Smart and Human

常翔学園

摂南大学

超弦理論の数値シミュレーションについて

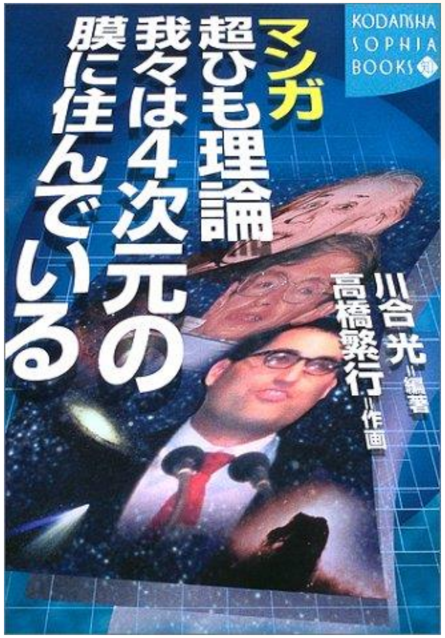
2021年度融合科学研究所講演会

2021年11月2日(火) 16:15-16:45

東　武大 (摂南大学理工学部　基礎理工学機構　准教授)

1. はじめに

参考文献



ISBN: 9784062691956
川合光、高橋繁行

ISBN: 9784315523454
松尾泰

ISBN: 9784000052511
米谷民明

ISBN: 9784065201749
花田政範・松浦壮

1. はじめに

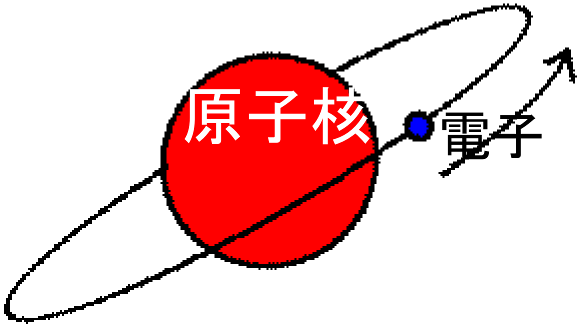
素粒子論: 物質・力・時空を微視的に理解し、起源を探る学問

紀元前からの問い: 物質は何から出来ているか？

ギリシア時代⇒『4元素論』

19世紀: 原子が物質を構成

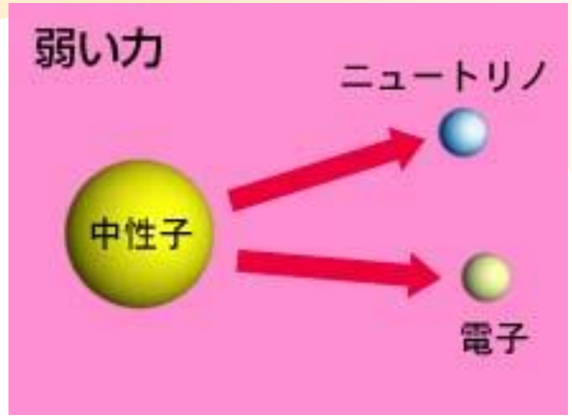
量子力学⇒原子等の微視的な物理現象を記述



1. はじめに

自然界の4つの相互作用

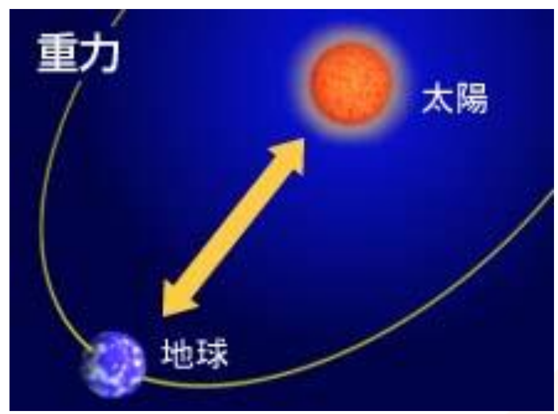
強い相互作用
クォークを結びつける力。



弱い相互作用
中性子の自然崩壊を起こす。

重力以外は
「標準模型」
で記述

電磁相互作用
電気を帯びた粒子に働く力。



重力相互作用 :物体間に働く万有引力。

1. はじめに

SETSUDAI

標準模型における物理

重力以外の3つの相互作用を微視的に記述することに成功。

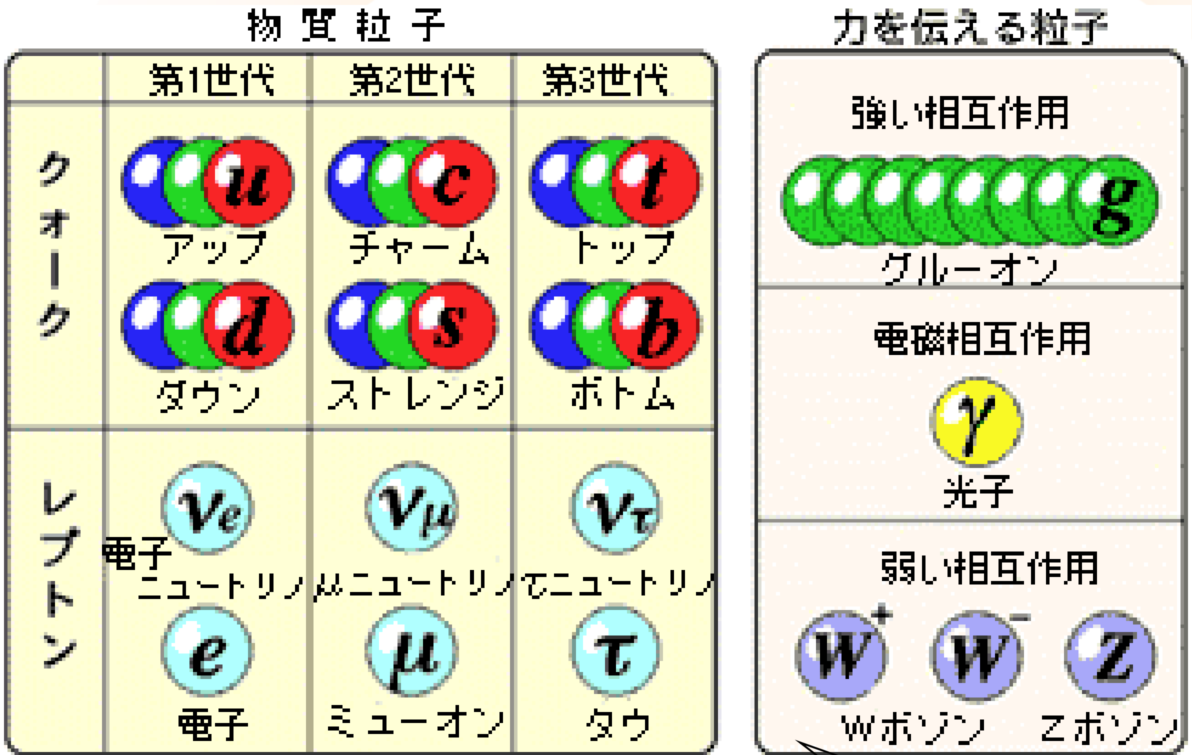
+2e/3

-e/3

電荷

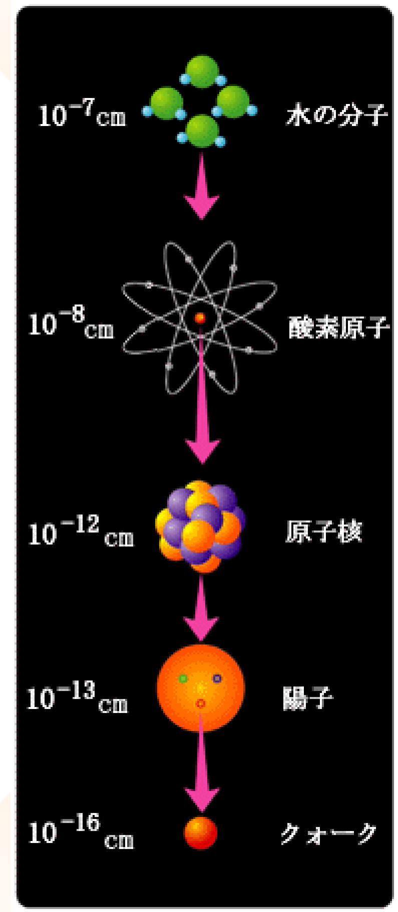
0

-e



フェルミオン

ボゾン



https://www2.kek.jp/kids/class/particle/ より引用

1. はじめに

特殊相対論⇒光速に近い速さの運動

・光速度不変の原理⇒どの慣性座標系でも光速度は一定

c=(光速度)=3.0×10^{8} [m/s]

・4次元時空⇒時間1次元と空間3次元が絡み合った「時空」は4次元

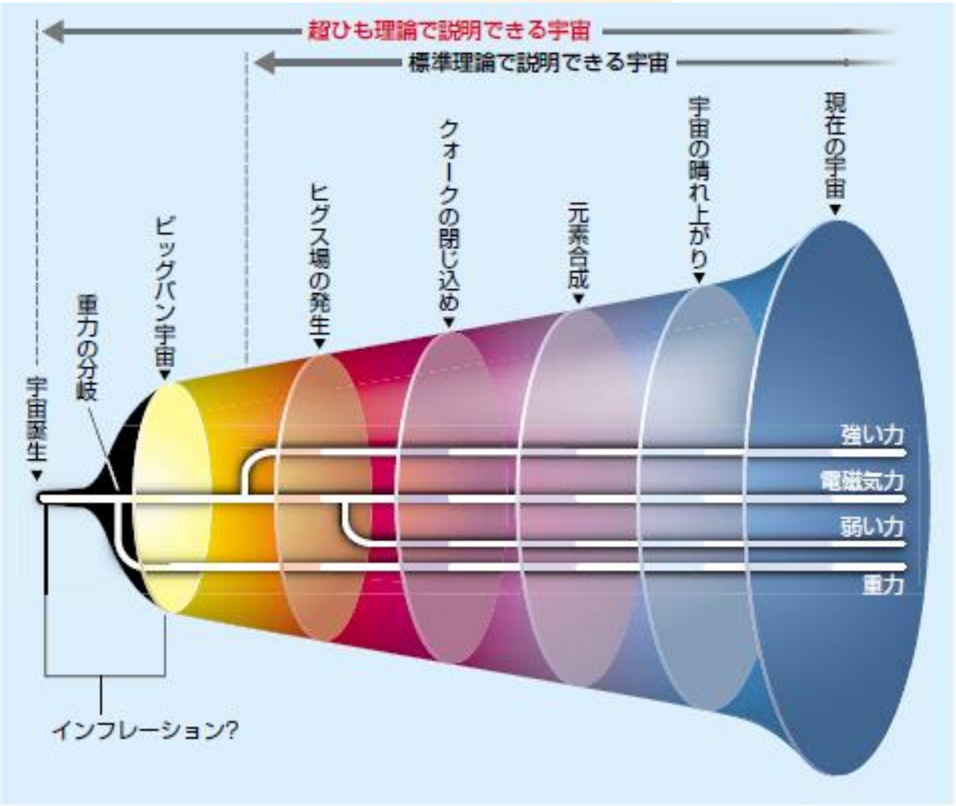
一般相対論⇒特殊相対論を拡張し重力の効果を記述

重力の効果⇒その他3つの相互作用に比べて弱く、原子等の微視的な物理には効いてこない

重力とその他3つの相互作用を統一した微視的な理論の構築は困難である

1. はじめに

1948年: ガモフ(Gamov)によるビッグバン宇宙論



RIKEN NEWS 2006年5月号　より引用
https://www.riken.jp/medialibrary/riken/pr/publications/news/2006/rn200605.pdf

宇宙初期では、力は元々1つだった。

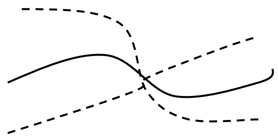
宇宙開闢の謎
⇒重力を含んだ統一理論

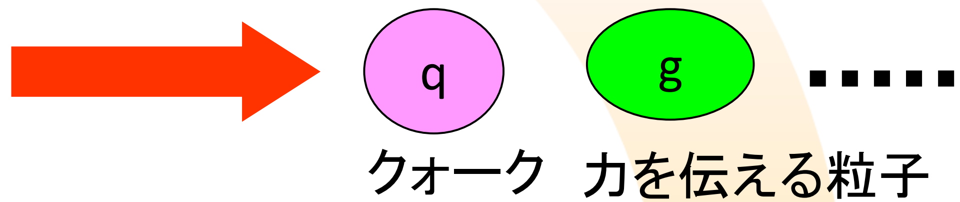
2. 超弦理論について

超弦理論(超ひも理論): 4つの相互作用を統一的に記述

- 標準模型: 広がりを持たない点粒子
- 超弦理論: 1次元の紐 (超弦理論の「超」⇒超対称性)

粒子:紐の振動



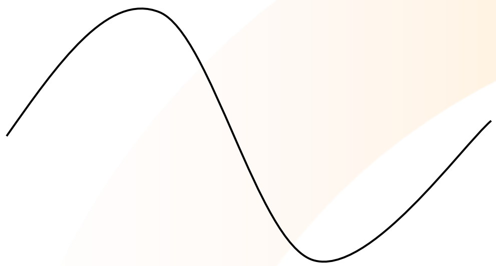


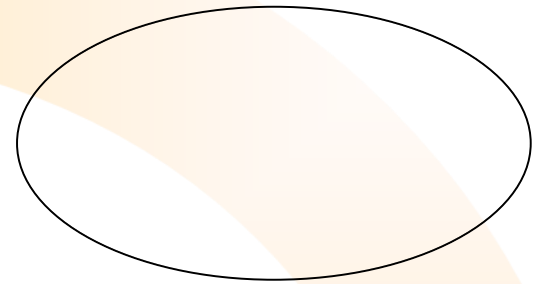
超弦理論の「超」
⇒超対称性

超対称パートナーのリスト。http://www.kek.jp/newskek/2004/mayjun/supersymmetry.htmlより引用。

2. 超弦理論について

超弦理論⇒4種類全ての相互作用



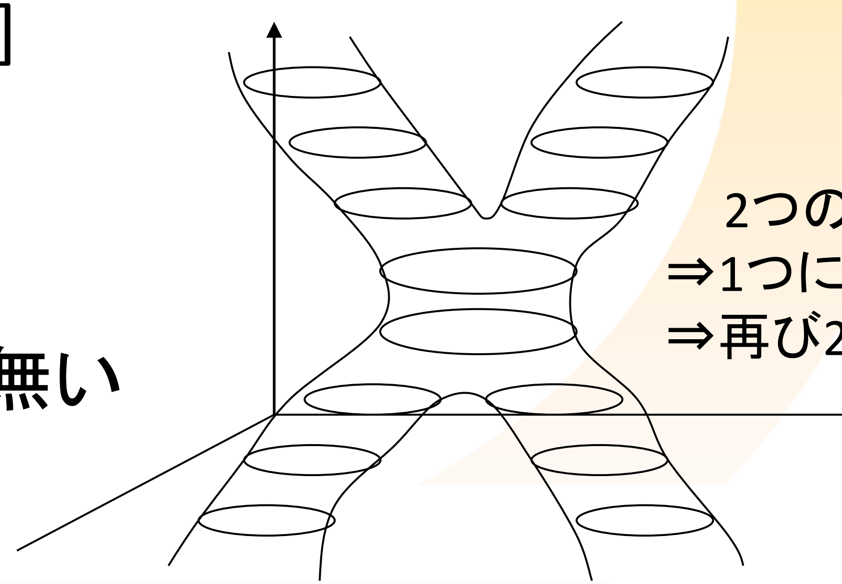


開弦⇒重力以外の力を伝える粒子
・光子 [電磁相互作用]
・グルーオン[強い相互作用]
・W,Zボゾン[弱い相互作用]

閉弦⇒重力子
[重力相互作用]

弦の反応過程⇒滑らか

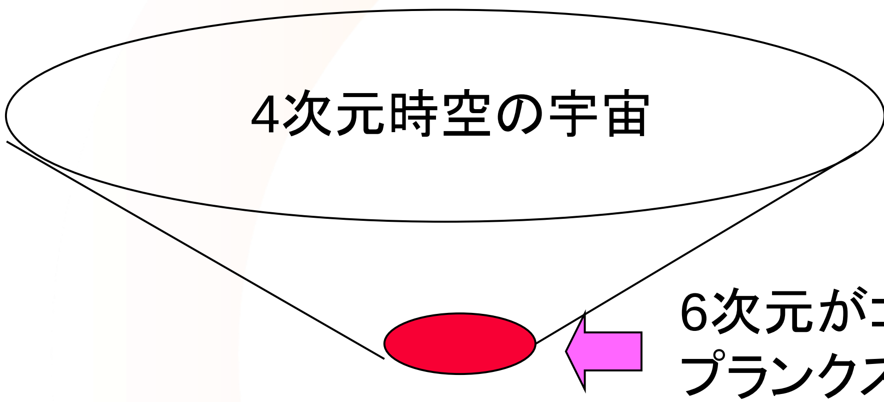
重力エネルギーの発散が無い



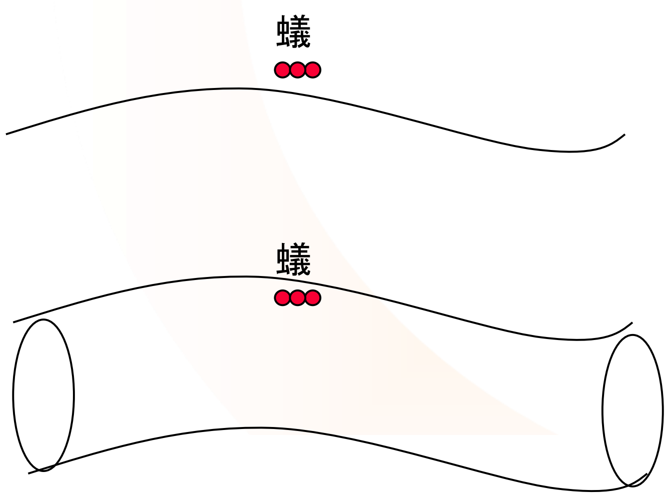
2つの閉弦
⇒1つにくっつく
⇒再び2つに分離

2. 超弦理論について

「光速度不変の原理⇒ローレンツ変換に対する不変性」
理論の整合性から超弦理論は
⇒10次元時空(9次元空間+1次元時間)で定義される。



6次元がコンパクト化
プランクスケール10^{-35}m



3次元空間に落ちている細い糸:
我々から見れば1次元に見える。

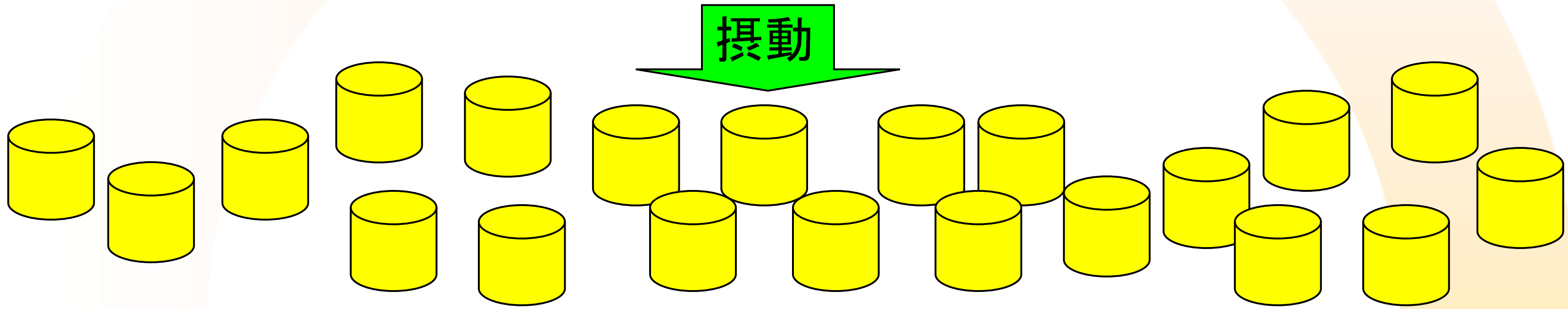
小さな蟻から見れば、糸は
3次元の円筒のように見える。

2. 超弦理論について

超弦理論の摂動論

摂動論:近似計算の手法 [簡単に解ける部分]＋[補正]

10次元の超弦理論



4次元時空　　無数に存在

どれが本当の時空なのか分からない

摂動論に依らない、より基本的な定式化が必要

3. 超弦理論を表す行列模型

IKKT行列模型

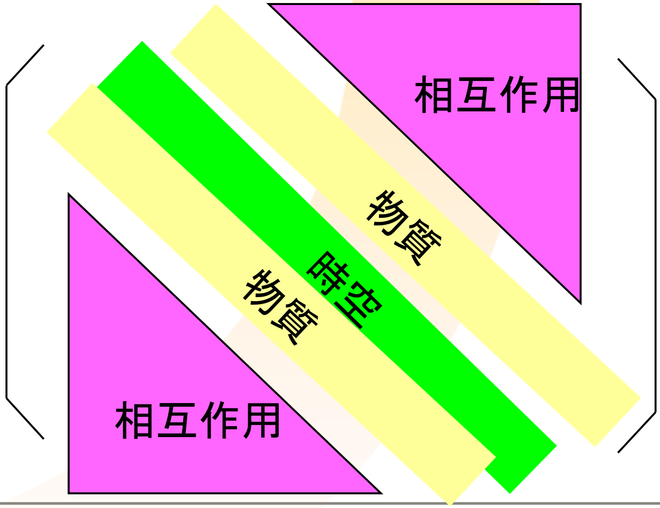
摂動論に依らない超弦理論の定式化
茨城県つくば市のKEKで生まれた。
[Ishibashi, Kawai, Kitazawa, Tsuchiya (1996)]

$$S = \frac{-1}{4g^2}\mathrm{tr}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{-1}{2g^2}\mathrm{tr}\bar{\psi}_\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}[A_\mu, \psi_\beta]$$

KEKの写真

行列サイズNの大きい極限
⇒超弦理論を表す

A_μ , ψ_α: N×Nエルミート行列
[X,Y]=XY-YXの意味



3. 超弦理論を表す行列模型

SETSUDAI

符号問題

複素数の分配関数 $Z = \int dx e^{-S_0 + i\Gamma}$ に対して、

位相を落とした $Z_0 = \int dx e^{-S_0}$ で調べるとき:

re-weighting $\langle \mathscr{O} \rangle = \dfrac{\langle \mathscr{O} e^{i\Gamma} \rangle_0}{\langle e^{i\Gamma} \rangle_0}$ (<*>$_0$はZ$_0$に対する期待値)

位相Γが激しく振動し分母分子とも0に近い

⇒膨大な統計を要する

IKKT行列模型の符号問題:

複素数　　　　実数

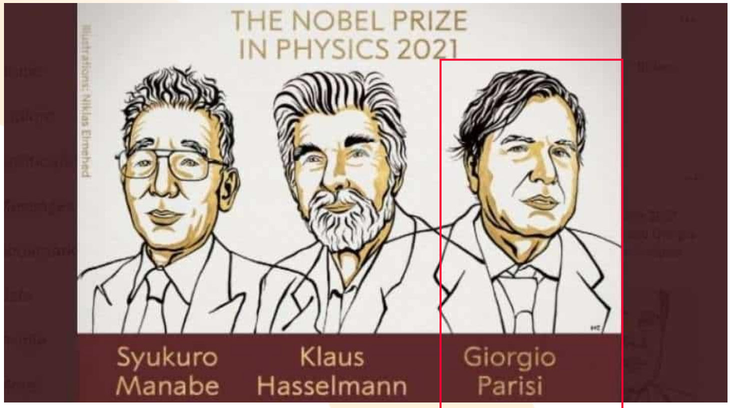
$$Z = \int dA \left(\boxed{e^{iS_{\mathrm{b}}}} \boxed{\int d\psi e^{iS_{\mathrm{f}}}} \right)$$

3. 超弦理論を表す行列模型

複素ランジュバン法

複素化したランジュバン方程式を解くことで、符号問題のある系の数値計算を行う手法

[Parisi(1983), Klauder (1984)]2021年度ノーベル物理学賞受賞



実数xに対して、S(x)が複素数とする。$Z = \int dx e^{-S(x)}$

x⇒z=x+iyとして複素数に拡張。S(z)は正則関数

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\boxed{\frac{dS}{dz}} + \eta(t)$$

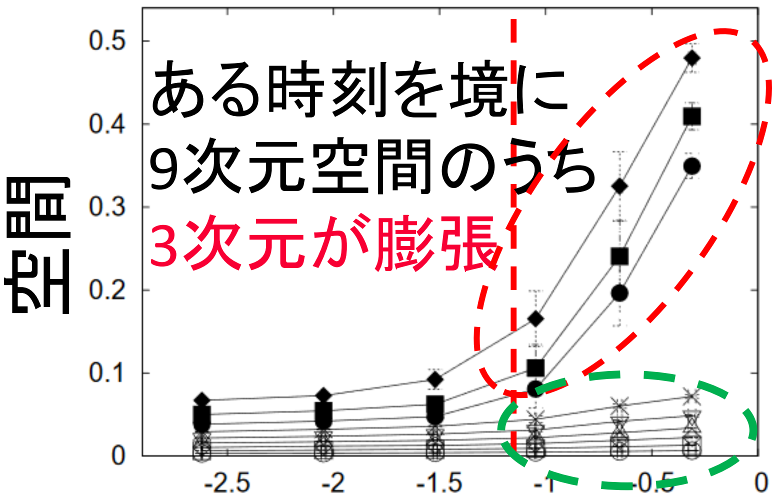
ηは実数のホワイトノイズで確率分布 $\exp\left(-\frac{1}{4}\int \eta^2(t)dt\right)$ に従う。

正しい結果に収束するための基準:
ドリフト項の分布が指数関数的に落ちていること
[Nagata, Nishimura, Shimasaki (2016)]

3. 超弦理論を表す行列模型

符号問題を避ける近似を用いた先行研究の結果

[Kim, Nishimura, Tsuchiya (2011)等]



6次元が収縮したまま 時刻

・インフレーション期の指数関数的膨張から、放射優勢期の冪関数的膨張への遷移
⇒大きなNでの数値計算が必要。

・膨張した3次元空間は、
中の空洞な球殻状の構造

複素ランジュバン法による符号問題を避けない数値解析
⇒連続的な3次元空間が得られるか?

[Anagnostopoulos, Azuma, Hatakeyama, Hirasawa, Ito, Nishimura, Papadoudis, Tsuchiya, 現在進行中]

3. 超弦理論を表す行列模型

行列模型のシミュレーションの数値コスト

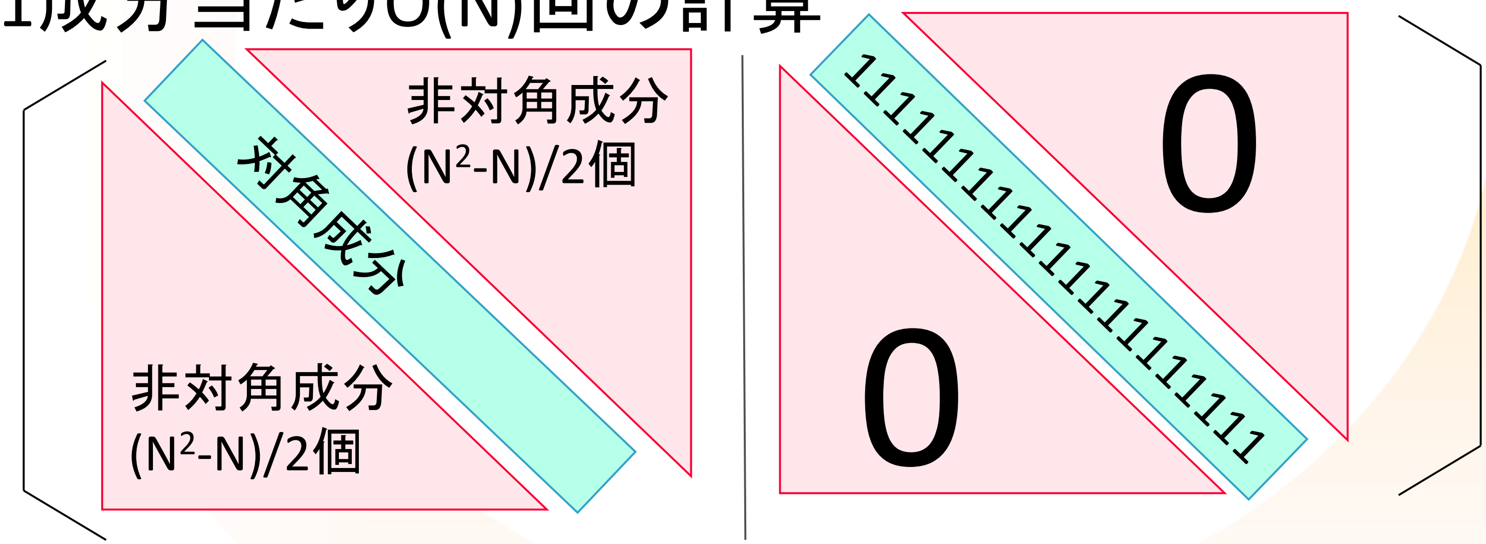
N→∞を調べたいが、実際の数値計算は有限のN

N×N行列の行列式、逆行列⇒$O(N^3)$の計算量

ガウスの掃き出し法 (線形代数I §2)

0にすべき非対角成分: (N^2-N)個

1成分当たりO(N)回の計算



3. 超弦理論を表す行列模型

フェルミオンの数値計算の難しさ

$$S_{\mathrm{f}} = \frac{-1}{2g^2} \mathrm{tr} \bar{\psi}_\alpha \underbrace{\boxed{(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}}}^{16\times16\text{行列}} [A_\mu, \psi_\beta]$$ のψ_αを積分

⇒16(N^2-1)×16(N^2-1)行列 Mが出る

素朴にMの逆行列を求めると$O(N^6)$の計算量

Mは疎行列(成分の大半が0)⇒共役勾配法

共役勾配法の反復回数$O(N^2)$⇒計算量は$O(N^5)$

スパコン富岳

4. まとめ

SETSUDAI

超弦理論：
弱い相互作用、強い相互作用、電磁相互作用に加えて
重力相互作用を統一する理論の候補
⇒10次元時空(9次元空間+1次元時間)で定式化

IKKT行列模型：
摂動論に依らない超弦理論の定式化

IKKT行列模型の数値シミュレーション
⇒私達の住む4次元時空(3次元空間+1次元時間)
　が宇宙初期にどのように生成されたか？

backup: 共役勾配法

共役勾配法

連立方程式 Ax=b を解くための反復法
(A: 対称且つ正定値のn×n正方行列)

初期条件: $\mathbf{x}_0 = 0 \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$

(ここではx_0 の前処理は無い)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{p}_k \quad \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)} \mathbf{p}_k$$

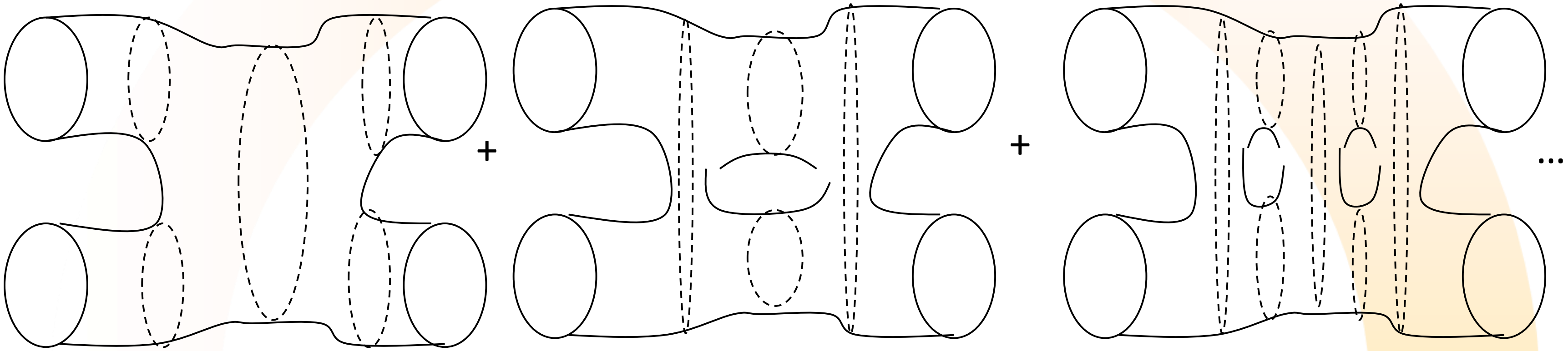
$\sqrt{\frac{(\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)}} < (\text{tolerance}) \simeq 10^{-4}$ を満たす迄繰り返す

連立方程式Ax=b の近似解は $x=x_{k+1}$である。

backup: 非臨界弦について

1990年代前半:

時空が1次元以下の弦理論　⇒　行列模型で記述



backup: 符号問題

SETSUDAI

(例)ガウス型作用 $S(x)=\frac{\beta}{2}(x-i)^2=\underbrace{\frac{\beta}{2}(x^2-1)}_{=\mathrm{Re}S(x)}+i\underbrace{(-\beta x)}_{=\mathrm{Im}S(x)}$

[数理科学2023/1 p14]

β大⇒自由度V大に対応(β～V)

ReSに関する期待値

$$\langle x^2\rangle=\frac{\langle e^{-i\mathrm{Im}S(x)}x^2\rangle_{\boxed{\mathrm{reweighting}}}}{\langle e^{-i\mathrm{Im}S(x)}\rangle_{\mathrm{reweighting}}}=\frac{\int e^{-\mathrm{Re}S(x)}e^{-i\mathrm{Im}S(x)}x^2dx\div\boxed{\int e^{-\mathrm{Re}S(x)}dx}}{\int e^{-\mathrm{Re}S(x)}\boxed{e^{-i\mathrm{Im}S(x)}}dx\div\boxed{\int e^{-\mathrm{Re}S(x)}dx}}$$

$$=\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{i\beta x}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx}_{=(\beta^{-1}-1)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}\div\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx}_{=e^{\beta/2}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}\Bigg)\div\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{e^{i\beta x}}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx}_{=\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}\div\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx}_{=e^{\beta/2}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}\Bigg)$$

激しく振動⇒分母分子とも小

数値解

$$=\frac{(\beta^{-1}-1)e^{-\beta/2}}{e^{-\beta/2}}\boxed{\overset{\mathrm{numeric}}{\simeq}}\frac{(\beta^{-1}-1)e^{-\beta/2}\pm\mathrm{O}(1/\sqrt{N_{\mathrm{config.}}})}{e^{-\beta/2}\pm\boxed{\mathrm{O}(1/\sqrt{N_{\mathrm{config.}}})}}.$$

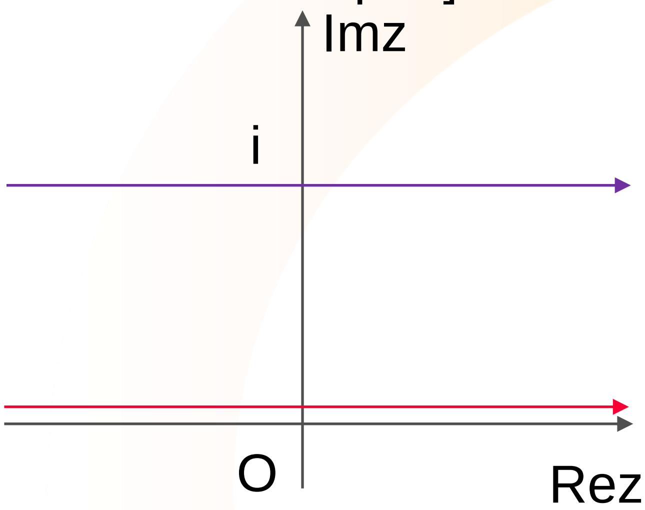
(標本平均 $\bar{X}=\frac{1}{N_{\mathrm{config.}}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{config.}}}X_k$ の標準偏差) $\propto\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{config.}}}}\right)$

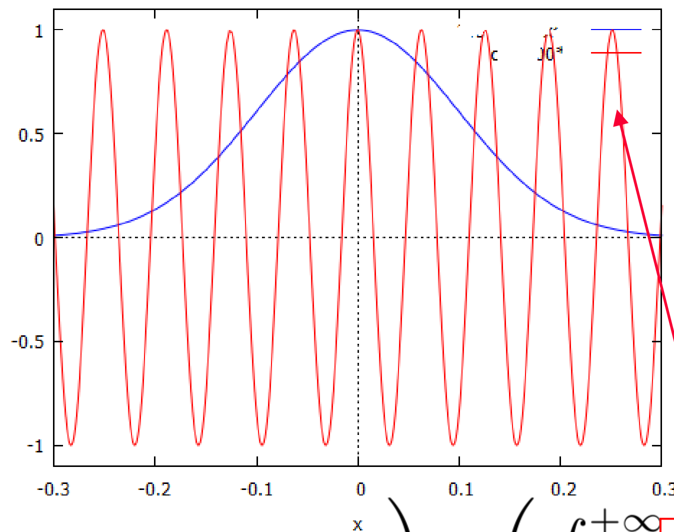
必要なデータ標本数: $\boxed{N_{\mathrm{config.}}\geq e^{\mathrm{O}(\beta)}}$

backup: 符号問題

(例)ガウス型作用 $S(x)=\frac{\beta}{2}(x-i)^2=\underbrace{\frac{\beta}{2}(x^2-1)}_{=\mathrm{Re}S(x)}+i\underbrace{(-\beta x)}_{=\mathrm{Im}S(x)}$

[数理科学2023/1 p14]





激しく振動

積分経路→: $\langle x^2\rangle=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{i\beta x}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx\right)\div\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{e^{i\beta x}}e^{\frac{-\beta}{2}(x^2-1)}dx\right)$

積分経路→: x→z=u+i (-∞<u<+∞) 振動無し

$$\langle x^2\rangle=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(u+i)^2e^{\frac{-\beta}{2}u^2}du\right)\div\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\beta}{2}u^2}du\right)$$

コーシーの定理⇒両者は等価

backup: 複素ランジュバン法

SETSUDAI

例 [G. Aarts, arXiv:1512.05145]

$$S(x) = \frac{1}{2}\underbrace{(a+ib)}_{=\sigma}x^2, \ (a, b \in \mathbf{R}, \ a > 0)$$

実数xに対してS(x)は複素関数

z=x+iyとして複素化

$$S(z) = \frac{1}{2}\sigma z^2 = \frac{1}{2}(a+ib)\overbrace{(x+iy)^2}^{=z^2} = \frac{a(x^2-y^2)}{2} + ibxy, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \sigma z = (a+ib)(x+iy)$$

この作用に対する複素ランジュバン方程式

$$\dot{x}(t) = -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) + \eta(t) = (-ax+by) + \eta(t) \quad \dot{y}(t) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) = (-ay - bx)$$

実数のホワイトノイズは次式を満たす。

$$\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle = 2\delta(t_1 - t_2) \qquad \langle \cdots \rangle = \frac{\int \mathscr{D}\eta \cdots \exp\left(-\frac{1}{4}\int \eta^2(t)dt\right)}{\int \mathscr{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4}\int \eta^2(t)dt\right)}$$

backup: 複素ランジュバン法

この複素ランジュバン方程式は解析的に手で解ける。

$$x(t) = e^{-at}\underbrace{[x(0)\cos bt + y(0)\sin bt]}_{=A(t)} + \int_0^t \eta(s) e^{-a(t-s)} \cos[b(t-s)]ds$$

$$y(t) = e^{-at}[y(0)\cos bt - x(0)\sin bt] - \int_0^t \eta(s) e^{-a(t-s)} \sin[b(t-s)]ds$$

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \lim_{t\to+\infty} \langle x^2(t) \rangle = \lim_{t\to+\infty} \left\{ \underbrace{e^{-2at}A(t)^2}_{\to 0} + 2e^{-at}A(t) \int_0^t \underbrace{\langle \eta(s) \rangle}_{=0} e^{-a(t-s)} \cos[b(t-s)]ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_0^t \underbrace{\langle \eta(s)\eta(s') \rangle}_{=2\delta(s-s')} e^{-a(2t-s-s')} \cos[b(t-s)]\cos[b(t-s')]dsds' \right\} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left\{ 2\int_0^t e^{-2a(t-s)} \cos^2[b(t-s)] \right\} ds = \frac{2a^2+b^2}{2a(a^2+b^2)}
\end{aligned}$$

同様にして $\langle y^2 \rangle = \dfrac{b^2}{2a(a^2+b^2)}, \quad \langle xy \rangle = \dfrac{-b}{2(a^2+b^2)}$

$\langle z^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle + 2i\langle xy \rangle = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{\sigma}$ を再現する。

backup: 複素ランジュバン法

SETSUDAI

フォッカー・プランク方程式

$$L^\top = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\underbrace{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)}_{=ax-by} + \frac{\partial}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\underbrace{\mathrm{Im}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)}_{=ay+bx}\right\}$$ に対して $$\frac{\partial P}{\partial t} = L^\top P$$

静的な解で以下の形を仮定

$$P(x,y) = N\exp\left(-\alpha x^2 - \beta y^2 - 2\gamma xy\right) = N\exp\left(-\beta\left(y+\frac{\gamma x}{\beta}\right)^2 - \boxed{\overbrace{\left(\alpha - \frac{\gamma^2}{\beta}\right)}^{=a(a^2+b^2)/(2a^2+b^2)}}\, x^2\right)$$

$$0 = \partial_t P = L^\top P = [\underbrace{(2a-2\alpha)}_{=0\to a=\alpha} + x^2\underbrace{(4\alpha^2 - 2a\alpha - 2b\gamma)}_{=0\to\gamma=a^2/b} + y^2\underbrace{(4\gamma^2+2b\gamma-2a\beta)}_{=0\to\beta=a(1+2a^2/b^2)} + xy\underbrace{(4(2\alpha-a)\gamma+2b(\alpha-\beta))}_{=0}]P$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-At^2}\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-At^2}\,dt} = \frac{1}{2A} \quad (A>0)$$ より次式を得る。

$$\langle x^2\rangle = \frac{\iint x^2 P(x,y)\,dxdy}{\iint P(x,y)\,dxdy} = \frac{1}{2} \div \boxed{\frac{a(a^2+b^2)}{2a^2+b^2}} = \frac{2a^2+b^2}{2a(a^2+b^2)}$$