それを通るα-平面とβ-平面がただ一つ存在し、γはそれらの交差として表せる。

証明

γ上の任意の2点 x, x'を選ぶ。$x-x'$はヌルだから

$$x_{\alpha\dot{\alpha}}-x'_{\alpha\dot{\alpha}}=\tilde{\lambda}_\alpha\lambda_{\dot{\alpha}}$$

と書ける。このとき

$$(x_{\alpha\dot{\alpha}}-x'_{\alpha\dot{\alpha}})\lambda^{\dot{\alpha}}=\tilde{\lambda}^\alpha(x_{\alpha\dot{\alpha}}-x'_{\alpha\dot{\alpha}})=0$$

だから $\mu_\alpha=ix_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}$, $\tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}=-i\tilde{\lambda}^\alpha x_{\alpha\dot{\alpha}}$ が x の選び方に依らない量として決まる。このとき、

$Z=(\mu_\alpha, \lambda^{\dot{\alpha}})$, $\eta=(\tilde{\lambda}^\alpha, \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}})$ と定めれば

$\alpha[Z]$, $\beta[\eta]$ は各々γを含むα-平面とβ-平面であり、

γを含むα-平面とβ-平面はこれらに限ることも分かる。//

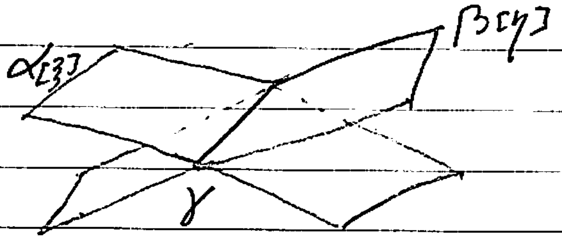
ヌル直線 $\gamma \subset M$ ← ヌルツイスター $\in \mathbb{PN}$

と同様の議論を複素ヌル直線に対して展開できる。

このとき $\mathbb{PN}$ の役割を果たすのがアンビツイスター空間．

$$\boxed{\mathbb{A}\mathbb{T} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{PT} \otimes \mathbb{PT}^* \mid \langle \eta, \xi \rangle = 0\}}$$

$(\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}\mathbb{T} = 5.\ )$



4. 時空の再解釈

ここまでは

ツイスター空間の点 $\longleftrightarrow$ CMの部分集合（α-平面）

次に逆

CMの点 $\longleftrightarrow$ ツイスター空間の部分集合

を考える。

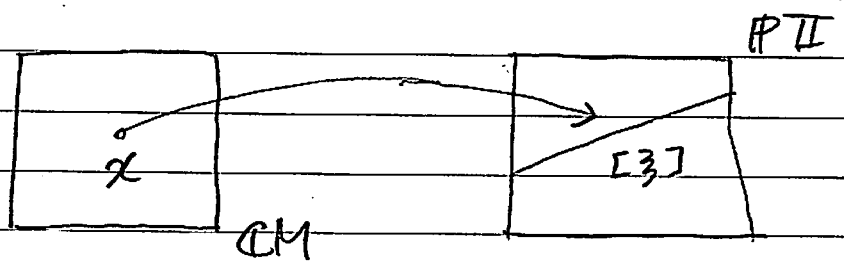
4.1 時空点の解釈

$$\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}$$

を x を与えたときに $\mathbb{PT}$ の部分集合を与えるものと見直して、この部分空間（ツイスター直線）

$$\boxed{\Gamma_x = \{ [Z] \in \mathbb{PT} \mid \mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} \}}$$

を考える。



定理5.

Γ_xは複素多様体として$\mathbb{C}P^1$に同型である。

証明

Γ_xに属する$[z]$のλ部分は$\lambda \neq 0$。μ_αは条件より定まるから $[z] \in \Gamma_x$に$[\lambda] \in \mathbb{C}P^1$を対応させる写像 $\Gamma_x \to \mathbb{C}P^1$は正則で全単射、即ち同型写像 //

こうして、($\mathbb{P}T' = \{[z] \in \mathbb{P}T \mid \lambda \neq 0\}$)

$$\alpha_{[z]} \subset \mathbb{C}M \leftrightarrow [z] \in \mathbb{P}T'$$

に加えて、対応関係、

$$x \in \mathbb{C}M \leftrightarrow \Gamma_x \in \mathbb{P}T'$$

が明らかになった。xはΓ_xのモジュライ空間。

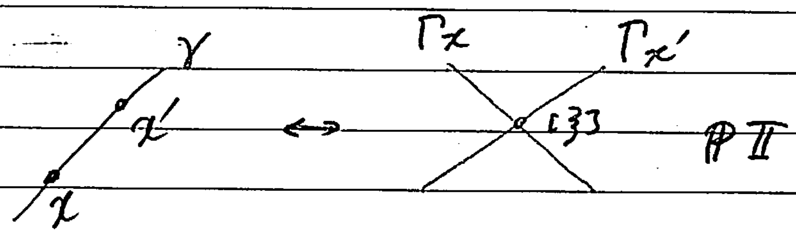
§2. 共形構造の解釈.

$\mathbb{C}M$ の各点の接空間 → 複素光円錐.

〜 共形構造

flat の場合 複素ヌル直線の全体を考えることと同じ.

$x, x' \in \mathbb{C}M$ $x'-x \neq 0$ に対するツイスター直線 $\Gamma_x, \Gamma_{x'}$ を考えて.



定理6

$$\boxed{x'-x \text{ はヌル} \iff \Gamma_x \cap \Gamma_{x'} \neq \phi}$$

証明.

$\Gamma_x \cap \Gamma_{x'} \neq \phi$ とする。$[\xi] \in \Gamma_x \cap \Gamma_{x'}$, $\xi = (\mu_\alpha, \lambda^{\dot\alpha})$ に対して

$$\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}, \quad \mu_\alpha = i x'_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$$

が成り立つから

$$(x'_{\alpha\dot\alpha} - x_{\alpha\dot\alpha})\lambda^{\dot\alpha} = 0$$

従って $x'_{\alpha\dot\alpha} - x_{\alpha\dot\alpha} = \tilde\lambda_\alpha \lambda_{\dot\alpha}$ となりヌル

逆に

$x'-x$ がヌルとする。x', x を通る直線は複素ヌル直線

だから 定理4 より それを通る α-平面 $\alpha[\zeta]$ が存在する。

∴ $\zeta = (\mu_\alpha, \lambda^{\dot{\alpha}})$ に対して

$$\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} \qquad \mu_\alpha = i x'_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}$$

即ち $[\zeta] \in \Gamma_x$ かつ $[\zeta] \in \Gamma_{x'}$ となり Γ_x と $\Gamma_{x'}$ は

$[\zeta]$ で交差する。 //

4.3 グラスマン多様体としての時空.

A-1 ~ A-4 を参照

$\mathbb{T}$ の 2次元複素線形部分多様体 $X \subset \mathbb{T}$ からなる

グラスマン多様体 $G_2(\mathbb{T})$

$$\boxed{G_2(\mathbb{T}) = \{ X \subset \mathbb{T} \mid \text{複素線形部分多様体}, \dim_{\mathbb{C}} X = 2 \}}$$

を考える。$G_2(\mathbb{T})$ はコンパクトで $\dim_{\mathbb{C}} G_2(\mathbb{T}) = 4$.

実は $G_2(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{C}M^{\#}$ これを見て行く。

xとΓ_xの対応に着目．$\Gamma_x \subset P\mathbb{T}$であるが，対応する$\mathbb{T}$の部分集合

$$S_x = \{ \zeta \in \mathbb{T} \mid \mu_\alpha = i x_{\alpha\dot\alpha} \lambda^{\dot\alpha} \}$$

は$\mathbb{T}$の2次元線形部分空間なので$G_2(\mathbb{T})$の点と解釈できるので，$x \in \mathbb{C}M$に$S_x \in G_2(\mathbb{T})$を対応させる正則写像

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}M & \longrightarrow & G_2(\mathbb{T}) \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & S_x \end{array}}$$

が定まる．

定理7．

この写像$\mathbb{C}M \to G_2(\mathbb{T})$は単射で，その像は

$$G_2(\mathbb{T})' = \{ X \in G_2(\mathbb{T}) \mid \pi|_X : X \to \mathbb{C}^2 \text{ は線形同型} \}$$

に一致する。ここでπはζにそのλ部分を対応させる線形写像

$$\begin{array}{cccc} \pi: & \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ & \zeta & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

証明

$\xi \in S_x$ のとき ξ の λ 部分は $\lambda \neq 0$ で

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} i x_{11} \\ i x_{21} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} i x_{12} \\ i x_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

が基底を与える。これを用いると、$\xi \in S_x$ は $\xi_\alpha \lambda^\alpha$ という線形結合で書ける。即ち $\pi|_{S_x} : S_x \to \mathbb{C}^2$ は線形同型である。∴ $S_x \in G_2(\mathbb{T})'$

逆に $\forall X \in G_2(\mathbb{T})'$ が与えられたとき、$\pi|_X : X \to \mathbb{C}^2$ の逆写像を用いて ξ_1, ξ_2 を

$$\xi_1 = (\pi|_X)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_2 = (\pi|_X)^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と定めると、それらの λ 部分は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ という形をしているから残りの部分で $(*)$ のように $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ を定義すれば $X = S_x$

∴ $\mathbb{C}M \to G_2(\mathbb{T})$ の像は $G_2(\mathbb{T})'$、X から ξ_1, ξ_2 を通して $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ が復元できるので単射であることも分かる。 //

$G_2(\mathbb{T})' \subset G_2(\mathbb{T})$ は開部分集合で、

$$\Xi = (\xi_i, \xi_{\dot{i}})$$

を $G_2(\mathbb{T})'$ の座標と同定すると、正則同型

$$\mathbb{C}M \simeq G_2(\mathbb{T})'$$

は下2行の行列式 $\neq 0$ の chart であることが分かる。

以後この写像で $\mathbb{C}M$ と $G_2(\mathbb{T})'$ を同一視して、

α-平面等も $G_2(\mathbb{T})'$ の部分集合とみなす。

このようにして、

$$\mathbb{C}M^{\#} \simeq G_2(\mathbb{T})$$

で $\mathbb{C}M$ のコンパクト化が与えられることが分かった。

4.4 線形部の作用.

線形ツイスター空間 $\mathbb{T}$ には $GL(4;\mathbb{C})$ が作用する。これから $\mathbb{PT}$ や $G_2(\mathbb{T})$ への作用が引き起こされる。特に $\Phi(\mathfrak{z})$ を保つ部分群

$$\boxed{SU(2,2) = \{ g \in GL(4;\mathbb{C}) \mid gJg^\dagger = J \}}$$

の作用は $\mathbb{PN}$ を保つので、時空内のヌル直線をヌル直線に写す。即ち $SU(2,2)$ の作用は時空上では共形変換。

$$\boxed{SU(2,2) \xrightarrow{2:1} O(2,4) \xrightarrow{2:1} \mathcal{C}^{+}(1,3)}$$

作用の具体形

$G_2(\mathbb{T})$ 内 S_x の基底.

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} ix \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_{11} & ix_{12} \\ ix_{21} & ix_{22} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて.

定理8

$GL(4;\mathbb{C})$ or $SU(2,2) \ni g$ を 2×2 ブロックに分けて

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ と表すとき、g の $G_2(\mathbb{T})$ における

作用は x に対する有理変換

$$ix \to ix' = (aix+b)(cix+d)^{-1}$$ を引き起こす。

証明

$$g\xi = \begin{pmatrix} aix+b \\ cix+d \end{pmatrix}$$ これを正規化し直すと

$$g\xi(cix+d)^{-1} = \begin{pmatrix} (aix+b)(cix+d)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \xi(x')$$

$$ix' = (aix+b)(cix+d)^{-1} \quad //$$

基本的な変換　$g \in SU(2,2)$　$gJg^{\dagger}=J$

1.　$h \in SL(2;\mathbb{C})$

$$g=\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{\dagger -1} \end{pmatrix} \in SU(2,2)$$

$x \to x' = hxh^{\dagger}$　ローレンツ変換.

2.　$a=a^{\dagger}$ に対して

$$g=\begin{pmatrix} \mathbb{1} & ia \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in SU(2,2)$$

$x \to x'+a$　並進

3.　$h \in GL(2;\mathbb{C})$

$$g=\begin{pmatrix} 0 & h \\ h^{\dagger -1} & 0 \end{pmatrix}$$

$x \to x' = -hx^{-1}h^{\dagger}$　……"反転"

$$\left((x^{-1})^{\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{x^2} x^{\mu} (\bar{\sigma}_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \right)$$

4.　$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g=\begin{pmatrix} c\mathbb{1} & 0 \\ 0 & c^{-1}\mathbb{1} \end{pmatrix} \in SU(2,2)$$

$x \to x' = c^2 x$　dilatation.

5. 時空とツイスター空間の幾何学的対応.

これまで見てきた $\mathbb{C}M^{\#}$ と $\mathbb{P}\mathbb{T}$ の対応はクライン対応の言葉で統一的に説明できる。

5.1 クライン対応

クライン対応とは $G_2(\underset{\mathbb{C}^4}{\overset{}{\underset{\|}{\mathbb{T}}}})$ と $\mathbb{C}P^3$ を次のような写像で結んだもの.

$$
\boxed{
\begin{tikzcd}
 & F_{12}(\mathbb{T}) \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
G_2(\mathbb{T}) & & \mathbb{P}\mathbb{T}
\end{tikzcd}
}
$$

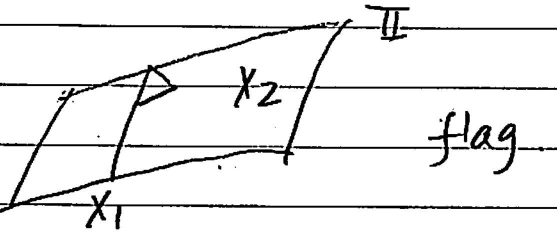
クライン対応

$\mathbb{P}\mathbb{T} \simeq \mathbb{C}P^3$

ここで $F_{12}(\mathbb{T})$ は複素線形部分空間 $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{T}$ の組 (X_1, X_2) からなる旗多様体

$$
\boxed{F_{12}(\mathbb{T}) = \{ (X_1, X_2) \mid X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{T},\ \dim_{\mathbb{C}} X_1 = 1,\ \dim_{\mathbb{C}} X_2 = 2 \}}
$$

$\dim_{\mathbb{C}} F_{12}(\mathbb{T}) = 5.$



また p_1, p_2 は射影

$$p_1(X_1, X_2) = X_1, \quad p_2(X_1, X_2) = X_2$$

$$\begin{tikzcd}
 & F_{12}(\mathrm{II}) \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
F_2(\mathrm{II}) = G_2(\mathrm{II}) & & F_1(\mathrm{II}) = \mathbb{P}\mathrm{II}.
\end{tikzcd}$$

これは $G_2(\mathrm{II}) = \mathbb{C}M^\#$ 全体に関するもの。$\mathbb{C}M = G_2(\mathrm{II})'$ に制限するには $F'_{12}(\mathrm{II}) = p_2^{-1}(G_2(\mathrm{II})') \subset F_{12}(\mathrm{II})$ に制限した対応を考えれば良い。

$$\boxed{\begin{tikzcd}
 & F_{12}(\mathrm{II})' \arrow[dl, "p_2|_{F'_{12}}"'] \arrow[dr, "p_1|_{F'_{12}}"] & \\
\mathbb{C}M = G_2(\mathrm{II})' & & \mathbb{P}\mathrm{II}'
\end{tikzcd}}$$

$(X_1, X_2) \in F_{12}(\mathbb{T})'$.

$X_2 \in G_2(\mathbb{T})' = \mathbb{C}M$ と見るとき $X_2 = S_x$ だった。

$S_x = \{ \xi \in \mathbb{T} \mid \mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}} \}$

更に $X_1 \subset X_2 = S_x$ は $X_1 = \mathbb{C}\xi$ と表せる。

μ_α は $\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}$ で決まるので (X_1, X_2) は x と

$[\lambda] \in \mathbb{CP}^1$ によって定まることが分かる。

$(X_1, X_2) \leftrightarrow (x, [\lambda])$ と対応させると正則同型。

$$\boxed{F_{12}(\mathbb{T})' \simeq \mathbb{C}M \otimes \mathbb{CP}^1}$$

が得られる。この同一視により

$$\boxed{\begin{aligned} p_1|_{F_{12}'}(x, [\lambda]) &= [\xi], \quad \xi = (i x_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{\dot{\alpha}}, \lambda^{\dot{\alpha}}) \\ p_2|_{F_{12}'}(x, [\lambda]) &= x \end{aligned}}$$

と表現できる。

F'_{12} を仲介として対応 $[\zeta]\in\mathbb{P}\mathbb{T}'\to\alpha[\zeta]$ や

$x\to\Gamma_x$ が正しく再現されることを示す。

$x\in\mathbb{C}M$ が与えられたとき、$S_x\in G_2(\mathbb{T})'$ が対応する。

$P_1'(P_2'^{-1}(S_x))$ は $\zeta\in S_x$ である $[\zeta]\in\mathbb{P}\mathbb{T}'$ の集合.

ところが $\zeta\in S_x\Leftrightarrow[\zeta]\in\Gamma_x$ だから.

$$P_1'(P_2'^{-1}(S_x))=\Gamma_x$$

$$\begin{tikzcd}
 & & F'_{12}(\mathbb{T}) \arrow[dl, "P_2'"'] \arrow[dr, "P_1'"] & \\
x \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & S_x \arrow[rr, bend left, "P_1'P_2'^{-1}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & & \Gamma_x \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\
\mathbb{C}M & G_2(\mathbb{T})' \arrow[l, phantom, "="] & & \mathbb{P}\mathbb{T}'
\end{tikzcd}$$

$[\zeta]\in\mathbb{P}\mathbb{T}'$ が与えられたとき、$P_2'(P_1'^{-1}([\zeta]))$ は $\mu_{\dot\alpha}=ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\alpha}$ と

書けるxの集合 $=\alpha[\zeta]$.

$$\begin{tikzcd}
 & F'_{12}(\mathbb{T}) \arrow[dl, "P_2'"'] \arrow[dr, "P_1'"] & \\
\alpha[\zeta] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & & {[\zeta]} \arrow[ll, bend right, "P_2'P_1'^{-1}"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\
\mathbb{C}M & & \mathbb{P}\mathbb{T}'
\end{tikzcd}$$

(注) 1.

コンパクト版 のクライン対応 を通じて $[\zeta] \in \mathbb{P}\mathbb{T}$

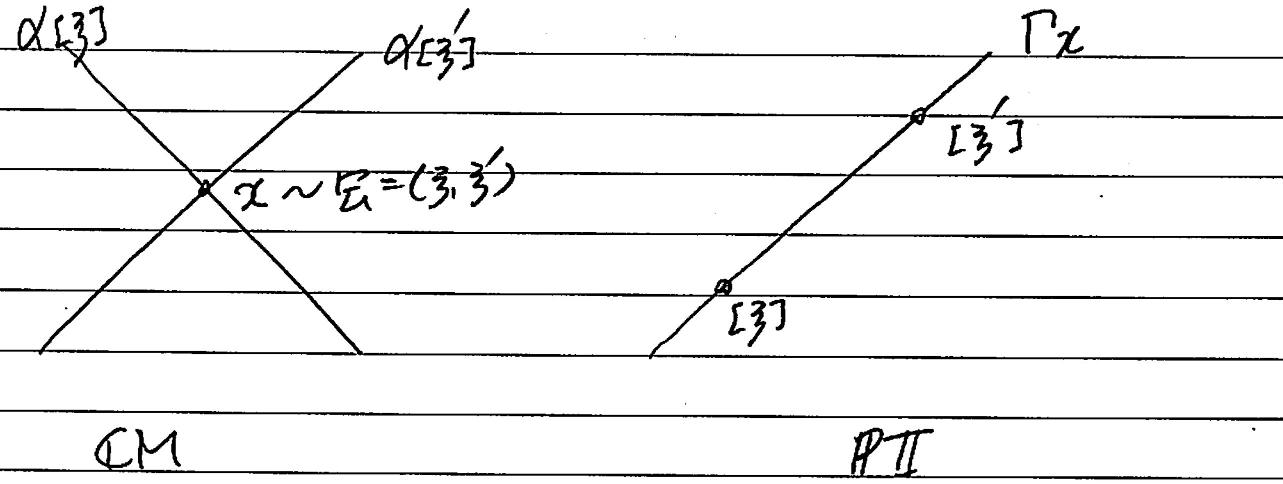
$\mathbb{C}M^{\#} \supset p_2(p_1^{-1}([\zeta])) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. 特に $[\zeta] \in \mathbb{P}\mathbb{T}'$ のときは、

$$p_2(p_1^{-1}([\zeta])) \cap \mathbb{C}M = \alpha[\zeta]$$

言い換えると $p_2(p_1^{-1}([\zeta])) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ は $\alpha[\zeta]$ のコンパクト化。

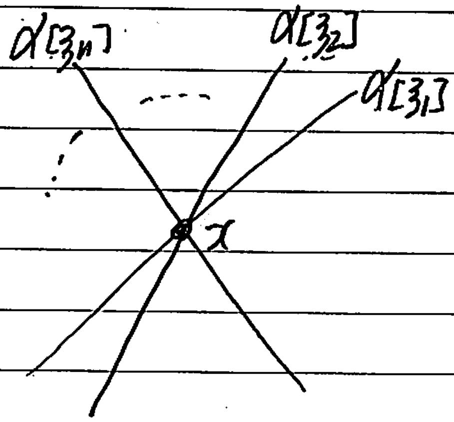
$[\zeta], [\zeta'] \in \mathbb{P}\mathbb{T}$ $[\zeta] \neq [\zeta']$ に対して、

$$p_2(p_1^{-1}([\zeta])) \cap p_2(p_1^{-1}([\zeta'])) = \hat{x} = (\zeta, \zeta') \in G_2(\mathbb{T})$$

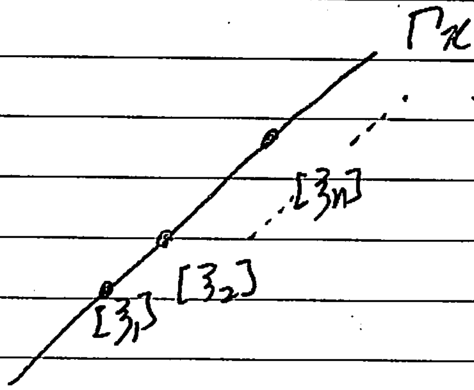


(注) 2

x に対応するツイスター直線は x を通る α-平面の族 $\{\alpha_{[\zeta]} \mid [\zeta]\in\Gamma_x\}$ をラベル付けしていると見ることもできる。



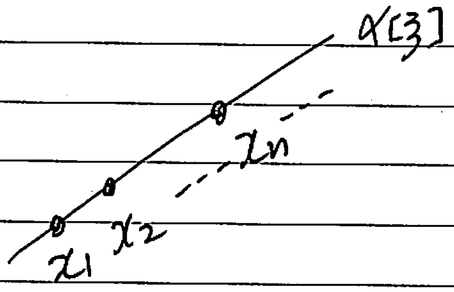
$\mathbb{C}M$



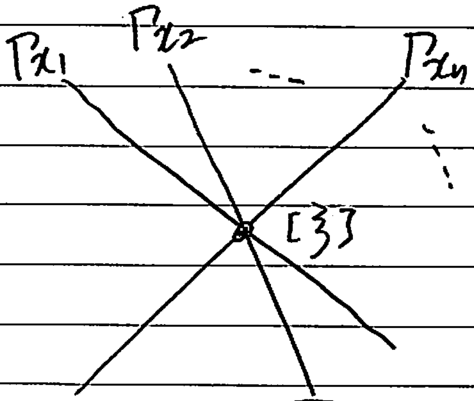
$\mathbb{P}T$.

$$\bigcap_{[\zeta]\in\Gamma_x}\alpha_{[\zeta]}=\{x\}.$$

同様に、$[\zeta]$ に対応する α-平面は $[\zeta]$ を通るツイスター直線の族 $\{\Gamma_x \mid x\in\alpha_{[\zeta]}\}$ をラベル付けしていると見ることもできる。



$\mathbb{C}M$



$\mathbb{P}T$.

$$\bigcap_{x\in\alpha_{[\zeta]}}\Gamma_x=\{[\zeta]\}$$

5.2 3種類のツイスター空間を含む対応図式.

双対ツイスター空間やアンビツイスター空間についても

$\mathbb{C}M$との多対多の対応が考えられる。これらは全て

一つの図式にまとめることができて,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F_{123}(\mathbb{T}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
F_{12}(\mathbb{T}) \arrow[d] \arrow[dr] & F_{13}(\mathbb{T}) \arrow[dl] \arrow[dr] & F_{23}(\mathbb{T}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
F_1(\mathbb{T}) = \mathbb{P}\mathbb{T} & F_2(\mathbb{T}) = G_2(\mathbb{T}) & F_3(\mathbb{T}) = \mathbb{P}\mathbb{T}^*
\end{tikzcd}$$

1 $F_3(\mathbb{T}) = \mathbb{P}\mathbb{T}^*$

$[\eta] \in \mathbb{P}\mathbb{T}^*$ と $\{Z \in \mathbb{T} \mid \langle \eta, Z \rangle = 0\} \in F_3(\mathbb{T})$ は1対1.

$\therefore\ F_3(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{P}\mathbb{T}^*$

2. $F_{13}(\mathbb{T}) = \mathbb{A}\mathbb{T}$.

$\mathbb{C}Z \subset \{Z \in \mathbb{T} \mid \langle \eta, Z \rangle = 0\}$

$\therefore\ F_{13}(\mathbb{T}) = \{(Z, \eta) \in \mathbb{P}\mathbb{T} \times \mathbb{P}\mathbb{T}^* \mid \langle \eta, Z \rangle = 0\} = \mathbb{A}\mathbb{T}$

5.3 他の型の時空の場合.

ユークリッド時空$\mathbb{E}$、超双曲型(2,2)時空$\mathbb{U}$も、
$\mathbb{C}M$の異なる実断面として含まれている。これらを扱うには
iを除いた $\mu_\alpha = x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$ を用いるのが自然。これに応じて

$$\alpha[Z] = \{x \in \mathbb{C}M \mid \mu_\alpha = x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\}$$

$$\beta[W] = \{x \in \mathbb{C}M \mid \tilde\mu_{\dot\alpha} = \tilde\lambda^\alpha x_{\alpha\dot\alpha}\}$$

$$\Gamma_x = \{[Z] \in \mathbb{PT} \mid \mu_\alpha = x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\}$$

などと定義し直す。

ユークリッド空間について少し見ておこう。

ユークリッド時空ではヌルベクトルは0のみなので

$$\alpha[Z] \cap \mathbb{E} = \{x\}$$

ツイスター空間からユークリッド時空への写像

$$p : \mathbb{PT}' \to \mathbb{E}$$

を$[Z]$にこの交点xを対応させるもの

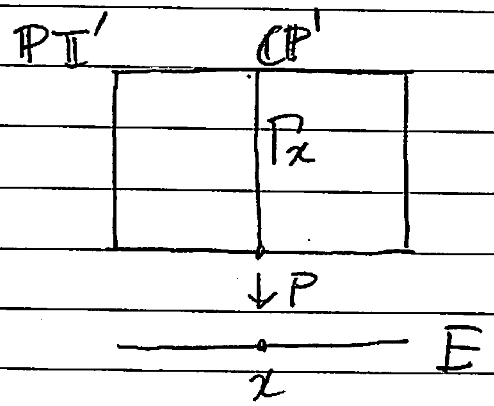
$$p([Z]) = x$$

とすると、

一方

$p^{-1}(x) = \Gamma_x \simeq \mathbb{CP}^1$ なので、

$\mathbb{PT}'$ は $\mathbb{E}$ 上の $\mathbb{CP}^1$ 束．但し自明束．



具体的な表示．

$\mathbb{E} \ni (x^1, x^2, x^3, x^4)$ に対して、

$$x = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix}$$

$y = x^3 + i x^4 \qquad z = x^1 + i x^2$

となる。 $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{y} & -z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より．

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \lambda^{\dot{1}} \\ \lambda^{\dot{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\mu_2} \\ -\overline{\mu_1} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \overline{\lambda^{\dot{2}}} \\ -\overline{\lambda^{\dot{1}}} \end{pmatrix}$$

従って

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mu_1 & -\bar{\mu}_2 \\ \mu_2 & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \lambda^1 & -\bar{\lambda}^2 \\ \lambda^2 & \bar{\lambda}^1 \end{pmatrix}} \qquad (\sharp)$$

これを x について解くと、

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & -\bar{\lambda}^2 \\ \lambda^2 & \bar{\lambda}^1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^1\bar{\lambda}^1+\lambda^2\bar{\lambda}^2} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 & \bar{\lambda}^2 \\ -\lambda^2 & \lambda^1 \end{pmatrix}$$ だから

$$x = \frac{1}{\lambda^1\bar{\lambda}^1+\lambda^2\bar{\lambda}^2} \begin{pmatrix} \mu_1 & -\bar{\mu}_2 \\ \mu_2 & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 & \bar{\lambda}^2 \\ -\lambda^2 & \lambda^1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda^1\bar{\lambda}^1+\lambda^2\bar{\lambda}^2} \begin{pmatrix} \mu_1\bar{\lambda}^1+\bar{\mu}_2\lambda^2 & \mu_1\bar{\lambda}^2-\bar{\mu}_2\lambda^1 \\ \mu_2\bar{\lambda}^1-\bar{\mu}_1\lambda^2 & \mu_2\bar{\lambda}^2+\bar{\mu}_1\lambda^1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{\mu_1\bar{\lambda}^1+\bar{\mu}_2\lambda^2}{\lambda^1\bar{\lambda}^1+\lambda^2\bar{\lambda}^2}, \quad z = \frac{\mu_2\bar{\lambda}^1-\bar{\mu}_1\lambda^2}{\lambda^1\bar{\lambda}^1+\lambda^2\bar{\lambda}^2}}$$

写像 p は $\mathbb{E}$ の共形コンパクト化 $\simeq S^4$ への C^∞ 写像

$p: \mathbb{PT} \to S^4 = \mathbb{E} \cup \{\infty\}$ に拡張できる。

これも $\mathbb{CP}^1$ 束の構造を持つが、今度は非自明。

この写像は四元数を用いて、

$$p: \mathbb{P}\mathbb{T} = \mathbb{C}P^3 \longrightarrow S^4 = \mathbb{H}P^1$$

という写像と見なせる。ここで

$$\mathbb{C}P^3 = \mathbb{H}^2 / GL(1:\mathbb{C})$$

$$\mathbb{H}P^1 = \mathbb{H}^2 / GL(1:\mathbb{H})$$

で p はこの表示の元で自然な射影

但し、

$$GL(1:\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$GL(1:\mathbb{H}) = \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

(∵)

$\alpha \in \mathbb{H}$ を $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ と表す。

($\alpha_1 = a + ib$ $\alpha_2 = c + id$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とすると、

$\alpha = a + ib + j(c + id) = a + ib + jc - kd \in \mathbb{H}$.)

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1 + j\alpha_2)(\alpha_1' + j\alpha_2') = \alpha_1\alpha_1' + j\alpha_2\alpha_1' + j\bar{\alpha}_1\alpha_2' - \bar{\alpha}_2\alpha_2'$$

$$= (\alpha_1\alpha_1' - \bar{\alpha}_2\alpha_2') + j(\alpha_2\alpha_1' + \bar{\alpha}_1\alpha_2')$$

($\alpha j = j\bar{\alpha}$ に注意)

一方

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\bar{\alpha}_2 \\ \alpha_2 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1' & -\bar{\alpha}_2' \\ \alpha_2' & \bar{\alpha}_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' - \bar{\alpha}_2\alpha_2' & -\alpha_1\bar{\alpha}_2' - \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1' \\ \alpha_2\alpha_1' + \bar{\alpha}_1\alpha_2' & -\alpha_2\bar{\alpha}_2' + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_1' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' - \bar{\alpha}_2\alpha_2' & -\overline{(\alpha_2\alpha_1' + \bar{\alpha}_1\alpha_2')} \\ \alpha_2\alpha_1' + \bar{\alpha}_1\alpha_2' & \overline{(\alpha_1\alpha_1' - \bar{\alpha}_2\alpha_2')} \end{pmatrix}$$

従って.

$$\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\bar{\alpha}_2 \\ \alpha_2 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}$$

のように対応づけることができる。この意味でユークリッド座標に対応する座標(行列)は $y + jz$ という四元数と対応する。 (♯) は四元数を用いて.

$$\mu_1 + j\mu_2 = (y + jz)(\lambda^1 + j\lambda^2)$$

と書けるから写像 p は

$$y + jz = (\mu_1 + j\mu_2)(\lambda^1 + j\lambda^2)^{-1}$$

のように書くことができる。従って $\mathfrak{Z} = (\mu_\alpha, \lambda^\alpha)$ を $(\mu_1 + j\mu_2, \lambda^1 + j\lambda^2) \in \mathbb{H}^2$ と見ると、 p は $[\mathfrak{Z}] \in \mathbb{CP}^3$ の像 $p([\mathfrak{Z}])$ を $\mathbb{HP}^1$ の非斉次座標 $((\mu_1 + j\mu_2)(\lambda^1 + j\lambda^2)^{-1}, 1)$ で見たものとなる。四元数による定式化は ADHM 構成法とも関係がある。

超双曲時空 $\mathbb{U}$ の場合、$\alpha[Z] \cap \mathbb{U}$ は実2次元平面となる。この平面は実多様体の意味で

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

に関して totally null である。このとき実ツイスター空間 $\mathbb{RP}^3$ を用いて実多様体のみでツイスター理論を展開することができる。

6 massless 自由場の積分表示。(ペンローズ変換)
(cf フーリエ変換)

この積分表示はある周回積分。被積分関数は $\mathbb{T}$ (の適当な開部分集合) 上で定義された斉次正則関数。積分路は P_x をリーマン球面と見なして、その中に選んだ閉曲線

$\mathbb{PN}$ を境にした $\mathbb{PT}$ の分割 ↔ 境界条件。

6.1 正ヘリシティの自由場の方程式の場合。

ヘリシティ s の場 $\varphi_{\dot\alpha_1 \cdots \dot\alpha_{2s}}$ の自由場の方程式

$$\partial^{\alpha\dot\alpha}\varphi_{\dot\alpha\dot\alpha_2\cdots\dot\alpha_{2s}} = 0$$

の解の積分表示 (ペンローズ)

$$\boxed{\varphi_{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \lambda_{\dot\alpha_1}\cdots\lambda_{\dot\alpha_{2s}} f(ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}, \lambda^{\dot\alpha})\frac{\lambda_{\dot\beta}d\lambda^{\dot\beta}}{2\pi i}}$$

ここで C_x は λ^α を斉次座標とする $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ 上の閉曲線で x の変化とともに連続的に変形するものとする。f は $\mathbb{II}$ (の適当な開集合)上で定義された $-2s-2$ 次斉次正則関数。また、

$$\lambda_\alpha d\lambda^\alpha = \lambda_1 d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1$$

$$= (\lambda_1)^2 \left(d\lambda_2/\lambda_1 - \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1)^2} \right) = (\lambda_1)^2 d\zeta$$

$$\zeta = \lambda_2/\lambda_1$$

このとき積分の中身は λ について 0 次斉次で周回積分が意味を持つ。

まずこの積分が解であることを確かめる。

定理9

$$\boxed{\text{この周回積分は自由場の方程式を満たす。}}$$

証明

$$\partial^{\beta\dot\beta}\psi_{\dot\beta\dot\alpha_2\cdots\dot\alpha_{2s}}(x)=\oint_{C_x}\lambda^{\dot\alpha_2}\cdots\lambda^{\dot\alpha_{2s}}\lambda_{\dot\beta}\,\partial^{\beta\dot\beta}f(ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha},\lambda^{\dot\alpha})\frac{\lambda_{\dot\beta}d\lambda^{\dot\beta}}{2\pi i}$$

ここで

$$\lambda_{\dot\beta}\partial^{\beta\dot\beta}f(ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha},\lambda^{\dot\alpha})=\lambda_{\dot\beta}\frac{\partial(ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha})}{\partial x_{\beta\dot\beta}}\frac{\partial}{\partial\mu_\alpha}f(\mu_\alpha,\lambda^{\dot\alpha})\Big|_{\mu_\alpha=ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}}$$

$$=i\lambda_{\dot\beta}\lambda^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}f(\mu_\alpha,\lambda^{\dot\alpha})\Big|_{\mu_\alpha=ix_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}}=0$$

//

6.2 負ヘリシティの自由場の方程式の場合.

ヘリシティ $-s$ の場 $\phi_{\alpha_1\cdots\alpha_{2s}}$ の自由場の方程式,

$$\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\phi_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_{2s}} = 0.$$

解の積分表示.

$$\boxed{\phi_{\alpha_1\cdots\alpha_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \frac{\partial}{\partial\mu^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\mu^{\alpha_{2s}}} f(\mu_\alpha,\lambda^{\dot{\alpha}})\Big|_{\mu_\alpha = ix_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}} \frac{\lambda_{\dot{\beta}}d\lambda^{\dot{\beta}}}{2\pi i}}$$

定理10.

> この周回積分は自由場の方程式を満たす。

証明

$$\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\phi_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \frac{\partial}{\partial\mu^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\mu^{\alpha_{2s}}}\frac{\partial}{\partial\mu_{\alpha_1}} i\lambda^{\dot{\alpha}} f(\mu,\lambda)\Big|_{\mu = ix\lambda}\frac{\lambda_{\dot{\beta}}d\lambda^{\dot{\beta}}}{2\pi i}$$

$$= 0. \quad //$$

6.3 ツイスター空間の分割

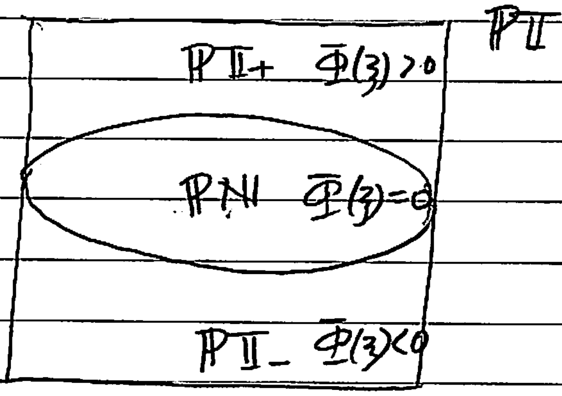
$\mathbb{PT}$ は $\mathbb{PN}$ を境に２つの部分

$$\boxed{\mathbb{PT}_\pm = \{[Z]\in\mathbb{PT} \mid \pm\Phi(Z)>0\}}$$

に分かれる。SU(2,2)の作用は$\Phi(Z)$を不変に保つので分割

$$\boxed{\mathbb{PT} = \mathbb{PT}_- \cup \mathbb{PN} \cup \mathbb{PT}_+}$$

を不変に保つ。



$x \in \mathbb{C}M$ が与えられたとする。

$x = x^\mu \sigma_\mu \qquad x^\dagger = x^{\mu *} \sigma_\mu$

$(x - x^\dagger)/2i = (\mathrm{Im}\, x^\mu)\sigma_\mu$ を用いて、

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{C}M \mid (x - x^\dagger)/2i = 0\} \\ \mathbb{C}M_\pm &= \{x \in \mathbb{C}M \mid \mp (x - x^\dagger)/2i \text{ は正定値}\} \end{aligned}}$$

を定義することができる。M はミンコフスキー時空、

$\mathbb{C}M_\pm$ は M を境界とする future/past tube（p.7-54 参照）

と呼ばれる。

定理 11

$$\boxed{\begin{aligned} &1.\ x \in M \leftrightarrow \Gamma_x \subset \mathbb{P}N \\ &2.\ x \in \mathbb{C}M_\pm \leftrightarrow \Gamma_x \subset \mathbb{P}\mathbb{I}_\pm \end{aligned}}$$

このとき クライン対応を制限した対応として

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F}_\pm = p_2^{-1}(\mathbb{C}M_\pm) & \\ {\scriptstyle p_2}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_1} \\ \mathbb{C}M_\pm & & \mathbb{P}\mathbb{I}_\pm \end{array}$$

が得られる。

証明

Γ_xの定義から、$^\forall[\xi]\in\Gamma_x$ のλ部分とμ部分に対して

$\mu_\alpha = i x_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$ が成り立つ。また複素共役より

$\bar\mu_{\dot\alpha} = -i\bar\lambda^\alpha (x^+)_{\alpha\dot\alpha}$ も成り立つ。このとき、

$$\Phi(\xi) = \bar\lambda^\alpha\mu_\alpha + \bar\mu_{\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}$$

$$= i(x-x^+)_{\alpha\dot\alpha}\bar\lambda^\alpha\lambda^{\dot\alpha}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2i}(x-x^+)\right)_{\alpha\dot\alpha}\bar\lambda^\alpha\lambda^{\dot\alpha}$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2i}(x-x^+)=0 \leftrightarrow \Phi(\xi)=0$$

$$\mp\left(\frac{1}{2i}(x-x^+)\right)\text{が正定値} \leftrightarrow \pm\Phi(\xi)>0$$

//

積分表示の積分路は $C_x \subset \Gamma_x \simeq S^2$ なので

Γ_x が $\mathbb{P}\mathbb{T}$ のどこに含まれるかが正則関数 $f(z)$ の定義域を設定する際重要となる。

〜 $f(z)$ が $\mathbb{P}\mathbb{T}$ のどの領域で正則であるか？

6.4 積分表示のコホモロジー的解釈.

数学的に厳密な議論は高崎参照.

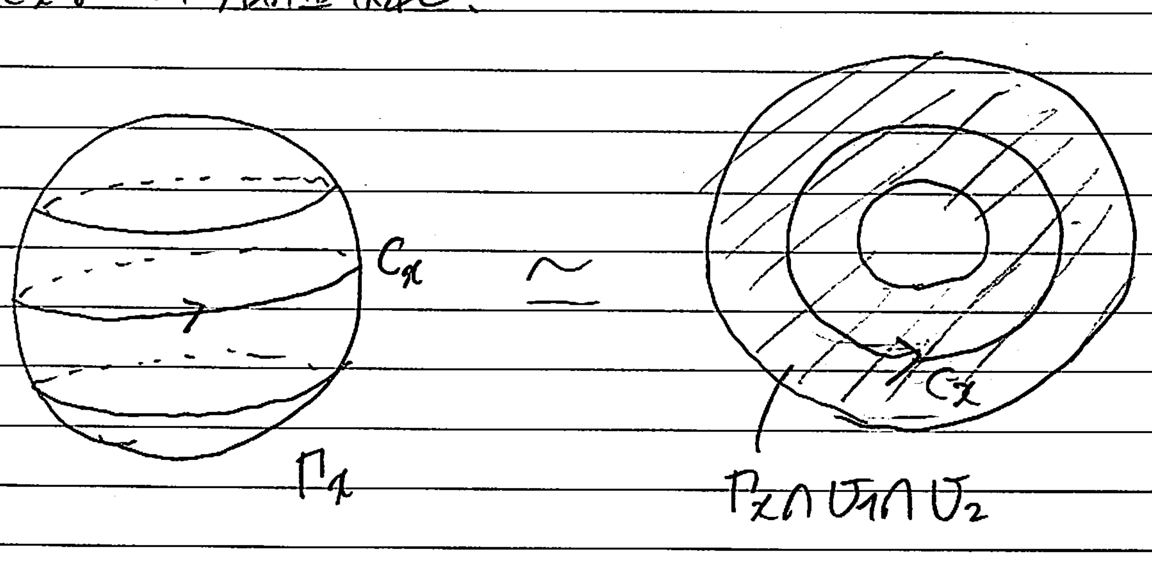
$\Gamma_x \simeq S^2$ は 2つの patch $\Gamma_x \cap U_1$. $\Gamma_x \cap U_2$

$U_1 = \{[Z] \in \mathbb{P}\mathbb{T}_\pm \mid \lambda^1 \neq 0\}$

$U_2 = \{[Z] \in \mathbb{P}\mathbb{T}_\pm \mid \lambda^2 \neq 0\}$

で覆われる。f は $\Gamma_x \cap U_1 \cap U_2$ 上の*（次ページ脚注.） $-2s-2$ 次斉次正則関数

C_x はこの中の閉曲線。



ここで U_1上の*$-2s-2$次斉次正則関数g_1とU_2上の*
$-2s-2$次斉次正則関数g_2の差をfに加えても、
対応する積分路はどちらかにつぶせるので結果は
変わらない。

従って、積分表示はfそのものよりも
$f \sim f+g_1-g_2$という同値関係に関する同値類
$[f]$に対して定義される。（チェックコホモロジー）

正確に言うと　開集合$Z \subset \mathbb{P}\mathbb{T}$に対して$p^{-1}(Z) \subset \mathbb{T}$上の
$-2s-2$次斉次正則関数のなす複素線形空間を
$\Gamma(Z, \mathcal{O}(-2s-2))$と表し**、コバウンダリ演算子

$$\delta : \Gamma(U_1, \mathcal{O}(-2s-2)) \oplus \Gamma(U_2, \mathcal{O}(-2s-2)) \to \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}(-2s-2))$$

を　$\delta(g_1, g_2) = g_1 - g_2$　と定義して、

*) 正確にはU_iを$\mathbb{T}$へ広げた$p^{-1}(U_i)$上の関数、但しpは
射影$p : \mathbb{T} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}\mathbb{T}$

**) 詳しい意味は層を用いて定式化される。

$f \sim f + g_1 - g_2$ に関する同値類を

$$\boxed{[f] \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}(-2s-2))/\mathrm{Im}\,\delta}$$

と解釈する。この空間は $H^1(U, \mathcal{O}(-2s-2))$ を $\{U_1, U_2\}$ で実現したチェックコホモロジー

⑨ 自由場を $\mathbb{C}M_\pm$ 上で定義された場の境界値として実現すると正(負)振動解. p8-9～ 参照

e.g. スカラーの場合.

$$\phi^{(\pm)}(x) = c\frac{1}{x^2 \mp i x^0 \epsilon}$$